# LABORATION 1 - uppgift 1-9

## Ekvationslösning och kurvanpassning

*Målet med laboration ett är att ge er vana vid de numeriska metoderna för ekvationslösning, interpolation, parameteranpassning och tillförlitlighet. Vi börjar också titta lite på differentialekvationer.Ni skall efter labben kunna lösa egna liknande uppgifter helt på egen hand.*

*Vid redovisningen ska du visa för din lärare att du behärskar de metoder labben tar upp. Båda i labbgruppen ska enskilt kunna redogöra för teori, algoritmer och resultat! (Målet med labben är ju att ni i fortsättningen skall kunna lösa liknande problem). Var väl förberedda så att varje delredovisning går snabbt och smidigt (kurvor redan plottade, numeriska resultat uppskrivna, etc). Alla frågor i deluppgifterna ska vara besvarade! Förbered inför redovisningen hur du ska berätta om hur du löst uppgiften. Koden skall vara prydlig och lättläst och uppladdad i Canvas. Även en lista med era resultat skall vara uppladdade. Sista dag för bonuspoäng: se hemsidan!*

0. **Lab0** (Behöver inte redovisas, men är nyttig Matlab-hjälp inför Lab1.)
   Öva på MATLAB genom "Lab0" som finns på sidan för Lab1 i Canvas.
   *Om du tycker att det tar alltför lång tid nu att göra hela Lab0 nu kan du hoppa över sista delen nu (dvs del 3, om funktioner). Men gå i så fall tillbaka och titta på de resterande Lab0-uppgifterna senare! Om du tycker Lab0 är svår är det ett tecken på att du behöver öva programmering. Totalt sett sparar du labbtid på att göra Lab0 ordentligt innan du gör de "riktiga" Lab1-uppgifterna.*

1. **Linjärt ekvationssystem**
   Vi ska lösa det linjära ekvationssystemet $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ i MATLAB:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

   **a)** Beräkna med Matlab vektorn $\mathbf{x}$.
   **b)** Beräkna med Matlab residualvektorn $\mathbf{r} = \mathbf{b} - \mathbf{Ax}$.
   **c)** Varför blir inte residualvektorn $\mathbf{r}$ exakt lika med noll?

   ---

   *Lämna in i Canvas:* Svar på 1ac (ingen Matlab-kod behöver laddas upp).

   Laborant .......................................................

   *Uppgift 1 godkänd (datum, lärarsign):* ........................................

2. **Icke-linjär skalär ekvation med Newtons metod**
   Vi ska nu titta på alla positiva rötter till ekvationen $f(x) = 0$ där

$$f(x) = 73x - \left(\frac{x^2 + x + 0.05}{3x + 1}\right)^7 - 11xe^{-x}$$

   **a)** Hur kan du förenkla funktionen så att du med papper och penna och en enkel miniräknare (dvs icke graf-ritande) grovlokalisera den minsta positiva roten? Hur gör du förenklingen för att skatta den största positiva roten? Vilka värden får du på rötterna, ange med minst en siffra och tiopotens. Besvara sedan när du om en stund har bestämt rötterna mer noggrannt: Vilken skattning var bäst? Den för största eller minsta roten? Varför?

**b)** Rita sedan funktionen $f(x)$ i MATLAB så att man tydligt ser var alla positiva rötterna ligger (Man skall kunna utläsa 1-2 siffror och tiopotens för samtliga rötter). *Tips: Du vill troligen göra en plot per rot! Matlab-funktionerna* `subplot, title, xlabel, grid on` *mfl är användbara.*
**c)** Skriv sedan till MATLAB-kod för att bestämma alla rötterna noggrannt med Newtons metod. Alla rötter ska ha ett RELATIVFEL mindre än $10^{-8}$.
**d)** Hur definieras kvadratisk konvergens för en iterativ metod för ekvationslösning? (*Definitionen söks, inte bara tumregeln.*)
**e)** Bestäm konvergens-konstanten för den största roten. *(Prova gärna även minsta roten, men syns tydligare i den största).*
**f)** Visa att konvergensen för den största roten var OK och ange roten med lämpligt antal siffror och felgräns.
**g)** Visa att konvergensen för den minsta roten var OK och ange roten med lämpligt antal siffror och felgräns.

