线性代数 B 的一部分复习题

1. 二次型经过可逆线性变换不改变正定性。
2. 若 $3\mathbf{A}+2\mathbf{E}$ 不可逆，则 $\mathbf{A}$ 有特征值____________ ；
3. A 为 3 阶方阵, 且 $|A|=-4$, 则 $|2A^*-4A^{-1}|$=____________.
4. 二次型 $f=2x_1^2+10x_2^2+8x_3^2+8x_1x_2-2tx_2x_3$ 为正定的充要条件是 t 满足条件____________.
5. A 为 3 阶方阵, 且 $|A|=3$, 则 $|-3A^*A^{-1}|$=____________.
6. $\mathbf{A}$ 为 6×7 矩阵，齐次方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的任意一个解均可由解向量 $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2$ 线性表示，且 $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2$ 线性无关，则 $R(\mathbf{A})$=.
7. 向量组施密特正交化
8. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 3a\\ 1 & a & 2\end{pmatrix}$， $\mathbf{B}$ 是 3×5 矩阵， $\mathbf{B}\neq\mathbf{O}$， 且 $\mathbf{AB}=\mathbf{O}$，求 a 。
9. 若方阵 A 满足, $A^2+3A-7E=O$， 则 $(A-E)^{-1}$=____________.
10. β_1,β_2 为非齐次方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 的两个不同的解，则齐次方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的一个非零解为.
11. 已知 3 阶方阵 $\mathbf{A}$ 的三个特征值为 $-5,4,2$，则 $|\mathbf{A}|$=.
12. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$， $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$,求 $|2\mathbf{AB}^T-3\mathbf{E}|$.
13. 设 A,B 为 n 阶方阵, 如果 A 不可逆，则 $2BA$ 一定不可逆，上述结论是否正确，说明理由.
14. 已知向量组 $\alpha_1=(1,1,0)^T$, $\alpha_2=(0,2,1)^T$, $\alpha_3=(3,0,4)^T$,满足 $2\alpha_1+5\alpha=3\alpha_2-2\alpha_3$,求 α .
15. A 为 3 阶方阵, 且 $|A|=-5$, 则 $|-4A^{-1}|$=____________.
16. 设 α_1,α_2 线性相关, 则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性___________. (填写: 无关或相关)
17. $\mathbf{A}$ 为 3×4 矩阵， $R(\mathbf{A})=3$， β_1,β_2 为非齐次方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 的两个不同的解, 则 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 任意一个解均可表示为________.
18. $\mathbf{A}$ 为 2 阶方阵, 已知 $2\mathbf{A}-3\mathbf{E}$， $5\mathbf{A}+\mathbf{E}$ 都不可逆, 则 $\mathbf{A}$ 的 2 个特征值为____________.

19. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\2&3\end{pmatrix}$， $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&1\end{pmatrix}$,求$\left|\mathbf{BA}^T-\mathbf{AB}^T\right|$.

20. 设A为m阶方阵, 如果两个不同的向量x,y满足$Ax=Ay$，是否可以判断A为降秩阵, 说明理由.

21. A为 3 阶方阵, 其列向量为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$, 且$\alpha_1+3\alpha_2+4\alpha_3=0$，判断$A$是否可逆, 说明理由.

22. 计算AA^*和$\det A^*$的值.

23. λ_1,λ_2为矩阵A的不同特征值, 对应的特征向量分别为p_1,p_2, 问p_1能否也是对应于λ_2的特征向量，说明理由.

24. 若$A^TA=E$，且$|A|\geq 0$，则$|A|=$____________.

25. A为可逆方阵, B为A的逆矩阵, 判断A^5是否可逆, 若可逆, 说明理由, 并将A^5的逆矩阵用B表示出来；若不可逆, 说明理由.

26. 对于向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$，其中$\alpha_1,\alpha_2$均可由$\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$线性表示, 则向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$的秩最大为__________.

27. $\mathbf{A}$为 2 阶方阵，已知$\mathbf{A}-3\mathbf{E}$，$2\mathbf{A}+3\mathbf{E}$都不可逆，则$|\mathbf{A}+2\mathbf{E}|=$（5/2）。

28. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-3&2&1\\0&0&3\end{pmatrix}$,求$\left|2\mathbf{A}-\mathbf{A}^*\right|$.

