

# Лекции по предмету Линейная алгебра и геометрия

Группа лектория ФКН ПМИ 2015-2016

Анастасия Иовлева

Ксюша Закирова

Руслан Хайдуров

2016 год

## Содержание

<b>1 Лекция 15 от 11.01.2016</b>	<b>1</b>
1.1 Скаляры. Поля . . . . .	1
1.2 Поле комплексных чисел . . . . .	2
1.3 Геометрическая модель поля $\mathbb{C}$ . . . . .	3
<b>2 Лекция 16 от 18.01.2016</b>	<b>5</b>
2.1 Комплексные числа (продолжение) . . . . .	5
2.2 Корни из комплексного числа . . . . .	6
2.3 Решение квадратных уравнений с комплексными коэффициентами . . . . .	7
2.4 Векторные пространства над произвольным полем . . . . .	7
<b>3 Лекция 17 от 25.01.2016</b>	<b>8</b>
3.1 Овеществление и комплексификация . . . . .	8
3.2 Сумма подпространств . . . . .	9
3.3 Переход к новому базису . . . . .	10
<b>4 Лекция 18 от 29.01.2016</b>	<b>11</b>
4.1 Матрица перехода и переход к новому базису . . . . .	11
4.2 Линейные отображения . . . . .	12
4.3 Изоморфизм . . . . .	13
<b>5 Лекция 19 от 01.02.2016</b>	<b>15</b>
5.1 Изоморфизм (продолжение) . . . . .	15
5.2 Матрицы линейных отображений . . . . .	16
<b>6 Лекция 20 от 08.02.2016</b>	<b>18</b>
6.1 Линейные отображения (продолжение) . . . . .	18
6.2 Линейные операторы . . . . .	21

<b>7 Лекция 21 от 15.02.2016</b>	<b>22</b>
7.1 Инвариантность и обратимость . . . . .	22
7.2 Собственные векторы и собственные значения . . . . .	24
7.3 Диагонализуемость . . . . .	24
7.4 Собственное подпространство . . . . .	25
<b>8 Лекция 22 от 22.02.2016</b>	<b>25</b>
8.1 Деление многочленов с остатком . . . . .	25
8.2 Собственные значения и характеристический многочлен . . . . .	26
8.3 Геометрическая и алгебраическая кратности . . . . .	27
8.4 Сумма и прямая сумма нескольких подпространств . . . . .	27
<b>9 Лекция 23 от 29.02.2016</b>	<b>29</b>
9.1 Сумма собственных подпространств . . . . .	29
9.2 Диагонализируемость . . . . .	29
9.3 Инвариантные подпространства в $\mathbb{R}^n$ . . . . .	30
9.4 Корневые векторы и корневые подпространства . . . . .	31
<b>10 Лекция 24 от 14.03.2016</b>	<b>32</b>
10.1 Корневые подпространства . . . . .	32
10.2 Жордановы клетки . . . . .	34
<b>11 Лекция 25 от 21.03.2016</b>	<b>35</b>
11.1 Жорданова нормальная форма . . . . .	35
11.2 Линейные функции на векторном пространстве . . . . .	36
11.3 Билинейные функции на векторном пространстве . . . . .	37

## Лекция 15 от 11.01.2016

### Скаляры. Поля

Для начала вспомним, что такое *векторное пространство* — это множество, на котором введены операции сложения, умножения на скаляр и в котором будут выполняться восемь аксиом (см. 1 семестр). Но что такое скаляр?

**Определение.** *Скаляры — это элементы некоторого фиксированного поля.*

**Определение.** *Полем называется множество  $F$ , на котором заданы две операции — «сложение»  $(+)$  и «умножение»  $(\cdot)$ ,*

$$F \times F \rightarrow F \Rightarrow \begin{aligned} +: (a, b) &\mapsto a + b \\ \cdot: (a, b) &\mapsto a \cdot b \end{aligned}$$

*удовлетворяющие следующим свойствам («аксиомам поля»):  $\forall a, b, c \in F$*

1.  $a + b = b + a$  (коммутативность по сложению);
2.  $(a + b) + c = a + (b + c)$  (ассоциативность по сложению);
3.  $\exists 0 \in F: 0 + a = a + 0 = a$  (существование нулевого элемента);
4.  $\exists -a \in F: a + (-a) = (-a) + a = 0$  (существование противоположного элемента);

5.  $a(b + c) = ab + ac$  (дистрибутивность; связь между сложением и умножением);
6.  $ab = ba$  (коммутативность по умножению);
7.  $(ab)c = a(bc)$  (ассоциативность по умножению);
8.  $\exists 1 \in F \setminus \{0\} : 1 \cdot a = a \cdot 1 = a$  (существование единицы);
9.  $a \neq 0 \Rightarrow \exists a^{-1} \in F : a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$  (существование обратного элемента).

