

Лекции по предмету Линейная алгебра и геометрия

Группа лектория ФКН ПМИ 2015-2016

Ася Иовлева

Ксюша Закирова

Руслан Хайдунов

2016 год

Содержание

1	Лекция 15 от 11.01.2016	1
1.1	Скаляры. Поля	1
1.2	Поле комплексных чисел	2
1.3	Геометрическая модель поля \mathbb{C}	3
2	Лекция 16 от 18.01.2016	5
2.1	Комплексные числа (продолжение)	5
2.2	Корни из комплексного числа	6
2.3	Решение квадратных уравнений с комплексными коэффициентами	7
2.4	Векторные пространства над произвольным полем	7
3	Лекция 17 от 25.01.2016	7
3.1	Овеществление и комплексификация	7
3.2	Сумма подпространств	8
3.3	Переход к новому базису	9
4	Лекция 18 от 29.01.2016	10
4.1	Матрица перехода и переход к новому базису	10
4.2	Линейные отображения	11
4.3	Изоморфизм	13
5	Лекция 19 от 01.02.2016	14
5.1	Изоморфизм (продолжение)	14
5.2	Матрицы линейных отображений	16
6	Лекция 20 от 08.02.2016	18
6.1	Линейные отображения (продолжение)	18
6.2	Матрицы линейных отображений	19

Лекция 15 от 11.01.2016

Скаляры. Поля

Для начала вспомним, что такое *векторное пространство* — это множество, на котором введены операции сложения, умножения на скаляр и в котором будут выполняться восемь аксиом (см. 1 семестр). Но что такое скаляр?

Определение. Скаляры — это элементы некоторого фиксированного поля.

Определение. Полем называется множество F , на котором заданы две операции — «сложение» $(+)$ и «умножение» (\cdot) ,

$$F \times F \rightarrow F \Rightarrow \begin{aligned} + : (a, b) &\mapsto a + b \\ \cdot : (a, b) &\mapsto a \cdot b \end{aligned}$$

удовлетворяющие следующим свойствам («аксиомам поля»): $\forall a, b, c \in F$

1. $a + b = b + a$ (коммутативность по сложению);
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$ (ассоциативность по сложению);
3. $\exists 0 \in F : 0 + a = a + 0 = a$ (существование нулевого элемента);
4. $\exists -a \in F : a + (-a) = (-a) + a = 0$ (существование противоположного элемента);
5. $a(b + c) = ab + ac$ (дистрибутивность; связь между сложением и умножением);
6. $ab = ba$ (коммутативность по умножению);
7. $(ab)c = a(bc)$ (ассоциативность по умножению);
8. $\exists 1 \in F \setminus \{0\} : 1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ (существование единицы);
9. $a \neq 0 \Rightarrow \exists a^{-1} \in F : a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$ (существование обратного элемента).

Пример.

- \mathbb{Q} — рациональные числа;
- \mathbb{R} — вещественные числа;
- \mathbb{C} — комплексные числа;
- $F_2 = \{0, 1\}$, при сложении и умножении по модулю 2.

Поле комплексных чисел

Поле вещественных чисел \mathbb{R} плохо тем, что в нем уравнение $x^2 + 1 = 0$ не имеет решения. Отсюда возникает идея определить поле, удовлетворяющее следующим требованиям:

(T1) новое поле содержит \mathbb{R} ;

(T2) уравнение $x^2 + 1 = 0$ имеет решение.

Давайте формально построим такое поле.

Определение. Полем \mathbb{C} комплексных чисел называется множество $\{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$, на котором заданы операции сложения: $(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$ и умножения: $(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + b_1 a_2)$.

Предложение. \mathbb{C} и впрямь является полем.

Доказательство. Операции сложения и умножения введены, осталось только проверить выполнение всех аксиом.

1. очевидно, так как сложение идет поэлементно;
2. также очевидно;
3. $0 = (0, 0)$;
4. $-(a, b) = (-a, -b)$;
5. почти очевидно (т.е. прямая проверка);
6. ясно (тоже прямая проверка);
7. проверим:

$$\begin{aligned} ((a_1, b_1)(a_2, b_2))(a_3, b_3) &= (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + b_1 a_2)(a_3, b_3) = \\ &= (a_1 a_2 a_3 - b_1 b_2 b_3 - a_1 b_2 b_3 - b_1 a_2 b_3, a_1 a_2 b_3 - b_1 b_2 b_3 + a_1 b_2 a_3 + b_1 a_2 a_3) = \\ &= (a_1, b_1)(a_2 a_3 - b_2 b_3, a_2 b_3 + b_2 a_3) = (a_1, b_1)((a_2, b_2)(a_3, b_3)); \end{aligned}$$

8. $1 = (1, 0)$;
9. $(a, b) \neq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \neq 0 \rightarrow (a, b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$.

□

Осталось только проверить, правда ли введенное поле \mathbb{C} удовлетворяет нашим требованиям:

(T1) Заметим, что в подмножестве \mathbb{C} , состоящим из элементов вида $(a, 0)$ операции сложения и умножения будут работать как в поле вещественных чисел.

$$\begin{aligned} (a, 0) + (b, 0) &= (a + b, 0) \\ (a, 0) \cdot (b, 0) &= (ab, 0) \end{aligned}$$

Следовательно, отображение $a \mapsto (a, 0)$ отождествляет \mathbb{R} с этим подмножеством, то есть $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Что нам и требуется.

(T2) Примем $i = (0, 1)$. Тогда $i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$. Итого, требование выполнено.

Однако запись комплексных чисел в виде упорядоченной пары (a, b) не очень удобна и громоздка. Поэтому преобразуем запись следующим образом:

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1) = a + bi.$$

Тем самым мы получили реализацию поля \mathbb{C} комплексных чисел как множества $\{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$, с обычным сложением и умножением.

Определение. Запись $z = a + bi$ называется алгебраической формой комплексного числа $z \in \mathbb{C}$.

$a = \operatorname{Re} z$ — действительная часть числа z .
 $b = \operatorname{Im} z$ — мнимая часть числа z .

Определение. Числа вида $z = bi$ (т.е. $\operatorname{Re} z = 0$) называются чисто мнимыми.

Определение. Отображение $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : a + bi \mapsto a - bi$ называется (комплексным) сопряжением. Само число $\bar{z} = a - bi$ называется (комплексно) сопряженным к числу $z = a + bi$.

