Лекция 26 от 06.04.2016

Матрицы билинейных функций

Пусть V — векторное пространство, $\dim V < \infty$, $\beta\colon V \times V \to F$ — билинейная функция.

Определение. *Матрицей билинейной функции в базисе $\mathbb{e}$ называется матрица $B = (b_{ij})$, где $b_{ij} = \beta(e_i, e_j)$. Обозначение: $B(\beta, \mathbb{e})$.*

Пусть $x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n \in V$ и $y = y_1e_1 + \ldots + y_ne_n \in V$. Тогда:

$$\beta(x,y) = \beta\left(\sum_{i=1}^n x_ie_i, \sum_{j=1}^n y_je_j\right) = \sum_{i=1}^n x_i\beta\left(e_i, \sum_{j=1}^n y_je_j\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n y_j\beta(e_i,e_j) = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_ib_{ij}y_j =$$

$$= (x_1, \ldots, x_n)B\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \qquad (*)$$

Предложение.

1. *Всякая билинейная функция однозначно определяется своей матрицей в базисе $\mathbb{e}$ (и, следовательно, в любом другом базисе).*
2. *Для любой матрицы $B \in M_n(F)$ существует единственная билинейная функция β такая, что $B = B(\beta, \mathbb{e})$.*

Доказательство.

1. Уже доказано, это следует из формулы $(*)$.
2. Определим β по формуле $(*)$. Тогда β — это билинейная функция на V и ее матрица есть в точности B. Единственность следует из все той же формулы.

$\square$

Замечание. *Эта биекция не имеет никакого отношения к биекции линейных операторов с квадратными матрицами.*

Пусть $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ и $\mathbb{e}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ — два базиса V, β — билинейная функция на V. Пусть также $\mathbb{e}' = \mathbb{e}C$, где C — матрица перехода, также $B(\beta, \mathbb{e}) = B$ и $B(\beta, \mathbb{e}') = B'$.

Предложение. $B' = C^TBC$.

Доказательство. Рассмотрим представление вектора $x \in V$ в обоих базисах.

$$\left.\begin{aligned} x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n = (e_1, \ldots, e_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ x = x'_1e'_1 + \ldots + x'_ne'_n = (e'_1, \ldots, e'_n)\begin{pmatrix} {x'}_1 \\ \vdots \\ {x'}_n \end{pmatrix} \end{aligned}\right. \Longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} {x'}_1 \\ \vdots \\ {x'}_n \end{pmatrix}$$

Аналогично для $y \in V$:

$$\left.\begin{array}{r} y = (e_1, \ldots, e_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\ y = (e'_1, \ldots, e'_n)\begin{pmatrix} {y'}_1 \\ \vdots \\ {y'}_n \end{pmatrix} \end{array}\right. \Longrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} {y'}_1 \\ \vdots \\ {y'}_n \end{pmatrix}.$$

Тогда, если мы транспонируем формулу для x, получаем:

$$\beta(x, y) = (x_1, \ldots, x_n)B\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = ({x'}_1, \ldots, {x'}_n)C^T BC\begin{pmatrix} {y'}_1 \\ \vdots \\ {y'}_n \end{pmatrix}.$$

Одновременно с этим:

$$\beta(x, y) = ({x'}_1, \ldots, {x'}_n)B'\begin{pmatrix} {y'}_1 \\ \vdots \\ {y'}_n \end{pmatrix}.$$

Сравнивая эти две формулы, получаем, что $B' = C^T BC$. □

Следствие. *Число* $\operatorname{rk} B$ *не зависит от выбора базиса.*

Определение. *Число* $\operatorname{rk} B$ *называется рангом билинейной функции* β*. Обозначение:* $\operatorname{rk} \beta$*.*

Симметричные билинейные функции

Как и для линейных операторов, неплохо было бы научиться находить такой базис, в котором матрица B была бы проще. Но мы это сделаем только для некоторого класса билинейных функций.

Определение. *Билинейная функция называется симметричной, если* $\beta(x, y) = \beta(y, x)$ *для любый* $x, y \in V$*.*

Предложение. *Билинейная функция* β *симметрична тогда и только тогда, когда матрица* $B(\beta, \mathbb{e})$ *— симметрическая (т.е. она равна своей транспонированной).*

Доказательство. Пусть $B = B(\beta, \mathbb{e})$.

- $\Rightarrow$ $\beta(e_i, e_j) = b_{ij} = b_{ji} = \beta(e_j, e_i) \Rightarrow B$ симметрична.
- $\Leftarrow$ Пусть $x = x_1e_1 + \ldots x_ne_n$ и $y = y_1e_1 + \ldots + y_ne_n$. Также воспользуемся тем, что данная нам матрица симметрична, то есть равна своей транспонированной.

$$\beta(y, x) = (y_1, \ldots, y_n)B\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \left[(y_1, \ldots, y_n)B\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right]^T =$$

$$= (x_1, \ldots, x_n)B^T\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (x_1, \ldots, x_n)B\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \beta(x, y)$$

То есть $\beta(y, x) = \beta(x, y)$, что и означает, что β симметрична.

