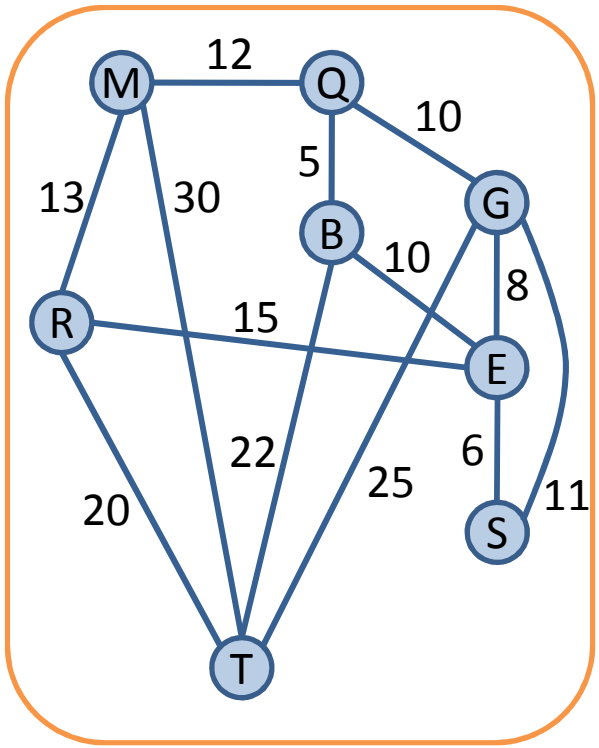
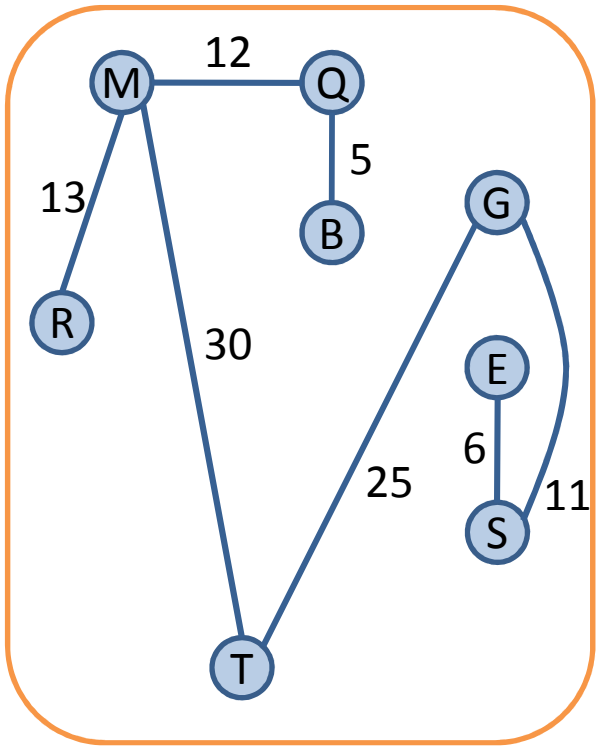
Árboles generadores de coste mínimo

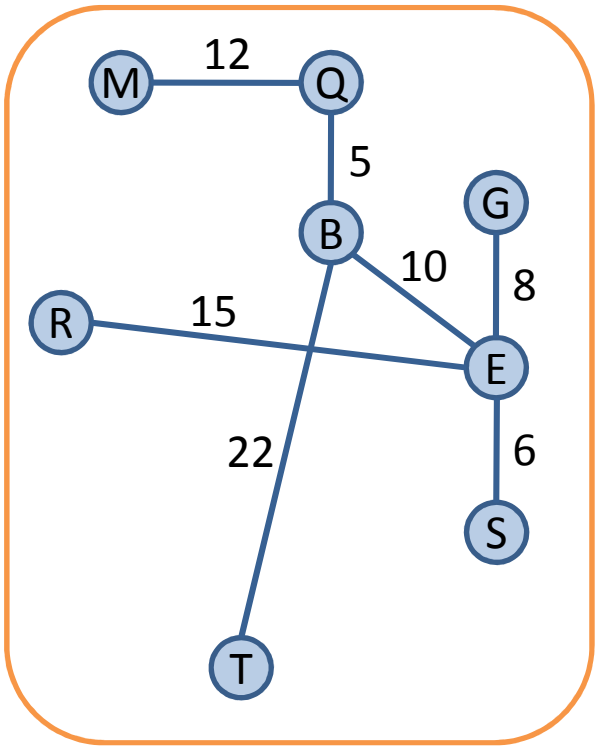
Dado un grafo no dirigido y conexo G = (V, A), se define un **árbol generador** (o de expansión) **de G** como un árbol que conecta todos los vértices de V; su coste es la suma de los costes de las aristas del árbol. Un árbol es un grafo conexo acíclico.