Лемма. Для любых двух комплексных чисел $z, w \in \mathbb{C}$ выполняется, что

$$1. \overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w};$$

$$2. \overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}.$$

Доказательство. Пусть $z = a + bi$, а $w = c + di$.

$$1. \bar{z} + \bar{w} = a - bi + c - di = (a + c) - (b + d)i = \overline{z + w}$$

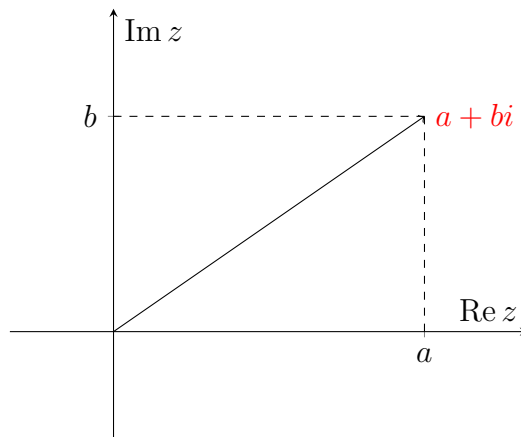
$$2. \bar{z} \cdot \bar{w} = (a - bi)(c - di) = ac - adi - bci + bdi^2 = (ac - bd) - (ad + bc)i = \overline{zw}$$

□

Замечание. Равенство $z = \bar{z}$ равносильно равенству $\operatorname{Im} z = 0$, то есть $z \in \mathbb{R}$.

Геометрическая модель поля \mathbb{C}

Заметим, что поле комплексных чисел $\mathbb{C} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ равно \mathbb{R}^2 . Следовательно, комплексные числа можно представить как точки на действительной плоскости \mathbb{R}^2 , или сопоставить их векторам.



В таком представлении сложение комплексных чисел сопоставляется со сложением векторов, а сопряжение — с отражением относительно оси $Ox(\operatorname{Re} z)$.

Определение. Модулем комплексного числа $z = a + bi$ называется длина соответствующего вектора. Обозначение: $|z|$; $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Свойства модуля:

$$1. |z| \geq 0, \text{ причем } |z| = 0 \text{ тогда и только тогда, когда } z = 0;$$

$$2. |z + w| \leq |z| + |w| \text{ — неравенство треугольника;}$$

$$3. z \cdot \bar{z} = |z|^2;$$

$$\text{Доказательство. } (a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2 = |z|^2.$$

□

$$4. |zw| = |z| \cdot |w|;$$

Доказательство. Возведем в квадрат.

$$|z|^2 \cdot |w|^2 = z\bar{z}w\bar{w} = (zw)\overline{zw} = zw\bar{z}\bar{w} = |zw|^2$$

□

Замечание. Из свойства 3 следует, что при $z \neq 0$ выполняется:

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$
$$(a + bi)^{-1} = \frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}.$$

Определение. Аргументом комплексного числа $z \neq 0$ называется всякий угол φ такой что

$$\cos \varphi = \frac{a}{|z|} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \quad \sin \varphi = \frac{b}{|z|} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Неформально говоря, аргумент z — это угол между осью Ox и соответствующим вектором.

Замечание.

1. Аргумент определен с точностью до 2π .
2. Аргумент $z = 0$ не определен.

Для $z \neq 0$ введем множество $\text{Arg } z = \{\text{множество всех аргументов } z\}$ — *большой аргумент*. Также введем *малый аргумент* $\arg z$ — это такой $\varphi \in \text{Arg } z$, который удовлетворяет условию $0 \leq \varphi < 2\pi$ и, следовательно, определен однозначно.

Используя аргумент, можно представить комплексное число следующим образом:

$$\begin{cases} a = |z| \cos \varphi \\ b = |z| \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow z = a + bi = |z| \cos \varphi + i|z| \sin \varphi = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

Определение. Запись $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ называется *тригонометрической формой* комплексного числа z .

Замечание.

$$r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = r_2 \\ \varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Лекция 16 от 18.01.2016

Вспомним предыдущую лекцию и кое-что дополним

Замечание.

1. Элемент 0 — единственный.
2. И элемент $-a$ единственный.
3. Даже элемент 1 единственный.
4. Как это ни удивительно, но a^{-1} тоже единственный.

Легко увидеть, что пункты 2 и 4 доказываются одинаково с точностью до замены операции, как и пункты 1 и 3.

Доказательство. Докажем пункт 3. Если существует $1'$ — еще одна единица, тогда по аксиомам $1' = 1' \cdot 1 = 1$.

Докажем теперь пункт 4. Пусть b и c таковы, что $b \neq c$ и $ba = ab = ac = ca = 1$. Тогда

$$bac = (ba)c = b(ac) = 1 \cdot c = c = 1 \cdot b = b$$

То есть $b = c$. □

Комплексные числа (продолжение)

Предложение. Пусть $z_1 = |z_1|(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$, $z_2 = |z_2|(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$. Тогда

$$z_1 z_2 = |z_1| |z_2| (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

Иными словами, при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.

Доказательство. Просто раскроем скобки и приведем подобные.

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= |z_1| |z_2| (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + i (\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_2 \sin \varphi_1)) = \\ &= |z_1| |z_2| (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \end{aligned}$$

□

Следствие. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$

Следствие (Формула Муавра). Пусть $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Тогда:

$$z^n = |z|^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)) \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Замечание. В комплексном анализе функция $\exp x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ доопределяется до $\exp z: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ следующим образом:

$$\exp z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

И тогда оказывается, что $\exp z$ обладает теми же свойствами, кроме того:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi \quad \forall \varphi \in \mathbb{C}.$$

Всякое $z \in \mathbb{C}$ можно представить в виде $z = |z|e^{i\varphi}$, где $\varphi \in \text{Arg}(z)$. Тогда формула Муавра приобретает совсем очевидный вид:

$$|z_1|e^{i\varphi_1} \cdot |z_2|e^{i\varphi_2} = |z_1| |z_2| e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}.$$

Замечание. Отображение $R_\varphi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \rightarrow ze^{i\varphi}$, $\varphi \in \mathbb{R}$ определяет поворот на угол φ вокруг 0.

Корни из комплексного числа

Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $n \geq 2$.

Определение. Корнем n -й степени из числа z называется всякое $w \in \mathbb{C}$: $w^n = z$. То есть

$$\sqrt[n]{z} = \{w \in \mathbb{C} \mid w^n = z\}.$$

Если $z = 0$, то $|z| = 0$, а значит $|w| = 0$, $w = 0$. Получается, 0 — единственное комплексное число, у которого корень определён однозначно.

Далее рассмотрим случай $z \neq 0$.

$$\begin{aligned} z &= |z| (\cos \varphi + i \sin \varphi) \\ w &= |w| (\cos \psi + i \sin \psi) \end{aligned}$$

$$z = w^n \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = |w|^n \\ n\psi \in \text{Arg}(z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |w| = \sqrt[n]{|z|} \\ n\psi = \varphi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |w| = \sqrt[n]{|z|} \\ \psi = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

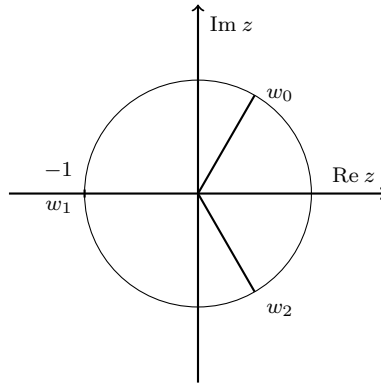
С точностью до кратного 2π различные значения в формуле $\psi = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}$ получаются при $k = 0, 1, \dots, n-1$. Значит z имеет ровно n корней n -й степени.

$$\sqrt[n]{z} = \left\{ |z| \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right) \mid k = 0, \dots, n-1 \right\}$$

Замечание. Точки из множества $\sqrt[n]{z}$ при $z \neq 0$ лежат в вершинах правильного n -угольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{|z|}$.