**Пример.**

- $\mathbb{Q}$  — рациональные числа;
- $\mathbb{R}$  — вещественные числа;
- $\mathbb{C}$  — комплексные числа;
- $F_2 = \{0, 1\}$ , при сложении и умножении по модулю 2.

## Поле комплексных чисел

Поле действительных чисел  $\mathbb{R}$  плохо тем, что в нем уравнение  $x^2 + 1 = 0$  не имеет решения. Отсюда возникает идея определить поле, удовлетворяющее следующим требованиям:

- (T1) новое поле содержит  $\mathbb{R}$ ;
- (T2) уравнение  $x^2 + 1 = 0$  имеет решение.

Давайте формально построим такое поле.

**Определение.** Полем  $\mathbb{C}$  комплексных чисел называется множество  $\{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ , на котором заданы операции сложения:  $(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$  и умножения:  $(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + b_1 a_2)$ .

**Предложение.**  $\mathbb{C}$  и впрямь является полем.

*Доказательство.* Операции сложения и умножения введены, осталось только проверить выполнение всех аксиом.

1. очевидно, так как сложение идет поэлементно;
2. также очевидно;
3.  $0 = (0, 0)$ ;
4.  $-(a, b) = (-a, -b)$ ;
5. почти очевидно (т.е. прямая проверка);
6. ясно (тоже прямая проверка);
7. проверим:

$$\begin{aligned}
 ((a_1, b_1)(a_2, b_2))(a_3, b_3) &= (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + b_1 a_2)(a_3, b_3) = \\
 &= (a_1 a_2 a_3 - b_1 b_2 b_3 - a_1 b_2 b_3 - b_1 a_2 b_3, a_1 a_2 b_3 - b_1 b_2 b_3 + a_1 b_2 a_3 + b_1 a_2 a_3) = \\
 &= (a_1, b_1)(a_2 a_3 - b_2 b_3, a_2 b_3 + b_2 a_3) = (a_1, b_1)((a_2, b_2)(a_3, b_3));
 \end{aligned}$$

8.  $1 = (1, 0)$ ;

$$9. (a, b) \neq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \neq 0 \rightarrow (a, b)^{-1} = \left( \frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2} \right).$$

□

Осталось только проверить, правда ли введенное поле  $\mathbb{C}$  удовлетворяет нашим требованиям:

(T1) Заметим, что в подмножестве  $\mathbb{C}$ , состоящим из элементов вида  $(a, 0)$  операции сложения и умножения будут работать как в поле вещественных чисел.

$$\begin{aligned}(a, 0) + (b, 0) &= (a + b, 0) \\ (a, 0) \cdot (b, 0) &= (ab, 0)\end{aligned}$$

Следовательно, отображение  $a \mapsto (a, 0)$  отождествляет  $\mathbb{R}$  с этим подмножеством, то есть  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ . Что нам и требуется.

(T2) Примем  $i = (0, 1)$ . Тогда  $i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$ . Итого, требование выполнено.

Однако запись комплексных чисел в виде упорядоченной пары  $(a, b)$  не очень удобна и громоздка. Поэтому преобразуем запись следующим образом:

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1) = a + bi.$$

Тем самым мы получили реализацию поля  $\mathbb{C}$  комплексных чисел как множества  $\{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$ , с обычным сложением и умножением.

**Определение.** Запись  $z = a + bi$  называется алгебраической формой комплексного числа  $z \in \mathbb{C}$ .

$a = \operatorname{Re} z$  — действительная часть числа  $z$ .

$b = \operatorname{Im} z$  — мнимая часть числа  $z$ .

**Определение.** Числа вида  $z = bi$  (т.е.  $\operatorname{Re} z = 0$ ) называются чисто мнимыми.

**Определение.** Отображение  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : a + bi \mapsto a - bi$  называется (комплексным) сопряжением. Само число  $\bar{z} = a - bi$  называется (комплексно) сопряженным к числу  $z = a + bi$ .

**Лемма.** Для любых двух комплексных чисел  $z, w \in \mathbb{C}$  выполняется, что

1.  $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$ ;
2.  $\overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}$ .

*Доказательство.* Пусть  $z = a + bi$ , а  $w = c + di$ .