Grafo G



Árbol generador de G
Coste = 102



Árbol generador de G
Coste = 78

Árboles generadores de coste mínimo
Algoritmo de Prim

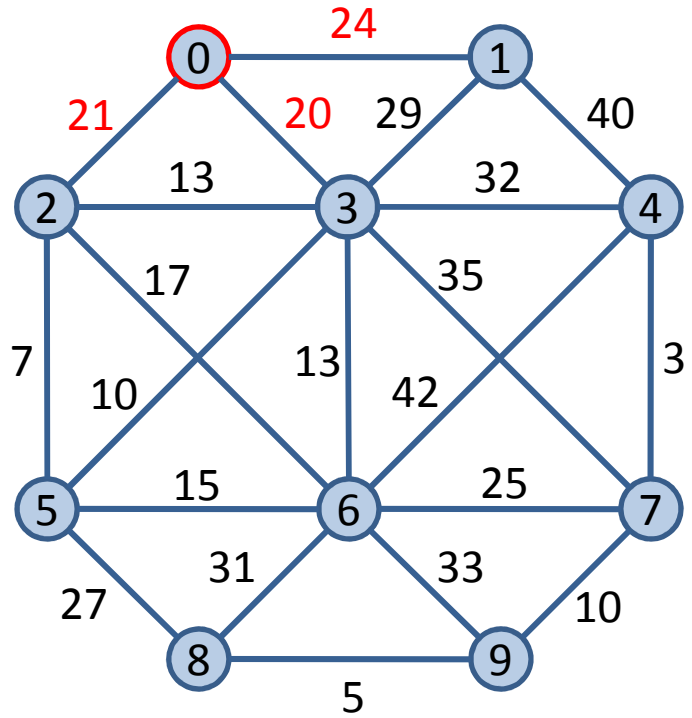
```
template <typename T> class GrafoP {
public:
   typedef T tCoste;
   typedef size_t vertice;
   struct arista {
      vertice orig, dest;
      tCoste coste;
      explicit arista(vertice v=vertice(), vertice w=vertice(),
             tCoste c=tCoste()): orig(v), dest(w), coste(c) {}
      // Orden de aristas para Prim y Kruskall
      bool operator <(const arista& a) const
      { return coste < a.coste; }
   };
   // resto de miembros de la clase GrafoP<T> ...
};
```

```
#include "apo.h"

template <typename tCoste>
GrafoP<tCoste> Prim(const GrafoP<tCoste>& G)
// Devuelve un árbol generador de coste mínimo
// de un grafo no dirigido ponderado y conexo G.
{
   typedef typename GrafoP<tCoste>::vertice vertice;
   typedef typename GrafoP<tCoste>::arista arista;
   const tCoste INFINITO = GrafoP<tCoste>::INFINITO;

   arista a;
   const size_t n = G.numVert();
   GrafoP<tCoste> g(n);      // Árbol generador de coste mínimo.
   vector<bool> U(n, false); // Conjunto de vértices incluidos en g.
   Apo<arista> A(n*(n-1)/2-n+2); // Aristas adyacentes al árbol g
                                 // ordenadas por costes.
```

```
   U[0] = true;   // Incluir el primer vértice en U.
   // Introducir en el APO las aristas adyacentes al primer vértice.
   for (vertice v = 1; v < n; v++)
      if (G[0][v] != INFINITO)
         A.insertar(arista(0, v, G[0][v]));
   for (size_t i = 1; i <= n-1; i++) {     // Seleccionar n-1 aristas.
      // Buscar una arista a de coste mínimo que no forme un ciclo.
      // Nota: Las aristas en A tienen sus orígenes en el árbol g.
      do {
         a = A.cima();
         A.suprimir();
      } while (U[a.dest]); // a forma un ciclo (a.orig y a.dest
                           // están en U y en g).
      // Incluir la arista a en el árbol g y el nuevo vértice u en U.
      g[a.orig][a.dest] = g[a.dest][a.orig] = a.coste;
      vertice u = a.dest;
      U[u] = true;
      // Introducir en el APO las aristas adyacentes al vértice u
      // que no formen ciclos.
      for (vertice v = 0; v < n; v++)
         if (!U[v] && G[u][v] != INFINITO)
            A.insertar(arista(u, v, G[u][v]));
   }
   return g;
}
```