Пример. $z = -1 = \cos \pi + i \sin \pi$

$$\sqrt[3]{z} = \left\{ \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}; \cos \pi + i \sin \pi; \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right\}$$



Решение квадратных уравнений с комплексными коэффициентами

Пусть дано квадратное уравнение $az^2 + bz + c = 0$, где $a, b, c \in \mathbb{C}$ и $a \neq 0$. Тогда имеем:

$$\begin{aligned} z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} &= 0 \\ z^2 + 2\frac{b}{2a}z + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} &= 0 \\ \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\ z + \frac{b}{2a} &\in \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{aligned}$$

То есть все решения — это $z_1 = \frac{-b + d_1}{2a}$, $z_2 = \frac{-b + d_2}{2a}$, где $\{d_1, d_2\} = \sqrt[2]{b^2 - 4ac}$. В частности, квадратное уравнение всегда имеет комплексный корень, а при $b^2 - 4ac \neq 0$ два корня.

Теорема (Основная теорема алгебры). *Всякий многочлен $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ степени n , где $n \geq 1$, $a_n \neq 0$, и $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ имеет корень.*

Векторные пространства над произвольным полем

И снова вспомним, что такое векторное пространство:

- некоторое множество V ;
- есть операция сложения $V \times V \rightarrow V$;
- есть операция умножения на скаляр $F \times V \rightarrow V$;
- выполняются 8 аксиом.

Все основные понятия и результаты теории векторных пространств из прошлого полугодия можно перенести на случай пространства над произвольным полем F без изменений.

Пример. Пусть V — векторное пространство над полем из двух элементов, $\dim V = n$. Тогда $|V| = 2^n$. Действительно, каждое конечномерное пространство обладает базисом (в данном случае e_1, \dots, e_n). Тогда $V = \{k_1 e_1 + k_2 e_2 + \dots + k_n e_n \mid k_i \in F\}$. Но очень легко заметить, что всего таких линейных комбинаций 2^n .

Лекция 17 от 25.01.2016

Овеществление и комплексификация

Пусть V — векторное пространство над \mathbb{C} .

Определение. Овеществление пространства V — это то же пространство V , рассматриваемое как пространство над \mathbb{R} . Обозначение: $V_{\mathbb{R}}$.

Операция умножения на элементы \mathbb{R} в V уже есть, так как \mathbb{R} — подполе в \mathbb{C} .

Пример. $\mathbb{C}_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^2$.

Предложение. V — векторное пространство над \mathbb{C} , $\dim V < \infty$. Тогда $\dim V_{\mathbb{R}} = 2 \dim V$.

Доказательство. Пусть e_1, \dots, e_n — базис в V . Тогда $V = \{z_1 e_1 + \dots + z_n e_n \mid z_k \in \mathbb{C}\}$, причём такая запись единственная в силу определения базиса. Пусть $z_k = a_k + ib_k$, причём такая запись тоже единственная. Тогда будем иметь

$$\begin{aligned} V &= \{(a_1 + ib_1)e_1 + \dots + (a_n + ib_n)e_n \mid a_k, b_k \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{a_1 e_1 + \dots + a_n e_n + b_1 i e_1 + \dots + b_n i e_n \mid a_k, b_k \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

И причём такая запись тоже единственная. Выходит, что $e_1, e_2, \dots, e_n, i e_1, i e_2, \dots, i e_n$ — базис в $V_{\mathbb{R}}$, в котором $2n = 2 \dim V$ элементов. \square

Определение. Комплексификация пространства W — это множество $W \times W = W^{\mathbb{C}} = \{(u, v) \mid u, v \in W\}$ с операциями $(u_1, v_1) + (u_2, v_2) = (u_1 + u_2, v_1 + v_2)$, $(a + ib)(u, v) = (au - bv, av - bu)$.

Пример. $\mathbb{R}^{\mathbb{C}} = \mathbb{R}$.

Утверждение. В нём выполняются все 8 аксиом векторного пространства над \mathbb{C} .

W отождествляется подмножеством $\{(u, 0) \mid u \in W\}$. Действительно

$$w \in W \Leftrightarrow (w, 0) \in W^{\mathbb{C}}; i(w, 0) = (0, w) \in W^{\mathbb{C}}$$

В итоге $\forall (u, v) \in W^{\mathbb{C}}$ представим в виде

$$(u, v) = (u, 0) + (0, v) = (u, 0) + i(v, 0) = u + iv$$

То есть $W^{\mathbb{C}} = \{u + iv \mid u, v \in W\}$.

Предложение. $\dim W^{\mathbb{C}} = \dim W$

Замечание. Здесь $W^{\mathbb{C}}$ — пространство над \mathbb{C} , а W — над \mathbb{R} .

Доказательство. Пусть e_1, \dots, e_n — базис в W . Тогда

$$\begin{aligned} W^{\mathbb{C}} &= \{(u, v) \mid u, v \in W\} = \{(a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n, b_1 e_1 + b_2 e_2 + \dots + b_n e_n) \mid a_k, b_k \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{(a_1 e_1, b_1 e_1) + \dots + (a_n e_n, b_n e_n)\} = \{(a_1 + ib_1)e_1 + \dots + (a_n + ib_n)e_n\} = \\ &= \{z_1 e_1 + \dots + z_n e_n \mid z_k \in \mathbb{C}\} \end{aligned}$$

То есть выходит, что e_1, \dots, e_n — базис в $W^{\mathbb{C}}$. \square

Сумма подпространств

Пусть V — конечномерное векторное пространство, а U и W — подпространства (в качестве упражнения лектор предлагает доказать, что их пересечение — тоже подпространство).

Определение. Сумма подпространств U и W — это множество.

$$U + W = \{u + w \mid u \in U, w \in W\}$$

Замечание. $\dim(U \cap W) \leq \dim U \leq \dim(U + W)$

Пример. Двумерные плоскости в пространстве \mathbb{R}^3 содержат общую прямую.

Теорема. $\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U + W)$

Доказательство. Положим $p = \dim(U \cap W)$, $k = \dim U$, $m = \dim W$. Выберем базис $a = \{a_1, \dots, a_k\}$ в пересечении. Его можно дополнить до базиса W и до базиса U . Значит $\exists b = \{b_1, \dots, b_{k-p}\}$ такой, что $a \cup b$ — базис в U и $\exists c = \{c_1, \dots, c_{m-p}\}$ такой, что $a \cup c$ — базис в W .

Докажем, что $a \cup b \cup c$ — базис в $U + W$.

