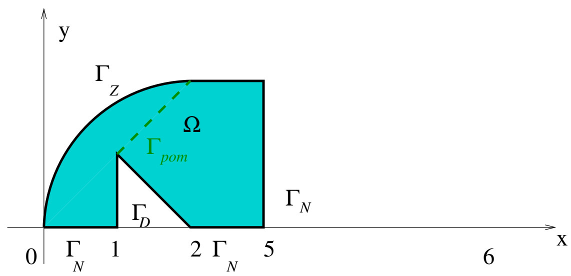
1.4 Zadání 4 (Musil)

Oblast Ω.



Formulace. Uvažujme problém: Hledáme $u \in C^2(\overline{\Omega})$, tak aby v oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ platilo

$$-\varepsilon \triangle u + \kappa u = f, \tag{8}$$

a navíc byly splněny okrajové podmínky na $\partial\Omega$ (členění viz obrázek)

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad u = u_D \text{ na } \Gamma_D \qquad \text{b)} \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ na } \Gamma_N \\ &\text{c)} \quad -\varepsilon \frac{\partial u}{\partial n} = \alpha(u - \psi) \text{ na } \Gamma_Z \end{aligned} \tag{9}$$

Úkoly.

A) Uvažujeme oblast z obrázku, $u_D = 80$, $\alpha = 3$. $\psi \equiv 7$, $\kappa = 1$ a $\varepsilon = 0.01$. Funkci f volte jako konstantu $f = 0.001$.

B) Zformulujte daný problém ve slabém smyslu jako $a(u, v) = L(v)$. Zvolte testovací funkci v, přenásobte rovnici touto testovací funkcí, zintegrujte přes Ω, užijte Greenovu větu a okrajové podmínky.

C) Ověřte, zda pro danou slabou formulaci existuje řešení. Volte prostor V jako podprostor Sobolevova prostoru $H^1(\Omega)$ a užijte Lax-Milgramovu větu.

D) Volte V_h jako konečněrozměrný podprostor V, $V_h \subset V$, označte jeho bázi $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$. Uveďte, jak najdete Galerkinovu aproximaci u_h pomocí řešení soustavy lineárních rovnic!

E) Ukažte, že matice tuhosti je symetrická matice. Je tato matice také pozitivně definitní?

F) Užijte MKP pro lineární prvky a určete hodnoty

$$U_Z = \int_{\Gamma_Z} u dS, \quad U_{pom} = \int_{\Gamma_{pom}} u dS, \quad q_Z = \int_{\Gamma_Z} \frac{\partial u}{\partial n} dS, \quad q_{pom} = \int_{\Gamma_{pom}} \frac{\partial u}{\partial n} dS$$

pomocí 3 sítí (sítě volte spíše hrubší, viz dále). Odhadněte velikost chyby pro každou z uvedených hodnot. Odhad chyby následně ověřte výpočtem na zjemněné síti!

G) Ověřte, zda existuje slabé řešení také obecněji pro $f \in L^2(\Omega)$, $\psi \in L^2(\Gamma_Z)$, $\alpha \geq 0$, $\kappa \geq 0$ a $\varepsilon > 0$. Ukažte, jak lze odhadnout $\|u - u_h\|_V$. Rozeberte zdroje chyb pro danou úlohu.

Řešení:
A) viz zadáni: $u_D, \alpha, \psi, \kappa, \epsilon, f = konst.$

B)

Nejprve zvolíme prostor testovacích funkcí jako:

$$V = \{v \in H^1(\Omega); \gamma_0(v) = 0 \text{ na } \Gamma_D\}$$

kde γ_0 je operátor stop na Ω. Dále uvažujeme řešení ve tvaru: $u = w + U_D$, kde $U_D \in H^1(\Omega)$, tak že $\gamma_0(U_D) = u_D$. Potom dostáváme jinou, ekvivalentní formulaci původní úlohy:

$$-\epsilon\Delta w + \kappa w = f + \epsilon\Delta U_D - \kappa U_D = f_w$$

kde $w \in V$, s novými okrajovými podmínkami:

$$\begin{aligned}
w &= 0 && \text{na } \Gamma_D \\
\frac{\partial w}{\partial n} &= -\frac{\partial U_D}{\partial n} && \text{na } \Gamma_N \\
-\epsilon\frac{\partial w}{\partial n} &= \epsilon\frac{\partial U_D}{\partial n} + \alpha w + \alpha U_D - \alpha\psi && \text{na } \Gamma_Z
\end{aligned}$$