Algoritmo de Prim
Ejemplo

Inicialización

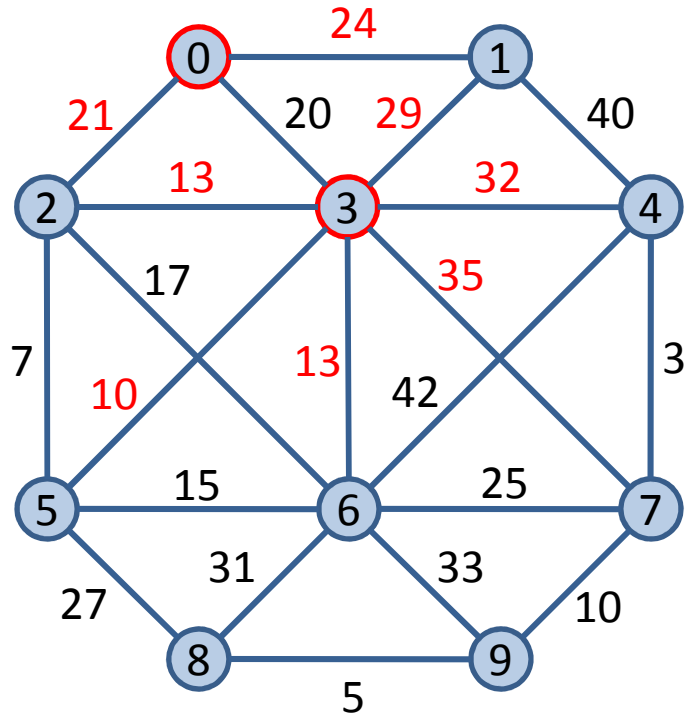


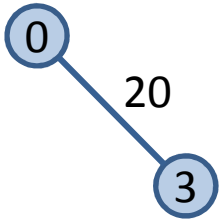
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
U	T	F	F	F	F	F	F	F	F	F

En rojo las aristas que hay en el APO A ordenadas por coste.

Algoritmo de Prim
Ejemplo

i = 1 a = (0, 3, 20)