Во-первых, докажем, что $U + W$ порождается множеством $a \cup b \cup c$.

$$\left. \begin{array}{l} v \in U + W \Rightarrow \exists u \in U, w \in W: v = u + w \\ u \in U = \langle a \cup b \rangle \subset \langle a \cup b \cup c \rangle \\ w \in W = \langle a \cup c \rangle \subset \langle a \cup b \cup c \rangle \end{array} \right| \Rightarrow v = u + w \in \langle a \cup b \cup c \rangle \Rightarrow U + W = \langle a \cup b \cup c \rangle$$

Во-вторых, докажем линейную независимость векторов из $a \cup b \cup c$.

Пусть скаляры $\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_{k-p}, \gamma_1, \dots, \gamma_{m-p}$ таковы, что:

$$\begin{aligned} \underbrace{\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_p a_p}_x + \underbrace{\beta_1 b_1 + \dots + \beta_{k-p} b_{k-p}}_y + \underbrace{\gamma_1 c_1 + \dots + \gamma_{m-p} c_{m-p}}_z &= 0 \\ x + y + z &= 0 \\ z &= -x - y \\ z &\in W \\ -x - y &\in U \cap W \\ \Rightarrow \exists \lambda_1, \dots, \lambda_p \in F: z &= \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_p a_p \end{aligned}$$

Тогда $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_p a_p - \gamma_1 c_1 - \dots - \gamma_{m-p} c_{m-p} = 0$. Но $a \cup c$ — базис W . Следовательно, $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = \gamma_1 = \dots = \gamma_{m-p} = 0$. Но тогда $0 = x + y = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_p a_p + \beta_1 b_1 + \dots + \beta_{k-p} b_{k-p}$. Но $a \cup b$ — базис $U + W \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_p = \beta_1 = \dots = \beta_{k-p} = 0$. Итого, все коэффициенты равны нулю и линейная независимость тем самым доказана. То есть $a \cup b \cup c$ — базис $U + W$.

$$\begin{aligned} \dim(U + W) &= |a \cup b \cup c| = |a| + |b| + |c| = p + k - p + m - p = k + m - p = \\ &= \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) \end{aligned}$$

□

Определение. Если $U \cap W = \{0\}$, то $U + W$ называется прямой суммой.

Следствие. В таком случае $\dim(U + W) = \dim U + \dim W$.

Пример. U — плоскость, W — прямая в \mathbb{R}^3 .

Переход к новому базису

Пусть V — векторное пространство, $\dim V = n$, e_1, \dots, e_n — базис. То есть

$$\forall v \in V \quad \exists! v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n,$$

где $x_1, \dots, x_n \in F$ — координаты вектора v в базисе (e_1, \dots, e_n) . Пусть также есть базис e'_1, \dots, e'_n :

$$\begin{aligned} e'_1 &= c_{11} e_1 + c_{21} e_2 + \dots + c_{n1} e_n \\ e'_2 &= c_{12} e_1 + c_{22} e_2 + \dots + c_{n2} e_n \\ &\vdots \\ e'_n &= c_{1n} e_1 + c_{2n} e_2 + \dots + c_{nn} e_n \end{aligned}$$

Обозначим матрицу $C = (c_{ij})$. Тогда можно переписать (e'_1, \dots, e'_n) как $(e_1, \dots, e_n) \cdot C$.

Предложение. e'_1, \dots, e'_n образуют базис тогда и только тогда, когда $\det C \neq 0$.

Доказательство.

[\Rightarrow] e'_1, \dots, e'_n — базис, а значит $\exists C' \in M_n$:

$$\begin{aligned}(e_1, \dots, e_n) &= (e'_1, \dots, e'_n) C' = (e_1, \dots, e_n) C' C \\ E &= C C' \\ C' &= C^{-1} \Leftrightarrow \exists C^{-1} \Leftrightarrow \det C \neq 0\end{aligned}$$

[\Leftarrow] $\det C \neq 0 \Rightarrow \exists C^{-1}$. Покажем, что e'_1, \dots, e'_n в таком случае линейно независимы. Пусть $x_1 e'_1 + x_2 e'_2 + \dots + x_n e'_n = 0$. Тогда можно записать

$$\begin{aligned}(e'_1, e'_2, \dots, e'_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} &= 0 \\ (e_1, \dots, e_n) C \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} &= 0\end{aligned}$$

Поскольку (e_1, \dots, e_n) — базис, то $C \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$. Умножая слева на обратную матрицу, получаем, что $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$

□

Лекция 18 от 29.01.2016

Матрица перехода и переход к новому базису

Пусть V — векторное пространство, $\dim V = n$, вектора e_1, \dots, e_n — базис, а e'_1, \dots, e'_n — некий набор из n векторов. Тогда каждый вектор из этого набора линейно выражается через базис.

$$\begin{aligned}e'_j &= \sum_{i=1}^n c_{ij} e_i, \quad c_{ij} \in F \\ (e'_1, \dots, e'_n) &= (e_1, \dots, e_n) \cdot C, \quad C = (c_{ij})\end{aligned}$$

То есть мы получили матрицу, где в j -ом столбце стоят коэффициенты линейного разложения вектора e'_j в базисе (e_1, \dots, e_n) .

Теперь пусть e'_1, \dots, e'_n — тоже базис в V . Вспомним, что на прошлой лекции уже было сказано, что в этом случае $\det C \neq 0$.

Определение. Матрица C называется матрицей перехода от базиса (e_1, \dots, e_n) к базису (e'_1, \dots, e'_n) .

Замечание. Матрица перехода от (e'_1, \dots, e'_n) к (e_1, \dots, e_n) есть C^{-1} .

И небольшое замечание касательно записи: когда базис записан в скобках, то есть (e_1, \dots, e_n) , то нам важен порядок векторов в нем, в противном случае, при записи e_1, \dots, e_n , порядок не важен.

Итого, имеем два базиса пространства V , (e_1, \dots, e_n) и (e'_1, \dots, e'_n) , и матрицу перехода C такую, что $(e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n) \cdot C$. Возьмем некий вектор v и разложим его по обоим базисам.

$$v \in V \Rightarrow \begin{cases} v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n, & x_i \in F \\ v = x'_1 e'_1 + \dots + x'_n e'_n, & x'_i \in F \end{cases}$$

Предложение. Формула преобразования координат при переходе к другому базису:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad x_i = \sum_{j=1}^n c_{ij} x'_j$$

Доказательство. С одной стороны:

$$v = x'_1 e'_1 + \dots + x'_n e'_n = \begin{pmatrix} e'_1 & \dots & e'_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_n \end{pmatrix} C \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

Однако с другой стороны:

$$v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n = \begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Сравнивая одно с другим, получаем, что:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

□

Линейные отображения

Пусть V и W — два векторных пространства над полем F .

Определение. Отображение $f : V \rightarrow W$ называется линейным, если:

1. $f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2), \quad \forall u_1, u_2 \in V;$
2. $f(\alpha u) = \alpha f(u), \quad \forall u \in V, \forall \alpha \in F.$

Замечание. Свойства 1–2 эквивалентны тому, что

$$f(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 f(u_1) + \alpha_2 f(u_2), \quad \forall u_1, u_2 \in V, \forall \alpha_1, \alpha_2 \in F.$$

Здесь важно понимать, что сначала сложение векторов и умножение на скаляр происходит в пространстве V , а потом в пространстве W .