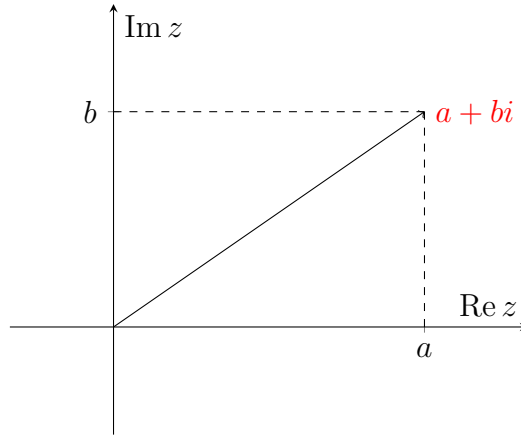
1.  $\bar{z} + \bar{w} = a - bi + c - di = (a + c) - (b + d)i = \overline{z + w}$
2.  $\bar{z} \cdot \bar{w} = (a - bi)(c - di) = ac - adi - bci + bdi^2 = (ac - bd) - (ad + bc)i = \overline{zw}$

□

**Замечание.** Равенство  $z = \bar{z}$  равносильно равенству  $\operatorname{Im} z = 0$ , то есть  $z \in \mathbb{R}$ .

# Геометрическая модель поля $\mathbb{C}$

Заметим, что поле комплексных чисел  $\mathbb{C} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$  равно  $\mathbb{R}^2$ . Следовательно, комплексные числа можно представить как точки на действительной плоскости  $\mathbb{R}^2$ , или сопоставить их векторам.



В таком представлении сложение комплексных чисел сопоставляется со сложением векторов, а сопряжение — с отражением относительно оси  $Ox(\text{Re } z)$ .

**Определение.** Модулем комплексного числа  $z = a + bi$  называется длина соответствующего вектора. Обозначение:  $|z|$ ;  $|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$ .

Свойства модуля:

1.  $|z| \geq 0$ , причем  $|z| = 0$  тогда и только тогда, когда  $z = 0$ ;
2.  $|z + w| \leq |z| + |w|$  — неравенство треугольника;
3.  $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ ;

*Доказательство.*  $(a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$ . □

4.  $|zw| = |z| \cdot |w|$ ;

*Доказательство.* Возведем в квадрат.

$$|z|^2 \cdot |w|^2 = z\bar{z}w\bar{w} = (zw)\overline{zw} = zw\bar{z}\bar{w} = |zw|^2$$

□

**Замечание.** Из свойства 3 следует, что при  $z \neq 0$  выполняется:

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$
$$(a + bi)^{-1} = \frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}.$$

**Определение.** Аргументом комплексного числа  $z \neq 0$  называется всякий угол  $\varphi$  такой что

$$\cos \varphi = \frac{a}{|z|} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \quad \sin \varphi = \frac{b}{|z|} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Неформально говоря, аргумент  $z$  — это угол между осью  $Ox$  и соответствующим вектором.

**Замечание.**

1. Аргумент определен с точностью до  $2\pi$ .
2. Аргумент  $z = 0$  не определен.

Для  $z \neq 0$  введем множество  $\text{Arg } z = \{\text{множество всех аргументов } z\}$  — *большой аргумент*. Также введем *малый аргумент*  $\arg z$  — это такой  $\varphi \in \text{Arg } z$ , который удовлетворяет условию  $0 \leq \varphi < 2\pi$  и, следовательно, определен однозначно.

Используя аргумент, можно представить комплексное число следующим образом:

$$\begin{aligned} a &= |z| \cos \varphi \\ b &= |z| \sin \varphi \end{aligned} \Rightarrow z = a + bi = |z| \cos \varphi + i|z| \sin \varphi = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

**Определение.** Запись  $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  называется *тригонометрической формой комплексного числа*  $z$ .

**Замечание.**

$$r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = r_2 \\ \varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

## Лекция 16 от 18.01.2016

Вспомним предыдущую лекцию и кое-что дополним

**Замечание.**

1. Элемент  $0$  — единственный.
2. И элемент  $-a$  единственный.
3. Даже элемент  $1$  единственный.
4. Как это ни удивительно, но  $a^{-1}$  тоже единственный.

Легко увидеть, что пункты 2 и 4 доказываются одинаково с точностью до замены операции, как и пункты 1 и 3.

*Доказательство.* Докажем пункт 3. Если существует  $1'$  — еще одна единица, тогда по аксиомам  $1' = 1' \cdot 1 = 1$ .