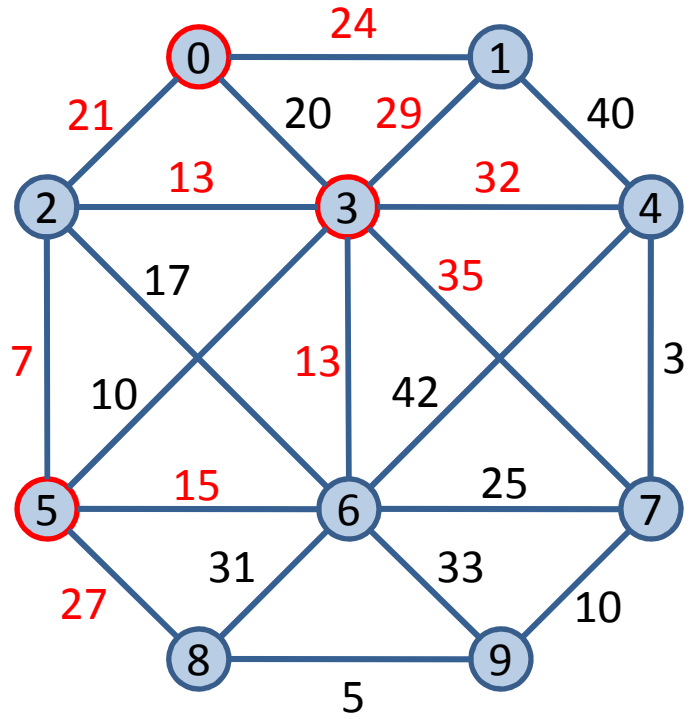


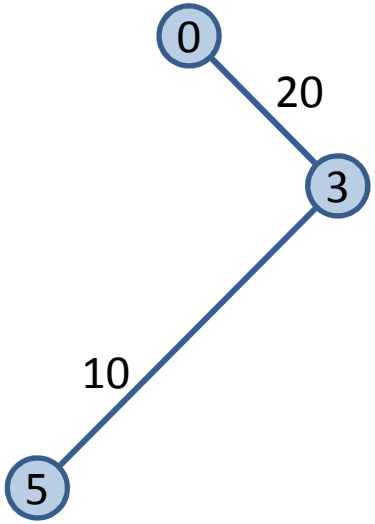


	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
U	T	F	F	T	F	F	F	F	F	F

Algoritmo de Prim
Ejemplo

i = 2 a = (3, 5, 10)

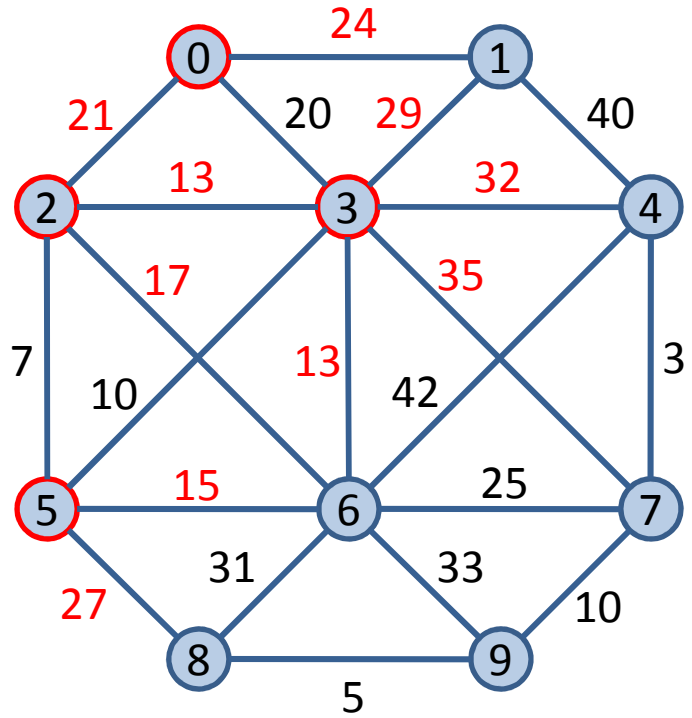


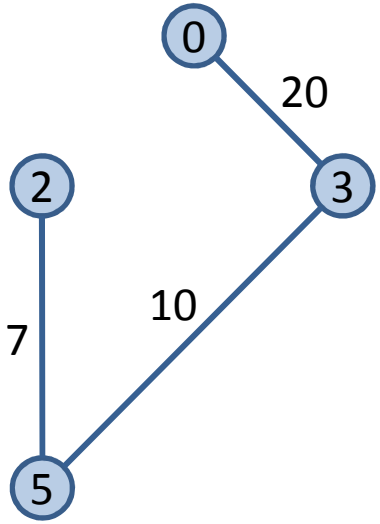


	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
U	T	F	F	T	F	T	F	F	F	F

Algoritmo de Prim
Ejemplo

i = 3 a = (5, 2, 7)