Простейшие свойства.

$$1. f(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$$

$$\text{Доказательство. } f(\vec{0}_V) = f(0 \cdot \vec{0}_V) = 0f(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$$

□

$$2. \varphi(-u) = -\varphi(u), \text{ где } (-u) \text{ — обратный элемент к } u.$$

$$\text{Доказательство. } \varphi(-u) + \varphi(u) = \varphi(-u + u) = \varphi(\vec{0}_V) = \vec{0}_W \Rightarrow \varphi(-u) = -\varphi(u)$$

□

Примеры

(0) $V \rightarrow V : v \mapsto v$ — тождественное отображение.

(1) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ линейно $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : f(x) = kx, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Доказательство.

$$\Rightarrow f(x) = f(x \cdot 1) = xf(1) = kx, \text{ где } k = f(1)$$

\Leftarrow Проверим необходимые условия линейности.

$$1. f(x) = kx \Rightarrow f(x_1 + x_2) = k(x_1 + x_2) = kx_1 + kx_2 = kf(x_1) + kf(x_2)$$

$$2. f(\alpha x) = k\alpha x = \alpha kx = \alpha f(x)$$

□

(2) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ — декартова система координат.

2.1 Поворот вокруг 0 на угол α линейен.

2.2 Проекция на прямую, проходящую через 0, линейна.

(3) $P_n = R[x]_{\leq n}$ — пространство всех многочленов от x степени не больше n .

$$\Delta : f \mapsto f' \text{ (производная)}$$

$$\left. \begin{aligned} (f+g)' &= f' + g' \\ (\alpha f)' &= \alpha f' \end{aligned} \right| \Rightarrow \Delta \text{ — линейное отображение из } P_n \text{ в } P_{n-1}$$

(4) Векторное пространство V , $\dim V = n$, e_1, \dots, e_n — базис.

$$V \mapsto \mathbb{R}^n$$

$$x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ — тоже линейное отображение.}$$

(5) $A \in \text{Mat}_{m \times n}$, $k \geq 1$ — любое, $\varphi : \text{Mat}_{n \times k} \rightarrow \text{Mat}_{m \times k}$.

$$\varphi(X) = A \cdot X$$

$$A(X_1 + X_2) = AX_1 + AX_2$$

$$A(\alpha X) = \alpha(AX)$$

Частный случай, при $k = 1$ — $\varphi : F^n \rightarrow F^m$.

Изоморфизм

Определение. *Отображение $\varphi : V \rightarrow W$ называется изоморфизмом, если φ линейно и биективно. Обозначение: $\varphi : V \xrightarrow{\sim} W$.*

Рассмотрим те же примеры:

(0) Изоморфизм.

(1) Изоморфизм, при $k \neq 0$.

(2) 2.1 Изоморфизм.

2.2 Не изоморфизм.

(3) Не изоморфизм.

(4) Изоморфизм.

(5) Задача: доказать, что φ — изоморфизм тогда и только тогда, когда $n = m$ и $\det A \neq 0$.

Предложение. *Пусть $\varphi : V \rightarrow W$ — изоморфизм. Тогда $\varphi^{-1} : W \rightarrow V$ — тоже изоморфизм.*

Доказательство. Так как φ — биекция, то φ^{-1} — тоже биекция.

$$w_1, w_2 \in W \Rightarrow \exists v_1, v_2 \in V : \begin{aligned} \varphi(v_1) &= w_1 & v_1 &= \varphi^{-1}(w_1) \\ \varphi(v_2) &= w_2 & v_2 &= \varphi^{-1}(w_2) \end{aligned}$$

Тогда осталось только доказать линейность обратного отображения. Для этого проверим выполнение необходимых условий линейности.

1. $\varphi^{-1}(w_1 + w_2) = \varphi^{-1}(\varphi(v_1) + \varphi(v_2)) = \varphi^{-1}(\varphi(v_1 + v_2)) = \text{id}(v_1 + v_2) = v_1 + v_2$
2. $\alpha \in F, \quad \varphi^{-1}(\alpha w_1) = \varphi^{-1}(\alpha \varphi(v_1)) = \varphi^{-1}(\varphi(\alpha v_1)) = \text{id}(\alpha v_1) = \alpha v_1.$

□

Определение. *Два векторных пространства V и W называются изоморфными, если существует изоморфизм $\varphi : V \xrightarrow{\sim} W$ (и тогда существует изоморфизм $V \xleftarrow{\sim} W$ по предположению). Обозначение: $V \simeq W$ или $V \cong W$.*

Отображения можно соединять в композиции:

$$\left. \begin{array}{l} \varphi : U \rightarrow V \\ \psi : V \rightarrow W \end{array} \right| \Rightarrow \psi \circ \varphi : U \rightarrow W \quad \psi \circ \varphi(u) = \psi(\varphi(u))$$

Предложение.

1. Если φ и ψ линейны, то $\psi \circ \varphi$ тоже линейно.
2. Если φ и ψ изоморфизмы, то $\psi \circ \varphi$ тоже изоморфизм.

Доказательство.

1. Опять-таки, просто проверим необходимые условия линейности.

$$(a) \quad (\psi \circ \varphi)(u_1 + u_2) = \psi(\varphi(u_1 + u_2)) = \psi(\varphi(u_1) + \varphi(u_2)) = \psi(\varphi(u_1)) + \psi(\varphi(u_2)) = (\psi \circ \varphi)(u_1) + (\psi \circ \varphi)(u_2)$$

$$(b) \quad (\psi \circ \varphi)(\alpha u) = \psi(\varphi(\alpha u)) = \psi(\alpha \varphi(u)) = \alpha \psi(\varphi(u)) = \alpha (\psi \circ \varphi)(u)$$

2. Следует из сохранения линейности и того, что композиция биекций тоже биекция.

□

Следствие. *Изоморфизм это отношение эквивалентности на множестве всех векторных пространств над фиксированным полем F .*

Доказательство.

Рефлексивность $V \simeq V$.

Симметричность $V \simeq W \Rightarrow W \simeq V$.

Транзитивность $(V \simeq U) \& (U \simeq W) \Rightarrow V \simeq W$.

□

То есть множество всех векторных пространств над фиксированным полем F разбивается на попарно непересекающиеся классы, причем внутри одного класса любые два пространства изоморфны. Такие классы называются *классами эквивалентности*.

Теорема. *Если два конечномерных векторных пространства V и W на поле F изоморфны, то $\dim V = \dim W$.*

Но для начала докажем следующую лемму.

Лемма (1). *Для векторного пространства V над полем F размерности n верно, что $V \simeq F^n$.*

Доказательство. Рассмотрим отображение $\varphi : V \rightarrow F^n$ из примера 4. Пусть (e_1, \dots, e_n) — базис пространства V . Тогда:

$$x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad x_i \in F.$$

Отображение φ линейно и биективно, следовательно φ — изоморфизм. А раз существует изоморфное отображение между пространствами V и F^n , то они изоморфны. □

Лекция 19 от 01.02.2016

Изоморфизм (продолжение)

На прошлой лекции мы ввели теорему и доказали одну лемму. Напомним их.