*OBS! Det är helt OK att ha ett program som hittar "bara" en rot i taget och som man kör upprepade gånger för att hitta alla rötter. Bifoga då vilka startvärden som ni använt för de olika rötterna. (Gärna som en kommentar i Martlab-koden)*

---

*Lämna in i Canvas:* Svar på 2adefg (endast erhållna värden på 2aefg och formeln i 2d). Matlab-kod för 2bce (i ett enda program).

---

3. **Samma icke-linjära skalära ekvation med sekantmetoden**
**a)** Skriv ett Matlab-program som bestämmer rötterna till ekvationen i föregående uppgift med sekantmetoden och samma krav på noggrannhet.
**b)** Hurdan konvergens har sekantmetoden enligt teorin? (*Definitionen söks, inte bara namnet.*)
**c)** Visa att ditt program har sådan konvergens. Vad blir konvergens-konstanten?
**d)** Vad blev rötterna? Blir det samma värden?
**e)** Vilken av metoderna, Newton eller sekant, föredrar du för denna ekvation? Varför?

---

*Lämna in i Canvas:* Svar på 3bcd. Matlab-kod för 3ac (i ett enda program).

---

Laborant ........................................................

*Uppgift 2 och 3 godkända (datum, lärarsign):* ........................................

4. **Interpolation och linjära minsta kvadratmetoden**

Det är väldigt vanligt att vi får en tabell med olika värden i, men tabellen saknar just det värde vi vill ha. Här kommer vi att titta på några olika sätt att behandla tabellen för att få ut det värde vi söker. Vi vill ta reda på vilken av metoderna som är bäst för olika typer av frågor.

I tabellen finns hur länge solen antas vara uppe i Stockholm under ett normalår. (Första kolumnen är datumet, andra kolumnen är antalet timmar och sista antalet minuter).

| Datum | Tid |
|---|---|
| 1 jan | 6 : 17 |
| 1 feb | 8 : 05 |
| 1 mrs | 10 : 32 |
| 1 apr | 13 : 14 |
| 1 maj | 15 : 57 |
| 1 jun | 18 : 03 |
| 1 jul | 18 : 25 |
| 1 aug | 16 : 37 |
| 1 sep | 14 : 07 |
| 1 okt | 11 : 23 |
| 1 nov | 8 : 46 |
| 1 dec | 6 : 35 |
| 31 dec | 6 : 14 |

Vi skall nu göra 7 olika anpassningar till dessa data. För varje metod/anpassning ska du plotta hur den anpassningen ser ut för hela året (som en slät kurva), tillsammans med alla givna mätpunkter (markerade med ringar, kryss eller liknande).

Du får välja själv om du vill plotta flera av kurvorna i samma bild eller plotta kurvorna separat en och en. Tips: `plot, subplot, polyfit, polyval, splines`.

De 7 olika anpassningar som skall göras är:

**A)** Ett interpolationspolynom som går genom samtliga punkter.
**B)** Styckvis linjär interpolation genom samtliga punkter.
**C)** Splines-approximation genom samtliga punkter.
**D)** Ett andragradspolynom som bara använder data från 1 juni till 1 augusti för att bestämma koefficienterna.
**E)** Ett minstakvadratanpassat andragradspolynom som bara använder data from 1 april tom 1 september för att bestämma koefficienterna.
**F)** Ett minstakvadratanpassat andragradspolynom som använder samtliga data from 1 januari tom 31 december
**G)** Funktionen $y = c_1 + c_2 \cos(w * x) + c_3 \sin(w * x)$ minstakvadratanpassd till samtliga data från 1 januari till 31 december där $w = 2\pi/365$ (dvs periodtiden 1 år)

När du har dina resultat och kurvor ska vi titta på hur resultatet blev och hur mycket arbete som behövdes för de olika metoderna. Vi betecknar koefficienterna med $c_i$ där för polynomen

$$y(x) = c_1 + c_2 * x + c_3 * x^2 + ...$$

samt

$$y(x) = c_1 + c_2 * cos(w * x) + c_3 * sin(w * x) + ...$$

i det trigonometriska fallet.

**a)** I vilken ansats behövdes flest koefficienter beräknas (totalt över hela intervallet)? Hur många koefficienter är det?
**b)** Fyra av ansatserna behövde bara beräkna 3 koefficienter totalt, vilka?
**c)** Vilken metod är bäst för att beräkna årets längsta dag? Varför? Vad blir soltiden?
**d)** Vilken metod är bäst för att beräkna värdet på julafton? Varför? Vad blir soltiden?
**e)** Vilken metod tycker du var bäst? Varför?