Slabá formulace:

$$\int_\Omega -\epsilon\Delta wv\, d\Omega + \int_\Omega \kappa wv\, d\Omega = \int_\Omega fv\, d\Omega + \int_\Omega \epsilon\Delta U_D v\, d\Omega - \int_\Omega \kappa U_D v\, d\Omega$$
$$\int_\Omega \epsilon\nabla w \cdot \nabla v\, d\Omega - \int_{\partial\Omega} \epsilon\frac{\partial w}{\partial n} v\, dS + \int_\Omega \kappa wv\, d\Omega = \int_\Omega fv d\Omega + \int_\Omega \epsilon\Delta U_D v\, d\Omega - \int_\Omega \kappa U_D v\, d\Omega$$

Nyní využijeme okrajové podmínky u integrálu přes hranici

$$\int_{\partial\Omega} \epsilon\frac{\partial w}{\partial n} v\, dS = \int_{\Gamma_D\cup\Gamma_Z\cup\Gamma_N} \epsilon\frac{\partial w}{\partial n} v\, dS = \int_{\Gamma_D} \epsilon\frac{\partial w}{\partial n} v\, dS + \int_{\Gamma_Z} \epsilon\frac{\partial w}{\partial n} v\, dS + \int_{\Gamma_N} \epsilon\frac{\partial w}{\partial n} v\, dS$$
$$\int_{\Gamma_D} \epsilon\frac{\partial w}{\partial n} v\, dS = \left\| \ v = 0 \text{ na } \Gamma_D \ \right\| = 0$$
$$\int_{\Gamma_N} \epsilon\frac{\partial w}{\partial n} v\, dS = -\int_{\Gamma_N} \epsilon\frac{\partial U_D}{\partial n} v\, dS$$
$$\int_{\Gamma_Z} \epsilon\frac{\partial w}{\partial n} v\, dS = -\int_{\Gamma_Z} \big(\epsilon\frac{\partial U_D}{\partial n} + \alpha w + \alpha U_D - \alpha\psi\big) v\, dS$$

Dále využijeme Greenovu větu na následující člen

$$\int_\Omega \epsilon\Delta U_D v\, d\Omega = \int_{\Gamma_D} \epsilon\frac{\partial U_D}{\partial n} v\, dS + \int_{\Gamma_Z} \epsilon\frac{\partial U_D}{\partial n} v\, dS + \int_{\Gamma_N} \epsilon\frac{\partial U_D}{\partial n} v\, dS - \int_\Omega \epsilon\nabla U_D \cdot \nabla v\, d\Omega$$

Po dosazení a úpravách celkem dostáváme formulaci úlohy ve tvaru

$$a(w, v) = L(v) \quad \forall v \in V$$

kde

$$\begin{aligned}
a(w, v) = &\quad \epsilon\int_\Omega \nabla w \cdot \nabla v\, d\Omega + \kappa\int_\Omega wv d\Omega + \alpha\int_{\Gamma_Z} wv\, dS \\
L(v) = &\quad \int_\Omega fv\, d\Omega - \epsilon\int_\Omega \nabla U_D \cdot \nabla v\, d\Omega - \kappa\int_\Omega U_D v\, d\Omega - \alpha\int_{\Gamma_Z} U_D v\, dS + \alpha\int_{\Gamma_Z} \psi v\, dS
\end{aligned}$$

Nyní, pokud zvolíme speciálně $U_D(x) = u_D \in \mathbb{R},\ \forall x \in \bar{\Omega}$, dostaneme:

$$L(v) = \quad C_1 \int_\Omega v\ d\Omega + C_2 \int_{\Gamma_Z} v\ dS \qquad \text{kde} \quad C_1 = f - \kappa U_D, \quad C_2 = \alpha(U_D - \psi)$$

C)

Věta (Lax-Milgram)
Nechť H je Hilbertův prostor se skalárním součinem (v, u) a nechť $a(v, u)$ je bilineární forma definovaná pro $v \in H,\ u \in H$ a taková, že existují konstanty $M > 0$, $m > 0$ nezávisle na v a u tak, že pro každé $v \in H,\ u \in H$ platí

$$|a(u, v)| \leqq M \parallel v \parallel_H \cdot \parallel u \parallel_H \tag{a}$$

$$a(u, u) \geqq m \parallel v \parallel_H^2 \tag{b}$$

Pak lze kazdý lineární funkcionál L, omezený na H, vyjádřit ve tvaru

$$L(v) = a(u^*, v), \quad v \in H$$

kde u^* je prvek z prostoru H, jednoznačně určený funkcionálem L. Přitom je

$$\parallel u^* \parallel_H \leqq \frac{\parallel L \parallel}{m},$$

kde $\parallel L \parallel_H$ je norma funkcionálu. Nebo ekvivalentně pro omezený lineární funkcionál platí