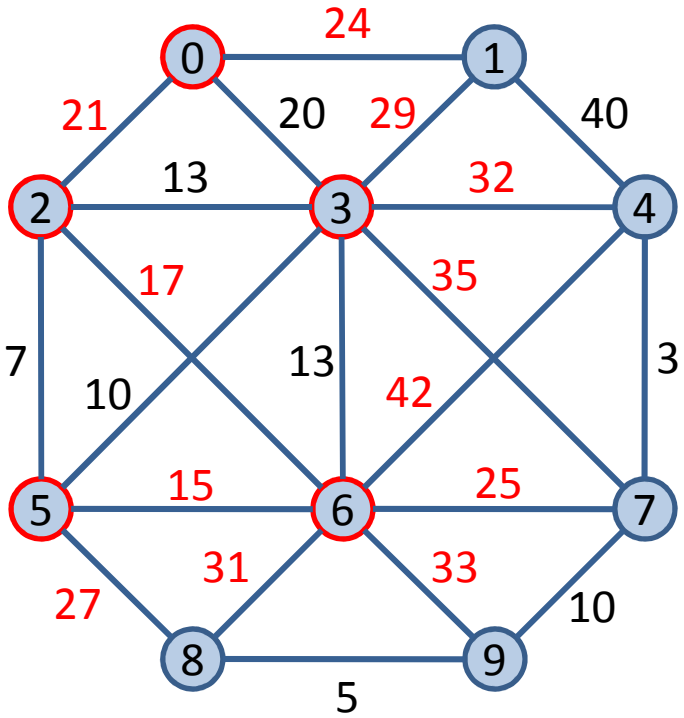


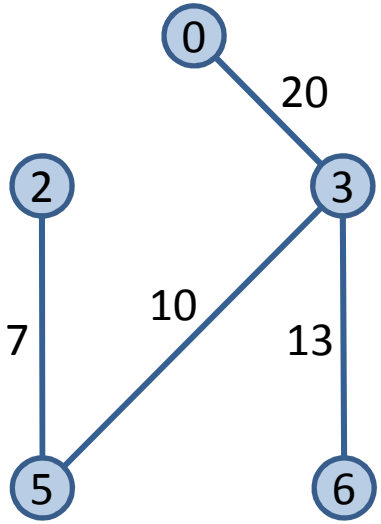


	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
U	T	F	T	T	F	T	F	F	F	F

Algoritmo de Prim
Ejemplo

i = 4 a = (3, 6, 13)

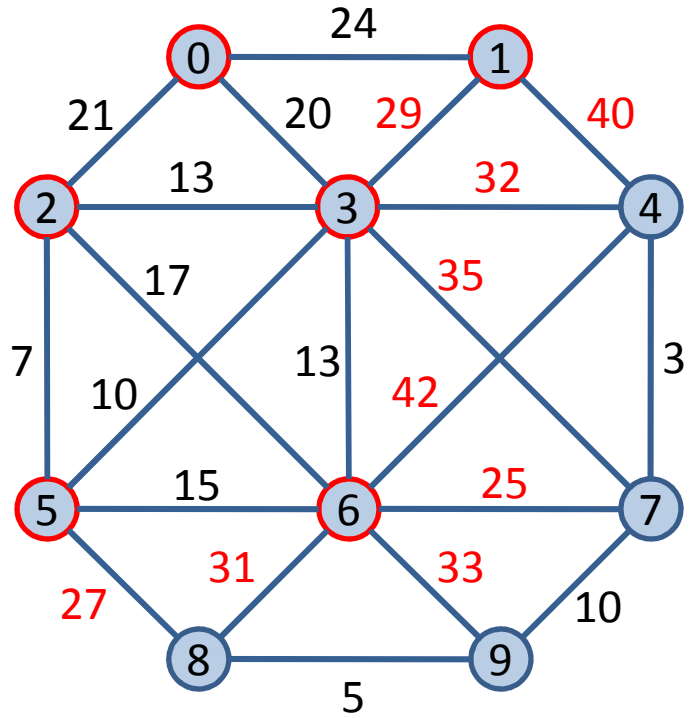


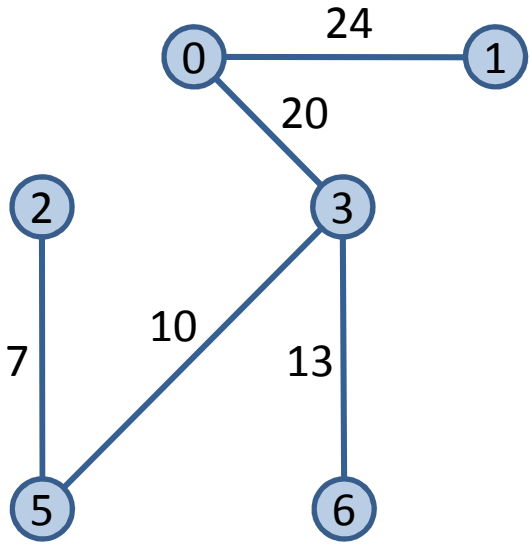


	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
U	T	F	T	T	F	T	T	F	F	F

Algoritmo de Prim
Ejemplo

i = 5 a = (0, 1, 24)

