一、填空（每空 3 分，共 15 分）

1 设行列式 $D=\begin{vmatrix}3&0&4&0\\2&2&2&2\\0&-7&0&0\\5&3&-2&2\end{vmatrix}$，则行列式第 4 行各元素余子式之和的值为________。

2 设 $A=\begin{bmatrix}0&1&0\\3&3&4\\4&5&5\end{bmatrix}$，则 $\left(A^{*}\right)^{-1}=$_________。

3 已知 n 阶方阵 A 满足：$A^2+A-4E=0$，则 $A^{-1}=$____________。

5 设 $A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&x&2\\0&2&3\end{bmatrix}$ 与 $B=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&y\end{bmatrix}$ 相似，则 $x=$_____，$y=$_____。

6 设 $A=\begin{bmatrix}2&t&-1\\t&2&-1\\-1&-1&1\end{bmatrix}$ 为正定矩阵，则 t 应满足__________。

8 已知 3 阶方阵 A 的 3 个特征值为 1，-2，3，则 A^2+2A+E 的特征值为_____________。

9 已知 R^3 的一个基为 $\alpha_1=(1,\ 1,\ 1)^T$，$\alpha_2=(1,\ 1,\ 0)^T$，$\alpha_3=(1,\ 0,\ 0)^T$，则向量 $\alpha=(3,\ 2,\ 1)^T$ 在这个基下的坐标是___________。

二、选择（每小题 3 分，共 15 分）

1. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是齐次线性方程组 $AX=0$ 的一个基础解系，则（　　）也是该方程组的基础解系。

A　$\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3,2\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$

B　$\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3,\alpha_1+\alpha_2+5\alpha_3,4\alpha_1+\alpha_2-2\alpha_3$

C　$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$

D　$\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$

2. 若行列式 $\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=d$，则 $\begin{vmatrix}4a_{11}-3a_{12}&2a_{12}&a_{13}\\4a_{21}-3a_{22}&2a_{22}&a_{23}\\4a_{31}-3a_{32}&2a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=$__________

A　4d　　B　8d　　C　-3d　　D　d

3. 设 A 为 $m\times n$ 矩阵，且 $R(A)=r$，则非齐次线性方程组 $Ax=b$_________

A　当 $r=m$ 时，方程组 $Ax=b$ 有解；

B　当 $r=n$ 时，方程组 $Ax=b$ 有唯一解；

C　当 $m=n$ 时，方程组 $Ax=b$ 有无穷多解；

D　当 $r<n$ 时，方程组 $Ax=b$ 有无穷多解；

4. 若 A，B 为 n 阶正交矩阵，则___________

A　AB,A+B 均为正交矩阵；　B　AB,A+B 均为非正交矩阵；

C　AB 为非正交矩阵，A+B 为正交矩阵；　D　AB 为正交矩阵，A+B 为非正交矩阵；

5. 设向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots\alpha_m$ 的秩为 r，则________.

A. A 中任意 r 个向量线性无关;

B. A 中任意 r 个向量线性相关;

C. A 中任意 $r+1$ 个向量线性相关;

D. A 中任意 $r-1$ 个向量线性相关

三、计算下列行列式的值（每小题 6 分，共 12 分）

1. $$D_n = \begin{vmatrix} x_1 - m & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 - m & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n - m \end{vmatrix}$$

2. $$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ -1 & -4 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

四、求下列向量组的秩和一个最大无关组，并把其余向量用最大无关组线性表示（12 分）

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}，\alpha_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}，\alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}，\alpha_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

五、（10 分）设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 7 & 1 \end{bmatrix}$，求矩阵 X，使 $AX = A + X$ 。

六、（12 分）λ 为何值时，线性方程组 $\begin{cases} 2x_1+\lambda x_2-x_3=1 \\ \lambda x_1-x_2+x_3=2 \\ 4x_1+5x_2-5x_3=-1 \end{cases}$ 有唯一解？无解？无穷多解？ 并在无穷解时求其通解（用导出组的基础解系表示）

七、（12 分）用正交变换化二次型：

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-2x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+8x_1x_3+4x_2x_3$$ 为标准型。

八、（12 分）在线性空间 R^3 中给定两组基：$a_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, a_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$，$a_3=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$,和

$b_1=\begin{bmatrix}2\\0\\-1\end{bmatrix}$，$b_2=\begin{bmatrix}1\\2\\-2\end{bmatrix}$，$b_3=\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}$，（1）求由基 a_1,a_2,a_3 到基 b_1,b_2,b_3 的过渡矩阵 C；

（2）若向量

α 在基 b_1,b_2,b_3 下的坐标为 $\begin{bmatrix}2\\2\\-2\end{bmatrix}$，求 α 在基 a_1,a_2,a_3 下的坐标。