$$|L(v)| \leqq C \parallel v \parallel_H, \tag{c}$$

kde $C > 0$ a potom lze psát

$$\parallel u^* \parallel_H \leqq \frac{C}{m},$$

Prostor zde volíme jako

$$V = \{v \in H^1(\Omega); \gamma_0(v) = 0 \text{ na } \Gamma_D\}$$

Abychom dokázali existenci a jednoznačnost našeho problému, je tedy nutné ověřit podmínky Laxovy-Milgramovy věty

a)

$$|a(w, v)| = \left|\epsilon \int_\Omega \nabla w \cdot \nabla v\ d\Omega + \kappa \int_\Omega wv d\Omega + \alpha \int_{\Gamma_Z} wv\ dS\right|$$

$$\leqq |\epsilon| \left|\int_\Omega \nabla w \cdot \nabla v\ d\Omega\right| + |\kappa| \left|\int_\Omega wv d\Omega\right| + |\kappa| \left|\int_\Omega wv d\Omega\right| + |\alpha| \left|\int_{\Gamma_Z} wv\ dS\right|$$

$$\leqq |\epsilon| \int_\Omega |\nabla w| \cdot |\nabla v|\ d\Omega + |\kappa| \int_\Omega |w||v| d\Omega + |\alpha| \int_{\Gamma_Z} |w||v|\ dS$$

$$\leqq^* |\epsilon| \left(\int_\Omega |\nabla w|^2\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |\nabla v|^2\right)^{1/2} + |\kappa| \left(\int_\Omega |w|^2\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |v|^2\right)^{1/2} + |\alpha| \left(\int_{\Gamma_Z} |w|^2\ dS\right)^{1/2} \left(\int_{\Gamma_Z} |v|^2\ dS\right)^{1/2}$$

$$\leqq |\epsilon| \left(\int_\Omega |\nabla w|^2 + |w|^2\ d\Omega\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |\nabla v|^2 + |v|^2\ d\Omega\right)^{1/2} + |\kappa| \left(\int_\Omega |w|^2 + |\nabla w|^2\ d\Omega\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |v|^2 + |\nabla v|^2\ d\Omega\right)^{1/2}$$

$$+ |\alpha| \left(\int_{\Gamma_Z} |w|^2 + |\nabla w|^2\ dS\right)^{1/2} \left(\int_{\Gamma_Z} |v|^2 + |\nabla v|^2\ dS\right)^{1/2} \leqq$$

* *Hölderova / Cauchyova-Schwarzova nerovnost*

$$\begin{aligned}&\leqq 2\max(|\epsilon|,|\kappa|) \parallel w \parallel_{H^1(\Omega)} \cdot \parallel v \parallel_{H^1(\Omega)} + |\alpha| \parallel w \parallel_{H^1(\Gamma_Z)} \cdot \parallel v \parallel_{H^1(\Gamma_Z)} \leqq^{**}\\ &\leqq^{**} \max(|\epsilon|,|\kappa|) \parallel w \parallel_{H^1(\Omega)} \cdot \parallel v \parallel_{H^1(\Omega)} + |\alpha|\tilde{C}^2 \parallel w \parallel_{H^1(\Omega)} \cdot \parallel v \parallel_{H^1(\Omega)} \leqq\\ &\leqq 2\max(|\epsilon|,|\kappa|,|\alpha|\tilde{C}^2) \parallel w \parallel_{H^1(\Omega)} \cdot \parallel v \parallel_{H^1(\Omega)} = M \parallel w \parallel_{H^1(\Omega)} \cdot \parallel v \parallel_{H^1(\Omega)}\end{aligned}$$

♣

b)

$$\begin{aligned}a(w,w) &= \epsilon \int_\Omega |\nabla w|^2 \, d\Omega + \kappa \int_\Omega |w|^2 \, d\Omega + \alpha \int_{\Gamma_Z} |w|^2 \, dS \geqq\\ &\geqq \min(\epsilon,\kappa) \left(\parallel w \parallel_{H^1(\Omega)} + \parallel \nabla w \parallel_{H^1(\Omega)} \right) =\\ &= m \parallel w \parallel_{H^1(\Omega)}\end{aligned}$$