□

Квадратичные функции

Определение. *Пусть $\beta\colon V \times V \to F$ — билинейная функция. Тогда $Q_\beta\colon V \to F$, заданная формулой $Q_\beta(x) = \beta(x, x)$, называется квадратичной функцией (формой), ассоциированной с билинейной функцией β.*

Покажем, что такая квадратичная функция на самом деле является однородным многочленом степени 2 от n переменных. Пусть $\mathbb{e} = (e_1, \dots, e_n)$ — базис V, $B = B(\beta, \mathbb{e})$, $x = (x_1, \dots, x_n)$. Тогда:

$$Q_\beta(x) = (x_1, \dots, x_n)V \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j$$

Квадратичную функцию удобно так представлять, но не определять.

Пример. *Здесь $\mathbb{e}$ — стандартный базис.*

1. $V = \mathbb{R}^n$, $\beta(x, y) = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n \;\Rightarrow\; Q_\beta(x) = x_1^2 + \ldots + x_n^2$, $B(\beta, \mathbb{e}) = E$.
2. $V = \mathbb{R}^2$, $\beta(x, y) = 2x_1 y_2 \;\Rightarrow\; Q_\beta(x) = 2x_1 x_2$, $B(\beta, \mathbb{e}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
3. $V = \mathbb{R}^2$, $\beta(x, y) = x_1 y_2 + x_2 y_1 \;\Rightarrow\; Q_\beta(x) = 2x_1 x_2$, $B(\beta, \mathbb{e}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Замечание. *Квадратичная функция задает билинейную функцию не однозначно (примеры 2 и 3).*

В дальнейшем нам понадобится делить на два. Поэтому далее предположим, что в нашем поле F можно делить на два. Что это означает? Заметим, что $2 = 1 + 1$, и, строго говоря, нельзя делить на ноль. Следовательно, наше условие можно переформулировать: рассматриваем такие поля F, в которых $1 + 1 \neq 0$. В терминах поля, это уже гораздо более осмысленное и понятное условие.

Теорема. *Отображение $\beta \mapsto Q_\beta$ является биекцией между симметричными билинейными функциями на V и квадратичными функциями на V.*

Доказательство.
Сюръективность. Пусть β — билинейная функция. Рассмотрим тогда ассоциированную с ней квадратичную функцию $Q_\beta(x) = \beta(x, x)$. Пусть $\sigma(x, y) = \frac{1}{2}(\beta(x, y) + \beta(y, x))$ — симметричная билинейная функция на V. Тогда:

$$Q_\sigma(x) = \sigma(x, x) = \frac{1}{2}(\beta(x, x) + \beta(x, x)) = \beta(x, x) = Q_\beta(x)$$

Итого, $Q_\sigma = Q_\beta$. Следовательно, отображение сюръективно.

Инъективность. Пусть $\beta(x, y)$ – симметричная билинейная функция. Аналогично, рассмотрим $Q_\beta(x) = \beta(x, x)$. Посмотрим на $Q_\beta(x + y)$:

$$Q_\beta(x + y) = \beta(x + y, x + y) = \beta(x, x) + \beta(x, y) + \beta(y, x) + \beta(y, y) = Q_\beta(x) + Q_\beta(y) + 2\beta(x, y)$$

$$\Downarrow$$

$$\beta(x, y) = \frac{1}{2}\left(Q_\beta(x + y) - Q_\beta(x) - Q_\beta(y)\right)$$

Полученная выше формула как раз и означает, что значения билинейной функции однозначно задаются соответствующей квадратичной функцией. $\square$

Замечание.

1. *Билинейная функция* $\sigma(x, y) = \frac{1}{2}(\beta(x, y) + \beta(y, x))$ *называется симметризацией билинейной функции* β*. Причем если* $B = B(\beta, \mathbb{e})$ *и* $S = B(\sigma, \mathbb{e})$*, то* $S = \frac{1}{2}(B + B^T)$*.*

2. *Симметричная билинейная функция* $\beta(x, y) = \frac{1}{2}\left(Q_\beta(x + y) - Q_\beta(x) - Q_\beta(y)\right)$ *называется поляризацией квадратичной функции* Q*.*

Пример. *Для предыдущих двух примеров:*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^T\right)$$

Далее вся терминология для симметричных билинейных функций переносится на квадратичные функции. В частности, матрицей квадратичной формы в базисе $\mathbb{e}$ называется матрица соответствующей симметричной билинейной функции в том же базисе.

Теперь вспоминаем, что перед нами стоит задача научиться приводить к хорошему виду.

Определение. *Квадратичная функция* Q *имеет в базисе* $\mathbb{e}$ *канонический вид, если для любого вектора* $x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$ *верно, что* $Q_\beta(x) = a_1x_1^2 + \ldots + a_nx_n^2$*, где* $a_i \in F$*. Иными словами, она имеет диагональную матрицу.*

Определение. *Квадратичная функция* Q *имеет нормальный вид в базисе* $\mathbb{e}$*, если для любого вектора* $x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$ *верно, что* $Q_\beta(x) = a_1x_1^2 + \ldots + a_nx_n^2$*, причем* $a_i \in \{-1, 0, 1\}$*.*