Теорема. *Если два конечномерных векторных пространства V и W изоморфны, то $\dim V = \dim W$.*

Лемма (1). *Если $\dim V = n$, то $V \simeq F^n$.*

Замечание. *Говорят, что функция φ отождествляет пространство V с пространством F^n , если $\varphi : V \xrightarrow{\sim} F^n$.*

Но перед тем, как доказывать эту теорему, докажем лучше еще одну лемму.

Лемма (2). *Пусть $\varphi : V \xrightarrow{\sim} W$ — изоморфизм векторных пространств, а e_1, \dots, e_n — базис V . Тогда $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ — базис W .*

Доказательство. Пусть $w \in W$ — произвольный вектор. Положим $v \in V$ таковым, что $v = \varphi^{-1}(w)$.

$$\begin{aligned} v &= x_1 e_1 + \dots + x_n e_n, \quad x_i \in F \\ w &= \varphi(v) = \varphi(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1 \varphi(e_1) + \dots + x_n \varphi(e_n) \Rightarrow W = \langle \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n) \rangle \end{aligned}$$

Покажем, что $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ — линейно независимые вектора.

Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$ таковы, что $\alpha_1 \varphi(e_1) + \dots + \alpha_n \varphi(e_n) = 0$. Это то же самое, что $\varphi(\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n) = 0$. Применяя φ^{-1} , получаем $\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n = \varphi^{-1}(0) = 0$. Но так как e_1, \dots, e_n — базис в V , то $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$, и потому вектора $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ линейно независимы. Следовательно, этот набор векторов — базис в W . \square

Теперь приступим наконец к доказательству теоремы.

Доказательство.

$\Rightarrow V \simeq W \Rightarrow \exists \varphi : V \xrightarrow{\sim} W$. Тогда по лемме 2, если e_1, \dots, e_n — базис V , то $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ — базис W , и тогда $\dim V = \dim W$.

\Leftarrow Пусть $\dim V = \dim W = n$. Тогда по лемме 1 существуют изоморфизмы $\varphi : V \xrightarrow{\sim} F^n$ и $\psi : W \xrightarrow{\sim} F^n$. Следовательно, $\psi^{-1} \circ \varphi : V \rightarrow W$ — изоморфизм. \square

То есть получается, что с точностью до изоморфизма существует только одно векторное пространство размерности n . Однако не стоит заканчивать на этом курс линейной алгебры. Теперь главная наша проблема — это как из бесконечного множества базисов в каждом векторном пространстве выбрать тот, который будет наиболее простым и удобным для каждой конкретной задачи.

Например, рассмотрим вектор $v \in F^n$ с координатами $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Пусть $v \neq 0$. Тогда существует такой базис e_1, \dots, e_n , что $v = e_1$, то есть в этом базисе вектор имеет координаты $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Пусть V, W — векторные пространства над F , и e_1, \dots, e_n — базис V .

Предложение.

1. Всякое линейное отображение $\varphi : V \rightarrow W$ однозначно определяется векторами $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$.
2. Для всякого набора векторов $f_1, \dots, f_n \in W$ существует единственное линейное отображение $\varphi : V \rightarrow W$ такое, что $\varphi(e_1) = f_1, \dots, \varphi(e_n) = f_n$.

Доказательство.

1. Пусть $v \in V$, $v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$, где $x_i \in F$. Тогда $\varphi(v) = x_1 \varphi(e_1) + \dots + x_n \varphi(e_n)$, то есть если мы знаем вектора $\varphi(e_i)$, то сможем задать $\varphi(v)$ для любого $v \in V$.
2. Определим отображение $\varphi : V \rightarrow W$ по формуле $\varphi(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1 f_1 + \dots + x_n f_n$. Прямая проверка показывает, что φ линейна, а единственность следует из пункта 1. \square

Следствие. Если $\dim V = \dim W = n$, то для всякого базиса e_1, \dots, e_n пространства V и всякого базиса f_1, \dots, f_n пространства W существует единственный изоморфизм $\varphi : V \xrightarrow{\sim} W$ такой, что $\varphi(e_1) = f_1, \dots, \varphi(e_n) = f_n$.

Доказательство. Из пункта 2. предложения следует, что существует единственное линейное отображение $\varphi : V \rightarrow W$ такое, что $\varphi(e_1) = f_1, \dots, \varphi(e_n) = f_n$. Но тогда $\varphi(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1 \varphi(e_1) + \dots + x_n \varphi(e_n) = x_1 f_1 + \dots + x_n f_n$ для любых $x_i \in F$. Отсюда следует, что φ — биекция. \square

Матрицы линейных отображений

Пусть V и W — векторные пространства, $\mathfrak{e} = (e_1, \dots, e_n)$ — базис V , $\mathfrak{f} = (f_1, \dots, f_m)$ — базис W , $\varphi : V \rightarrow W$ — линейное отображение. Тогда:

$$\varphi(e_j) = a_{1j}f_1 + \dots + a_{mj}f_m = \sum_{i=1}^m a_{ij}f_i.$$

Определение. Матрица $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}_{m \times n}(F)$ называется матрицей линейного отображения φ в базисах \mathfrak{e} и \mathfrak{f} (или по отношению к базисам \mathfrak{e} и \mathfrak{f}).

Замечание. Существует биекция $\{\text{линейные отображения } V \rightarrow W\} \rightleftharpoons \text{Mat}_{m \times n}$.

Замечание. В $A^{(j)}$ стоят координаты $\varphi(e_j)$ в базисе \mathfrak{f} .

$$(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) = (f_1, \dots, f_n) \cdot A$$

Рассмотрим пример.

Пусть $P_n = F[x]_{\leq n}$ — множество многочленов над полем F степени не выше n . Возьмем дифференцирование $\Delta : P_n \rightarrow P_n$.

Базис $P_n = 1, x, x^2, \dots, x^n$. Базис $P_{n-1} = 1, x, \dots, x^{n-1}$. Тогда матрица линейного отображения будет размерности $n \times (n+1)$ и иметь следующий вид.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{pmatrix}$$

Предложение. Если $v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ и $\varphi(v) = y_1 f_1 + \dots + y_m f_m$, то

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Доказательство. С одной стороны:

$$\varphi(v) = x_1 \varphi(e_1) + \dots + x_n \varphi(e_n) = (\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (f_1, \dots, f_m) A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Однако с другой стороны:

$$\varphi(v) = (f_1, \dots, f_m) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

Сравнивая обе части, получаем требуемое. \square

А теперь проанализируем операции над матрицами линейных отображений.

V и W — векторные пространства. **Обозначение:** $\text{Hom}(V, W) :=$ множество всех линейных отображений $V \rightarrow W$.