♣

c)

$$\begin{aligned}L(v) &\leqq |L(v)| = \left| C_1 \int_\Omega v \, d\Omega + C_2 \int_{\Gamma_Z} v \, dS \right| \leqq^{***}\\ &\leqq^{***} |C_1| \left(\int_\Omega d\Omega \right)^{1/2} \left(\int_\Omega |v|^2 \, d\Omega \right)^{1/2} + |C_2| \left(\int_{\Gamma_Z} dS \right)^{1/2} \left(\int_{\Gamma_Z} |v|^2 \, dS \right)^{1/2} \leqq\\ &\leqq \tilde{C}_1 \left(\int_\Omega |\nabla v|^2 + |v|^2 \, d\Omega \right)^{1/2} + \tilde{C}_2 \left(\int_{\Gamma_Z} |\nabla v|^2 + |v|^2 \, dS \right)^{1/2} \leqq^{**}\\ &\leqq^{**} \tilde{C}_1 \parallel v \parallel_{H^1(\Omega)} + \tilde{C}_2\tilde{C} \parallel v \parallel_{H^1(\Omega)} \leqq 2\max(\tilde{C}_1, \tilde{C}_2\tilde{C}) \parallel v \parallel_{H^1(\Omega)} = C \parallel v \parallel_{H^1(\Omega)}\end{aligned}$$

♣

D)

Diskrétní Galerkinova formulace:
Volíme konečněrozměrný prostor $V_h \subset V$, kde $dim(V_h) = n \in \mathbb{N}$. V tomto prostoru definujeme bázi $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$, takže libovolný prvek $v_h \in V_h$ můžeme zapsat jako lineárni kombinaci prvků báze: $v_h = \sum_{i=1}^n \beta_i \varphi_i$. Puvodní Galerkinovu úlohu v konecně-rozměrném prostoru V_h pak můžeme zformulovat takto : Hledáme prvek $u_h \in V_h$, pro kerý platí $a(u_h, v_h) = L(v_h) \quad \forall v_h \in V_h$, tedy $a(u_h, \sum_{i=1}^n \beta_i \varphi_i) = L(\sum_{i=1}^n \beta_i \varphi_i) \quad \forall \beta_i \in \mathbb{R}, i \in \{1, ..., n\}$. Z linearity dále máme: $\sum_{i=1}^n \beta_i a(u_h, \varphi_i) = \sum_{i=1}^n \beta_i L(\varphi_i)$ a jelikož parametry $\beta_1, ..., \beta_n$ jsou obecně libovolné, tak musí platit přímo vztahy: $a(u_h, \varphi_i) = L(\varphi_i) \; \forall i \in \{1, ..., n\}$. Protože hledané řešení $u_h \in V_h$, pak tuto funkci opět můžeme vyjádřit jako lineární kombinaci bázových prvků: $v_h = \sum_{i=1}^n \alpha_j \varphi_j$ kde $\alpha_j \in \mathbb{R}$,$\forall j \in \{1, ..., n\}$. Celkem tedy dostáváme: $a(\sum_{i=1}^n \alpha_j \varphi_j, \varphi_i) = L(\varphi_i) \; \forall j \in \{1, ..., n\}$ neboli, využitím linearity: $\sum_{i=1}^n \alpha_j a(\varphi_j, \varphi_i) = L(\varphi_i)$. V maticovém zápise

$$\begin{pmatrix} a(\varphi_1,\varphi_1) & a(\varphi_2,\varphi_1) & \dots & a(\varphi_n,\varphi_1) \\ a(\varphi_1,\varphi_2) & a(\varphi_2,\varphi_2) & \dots & a(\varphi_n,\varphi_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a(\varphi_1,\varphi_n) & a(\varphi_2,\varphi_n) & \dots & a(\varphi_n,\varphi_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L(\varphi_1) \\ L(\varphi_2) \\ \vdots \\ L(\varphi_n) \end{pmatrix}$$

Nebo symbolicky

$$\mathbb{A}\vec{\alpha} = \vec{b}, \quad \text{kde} \quad \vec{\alpha} = (\alpha_1, ..., \alpha_n), \quad \vec{b} = (L(\varphi_1), ..., L(\varphi_n))$$

*** Omezenost opratoru stop, ***Hölderova / Cauchyova-Schwarzova nerovnost*

E)

Jelikož matice soustavy je dána vztahem: $\mathbb{A} = \Big(a_{ij}\Big)_{i,j=1,\dots,n} = \Big(a(\varphi_j, \varphi_i)\Big)_{i,j=1,\dots,n}$, kde bilineární forma

$$a(u,v) = \epsilon \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \; d\Omega + \kappa \int_\Omega uv d\Omega + \alpha \int_{\Gamma_Z} uv \; dS$$

je zřejmě symetrická v argumentech u, v, tak okamžitě dostáváme i symetrii matice $\mathbb{A}$.
Matice $\mathbb{A}$, nad tělesem $\mathbb{R}^{n\times n}$ je pozitivně definitní pokud platí

$$\vec{x}^T \mathbb{A} \vec{x} > 0 \quad \forall \vec{x} \neq \vec{o}, \; \vec{x} \in \mathbb{R}^n.$$

