Лекция 22 от 22.02.2016

Деление многочленов с остатком

Пусть F – поле, $\mathbb{F}[x]$ –множество всех множеств от переменных x с коэффициентами из $\mathbb{F}$.

Теорема. *Пусть $G(x), H(x) \in \mathbb{F}[x]$ – ненулевые многочлены, тогда существует и единственная пара $Q(x), R(x) \in \mathbb{F}(x)$, такие что:*

1. $G(x) = Q(x) \cdot H(x) + R(x)$;
2. $degR(x) < degH(x)$

Доказательство. Аналогично делению рациональных чисел с остатком. □

Важный частный случай: $H(x) = x - a$ Вспомним теорему Безу:

Теорема. *Если $G(x), Q(x) \in \mathbb{F}[x]$ – ненулевые многочлены, $a \in \mathbb{F}$, то $G(x) = Q(x)(x-a) + R, R = G(a)$.*

Доказательство. $G(x) = Q(x) \cdot H(x) + R(x)$; $H(x) = x - a \Rightarrow degR < deg(x-a) \Rightarrow degR = 0$
Подставим $x = a$, получим: $G(a) = Q(a)(a-a) + R = 0 + R = R \Rightarrow G(a) = R$ □

Теорема. *Многочлен степени n в поле комплексных чисел имеет n комплексных корней.*

Доказательство. По основной теореме алгебры каждый многочлен $G(x) \in \mathbb{C}[x]$ степени больше 1 имеет корень. Тогда $G(x) = (x - a_1)G_1(x)$, где a_1 – корень многочлена $G(x)$. В свою очередь многочлен $G_1(x)$ также имеет корень и $G(x) = (x-a_1)G_1(x) = (x-a_1)(x-a_2)G_2(x) = \ldots = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)b_n$, где b_n – коэффициент при старшем члене. □

Получим, что $b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_0 = b_n(x-a_1)^k_1 \ldots (x-a_s)^k_s$

Определение. *Кратностью корня a_i называется число k_i, такое что в многочлене $b_n(x - a_1)^k_1 \ldots (x-a_s)^k_s$ множитель $(x - a_i)$ имеет степень k_i.*

Определение. *Пусть V – конечномерное векторное пространство над полем $\mathbb{F}$. $\varphi : V \to V$ – линейный оператор. Тогда характеристический многочлен φ имеет вид:*

$$\chi_\varphi(t) = (-1)^n \det(\varphi - tE) = \begin{pmatrix} a_{11} - t & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - t & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - t \end{pmatrix} = (-1)^n(t^n(-1)^n + \ldots) = t^n + \ldots$$

Упражнение. *c_{n-1} – коэффициент при t^{n-1}, c_0 – свободный член:*

$$c_{n-1} = -tr\varphi;$$

$$c_0 = (-1)^n \det \varphi.$$

Утверждение. *λ – собственное значение $\varphi \Leftrightarrow \chi_\varphi(\lambda) = 0$.*

Доказательство. λ – собственное значение $\Leftrightarrow \exists v \neq 0 : \varphi(v) = \lambda v \Leftrightarrow A\varphi v - \lambda E v = 0 \Leftrightarrow (A\varphi - \lambda E)v = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Ker}(\varphi - \lambda E) \neq \{0\} \Leftrightarrow \det(\varphi - \lambda E) = 0 \Leftrightarrow \chi_\varphi(\lambda) = 0.$ □

Утверждение. *Если $\mathbb{F} = \mathbb{C}, \dim V > 0$, то любой линейный оператор собственный вектор.*

Доказательство. Пусть $\varphi : V \to V$ – линейный оператор. У него существует характеристический многочлен $\chi_\varphi(x)$. Тогда по основной теореме алгебры у $\chi_\varphi(x)$ есть корень t_0 – собственное значение φ, следовательно существует и собственный вектор v_0 с собственным значением t_0. □

Пример. *Для линейного оператора* $\varphi = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *(поворот на* 90° *градусов против часовой стрелки относительно начала координат), характеристический многочлен имеет вид:* $\chi_\varphi(x) = t^2 + 1$.
При $\mathbb{F} = \mathbb{R} \Rightarrow$ *собственных значений нет.*
При $\mathbb{F} = \mathbb{C} \Rightarrow$ *собственные значения* $\pm i$.

Определение. *Пусть* λ *– собственное значение* φ*, тогда* $V_\lambda = \{v \; inV \mid \varphi v = \lambda v\}$ *– собственное подпространство (пространство, состоящее из собственных векторов с собственным значением* λ *и нуля).*

Определение. $\dim V_\lambda$ *– геометрическая кратность собственного значения* λ.