29. 矩阵A的一个特征值为 5，p是对应的特征向量. 能否据此找到矩阵$A-2E$的一个特征值和对应的特征向量？如果能请写出依据与结论.（参考$|3E-(\mathbf{A}-2E)|=|5E-\mathbf{A}|=0$）。

30. 对于线性方程组

$$\begin{cases}2x_1+2x_2+\lambda x_3=8\\-2x_1+\lambda x_2+2x_3=0\\x_1+x_2+x_3=4\end{cases}$$

（1）λ为何值时, 有唯一解；
（2）λ为何值时, 无解；
（3）λ为何值时, 有无穷多解.

30. 对于线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1+2x_2+\lambda x_3=8 \\ -2x_1+\lambda x_2+2x_3=0 \\ x_1+x_2+x_3=\mu \end{cases}$$

（1） λ,μ 为何值时，有唯一解；

（2） λ,μ 为何值时，无解；

（3） λ,μ 为何值时，有无穷多解.

32 $f=(x_1+5x_2+7x_3)^2-2(x_2+3x_3)^2-6x_3^2$ 的正惯性指数、负惯性指数是多少。（答案：1 和 2。因线性变换不改变正、负惯性指数。）

32 考虑反证法

33 设 A 为方阵，且 $AB\neq 0, B\neq 0$。则 A 的行列式如何。

34 非齐次线性方程组得解与相应齐次线性方程组解之间的关系。

35 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$,求 $|\mathbf{A}-\mathbf{A}^*|$.

36 设 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -7 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$，求解矩阵方程 $\mathbf{AX}-3\mathbf{B}=3\mathbf{X}$.

37 矩阵 A 的一个特征值为 100， p 是对应的特征向量. 能否据此找到矩阵 $A-5E$ 的一个特征值和对应的特征向量？（参考 $|100E-A|=|95E-(A-5E)|$ ）。

38 对于向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$，其中 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 均可由 $\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 线性表示，则向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 的秩最大为__________。若 α_1,α_2 均可由 $\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 线性表示，则向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 的秩最大为__________。

39 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & a & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ 相似，

（1） 求 a,b；（$a=-5/2, b=-9/2$）

（2） 求正交矩阵P，使$P^{-1}AP=B$。（$P=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2/\sqrt{13} & -3/\sqrt{13}\\ 0 & 3/\sqrt{13} & 2/\sqrt{13}\end{pmatrix}$）

40 二次型 $f=x_1^2+3x_2^2+tx_3^2+2x_1x_2+2tx_2x_3$为正定的充要条件是$t$满足（ ）。

线性代数 B 考试重要考点

1 行列式计算。
2 矩阵、向量运算。
3 给一个向量组，求向量组的秩、最大线性无关组、用最大线性无关组表示其余向量。
4 解方程组
（1） 含参数的非齐次线性方程组（含 1 或 2 个，但比较简单）;
（2） 用基础解系、特解方法解非齐次线性方程组。
（3） 含参数的齐次线性方程组求基础解系
5 利用逆矩阵解矩阵方程。
6 用正交变换把二次型化为标准型。
7 判断正定性（包括定义和充要条件）。
8 用施密特正交化方法把向量组化为标准正交向量组。
9 齐次线性方程组系数矩阵的秩与基础解系所含向量个数的关系。
10 特征值、特征向量的定义、性质
11 方阵行列式与特征值之间的关系
12 根据行或列向量组的线性相关性判断矩阵是否可逆，说明理由
13 已知方阵 $\mathbf{A}$ 的特征值，会求矩阵多项式 $f(\mathbf{A})$ 的特征值。
14 熟悉行列式的性质。
15 伴随矩阵的性质，会求伴随矩阵的行列式、矩阵乘积的行列式。
16 非齐次线性方程组得解与相应齐次线性方程组解之间的关系。
17 矩阵可逆的充要条件。
18 向量部分组的线性相关性与整体向量组的线性相关性之间的关系。