V našem případě můžeme psát

$$\vec{x}^T \mathbb{A} \vec{x} = \sum_{i,j=1}^{n} x_i a(\varphi_j, \varphi_i) x_j = \sum_{i,j=1}^{n} a(x_j\varphi_j, x_i\varphi_i) = a(\sum_{j=1}^{n} x_j\varphi_j, \sum_{i=1}^{n} x_i\varphi_i) = a(v,v)$$

pro nějaké $v \in V_h \subset V$, kde $v \neq 0$ pokud $\varphi_i \neq 0 \; \forall \in \{1, ..., n\}$, což je zaručeno tím, že φ_i jsou prvky báze V_h. Nyní můžeme využít V-elipticitu formy $a(\cdot,\cdot)$, která dává

$$a(v,v) \geqq m \parallel v \parallel^2_{H^1(\Omega)} > 0,$$

kde $m > 0, \parallel v \parallel_{H^1(\Omega)} > 0$. Tedy matice $\mathbb{A} = \Big(a(\varphi_j, \varphi_i)\Big)_{i,j=1,\dots,n}$ je pozitivně definitní.

F)

Pro účely numerického výpočtu provedeme nejprve triangulaci výpočetní oblasti Ω, tj.

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{K_i \in \tau_h} K_i$$

kde τ_h je přípustná triangulace, tj.:
1) τ_h je tvořena konečným počtem trojúhelníků

2) Pro $K_i, K_j \in \tau_h$, kde $i \neq j \in \{1, ..., n\}$ mohou nastat následující případy: $K_i \cap K_j = \begin{cases} \emptyset \\ \text{,,společný bod''} \\ \text{,,společná hrana''} \end{cases}$

Na základě triangulace sestrojíme konecně-dimenzionální prostor

$$V_h = \{\varphi \in C(\bar{\Omega}), \varphi|_K \in P_1(K) \forall K\} \cap V$$

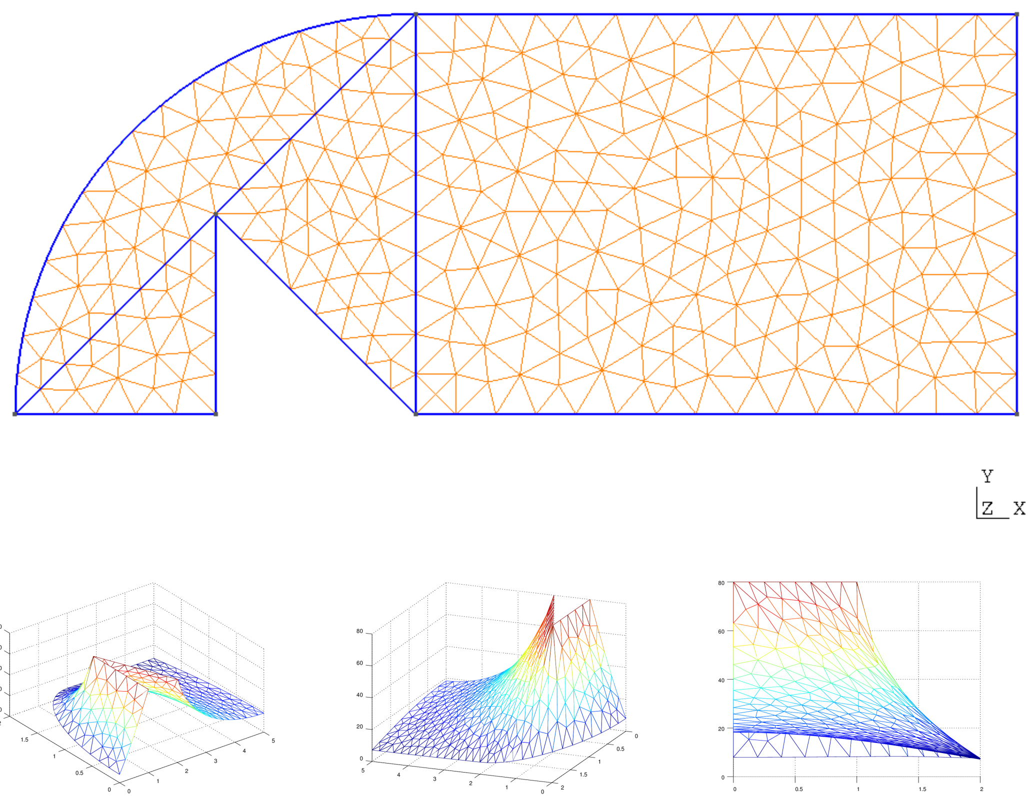
kde $P_1(K)$ jsou lineární funkce na K a $V = \{v \in H^1(\Omega); \gamma_0(v) = 0 \text{ na } \Gamma_D\}$.