Докажем теперь пункт 4. Пусть  $b$  и  $c$  таковы, что  $b \neq c$  и  $ba = ab = ac = ca = 1$ . Тогда

$$bac = (ba)c = b(ac) = 1 \cdot c = c = 1 \cdot b = b$$

То есть  $b = c$ .

□

## Комплексные числа (продолжение)

**Предложение.** Пусть  $z_1 = |z_1|(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ ,  $z_2 = |z_2|(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ . Тогда

$$z_1 z_2 = |z_1| |z_2| (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

Иными словами, при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.

*Доказательство.* Просто раскроем скобки и приведём подобные.

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= |z_1| |z_2| (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + i (\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_2 \sin \varphi_1)) = \\ &= |z_1| |z_2| (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \end{aligned}$$

□

**Следствие.**  $\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$

**Следствие (Формула Муавра).** Пусть  $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ . Тогда:

$$z^n = |z|^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)) \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

**Замечание.** В комплексном анализе функция  $\exp x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  доопределяется до  $\exp z: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  следующим образом:

$$\exp z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

И тогда оказывается, что  $\exp z$  обладает теми же свойствами, кроме того:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi \quad \forall \varphi \in \mathbb{C}.$$

Всякое  $z \in \mathbb{C}$  можно представить в виде  $z = |z|e^{i\varphi}$ , где  $\varphi \in \text{Arg}(z)$ . Тогда формула Муавра приобретает совсем очевидный вид:

$$|z_1|e^{i\varphi_1} \cdot |z_2|e^{i\varphi_2} = |z_1| |z_2| e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}.$$

**Замечание.** Отображение  $R_\varphi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \rightarrow ze^{i\varphi}$ ,  $\varphi \in \mathbb{R}$  определяет поворот на угол  $\varphi$  вокруг 0.

## Корни из комплексного числа

Пусть  $n \in \mathbb{N}$  и  $n \geq 2$ .

**Определение.** Корнем  $n$ -й степени из числа  $z$  называется всякое  $w \in \mathbb{C}$ :  $w^n = z$ . То есть

$$\sqrt[n]{z} = \{w \in \mathbb{C} \mid w^n = z\}.$$

Если  $z = 0$ , то  $|z| = 0$ , а значит  $|w| = 0$ ,  $w = 0$ . Получается, 0 — единственное комплексное число, у которого корень определён однозначно.

Далее рассмотрим случай  $z \neq 0$ .

$$\begin{aligned} z &= |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi) \\ w &= |w|(\cos \psi + i \sin \psi) \end{aligned}$$

$$z = w^n \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = |w|^n \\ n\psi \in \text{Arg}(z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |w| = \sqrt[n]{|z|} \\ n\psi = \varphi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |w| = \sqrt[n]{|z|} \\ \psi = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

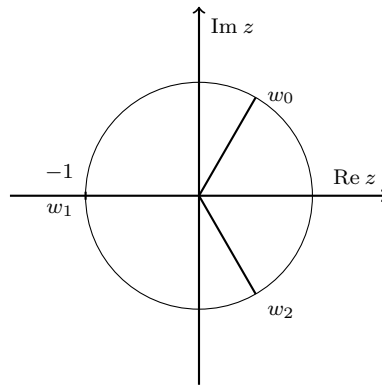
С точностью до кратного  $2\pi$  различные значения в формуле  $\psi = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}$  получаются при  $k = 0, 1, \dots, n-1$ . Значит  $z$  имеет ровно  $n$  корней  $n$ -й степени.

$$\sqrt[n]{z} = \left\{ |z| \left( \cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right) \mid k = 0, \dots, n-1 \right\}$$

**Замечание.** Точки из множества  $\sqrt[n]{z}$  при  $z \neq 0$  лежат в вершинах правильного  $n$ -угольника, вписанного в окружность радиуса  $\sqrt[n]{|z|}$ .

**Пример.**  $z = -1 = \cos \pi + i \sin \pi$

$$\sqrt[3]{z} = \left\{ \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}; \cos \pi + i \sin \pi; \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right\}$$



## Решение квадратных уравнений с комплексными коэффициентами

Пусть дано квадратное уравнение  $az^2 + bz + c = 0$ , где  $a, b, c \in \mathbb{C}$  и  $a \neq 0$ . Тогда имеем:

$$\begin{aligned} z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} &= 0 \\ z^2 + 2\frac{b}{2a}z + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} &= 0 \\ \left( z + \frac{b}{2a} \right)^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\ z + \frac{b}{2a} &\in \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{aligned}$$

То есть все решения — это  $z_1 = \frac{-b + d_1}{2a}$ ,  $z_2 = \frac{-b + d_2}{2a}$ , где  $\{d_1, d_2\} = \sqrt{b^2 - 4ac}$ . В частности, квадратное уравнение всегда имеет комплексный корень, а при  $b^2 - 4ac \neq 0$  два корня.