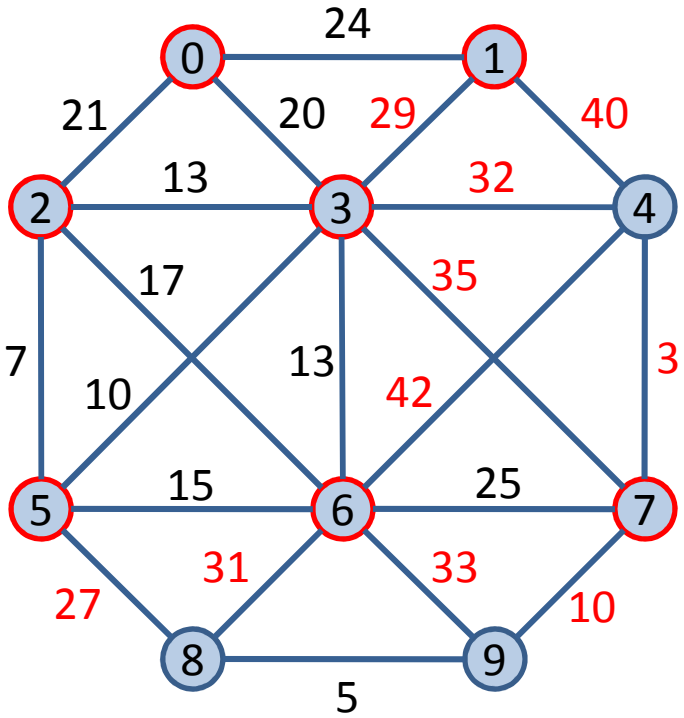


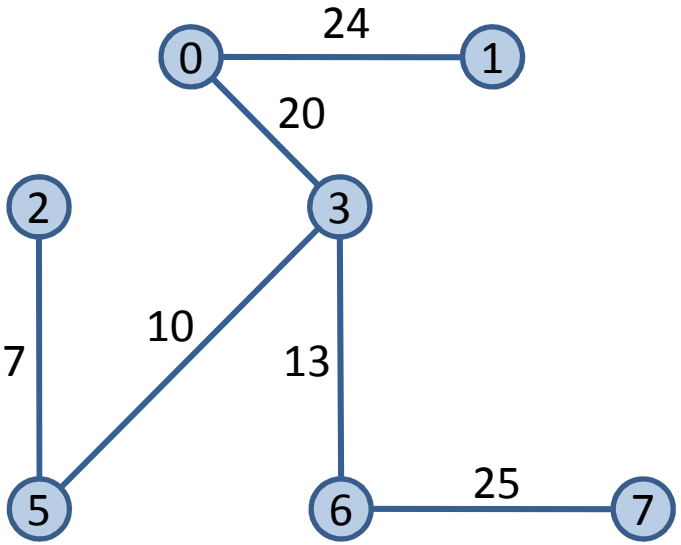


	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
U	T	T	T	T	F	T	T	F	F	F

Algoritmo de Prim
Ejemplo

i = 6 a = (6, 7, 25)