Denna uppgift har många delfrågor men alla är snarlika. Ett varmt tips är därför att återanvända din programkod effektivt.

*Lämna in i Canvas:* Matlab-kod samt svar på 4abcd.

5. **Tillförlitlighet**

**a)** Antag att konstanten som ges som 11 i ekvationen i uppgift 2 ökas med 3.0%. Hur många procent påverkas den minsta positiva roten? Hur många procent påverkas den största positiva roten? Påverkas båda rötterna lika mycket? Påverkas de åt samma håll?

**b)** Om konstanten i stället minskas med 3.0% blir förändringarna i rötterna liknande? Varför?

**c)** Ange rötterna med en absolut felgräns (dvs inte i procent) om vi har att konstanten är $11.00 \pm 3.0\%$ (dvs med absolut felgräns är den $11.00 \pm 0.33$).

*Lämna in i Canvas:* Svar på 5ac. (ingen kod behöver lämnas in).

*Laborant:* ........................................

*Uppgift 5 (Lab1) godkänd (datum, lärarsign):* ........................................

6. **Integral med förbehandling**. Vi vill beräkna integralen

$$\int_0^\infty \frac{1 - e^{-(x/3)^3}}{4x^3} dx$$

numeriskt med ett totalt fel mindre än $10^{-9}$. Du skall först genomföra en förbehandling (deluppgift a-d) så att det förenklade problemet enkelt kan lösas numeriskt med trapetsregeln och därefter beräkna hela integralen med den (deluppgift e-f).
I denna uppgift skall trapetsregeln programmeras själv.
*Ni får gärna jämföra era beräknade värden med tex* `quad`*,* `integral`*,* `trapz` *eller analytiska värdet för er egen skull - men inte för att svara på delfrågorna i denna uppgift.*

**a)** Plotta integranden från $x = 0$ till $x = 1 \cdot 10^{-4}$. Varför ser kurvan ut som den gör? Hur borde den se ut? (Du skall senare ta hänsyn till detta i ditt program)

**b)** Gör sedan "svanskapning" för att bestämma en ändlig övre gräns $B$ som du vill använda i trapetsregeln senare så att bidraget från "svansen" (dvs $\int_B^\infty$) ska bli tillräckligt litet för att totala felet i integralberäkningen skall bli tillräckligt litet.

**c)** Föreslå ett sätt att i din numeriska beräkning av integralens värde eliminera effekten av "darrandet" du såg i första deluppgiften. *Tips: Kan du approximera integranden en bit med en liknande funktion?*

**d)** Du har nu behandlat både området nära 0 och långt ut. Behövs ytterligare förbehandling för att beräkna integralen med trapetsregeln? Om ja: varför och vad gör du? Om nej: hur visar du att det inte behövs?

**e)** Beräkna nu värdet av integralen med trapetsregeln, på ett säkert sätt, tillräckligt noggrannt, med dina förbehandlingar ovan och en egenskriven trapetsregel (gärna följd av din egen Richardson-extrapolation).

**f)** Skatta felgränsen för ditt svar med din metod. Kom ihåg att ta hänsyn till vad du gjorde i början och slutet av intervallet. *(OBS! Att bara jämföra med analytiska värdet på integralen eller värden från tex* `quad` *godkänns inte här. Du skall visa hur man gör i den metod du satt ihop. Så som man gör när man inte har en analytisk eller annan metods lösning att jämföra med).*

---

*Lämna in i Canvas:* Kod på 6ef. Svar på 6b (kort beskrivning och värdet på B) samt 6cd (kort beskrivning) och 6ef.

---

*Laborant:* .......................................

*Uppgift 6 (Lab1) godkänd (datum, lärarsign):* .......................................

7. **Säker integral**

$$\int_0^6 197e^{-\left(\frac{19x-\pi}{0.003}\right)^2} dx$$

**a)** Skatta integralen på ett säkert sätt med Matlabs `quad`. Redovisa vilken noggrannhet du har och varför du kan vara säker på ditt värde (minst 8 korrekta siffror krävs). Gör sedan samma med Matlabs `integral`. *Glöm inte visa vad och hur du gjort och visa att det du gjort inte förändrar integralvärdet.*

**b)** Olika förbehandlingar resulterar i olika mycket totalt arbete. Hur har du tänkt för att få en bra och effektiv algoritm/kod?