**Теорема** (Основная теорема алгебры). Всякий многочлен  $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$  степени  $n$ , где  $n \geq 1$ ,  $a_n \neq 0$ , и  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$  имеет корень.



# Векторные пространства над произвольным полем

И снова вспомним, что такое векторное пространство:

- некоторое множество  $V$ ;
- есть операция сложения  $V \times V \rightarrow V$ ;
- есть операция умножения на скаляр  $F \times V \rightarrow V$ ;
- выполняются 8 аксиом.

Все основные понятия и результаты теории векторных пространств из прошлого полугодия можно перенести на случай пространства над произвольным полем  $F$  без изменений.

**Пример.** Пусть  $V$  — векторное пространство над полем из двух элементов,  $\dim V = n$ . Тогда  $|V| = 2^n$ . Действительно, каждое конечномерное пространство обладает базисом (в данном случае  $e_1, \dots, e_n$ ). Тогда  $V = \{k_1e_1 + k_2e_2 + \dots + k_ne_n \mid k_i \in F\}$ . Но очень легко заметить, что всего таких линейных комбинаций  $2^n$

## Лекция 17 от 25.01.2016

### Овеществление и комплексификация

Пусть  $V$  — векторное пространство над  $\mathbb{C}$ .

**Определение.** Овеществление пространства  $V$  — это то же пространство  $V$ , рассматриваемое как пространство над  $\mathbb{R}$ . Обозначение:  $V_{\mathbb{R}}$ .

Операция умножения на элементы  $\mathbb{R}$  в  $V$  уже есть, так как  $\mathbb{R}$  — подполе в  $\mathbb{C}$ .

**Пример.**  $\mathbb{C}_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^2$ .

**Предложение.**  $V$  — векторное пространство над  $\mathbb{C}$ ,  $\dim V < \infty$ . Тогда  $\dim V_{\mathbb{R}} = 2 \dim V$ .

*Доказательство.* Пусть  $e_1, \dots, e_n$  — базис в  $V$ . Тогда  $V = \{z_1e_1 + \dots + z_ne_n \mid z_k \in \mathbb{C}\}$ , причём такая запись единственная в силу определения базиса. Пусть  $z_k = a_k + ib_k$ , причём такая запись тоже единственная. Тогда будем иметь

$$\begin{aligned} V &= \{(a_1 + ib_1)e_1 + \dots + (a_n + ib_n)e_n \mid a_k, b_k \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{a_1e_1 + \dots + a_ne_n + b_1ie_1 + \dots + b_nie_n \mid a_k, b_k \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

И причём такая запись тоже единственная. Выходит, что  $e_1, e_2, \dots, e_n, ie_1, ie_2, \dots, ie_n$  — базис в  $V_{\mathbb{R}}$ , в котором  $2n = 2 \dim V$  элементов.  $\square$

**Определение.** Комплексификация пространства  $W$  — это множество  $W \times W = W^{\mathbb{C}} = \{(u, v) \mid u, v \in W\}$  с операциями  $(u_1, v_1) + (u_2, v_2) = (u_1 + u_2, v_1 + v_2)$ ,  $(a + ib)(u, v) = (au - bv, av + bu)$ .

**Пример.**  $\mathbb{R}^{\mathbb{C}} = \mathbb{R}$ .

**Утверждение.** В нём выполняются все 8 аксиом векторного пространства над  $\mathbb{C}$ .

$W$  отождествляется подмножеством  $\{(u, 0) \mid u \in W\}$ . Действительно

$$w \in W \Leftrightarrow (w, 0) \in W^{\mathbb{C}}; \quad i(w, 0) = (0, w) \in W^{\mathbb{C}}$$

В итоге  $\forall (u, v) \in W^{\mathbb{C}}$  представим в виде

$$(u, v) = (u, 0) + (0, v) = (u, 0) + i(v, 0) = u + iv$$

То есть  $W^{\mathbb{C}} = \{u + iv \mid u, v \in W\}$ .