Пусть $\varphi, \psi \in \text{Hom}(V, W)$.

Определение.

1. $\varphi + \psi \in \text{Hom}(V, W)$ — это $(\varphi + \psi)(v) := \varphi(v) + \psi(v)$.
2. $\alpha \in F, \alpha\varphi \in \text{Hom}(V, W)$ — это $(\alpha\varphi)(v) := \alpha(\varphi(v))$.

Упражнение.

1. Проверить, что $\varphi + \psi$ и $\alpha\varphi$ действительно принадлежат $\text{Hom}(V, W)$.
2. Проверить, что $\text{Hom}(V, W)$ является векторным пространством.

Предложение. Пусть $e = (e_1, \dots, e_n)$ — базис V , $f = (f_1, \dots, f_m)$ — базис W , $\varphi, \psi \in \text{Hom}(V, W)$. При этом A_φ — матрица линейного отображения φ , A_ψ — матрица для ψ , $A_{\varphi+\psi}$ — для $\varphi + \psi$, а $A_{\alpha\varphi}$ — для $\alpha\varphi$.

Тогда $A_{\varphi+\psi} = A_\varphi + A_\psi$ и $A_{\alpha\varphi} = \alpha A_\varphi$.

Доказательство. Упражнение. □

Теперь возьмем три векторных пространства — U, V и W размерности n, m и k соответственно, и их базисы e, f и g . Также рассмотрим цепочку линейных отображений $U \xrightarrow{\psi} V \xrightarrow{\varphi} W$. Пусть A — матрица φ в базисах f и g , B — матрица ψ в базисах e и f , C — матрица $\varphi \circ \psi$ в базисах e и g .

Предложение. $C = AB$.

Замечание. Собственно говоря, отсюда и взялось впервые определение умножения матриц.

Доказательство. Запишем по определению:

$$\begin{aligned} (\varphi \circ \psi)(e_r) &= \sum_{p=1}^k c_{pr} g_p, \quad r = 1, \dots, n \\ \psi(e_r) &= \sum_{q=1}^m b_{qr} f_q, \quad r = 1, \dots, n \\ \varphi(f_q) &= \sum_{p=1}^k a_{pq} g_p, \quad q = 1, \dots, m \end{aligned}$$

Тогда:

$$\begin{aligned} (\varphi \circ \psi)(e_r) &= \varphi(\psi(e_r)) = \varphi\left(\sum_{q=1}^m b_{qr} f_q\right) = \sum_{q=1}^m b_{qr} \varphi(f_q) = \sum_{q=1}^m b_{qr} \left(\sum_{p=1}^k a_{pq} g_p\right) = \sum_{p=1}^k \left(\sum_{q=1}^m a_{pq} b_{qr}\right) g_p \\ &\Downarrow \\ c_{pr} &= \sum_{q=1}^m a_{pq} b_{qr} \\ &\Downarrow \\ C &= AB \end{aligned}$$

□

И снова, пусть V и W — векторные пространства с линейным отображением $\varphi : V \rightarrow W$.

Определение. Ядро φ — это множество $\text{Ker } \varphi := \{v \in V \mid \varphi(v) = 0\}$.

Определение. Образ φ — это множество $\text{Im } \varphi := \{w \in W \mid \exists v \in V : \varphi(v) = w\}$.

Пример. Все то же $\Delta : P_n \rightarrow P_{n-1}$. Для него $\text{Ker } \Delta = \{f \mid f = \text{const}\}$, $\text{Im } \Delta = P_{n-1}$.

Лекция 20 от 08.02.2016

Линейные отображения (продолжение)

Пусть $\varphi : V \rightarrow W$ — линейное отображение

Предложение.

1. $\text{Ker } \varphi$ — подпространство в V
2. $\text{Im } \varphi$ — подпространство в W

Теорема. Если два конечномерных векторных пространства V и W изоморфны, то $\dim V = \dim W$.

Лемма (1). Если $\dim V = n$, то $V \simeq F^n$.

Замечание. Говорят, что функция φ отождествляет пространство V с пространством F^n , если $\varphi : V \xrightarrow{\sim} F^n$.

Но перед тем, как доказывать эту теорему, докажем лучше еще одну лемму.

Лемма (2). Пусть $\varphi : V \xrightarrow{\sim} W$ — изоморфизм векторных пространств, а e_1, \dots, e_n — базис V . Тогда $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ — базис W .

Доказательство. Пусть $w \in W$ — произвольный вектор. Положим $v \in V$ таковым, что $v = \varphi^{-1}(w)$.

$$\begin{aligned} v &= x_1 e_1 + \dots + x_n e_n, \quad x_i \in F \\ w &= \varphi(v) = \varphi(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1 \varphi(e_1) + \dots + x_n \varphi(e_n) \Rightarrow W = \langle \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n) \rangle \end{aligned}$$

Покажем, что $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ — линейно независимые вектора.

Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$ таковы, что $\alpha_1 \varphi(e_1) + \dots + \alpha_n \varphi(e_n) = 0$. Это то же самое, что $\varphi(\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n) = 0$. Применяя φ^{-1} , получаем $\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n = \varphi^{-1}(0) = 0$. Но так как e_1, \dots, e_n — базис в V , то $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$, и потому вектора $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ линейно независимы. Следовательно, этот набор векторов — базис в W . \square

Теперь приступим наконец к доказательству теоремы.

Доказательство.

$\Rightarrow V \simeq W \Rightarrow \exists \varphi : V \xrightarrow{\sim} W$. Тогда по лемме 2, если e_1, \dots, e_n — базис V , то $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ — базис W , и тогда $\dim V = \dim W$.

\Leftarrow Пусть $\dim V = \dim W = n$. Тогда по лемме 1 существуют изоморфизмы $\varphi : V \xrightarrow{\sim} F^n$ и $\psi : W \xrightarrow{\sim} F^n$. Следовательно, $\psi^{-1} \circ \varphi : V \rightarrow W$ — изоморфизм.

□

То есть получается, что с точностью до изоморфизма существует только одно векторное пространство размерности n . Однако не стоит заканчивать на этом курс линейной алгебры. Теперь главная наша проблема — это как из бесконечного множества базисов в каждом векторном пространстве выбрать тот, который будет наиболее простым и удобным для каждой конкретной задачи.

Например, рассмотрим вектор $v \in F^n$ с координатами $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Пусть $v \neq 0$. Тогда существует такой базис e_1, \dots, e_n , что $v = e_1$, то есть в этом базисе вектор имеет координаты $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Пусть V, W — векторные пространства над F , и e_1, \dots, e_n — базис V .

Предложение.

1. Всякое линейное отображение $\varphi : V \rightarrow W$ однозначно определяется векторами $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$.
2. Для всякого набора векторов $f_1, \dots, f_n \in W$ существует единственное линейное отображение $\varphi : V \rightarrow W$ такое, что $\varphi(e_1) = f_1, \dots, \varphi(e_n) = f_n$.

Доказательство.