Výpočet
Výpočty byly provedeny v programu Octave pro několik nestrukturovaných sítí o různé "hrubosti" vytvořené v programu Gmsh, viz následující obrázky.

Síť-1:

$$U_Z = \int_{\Gamma_Z} u \; dS = 46.984 \qquad U_{pom} = \int_{\Gamma_{pom}} u \; dS = 45.205$$

$$q_Z = \int_{\Gamma_Z} \frac{\partial u}{\partial n} \; dS = -49.370 \qquad q_{pom} = \int_{\Gamma_{pom}} \frac{\partial u}{\partial n} \; dS = 10.948$$

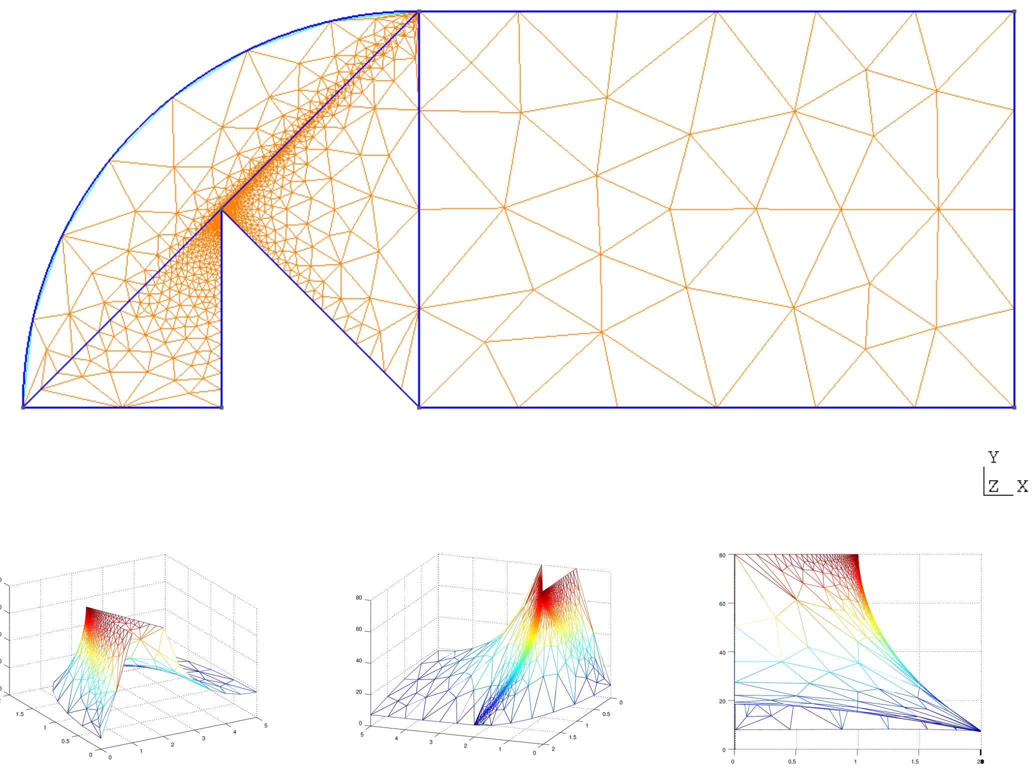


Obrázek 1: Síť-1

Síť-2:

$$U_Z = \int_{\Gamma_Z} u \, dS = 46.914 \qquad U_{pom} = \int_{\Gamma_{pom}} u \, dS = 43.610$$

$$q_Z = \int_{\Gamma_Z} \frac{\partial u}{\partial n} \, dS = -117.720 \qquad q_{pom} = \int_{\Gamma_{pom}} \frac{\partial u}{\partial n} \, dS = 0.635$$

