Лекция 26 от 06.04.2016

Матрицы билинейных функций

Пусть V — векторное пространство, $\dim V < \infty$, $\beta\colon V \times V \to F$ — билинейная функция.

Определение. *Матрицей билинейной функции в базисе* $\mathbb{e}$ *называется матрица* $B = (b_{ij})$, *где* $b_{ij} = \beta(e_i, e_j)$. *Обозначение:* $B(\beta, \mathbb{e})$.

Пусть $x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n \in V$ и $y = y_1e_1 + \ldots + y_ne_n \in V$. Тогда:

$$\beta(x,y) = \beta\left(\sum_{i=1}^n x_ie_i, \sum_{j=1}^n y_je_j\right) = \sum_{i=1}^n x_i\beta\left(e_i, \sum_{j=1}^n y_je_j\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n y_j\beta(e_i,e_j) = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_ib_{ij}y_j =$$

$$= (x_1, \ldots, x_n)B\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \qquad (*)$$

Предложение.

1. *Всякая билинейная функция однозначно определяется своей матрицей в базисе* $\mathbb{e}$ *(и, следовательно, в любом другом базисе).*
2. *Для любой матрицы* $B \in M_n(F)$ *существует единственная билинейная функция* β *такая, что* $B = B(\beta, \mathbb{e})$.

Доказательство.

1. Уже доказано, это следует из формулы $(*)$.
2. Определим β по формуле $(*)$. Тогда β — это билинейная функция на V и ее матрица есть в точности B. Единственность следует из все той же формулы.

□

Замечание. *Эта биекция не имеет никакого отношения к биекции линейных операторов с квадратными матрицами.*

Пусть $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ и $\mathbb{e}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ — два базиса V, β — билинейная функция на V. Пусть также $\mathbb{e}' = \mathbb{e}C$, где C — матрица перехода, также $B(\beta, \mathbb{e}) = B$ и $B(\beta, \mathbb{e}') = B'$.

Предложение. $B' = C^TBC$.

Доказательство. Рассмотрим представление вектора $x \in V$ в обоих базисах.

$$\begin{matrix} x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n = (e_1, \ldots, e_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ x = x'_1e'_1 + \ldots + x'_ne'_n = (e'_1, \ldots, e'_n)\begin{pmatrix} {x'}_1 \\ \vdots \\ {x'}_n \end{pmatrix} \end{matrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} {x'}_1 \\ \vdots \\ {x'}_n \end{pmatrix}$$

Аналогично для $y \in V$:

$$\left.\begin{aligned} y &= (e_1, \ldots, e_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\ y &= (e'_1, \ldots, e'_n)\begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix} \end{aligned}\right. \Longrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix}.$$

Тогда, если мы транспонируем формулу для x, получаем:

$$\beta(x, y) = (x_1, \ldots, x_n)B\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (x'_1, \ldots, x'_n)C^T BC\begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix}.$$

Одновременно с этим:

$$\beta(x, y) = (x'_1, \ldots, x'_n)B'\begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix}.$$

Сравнивая эти две формулы, получаем, что $B' = C^T BC$. □

Следствие. *Число* $\operatorname{rk} B$ *не зависит от выбора базиса.*

Определение. *Число* $\operatorname{rk} B$ *называется рангом билинейной функции* β*. Обозначение:* $\operatorname{rk}\beta$*.*

Симметричные билинейные функции

Как и для линейных операторов, неплохо было бы научиться находить такой базис, в котором матрица B была бы проще. Но мы это сделаем только для некоторого класса билинейных функций.

Определение. *Билинейная функция называется симметричной, если* $\beta(x, y) = \beta(y, x)$ *для любый* $x, y \in V$*.*

Предложение. *Билинейная функция* β *симметрична тогда и только тогда, когда матрица* $B(\beta, \mathbb{e})$ *— симметрическая (т.е. она равна своей транспонированной).*

Доказательство. Пусть $B = B(\beta, \mathbb{e})$.

- $\Rightarrow$ $\beta(e_i, e_j) = b_{ij} = b_{ji} = \beta(e_j, e_i) \Rightarrow B$ симметрична.
- $\Leftarrow$ Пусть $x = x_1e_1 + \ldots x_ne_n$ и $y = y_1e_1 + \ldots + y_ne_n$. Также воспользуемся тем, что данная нам матрица симметрична, то есть равна своей транспонированной.

$$\beta(y, x) = (y_1, \ldots, y_n)B\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \left[(y_1, \ldots, y_n)B\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right]^T =$$

$$= (x_1, \ldots, x_n)B^T\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (x_1, \ldots, x_n)B\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \beta(x, y)$$

То есть $\beta(y, x) = \beta(x, y)$, что и означает, что β симметрична.