**Предложение.**  $\dim W^{\mathbb{C}} = \dim W$

**Замечание.** Здесь  $W^{\mathbb{C}}$  — пространство над  $\mathbb{C}$ , а  $W$  — над  $\mathbb{R}$ .

*Доказательство.* Пусть  $e_1, \dots, e_n$  — базис в  $W$ . Тогда

$$\begin{aligned} W^{\mathbb{C}} &= \{(u, v) \mid u, v \in W\} = \{(a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n, b_1 e_1 + b_2 e_2 + \dots + b_n e_n) \mid a_k, b_k \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{(a_1 e_1, b_1 e_1) + \dots + (a_n e_n, b_n e_n)\} = \{(a_1 + ib_1) e_1 + \dots + (a_n + ib_n) e_n\} = \\ &= \{z_1 e_1 + \dots + z_n e_n \mid z_k \in \mathbb{C}\} \end{aligned}$$

То есть выходит, что  $e_1, \dots, e_n$  — базис в  $W^{\mathbb{C}}$ . □

## Сумма подпространств

Пусть  $V$  — конечномерное векторное пространство, а  $U$  и  $W$  — подпространства (в качестве упражнения лектор предлагает доказать, что их пересечение — тоже подпространство).

**Определение.** Сумма подпространств  $U$  и  $W$  — это множество.

$$U + W = \{u + w \mid u \in U, w \in W\}$$

**Замечание.**  $\dim(U \cap W) \leq \dim U \leq \dim(U + W)$

**Пример.** Двумерные плоскости в пространстве  $\mathbb{R}^3$  содержат общую прямую.

**Теорема.**  $\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U + W)$

*Доказательство.* Положим  $p = \dim(U \cap W)$ ,  $k = \dim U$ ,  $m = \dim W$ . Выберем базис  $a = \{a_1, \dots, a_p\}$  в пересечении. Его можно дополнить до базиса  $W$  и до базиса  $U$ . Значит  $\exists b = \{b_1, \dots, b_{k-p}\}$  такой, что  $a \cup b$  — базис в  $U$  и  $\exists c = \{c_1, \dots, c_{m-p}\}$  такой, что  $a \cup c$  — базис в  $W$ .

Докажем, что  $a \cup b \cup c$  — базис в  $U + W$ .

Во-первых, докажем, что  $U + W$  порождается множеством  $a \cup b \cup c$ .

$$\left. \begin{aligned} v \in U + W &\Rightarrow \exists u \in U, w \in W: v = u + w \\ u \in U &= \langle a \cup b \rangle \subset \langle a \cup b \cup c \rangle \\ w \in W &= \langle a \cup c \rangle \subset \langle a \cup b \cup c \rangle \end{aligned} \right\} \Rightarrow v = u + w \in \langle a \cup b \cup c \rangle \Rightarrow U + W = \langle a \cup b \cup c \rangle$$

Во-вторых, докажем линейную независимость векторов из  $a \cup b \cup c$ .

Пусть скаляры  $\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_{k-p}, \gamma_1, \dots, \gamma_{m-p}$  таковы, что:

$$\underbrace{\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_p a_p}_x + \underbrace{\beta_1 b_1 + \dots + \beta_{k-p} b_{k-p}}_y + \underbrace{\gamma_1 c_1 + \dots + \gamma_{m-p} c_{m-p}}_z = 0$$

$$x + y + z = 0$$

$$z = -x - y$$

$$z \in W$$

$$-x - y \in U \cap W$$

$$\Rightarrow \exists \lambda_1, \dots, \lambda_p \in F: z = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_p a_p$$

Тогда  $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_p a_p - \gamma_1 c_1 - \dots - \gamma_{m-p} c_{m-p} = 0$ . Но  $a \cup c$  — базис  $W$ . Следовательно,  $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = \gamma_1 = \dots = \gamma_{m-p} = 0$ . Но тогда  $0 = x + y = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_p a_p + \beta_1 b_1 + \dots + \beta_{k-p} b_{k-p}$ . Но  $a \cup b$  — базис  $U + W \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_p = \beta_1 = \dots = \beta_{k-p} = 0$ . Итого, все коэффициенты равны нулю и линейная независимость тем самым доказана. То есть  $a \cup b \cup c$  — базис  $U + W$ .

$$\begin{aligned} \dim(U + W) &= |a \cup b \cup c| = |a| + |b| + |c| = p + k - p + m - p = k + m - p = \\ &= \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) \end{aligned}$$

□

**Определение.** Если  $U \cap W = \{0\}$ , то  $U + W$  называется прямой суммой.

**Следствие.** В таком случае  $\dim(U + W) = \dim U + \dim W$ .

**Пример.**  $U$  — плоскость,  $W$  — прямая в  $\mathbb{R}^3$ .

## Переход к новому базису

Пусть  $V$  — векторное пространство,  $\dim V = n$ ,  $e_1, \dots, e_n$  — базис. То есть

$$\forall v \in V \quad \exists! v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n,$$