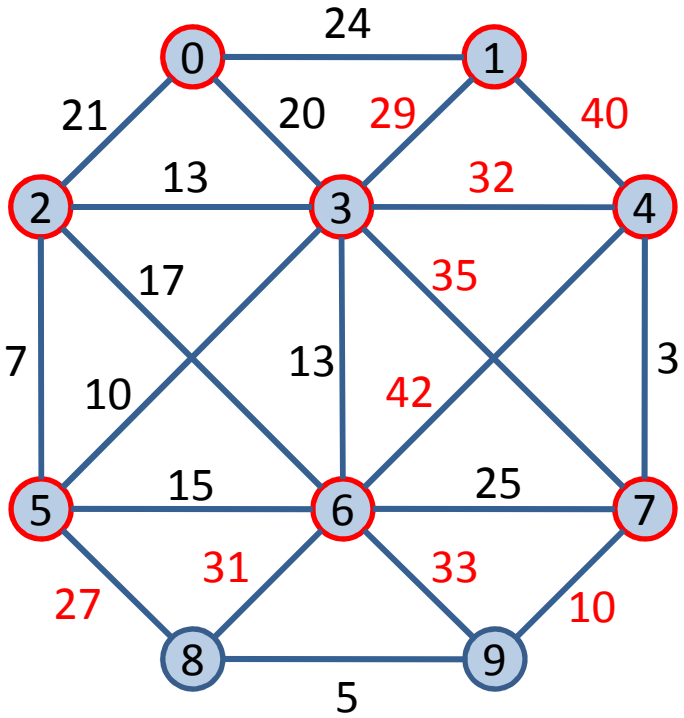


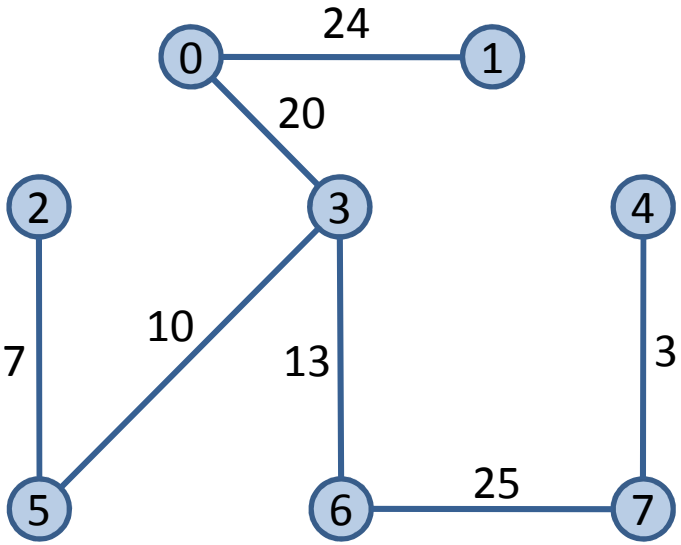


	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
U	T	T	T	T	F	T	T	T	F	F

Algoritmo de Prim
Ejemplo

i = 7 a = (7, 4, 3)