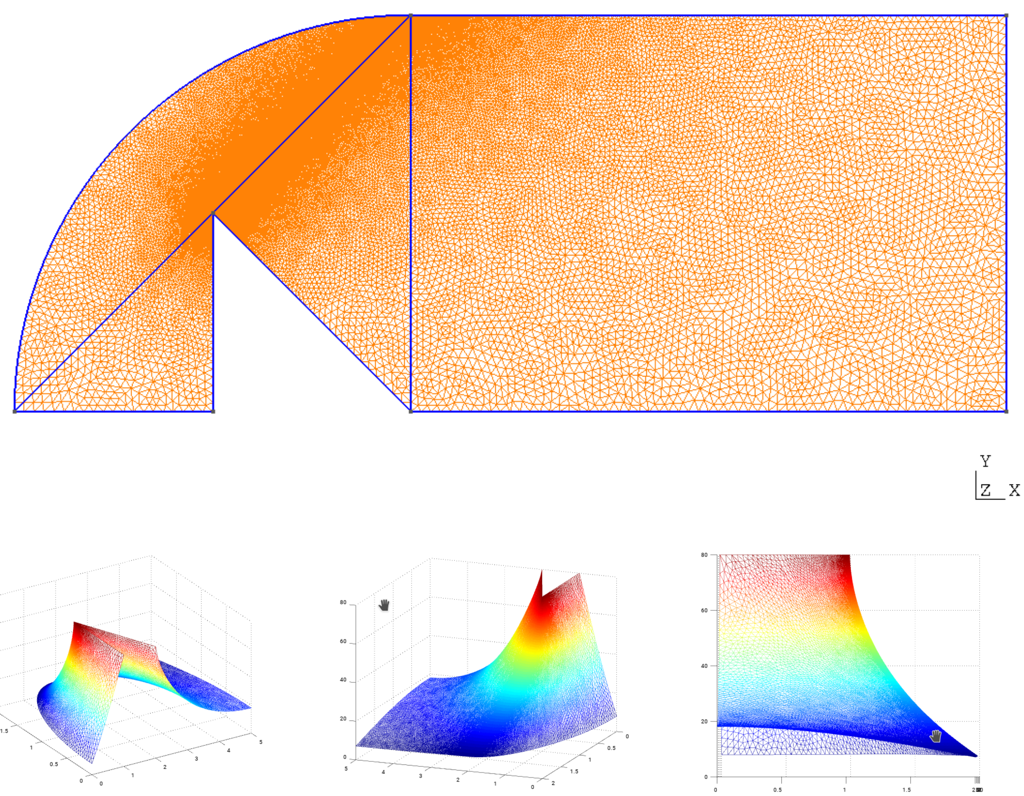


Obrázek 2: Síť-2

Síť-3:

$$U_Z = \int_{\Gamma_Z} u\, dS = 46.889 \qquad U_{pom} = \int_{\Gamma_{pom}} u\, dS = 43.402$$

$$q_Z = \int_{\Gamma_Z} \frac{\partial u}{\partial n}\, dS = -6.5231 \qquad q_{pom} = \int_{\Gamma_{pom}} \frac{\partial u}{\partial n}\, dS = 0.24295$$



Obrázek 3: Síť-3

F)

Budeme-li v původní úloze uvažovat obecněji, že $f \in L^2(\Omega)$ a $\psi \in L^2(\Gamma_Z)$, pro $\alpha \geqq 0$, $\kappa \geqq 0$ a $\epsilon > 0$, ukáže se existence a jednoznačnost slabého řešení zadané úlohy opět ověřením podmínek Laxovy-Milgramovy věty. Tedy požadujeme:

$$|a(u,v)| \leqq M \parallel v \parallel_H \cdot \parallel u \parallel_H \tag{a}$$

$$a(u,u) \geqq m \parallel v \parallel_H^2 \tag{b}$$

$$|L(v)| \leqq C \parallel v \parallel_H, \tag{c}$$

kde opět Hilbertův prostor H volíme jako $V = \{v \in H^1(\Omega); \gamma_0(v) = 0 \text{ na } \Gamma_D\}$, $M > 0$, $m > 0$, $C > 0$, $U_D = konst. = 80$, kde

$$a(u,w) = \epsilon \int_\Omega \nabla w \cdot \nabla v \; d\Omega + \kappa \int_\Omega wv d\Omega + \alpha \int_{\Gamma_Z} wv \; dS$$

$$L(v) = \int_\Omega fv \; d\Omega - \epsilon \int_\Omega \nabla U_D \cdot \nabla v \; d\Omega - \kappa \int_\Omega U_D v \; d\Omega - \alpha \int_{\Gamma_Z} U_D v \; dS + \alpha \int_{\Gamma_Z} \psi v \; dS$$