где  $x_1, \dots, x_n \in F$  — координаты вектора  $v$  в базисе  $(e_1, \dots, e_n)$ . Пусть также есть базис  $e'_1, \dots, e'_n$ :

$$\begin{aligned} e'_1 &= c_{11}e_1 + c_{21}e_2 + \dots + c_{n1}e_n \\ e'_2 &= c_{12}e_1 + c_{22}e_2 + \dots + c_{n2}e_n \\ &\vdots \\ e'_n &= c_{1n}e_1 + c_{2n}e_2 + \dots + c_{nn}e_n \end{aligned}$$

Обозначим матрицу  $C = (c_{ij})$ . Тогда можно переписать  $(e'_1, \dots, e'_n)$  как  $(e_1, \dots, e_n) \cdot C$ .

**Предложение.**  $e'_1, \dots, e'_n$  образуют базис тогда и только тогда, когда  $\det C \neq 0$ .

*Доказательство.*

[ $\Rightarrow$ ]  $e'_1, \dots, e'_n$  — базис, а значит  $\exists C' \in M_n$ :

$$\begin{aligned} (e_1, \dots, e_n) &= (e'_1, \dots, e'_n) C' = (e_1, \dots, e_n) C' C \\ E &= C C' \\ C' &= C^{-1} \Leftrightarrow \exists C^{-1} \Leftrightarrow \det C \neq 0 \end{aligned}$$

[ $\Leftarrow$ ]  $\det C \neq 0 \Rightarrow \exists C^{-1}$ . Покажем, что  $e'_1, \dots, e'_n$  в таком случае линейно независимы. Пусть  $x_1 e'_1 + x_2 e'_2 + \dots + x_n e'_n = 0$ . Тогда можно записать

$$\begin{aligned} (e'_1, e'_2, \dots, e'_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} &= 0 \\ (e_1, \dots, e_n) C \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} &= 0 \end{aligned}$$

Поскольку  $(e_1, \dots, e_n)$  — базис, то  $C \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$ . Умножая слева на обратную матрицу, получаем, что  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$

□

## Лекция 18 от 29.01.2016

### Матрица перехода и переход к новому базису

Пусть  $V$  — векторное пространство,  $\dim V = n$ , вектора  $e_1, \dots, e_n$  — базис, а  $e'_1, \dots, e'_n$  — некий набор из  $n$  векторов. Тогда каждый вектор из этого набора линейно выражается через базис.

$$e'_j = \sum_{i=1}^n c_{ij} e_i, \quad c_{ij} \in F$$

$$(e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n) \cdot C, \quad C = (c_{ij})$$

То есть мы получили матрицу, где в  $j$ -ом столбце стоят коэффициенты линейного разложения вектора  $e'_j$  в базисе  $(e_1, \dots, e_n)$ .

Теперь пусть  $e'_1, \dots, e'_n$  — тоже базис в  $V$ . Вспомним, что на прошлой лекции уже было сказано, что в этом случае  $\det C \neq 0$ .

**Определение.** Матрица  $C$  называется матрицей перехода от базиса  $(e_1, \dots, e_n)$  к базису  $(e'_1, \dots, e'_n)$ .

**Замечание.** Матрица перехода от  $(e'_1, \dots, e'_n)$  к  $(e_1, \dots, e_n)$  есть  $C^{-1}$ .

И небольшое замечание касательно записи: когда базис записан в скобках, то есть  $(e_1, \dots, e_n)$ , то нам важен порядок векторов в нем, в противном случае, при записи  $e_1, \dots, e_n$ , порядок не важен.

Итого, имеем два базиса пространства  $V$ ,  $(e_1, \dots, e_n)$  и  $(e'_1, \dots, e'_n)$ , и матрицу перехода  $C$  такую, что  $(e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n) \cdot C$ . Возьмем некий вектор  $v$  и разложим его по обоим базисам.

$$v \in V \Rightarrow \begin{cases} v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n, & x_i \in F \\ v = x'_1 e'_1 + \dots + x'_n e'_n, & x'_i \in F \end{cases}$$

**Предложение.** Формула преобразования координат при переходе к другому базису:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad x_i = \sum_{j=1}^n c_{ij} x'_j$$

*Доказательство.* С одной стороны:

$$v = x'_1 e'_1 + \dots + x'_n e'_n = (e'_1 \quad \dots \quad e'_n) \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = (e_1 \quad \dots \quad e_n) C \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

Однако с другой стороны:

$$v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n = \begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Сравнивая одно с другим, получаем, что:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

□

## Линейные отображения

Пусть  $V$  и  $W$  — два векторных пространства над полем  $F$ .