---

*Lämna in i Canvas:* Kod på 7a. Svar på 7a (integralens värde, med felgräns) och en kort beskrivning på 7b (max 5 meningar!).

---

*Laborant:* .......................................

*Uppgift 7 (Lab1) godkänd (datum, lärarsign):* .......................................

8. **Numerisk integration: Eulers metod**

Givet differentialekvationen

$$y'(x) = -\left(\frac{1}{6} + \frac{\pi\sin(\pi x)}{1.6 - \cos(\pi x)}\right) y(x) \qquad \text{med} \qquad y(0) = 2.5$$

**a)** Beräkna värdet av $y(6)$ som Eulers metod ger med steglängden 0.5. Plotta resultatet för $y(x)$ för $0 \le x \le 6$. Prova även några andra steglängder.

**b)** Hur många gånger måste steglängden halveras i Eulers metod för att man ska få värdet på $y(6)$ med 1 säker decimal med Eulers metod. Vilken steglängd har du då?

**c)** Om man gör tre omgångar Richardson-extrapolation på Euler-resultaten från steghalveringarna i deluppgift a och b, hur många säkra decimaler får man då?

---

*Lämna in i Canvas:* Svar på 8a (dvs $y(6)$ med steget 0.5) och 8bc. Ingen kod behöver lämnas in.

---

9. **Numerisk integration: rotationssymmetrisk lur**

Konturen $y(x)$ för en rotationssymmetrisk lur (eller blomvas) definieras av differentialekvationen i uppgift 8. Luren uppstår genom att kurvan $y(x)$ roteras kring $x$-axeln och rotationsvolymen är
$V = \pi \int_0^L y^2\,dx$.

Egenskrivna rutiner för att lösa diffekvationen och skatta integralen krävs här.

**a)** Vi önskar beräkna volymen för en lur med axel-längden $L = 6.00$ (dvs $0 \le x \le L$) Börja med att numeriskt lösa differentialekvationen och använd sedan de erhållna $y(x)$-värdena för att beräkna volymen med minst 4 säkra siffror. (*Tips: Euler eller Runge-Kutta följt av trapetsregeln? ) Använd några olika steglängder. Hur många siffror verkar tillförlitliga? Vilka kontroller har du gjort för att våga tro på dem? Ange din beräknade volym med felgräns.*

**b)** *Om du halverar steget i din ode-lösare i ditt program, med vilken faktor ska felet avta?*

**c)** *Vi vill nu beräkna vilket L som behövs för en lur vars volym bara är 65% av den volym man får med* $L = 6.00$ *Vilka numeriska metoder tänker du använda? Vilka delmoment måste ingå i beräkningen? Hur kan du återanvända tidigare skriven kod? Skriv en kort plan för hur du tänker bygga upp ditt program.*

**d)** *Skriv ett program som beräknar detta nya L-värde. med minst 3 decimaler (enligt planen ovan).*
*(En effektiv (egenskriven) metod krävs! Tips: sekantmetoden eller interpolation? Tänk på vad som bidrar till felgränsen och hur du skattar den. Tänk igenom hur du ska bygga upp ditt program!)*

**e)** *En fin tredimensionell bild av luren gör man så här: Låt* `x` *och* `f` *vara kolumnvektorer för konturkurvan* $y(x)$. *(Ta inte med för många värden, ca 40 värden i vektorerna är lämpligt). Skapa en radvektor* `fi` *för rotationsvinkeln* $0 \le \varphi \le 2\pi$ *med lagom steg, t ex* $2\pi/30$. *Bilda matriser X, Y och Z:*

```
X=x*ones(size(fi)); Y=f*cos(fi); Z=f*sin(fi);
```

*Skriv* `mesh(X,Y,Z)` *som ger en nätfigur eller* `surf(X,Y,Z)` *som ger en fylld 3D-figur.*

————————————————————————————-

*Lämna in i Canvas: Kod på 9d. Svar på 9a (volymen, med felgräns) och 9d (värdet på L, med felgräns).*

————————————————————————————-

Laborant: ........................................

Uppgift 9 (Lab1) godkänd (datum, lärarsign): ........................................

————————————————————————————

*Exempel på egenskriven funktion i Matlab med flera parametrar:*

```
function [f,d]=funkder(x,a,b,c);
   f=a+b*x+c*x.*x;
   d=b+2*c*x;
end
```