Zde u podmínek (a) a (b) se můžeme odkázat na část C), kde byly tyto podmínky (s obecnou platností pro $\alpha \geqq 0$, $\kappa \geqq 0$ a $\epsilon > 0$) dokázány. Co se týče podmínky (c), máme:

$$L(v) = \int_\Omega fv \; d\Omega - \kappa \int_\Omega U_D v \; d\Omega - \alpha \int_{\Gamma_Z} U_D v \; dS + \alpha \int_{\Gamma_Z} \psi v \; dS$$

a požadujeme

$$\begin{aligned} |L(v)| &\leqq \int_\Omega |fv| \; d\Omega + |\kappa| \int_\Omega |U_D v| \; d\Omega + |\alpha| \int_{\Gamma_Z} |U_D v| \; dS + |\alpha| \int_{\Gamma_Z} |\psi v| \; dS \leqq^* \\ &\leqq^* \left(\int_\Omega |f|^2 \; d\Omega \right)^{1/2} \cdot \left(\int_\Omega |v|^2 \; d\Omega \right)^{1/2} + C_1 \left(\int_\Omega |v|^2 \; d\Omega \right)^{1/2} + C_2 \left(\int_{\Gamma_Z} |v|^2 \; dS \right)^{1/2} \\ &+ |\alpha| \left(\int_{\Gamma_Z} |\psi|^2 \; dS \right)^{1/2} \cdot \left(\int_{\Gamma_Z} |v|^2 \; dS \right)^{1/2} \end{aligned}$$

kde $C_1 > 0$ a $C_2 > 0$. Využijeme-li nyní faktu že $f \in L^2(\Omega)$ a $\psi \in L^2(\Gamma_Z)$, tedy: $\left(\int_\Omega |f|^2 \; d\Omega\right)^{1/2} < C_3$ a $\left(\int_{\Gamma_Z} |\psi|^2 \; dS\right)^{1/2} < C_4$ můžeme dále psát

$$\begin{aligned} |L(v)| &\leqq C_5 \left(\int_\Omega |v|^2 \; d\Omega \right)^{1/2} + C_6 \left(\int_{\Gamma_Z} |v|^2 \; dS \right)^{1/2} \leqq C_5 \left(\int_\Omega |v|^2 + |\nabla v|^2 \; d\Omega \right)^{1/2} + \\ &+ \; C_6 \left(\int_{\Gamma_Z} |v|^2 + |\nabla v|^2 \; dS \right)^{1/2} = C_5 \parallel v \parallel_{H^1(\Omega)} + C_6 \parallel v \parallel_{H^1(\Gamma_Z)} \leqq^{**} C \parallel v \parallel_{H^1(\Omega)} \end{aligned}$$

kde $C, C_3, ...C_6 > 0$. Tímto je požadavek bodu c) splněn.

**Hölderova / Cauchyova-Schwarzova nerovnost, **Omezenost operátoru stop*

Zdroje a odhad chyb

Výraz $\| u - u_H \|$ lze odhadnout z Céova lemmatu:

$$\| u - u_h \| \leqq \frac{M}{m} \| u - v_h \| = C \| u - v_h \| \quad \forall v_h \in V_h$$

kde M a m jsou konstanty z podmínek Lax-Milgramovy věty, $C \in \mathbb{R}$ je kladná konstanta, $V_h \subset V$ je konečněrozměrný prostor z části D). Jedná se o tzv. apriorní odhad chyby. Céovo lemma říká, že i kdybychom znali přesné řešení u zkoumané diferenciální rovnice, na prostoru V_h bychom nenalezli lepší aproximaci řešení, než je právě u_h. Na základě Céova lemmatu lze rovněž odvodit následující odhady:

Věta
Nechť τ_h je regulární soubor triangulací, V_h je konečněrozměrný prostor MKP odpovídající τ_h, $u \in H^2(\Omega)$ je řešení okrajové úlohy a u_h je jeho aproximace z V_h, pak platí:

$$\| u - u_h \|_{H^1(\Omega)} \leq Ch|u|_{H^2(\Omega)}$$

Odhad chyby řešení může být ovlivněn řadou zanedbání a nepřesností:

i. $\Omega_h \neq \Omega$, tj. oblast je pouze aproximována sjednocením konečných prvků Ω_h

ii. $f_h \neq f$ používáme numerickou integraci, což je ekvivalentní práci s f_h místo s f

iii. $\hat{\tau}_h \neq \tau_h$, používáme numerickou integraci na referenčním trojúhelníku, což je ekvivalentní práci s $\hat{\tau}_h$ místo s $\hat{\tau}$, nebo aprximujeme Γ_N

iv. $\hat{u}_h \neq u_h$, aproximujeme $\hat{u}$ aproximujeme $\hat{u}$ nebo Γ_D, $(U_{Dh} \neq U_D)$