1. Пусть $v \in V$, $v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$, где $x_i \in F$. Тогда $\varphi(v) = x_1 \varphi(e_1) + \dots + x_n \varphi(e_n)$, то есть если мы знаем вектора $\varphi(e_i)$, то сможем задать $\varphi(v)$ для любого $v \in V$.
2. Определим отображение $\varphi : V \rightarrow W$ по формуле $\varphi(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1 f_1 + \dots + x_n f_n$. Прямая проверка показывает, что φ линейна, а единственность следует из пункта 1.

□

Следствие. Если $\dim V = \dim W = n$, то для всякого базиса e_1, \dots, e_n пространства V и всякого базиса f_1, \dots, f_n пространства W существует единственный изоморфизм $\varphi : V \xrightarrow{\sim} W$ такой, что $\varphi(e_1) = f_1, \dots, \varphi(e_n) = f_n$.

Доказательство. Из пункта 2. предложения следует, что существует единственное линейное отображение $\varphi : V \rightarrow W$ такое, что $\varphi(e_1) = f_1, \dots, \varphi(e_n) = f_n$. Но тогда $\varphi(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1 \varphi(e_1) + \dots + x_n \varphi(e_n) = x_1 f_1 + \dots + x_n f_n$ для любых $x_i \in F$. Отсюда следует, что φ — биекция. □

Матрицы линейных отображений

Пусть V и W — векторные пространства, $\mathfrak{e} = (e_1, \dots, e_n)$ — базис V , $\mathfrak{f} = (f_1, \dots, f_m)$ — базис W , $\varphi : V \rightarrow W$ — линейное отображение. Тогда:

$$\varphi(e_j) = a_{1j} f_1 + \dots + a_{mj} f_m = \sum_{i=1}^m a_{ij} f_i.$$

Определение. Матрица $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}_{m \times n}(F)$ называется матрицей линейного отображения φ в базисах \mathfrak{e} и \mathfrak{f} (или по отношению к базисам \mathfrak{e} и \mathfrak{f}).

Замечание. Существует биекция $\{\text{линейные отображения } V \rightarrow W\} \xrightarrow{\sim} \text{Mat}_{m \times n}$.

Замечание. В $A^{(j)}$ стоят координаты $\varphi(e_j)$ в базисе \mathbb{F} .

$$(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) = (f_1, \dots, f_n) \cdot A$$

Рассмотрим пример.

Пусть $P_n = F[x]_{\leq n}$ — множество многочленов над полем F степени не выше n . Возьмем дифференцирование $\Delta : P_n \rightarrow P_{n-1}$.

Базис P_n — $1, x, x^2, \dots, x^n$. Базис P_{n-1} — $1, x, \dots, x^{n-1}$. Тогда матрица линейного отображения будет размерности $n \times (n+1)$ и иметь следующий вид.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{pmatrix}$$

Предложение. Если $v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ и $\varphi(v) = y_1 f_1 + \dots + y_m f_m$, то

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Доказательство. С одной стороны:

$$\varphi(v) = x_1 \varphi(e_1) + \dots + x_n \varphi(e_n) = (\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (f_1, \dots, f_m) A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Однако с другой стороны:

$$\varphi(v) = (f_1, \dots, f_m) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

Сравнивая обе части, получаем требуемое. □

А теперь проанализируем операции над матрицами линейных отображений.

V и W — векторные пространства. **Обозначение:** $\text{Hom}(V, W) :=$ множество всех линейных отображений $V \rightarrow W$.

Пусть $\varphi, \psi \in \text{Hom}(V, W)$.

Определение.

1. $\varphi + \psi \in \text{Hom}(V, W)$ — это $(\varphi + \psi)(v) := \varphi(v) + \psi(v)$.
2. $\alpha \in F, \alpha\varphi \in \text{Hom}(V, W)$ — это $(\alpha\varphi)(v) := \alpha(\varphi(v))$.

Упражнение.

1. Проверить, что $\varphi + \psi$ и $\alpha\varphi$ действительно принадлежат $\text{Hom}(V, W)$.
2. Проверить, что $\text{Hom}(V, W)$ является векторным пространством.

Предложение. Пусть $e = (e_1, \dots, e_n)$ — базис V , $f = (f_1, \dots, f_m)$ — базис W , $\varphi, \psi \in \text{Hom}(V, W)$. При этом A_φ — матрица линейного отображения φ , A_ψ — матрица для ψ , $A_{\varphi+\psi}$ — для $\varphi+\psi$, а $A_{\alpha\varphi}$ — для $\alpha\varphi$.

Тогда $A_{\varphi+\psi} = A_\varphi + A_\psi$ и $A_{\alpha\varphi} = \alpha A_\varphi$.

Доказательство. Упражнение. □

Теперь возьмем три векторных пространства — U, V и W размерности n, m и k соответственно, и их базисы $\mathfrak{e}, \mathfrak{f}$ и \mathfrak{g} . Также рассмотрим цепочку линейных отображений $U \xrightarrow{\psi} V \xrightarrow{\varphi} W$. Пусть A — матрица φ в базисах \mathfrak{f} и \mathfrak{g} , B — матрица ψ в базисах \mathfrak{e} и \mathfrak{f} , C — матрица $\varphi \circ \psi$ в базисах \mathfrak{e} и \mathfrak{g} .

Предложение. $C = AB$.

Замечание. Собственно говоря, отсюда и взялось впервые определение умножения матриц.

Доказательство. Запишем по определению:

$$\begin{aligned} (\varphi \circ \psi)(e_r) &= \sum_{p=1}^k c_{pr} g_p, \quad r = 1, \dots, n \\ \psi(e_r) &= \sum_{q=1}^m b_{qr} f_q, \quad r = 1, \dots, n \\ \varphi(f_q) &= \sum_{p=1}^k a_{pq} g_p, \quad q = 1, \dots, m \end{aligned}$$

Тогда:

$$\begin{aligned} (\psi \circ \varphi)(e_r) &= \varphi(\psi(e_r)) = \varphi\left(\sum_{q=1}^m b_{qr} f_q\right) = \sum_{q=1}^m b_{qr} \varphi(f_q) = \sum_{q=1}^m b_{qr} \left(\sum_{p=1}^k a_{pq} g_p\right) = \sum_{p=1}^k \left(\sum_{q=1}^m a_{pq} b_{qr}\right) g_p \\ &\Downarrow \\ c_{pr} &= \sum_{q=1}^m a_{pq} b_{qr} \\ &\Downarrow \\ C &= AB \end{aligned}$$

□

И снова, пусть V и W — векторные пространства с линейным отображением $\varphi : V \rightarrow W$.

Определение. Ядро φ — это множество $\text{Ker } \varphi := \{v \in V \mid \varphi(v) = 0\}$.

Определение. Образ φ — это множество $\text{Im } \varphi := \{w \in W \mid \exists v \in V : \varphi(v) = w\}$.

Пример. Все то же $\Delta : P_n \rightarrow P_{n-1}$. Для него $\text{Ker } \Delta = \{f \mid f = \text{const}\}$, $\text{Im } \Delta = P_{n-1}$.