Определение. *Если* k *– кратность корня (определение см. выше,* $(x - a_k)^k$*), то* k *– алгебраическая кратность корня.*

Утверждение. *Геометрическая кратность не больше алгебраической кратности.*

Доказательство. Зафиксируем базис $u_1, \ldots, u_p$ в пространстве $V_\lambda(p = \dim V_\lambda)$. Дополним базис $u_1, \ldots, u_p$ до базиса $u_1, \ldots, u_p, u_{p+1}, \ldots, u_n$ пространства V. Матрица линейного оператора φ будет выглядеть следующим образом:
(тут должна быть блочная матрица)

$$\chi_\varphi(t) = (-1)^n \text{блочная матрица} = (-1)^n (\lambda - t)^p \dim(B - tE)$$

$\chi_\varphi(t)$ имеет корень кратности хотя бы p, следовательно геометрическая кратность $= p \leqslant$ алгебраическая кратность. □

Пример. *Когда алгебраическая кратность больше геометрической. Для линейного оператора*
$\varphi = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
$V_2 =< e_1 >\Rightarrow$ *геом. кратность* $= 1, \chi_\varphi(t) = (t-2)^2 \Rightarrow$ *алг. кратность* $= 2$.

Определение. *Пусть* $\{U_1, \ldots, U_k \subseteq V\}$*. Прямая сумма нескольких пространств – это* $U_1 + \ldots + U_k = \{u_1 + \ldots + u_k \mid u_i \in U_i\}$

Упражнение. $U_1 + \ldots + U_k$ *– подпространство.*

Определение. *Сумма называет прямой, если* $U_1 + \ldots + U_k = 0 \Rightarrow U_1 = \ldots = U_k = 0$.

Упражнение. *Если* $v \in U_1 \oplus \ldots \oplus U_k$*, то существует и единственный набор* $u_1 \in U_1, \ldots, u_k \in U_k : v = u_1 + \ldots + u_k$.

Теорема. *Следующие условия эквивалентны:*

1. *Сумма* $U_1 + \ldots + U_k$ *– прямая;*

2. *Если* $\mathbb{e}_i$ *– базис* $U_i(\mathbb{e}_i \cap \mathbb{e}_j)$*, то* $\mathbb{e} = \mathbb{e}_1 \cup \ldots \cup \mathbb{e}_k$ *– базис* $U_1 + \ldots + U_k$;

3. $\dim(U_1 + \ldots + U_k) = \dim U_1 + \ldots + \dim U_k$.

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Сумма $U_1 + \ldots + U_k$ прямая. Покажем, что $\mathbb{e}_1 \cup \ldots \cup \mathbb{e}_k$ – базис $U_1 + \ldots + U_k$.
Если $v \in U_1 \oplus \ldots \oplus U_k$, то $v = u_1 + \ldots + u_k = \{u_i \in U_i\} = c_1^1 e_1^1 + \ldots + c_{s_1}^1 e_{s_1}^1 + \ldots + c_1^k e_1^k + \ldots c_{sk}^k e_{sk}^k$, но $\mathbb{e}$ – базис.
Пусть существует два представления, тогда вычтем из одного второе. По определению прямой суммы каждый вектор равен нулю, следовательно коэффициенты при них равны.
(2) $\Rightarrow$ (1). Пусть $\mathbb{e} = \mathbb{e}_1 \cup \ldots \cup \mathbb{e}_k$ – базис $U_1 + \ldots + U_k$. Пусть $0 = u_1 + \ldots + u_k$. Разложим по базисам:
$0 = c_1^1 e_1^1 + \ldots + c_{s_1}^1 e_{s_1}^1 + \ldots + c_1^k e_1^k + \ldots c_{sk}^k e_{sk}^k$, следовательно все коэффициенты равны 0 и $u_1 = 0 = u_k$.
(2) $\Rightarrow$ (3). Пусть $\mathbb{e} = \mathbb{e}_1 \cup \ldots \cup \mathbb{e}_k$ – базис $U_1 + \ldots + U_k$. $\dim(U_1 + \ldots + U_k) = \dim(\mathbb{e}) = \dim(\mathbb{e}_{\mathbb{1}}) + \ldots + \dim(\mathbb{e}_{\mathbb{k}}) = \dim(U_1) + \ldots + \dim(U_k)$.
(3) $\Rightarrow$ (2). Пусть $\dim(U_1 + \ldots + U_k) = \dim U_1 + \ldots + \dim U_k$.
$\mathbb{e}$ порождает сумму, следовательно из $\mathbb{e}$ можно выделить базис суммы:
$\dim(U_1 + \ldots + U_k) \leqslant \dim(\mathbb{e}) \leqslant \dim(\mathbb{e}_{\mathbb{1}}) + \ldots + \dim(\mathbb{e}_{\mathbb{k}}) = \dim U_1 + \ldots + \dim U_k$. $\square$