Lab2 Differentialekvationer, ekvationssystem och kombinationer

Denna laboration övar differentialekvationer och icke-linjära ekvationssystem samt att välja och kombinera lämpliga metoder (bland de metoder kursen tar upp).

Vid redovisningen ska båda i laborationsgruppen kunna redogöra för teori, algoritmer och resultat på samtliga uppgifter! Var väl förberedda så att varje delredovisning går snabbt och smidigt (kurvor utskrivna, numeriska resultat noterade – gärna handskrivna i marginalen på detta papper och svaren uppladdade som PDF i Canvas). Sista dag för bonuspoäng: se Canvas.

1. **Differentialekvationer – Begynnelsevärdesproblem**

Följande andra ordningens differentialekvation beskriver en pendels rörelse.

$$\phi'' + \frac{g}{L}\sin(\phi) = 0, \quad \phi(0) = \frac{5\pi}{7}, \quad \phi'(0) = 0.9, \quad 0 \le t \le T \qquad (1)$$

Här är ϕ vinkeln mot lodlinjen och ϕ' vinkelhastigheten. Längden på snöret är $L = 2.35$ m och tyngdkraften $g = 9.82$ m/s^2.

a) Skriv om differentialekvationen som ett system av första ordningens differentialekvationer. Systemet skall redovisas matematisk på "papper" (dvs inte som Matlab-kod).

b) Lös systemet med MATLABs inbyggda ode-lösare `ode45`. Välj ett tidsintervall, $[0, T]$, som gör att pendeln hinner svänga drygt två hela perioder. Plotta vinkel och vinkelhastighet som funktion av tiden.

c) Animera pendelns gång.

Animeringen kan göras med tex ett anrop av följande MATLAB-kod:

```
function anim(tut,fiut,L);
  for i=1:length(tut)-1
    x0=L*sin(fiut(i));y0=-L*cos(fiut(i));
    plot([0,x0],[0,y0],'-o')
    axis('equal')
    axis([-1 1 -1 0]*1.2*L)
    drawnow
    pause(tut(i+1)-tut(i))
  end;
end
```

där `tut` är tidpunkterna vid vilka `ode45` har räknat ut lösningen, `fiut` är den uträknade vinkeln vid motsvarande tidpunkt och `L` är pendelns längd.

d) Bestäm pendelns svängningstid (dvs period) med minst 3 decimaler genom att göra lämplig interpolation i den av `ode45` beräknade pendelrörelsen och bestämma interpolationspolynomens nollställen.

Tips: Välj interpolationspolynom med omsorg!!! Ledning: över vilket eller vilka intervall bör interpolationen gå? Är långt eller kort intervall bäst? Vilken grad väljer ni? Hur många polynom? Hur skattar ni osäkerheten? (Jämför gärna era beslut här med era slutsatser från Lab1!)

e) Bestäm svängningstiden då snöret förlängs till $L = 2.5$

Tips: Ska svängningstiden ändras?

(Deluppgifterna **d** *och* **e** *är snarlika! Skriv er Matlab-kod klokt!*
Matlabfunktionerna FIND, ABS och MIN kan vara användbara.)

2. **Differentialekvationer – Randvärdesproblem**

Följande differentialekvationsproblem beskriver temperaturfördelningen $T(x)$ i en cylindrisk stav av längden L.

$$-\frac{d}{dx}(k\frac{dT}{dx}) = Q(x), \quad T(0) = T_0, \quad T(L) = T_L \tag{2}$$

Vänster och höger ändpunkt på staven har den konstanta temperaturen T_0 resp T_L. $k(x)$ är stavens värmeledningsförmåga och $Q(x)$ är den värmemängd som per tidsenhet och volymnsenhet genereras i staven, t ex genom radioaktivitet.