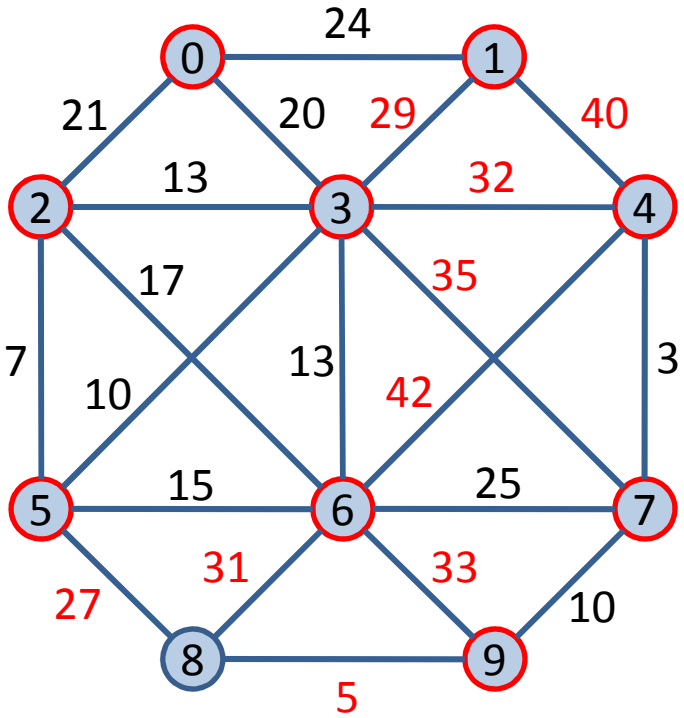


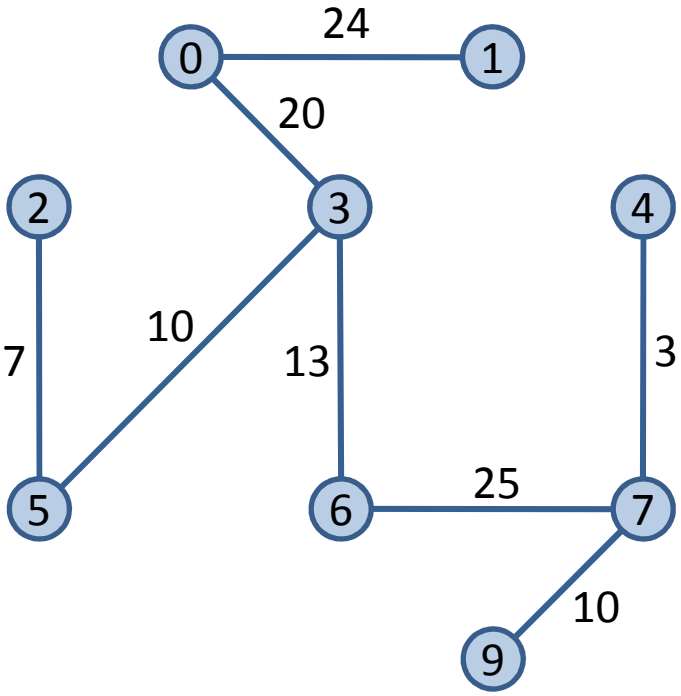


	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
U	T	T	T	T	T	T	T	T	F	F

Algoritmo de Prim
Ejemplo

i = 8 a = (7, 9, 10)

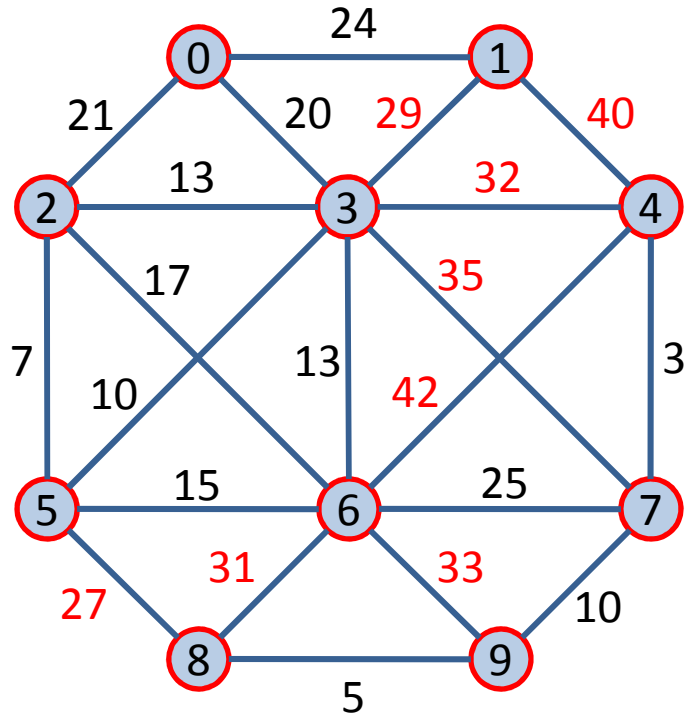


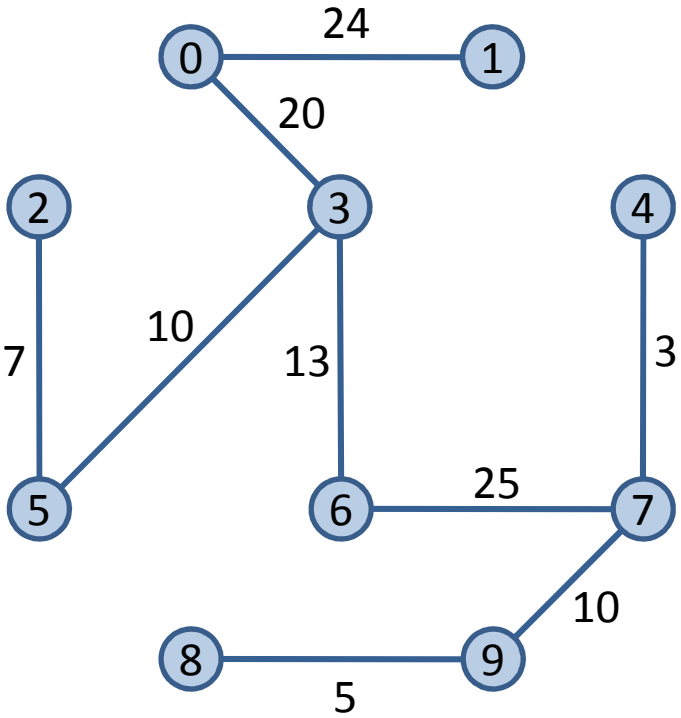


	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
U	T	T	T	T	T	T	T	T	F	T

Algoritmo de Prim
Ejemplo

i = 9 a = (9, 8, 5)





	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
U	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T