线性代数 B 复习题

一 行列式及矩阵

1 行列式$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & x & 0 \\ 1 & 5 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$中元素$x$的代数余子式的值是__________。

2 行列式$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ 25 & 9 & 4 \end{vmatrix} =$ __________。

3 计算行列式$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & 7 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & 3 \end{vmatrix}$。

4 计算行列式$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$。

5 计算行列式$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 2 & -3 \\ 16 & 25 & 4 & 9 \\ 64 & 125 & 8 & -27 \end{vmatrix}$。

6 设A为 3 阶方阵，且已知$|-2A| = 2$，则$|A| =$________.

7 设A为 3 阶方阵，若$\left|A^T\right| = 2$，则$|-3A| =$________.

8 设 3 阶方阵$A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$，其中$\alpha_i (i = 1,2,3)$为$A$的列向量，且$|A| = 2$，则

$|B| = \left|(2\alpha_1, 3\alpha_2, \alpha_1 + \alpha_3)\right| =$________.

9 设矩阵$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$，则$A^T B =$__________.

10 设A为 2 阶矩阵，将A的第 2 行的 2 倍加到第 1 行得到矩阵B.若$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$，

则$A =$__________.

11 设 3 阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&0\\3&2&1\end{pmatrix}$，则 $A^{-1}=$____________.

12 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&0&0\\0&1&3\end{pmatrix}$，则 $A^{*}=$________。

13 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\4&7&1\end{pmatrix}$，则矩阵 A 的秩 $r(A)=$____________.

14 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}1&3\\2&0\\3&1\end{pmatrix}$, 求矩阵$X$使满足 $AXB=C.$

15 设 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&6&1\end{pmatrix}$，而 X 满足 $AX+E=A^2+X$，求 X.

16 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&3&2&0\\2&1&8&3&7\\3&-2&5&8&0\\2&-3&0&7&-5\end{pmatrix}$ 的秩.

二 向量

1. 已知向量 $2\alpha+\beta=(1,-2,-2,-1)^T,3\alpha+2\beta=(1,-4,-3,0)^T$, 则 $\alpha+\beta=$______

2. 向量组 $\alpha_1=(1,4,3,-2)^T$，$\alpha_2=(2,5,4,-1)^T$，$\alpha_3=(3,9,7,-3)^T$ 的秩是________.

3. 已知向量组 $\alpha_1=(1,2,3)^T$，$\alpha_2=(3,-1,2)^T$，$\alpha_3=(2,3,k)^T$ 线性相关, 则数 $k=$_________.

4. 求向量 $\beta=(3,-1,2)^T$ 在基 $\alpha_1=(1,1,2)^T$，$\alpha_2=(-1,3,1)^T$，$\alpha_3=(1,1,1)^T$ 下的坐标，并将 β 用此基线性表示.

5. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=(\alpha,2\gamma_2,3\gamma_3),\boldsymbol{B}=(\beta,\gamma_2,\gamma_3)$, 其中 $\alpha,\beta,\gamma_2,\gamma_3$ 均为 3 维列向量，且 $|\boldsymbol{A}|=18,|\boldsymbol{B}|=2$. 求 $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|$.

6. 求向量组 $\alpha_1=(1,-1,2,4)^T$，$\alpha_2=(0,3,1,2)^T$，$\alpha_3=(3,0,7,14)^T$，$\alpha_4=(1,-1,2,0)^T$.

求向量组的秩和一个极大线性无关组，并将其余向量用该极大线性无关组线性表示.

7．已知向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关，证明：$\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_3+\alpha_4$，$\alpha_4-\alpha_1$线性无关.

三 方程组

1 求解下列线性方程组

（1）$\begin{cases} x_1+5x_2-x_3-x_4=-1 \\ x_1-2x_2+x_3+3x_4=3 \\ 3x_1+8x_2-x_3+x_4=1 \\ x_1-9x_2+3x_3+7x_4=7 \end{cases}$　　（2）$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=7 \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=-2 \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=23 \\ 5x_1+4x_2-3x_3+3x_4-x_5=12 \end{cases}$

2. 参数λ取何值时, 方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3=\lambda-3 \\ x_1+\lambda x_2+x_3=-2 \\ x_1+x_2+\lambda x_3=-2 \end{cases}$$

(1)有惟一解?(2)有无穷多解?(3)无解?

3. 参数λ取何值时, 方程组

$$\begin{cases} (2-\lambda)x_1+2x_2-2x_3=1 \\ 2x_1+(5-\lambda)x_2-4x_3=2 \\ -2x_1-4x_2+(5-\lambda)x_3=-\lambda-1 \end{cases}$$

(1) 有惟一解?(2)有无穷多解?(3)无解?

四 特征值与特征向量

1 已知矩阵$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & x & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$的特征值为 1,2,3, 则$x=$__________.

2 已知三阶方阵A的特征值为$-1,-12,\frac{1}{3}$，则$|2A+3E|$=__________.

3 若$5A+4E$不可逆，则A有特征值_____________。

4 若A为 2 阶方阵，且$4A+3E$，$3A-2E$,都不可逆，

则$|2A-E|=$ ________________.

5 设方阵$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$相似于对角矩阵$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}$，则$t=$________.

6 已知$X=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$是矩阵$A=\begin{pmatrix}2&1&2\\2&b&a\\1&a&3\end{pmatrix}$的一个特征向量，求$a$，$b$的值。

7 设$A=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&-1\\1&0&0\end{pmatrix}$，

（1）求A的特征值和特征向量；

（2）求$E+A^{-1}$的特征值和特征向量。

五 二次型

1 设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2{x_1}^2+4{x_2}^2+2{x_3}^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$，则该二次型的秩等于__________.

2 设$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&k&0\\0&0&k^2\end{pmatrix}$是正定矩阵，则$k$应满足条件____________________.

3 二次型$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+5x_2+7x_3)^2-2(x_2+3x_3)^2-6{x_3}^2$是的正惯性指数

是______.

4 已知二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2{x_1}^2+2{x_2}^2+6{x_3}^2+4x_1x_3-2x_2x_3$

（1）写出该二次型对应的矩阵；

（2）求一个正交矩阵P，使得在正交变换$X=PY$下，将该二次型化为标准形，并写出此标准形。

（3）指出该二次型的秩及正定性。

5. 已知二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2{x_1}^2+{x_2}^2-4{x_3}^2-4x_1x_2-2x_2x_3$

（1）写出该二次型对应的矩阵；

（2）求一个正交矩阵P，使得在正交变换$X=PY$下，将该二次型化为标准形，并写出此标准形；

（3）指出该二次型的秩及正定性。