Antag att $L = 3.40$ $[m]$, $T_0 = 300$ $[K]$, $T_L = 450$ $[K]$ samt att $k(x)$ $[J/(K \cdot m \cdot s]$, och $Q(x)$ $[J/(s \cdot m^3)]$ är funktionerna

$$k(x) = 3 + x/6 \qquad Q(x) = 285\, e^{-(x-\frac{L}{2})^2}, \qquad 0 \le x \le L \tag{3}$$

Differentialekvation och randvillkor (2) kan lösas numeriskt med hjälp av finita differensmetoden. Om vi diskretiserar intervallet $[0, L]$ enligt $x_i = ih, i = 0, 1, 2, \ldots, n-1, n$, där $h \cdot n = L$, sätter $y(x_i) \approx y_i$ och approximerar derivatorna med centraldifferenser erhålles ett linjärt ekvationssystem

$$AT = b \tag{4}$$

där A är en matris, T är en vektor med temperaturvärden i och b är en vektor som beror av $Q(x_i)$-värdena samt temperaturen i stavens ändpunkter.

a) Härled och skriv ner matrisen A och vektorerna T och b för $n = 4$ med **papper och penna**. Vilken struktur har matrisen A ?

Ledning: $\frac{d}{dx}(f(x) \cdot g(x)) = \frac{df(x)}{dx} \cdot g(x) + f(x) \cdot \frac{dg(x)}{dx}$

b) Skriv ett MATLAB-program som löser randvärdesproblemet och räknar ut temperaturen T i punkten $x = 1.40$ med 4 säkra decimaler. (Glöm inte att visa vad du gjort som gör att du vågar lita på dina 4 decimaler.) *Tips: $n = 4$ räcker nu inte längre.*

Plotta också temperaturen som funktion av x på hela intervallet $0 \le x \le L$.

c) Om man vill undersöka temperaturen i $x = 1.19$ vilket är det allra minsta antalet delar du kan/bör använda då? (dvs vilken steglängd kan du börja din steglängdshalvering med?)

d) Varför är det lite svårare att med en viss noggrannhet skatta maximala temperaturen i staven än att skatta temperaturen i $x = 1.40$?

e) Föreslå ett effektivt sätt att skatta maximala temperaturen i staven.

f) Frivilligt: implementera din algoritm för maxtemperaturen i ditt program. (Detta är en vanlig deluppgift i projekten!)

Tar ert program lång tid att köra? Här är två tips för att få snabbare program (och/eller hitta buggar):

- Hur mycket skall felet minska då steglängden halveras? Kontrollera att det verkligen gör det i ditt program!
- Minska trunkeringsfelet med Richardson-extrapolation.
- Matrisen A kommer endast att ha ett fåtal nollskilda element. Kommandot `sparse` är ett kommando för att skapa glesa matriser eller för att tala om för Matlab att matrisen kan lagras glest. MATLAB-satsen `A=sparse(A)` ändrar till gles lagring i Matlab. *(Men det ska inte behövas! Om det behövs brukar något vara fel.)*

Laborant: ....

Lab2 deluppgift 2 godkänd (datum, lärarsign): ....

3. **Inskjutningsmetoden på samma problem**

   Just det här differentialekvationsproblemet i uppgift 2 är väldigt enkelt att lösa med inskjutningsmetoden. Skriv ett Matlab-program som skattar temperaturen i $x = 1.40$ med inskjutningsmetoden och Matlabs `ode45` och `fzero`. *Glöm inte felskattningen.*

4. **Cirklar.**

   Texten kommer.

5. **Integralekvation.**

   Texten kommer.

Glöm inte heller uppgift 8 och 9 från Lab1 om ni inte redan gjort dem.

Att lämna in i Canvas inför redovisningen:

Lämna in er **Matlab-kod** på uppgifterna 1b, 2b, 3, (vad av 4 och 5 kommer).

Lämna in **era svar** på uppgifterna:
- 1d: Beräknad svängningstid och vilket gradtal ni använt i interpolationen.
- 1e: Svängningstiden för det längre snöret.
- 2b: Temperatur i x=1.40 med skattad felgräns.
- 2c: Ert svar på antalet delar.
- 3: Temperatur i x=1.40 med skattad felgräns.
- 4 *info kommer*
- 5 *info kommer*