□

Квадратичные функции

Определение. *Пусть $\beta\colon V\times V\to F$ — билинейная функция. Тогда $Q_\beta\colon V\to F$, заданная формулой $Q_\beta(x)=\beta(x,x)$, называется квадратичной функцией (формой), ассоциированной с билинейной функцией β.*

Покажем, что такая квадратичная функция на самом деле является однородным многочленом степени 2 от n переменных. Пусть $\mathbb{e}=(e_1,\ldots,e_n)$ — базис V, $B=B(\beta,\mathbb{e})$, $x=(x_1,\ldots,x_n)$. Тогда:

$$Q_\beta(x)=(x_1,\ldots,x_n)V\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}x_ix_j$$

Квадратичную функцию удобно так представлять, но не определять.

Пример. *Здесь $\mathbb{e}$ — стандартный базис.*

1. $V=\mathbb{R}^n$, $\beta(x,y)=x_1y_1+\ldots+x_ny_n\ \Rightarrow\ Q_\beta(x)=x_1^2+\ldots+x_n^2$, $B(\beta,\mathbb{e})=E$.
2. $V=\mathbb{R}^2$, $\beta(x,y)=2x_1y_2\ \Rightarrow\ Q_\beta(x)=2x_1x_2$, $B(\beta,\mathbb{e})=\begin{pmatrix}0&2\\0&0\end{pmatrix}$.
3. $V=\mathbb{R}^2$, $\beta(x,y)=x_1y_2+x_2y_1\ \Rightarrow\ Q_\beta(x)=2x_1x_2$, $B(\beta,\mathbb{e})=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$.

Замечание. *Квадратичная функция задает билинейную функцию не однозначно (примеры 2 и 3).*

В дальнейшем нам понадобится делить на два. Поэтому далее предположим, что в нашем поле F можно делить на два. Что это означает? Заметим, что $2=1+1$, и, строго говоря, нельзя делить на ноль. Следовательно, наше условие можно переформулировать: рассматриваем такие поля F, в которых $1+1\neq 0$. В терминах поля, это уже гораздо более осмысленное и понятное условие.

Теорема. *Отображение $\beta\mapsto Q_\beta$ является биекцией между симметричными билинейными функциями на V и квадратичными функциями на V.*

Доказательство.
Сюръективность. Пусть β — билинейная функция. Рассмотрим тогда ассоциированную с ней квадратичную функцию $Q_\beta(x)=\beta(x,x)$. Пусть $\sigma(x,y)=\frac{1}{2}(\beta(x,y)+\beta(y,x))$ — симметричная билинейная функция на V. Тогда:

$$Q_\sigma(x)=\sigma(x,x)=\frac{1}{2}(\beta(x,x)+\beta(x,x))=\beta(x,x)=Q_\beta(x)$$

Итого, $Q_\sigma=Q_\beta$. Следовательно, отображение сюръективно.

Инъективность. Пусть $\beta(x,y)$ – симметричная билинейная функция. Аналогично, рассмотрим $Q_\beta(x)=\beta(x,x)$. Посмотрим на $Q_\beta(x+y)$:

$$Q_\beta(x+y)=\beta(x+y,x+y)=\beta(x,x)+\beta(x,y)+\beta(y,x)+\beta(y,y)=Q_\beta(x)+Q_\beta(y)+2\beta(x,y)$$

$$\Downarrow$$

$$\beta(x,y)=\frac{1}{2}\left(Q_\beta(x+y)-Q_\beta(x)-Q_\beta(y)\right)$$

Полученная выше формула как раз и означает, что значения билинейной функции однозначно задаются соответствующей квадратичной функцией. $\square$

Замечание.

1. *Билинейная функция* $\sigma(x,y) = \frac{1}{2}(\beta(x,y) + \beta(y,x))$ *называется симметризацией билинейной функции* β. *Причем если* $B = B(\beta, \mathbb{e})$ *и* $S = B(\sigma, \mathbb{e})$, *то* $S = \frac{1}{2}(B + B^T)$.

2. *Симметричная билинейная функция* $\beta(x,y) = \frac{1}{2}\left(Q_\beta(x+y) - Q_\beta(x) - Q_\beta(y)\right)$ *называется поляризацией квадратичной функции* Q.

Пример. *Для предыдущих двух примеров:*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^T\right)$$

Далее вся терминология для билинейных функций переносится на квадратичные функции.

Теперь вспоминаем, что перед нами стоит задача научиться приводить к хорошему виду.

Определение. *Квадратичная функция* Q *имеет в базисе* $\mathbb{e}$ *канонический вид, если для любого вектора* $x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$ *верно, что* $Q_\beta(x) = a_1 x_1^2 + \ldots + a_n x_n^2$, *где* $a_i \in F$. *Иными словами,* $B(\beta, \mathbb{e}) = \operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n)$.

Определение. *Квадратичная функция* Q *имеет нормальный вид в базисе* $\mathbb{e}$, *если для любого вектора* $x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$ *верно, что* $Q_\beta(x) = a_1 x_1^2 + \ldots + a_n x_n^2$, *причем* $a_i \in \{-1, 0, 1\}$.