**Определение.** Отображение  $f : V \rightarrow W$  называется линейным, если:

1.  $f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2), \quad \forall u_1, u_2 \in V;$
2.  $f(\alpha u) = \alpha f(u), \quad \forall u \in V, \forall \alpha \in F.$

**Замечание.** Свойства 1–2 эквивалентны тому, что

$$f(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 f(u_1) + \alpha_2 f(u_2), \quad \forall u_1, u_2 \in V, \forall \alpha_1, \alpha_2 \in F.$$

Здесь важно понимать, что сначала сложение векторов и умножение на скаляр происходит в пространстве  $V$ , а потом в пространстве  $W$ .

**Простейшие свойства.**

1.  $f(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$

$$\text{Доказательство. } f(\vec{0}_V) = f(0 \cdot \vec{0}_V) = 0f(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$$

□

2.  $\varphi(-u) = -\varphi(u)$ , где  $(-u)$  — обратный элемент к  $u$ .

$$\text{Доказательство. } \varphi(-u) + \varphi(u) = \varphi(-u + u) = \varphi(\vec{0}_V) = \vec{0}_W \Rightarrow \varphi(-u) = -\varphi(u)$$

□

**Примеры**

(0)  $V \rightarrow V : v \mapsto v$  — тождественное отображение.

(1)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  линейно  $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : f(x) = kx, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

*Доказательство.*

$$\Rightarrow f(x) = f(x \cdot 1) = xf(1) = kx, \text{ где } k = f(1)$$

$\Leftarrow$  Проверим необходимые условия линейности.

1.  $f(x) = kx \Rightarrow f(x_1 + x_2) = k(x_1 + x_2) = kx_1 + kx_2 = kf(x_1) + kf(x_2)$
2.  $f(\alpha x) = k\alpha x = \alpha kx = \alpha f(x)$

□

(2)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  — декартова система координат.

2.1 Поворот вокруг 0 на угол  $\alpha$  линеен.

2.2 Проекция на прямую, проходящую через 0, линейна.

(3)  $P_n = R[x]_{\leq n}$  — пространство всех многочленов от  $x$  степени не больше  $n$ .

$$\Delta : f \mapsto f' \text{ (производная)}$$

$$\left. \begin{aligned} (f+g)' &= f' + g' \\ (\alpha f)' &= \alpha f' \end{aligned} \right| \Rightarrow \Delta \text{ — линейное отображение из } P_n \text{ в } P_{n-1}$$

(4) Векторное пространство  $V$ ,  $\dim V = n$ ,  $e_1, \dots, e_n$  — базис.

$$V \mapsto \mathbb{R}^n$$

$$x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ — тоже линейное отображение.}$$

(5)  $A \in \text{Mat}_{m \times n}$ ,  $k \geq 1$  — любое,  $\varphi : \text{Mat}_{n \times k} \rightarrow \text{Mat}_{m \times k}$ .

$$\varphi(X) = A \cdot X$$

$$A(X_1 + X_2) = AX_1 + AX_2$$

$$A(\alpha X) = \alpha(AX)$$

Частный случай, при  $k = 1$  —  $\varphi : F^n \rightarrow F^m$ .

## Изоморфизм

**Определение.** Отображение  $\varphi : V \rightarrow W$  называется изоморфизмом, если  $\varphi$  линейно и биективно. Обозначение:  $\varphi : V \xrightarrow{\sim} W$ .

Рассмотрим те же примеры:

(0) Изоморфизм.

(1) Изоморфизм, при  $k \neq 0$ .

(2) 2.1 Изоморфизм.

2.2 Не изоморфизм.

(3) Не изоморфизм.

(4) Изоморфизм.

(5) Задача: доказать, что  $\varphi$  — изоморфизм тогда и только тогда, когда  $n = m$  и  $\det A \neq 0$ .

**Предложение.** Пусть  $\varphi : V \rightarrow W$  — изоморфизм. Тогда  $\varphi^{-1} : W \rightarrow V$  — тоже изоморфизм.

*Доказательство.* Так как  $\varphi$  — биекция, то  $\varphi^{-1}$  — тоже биекция.

$$w_1, w_2 \in W \Rightarrow \exists v_1, v_2 \in V : \begin{aligned} \varphi(v_1) &= w_1 & v_1 &= \varphi^{-1}(w_1) \\ \varphi(v_2) &= w_2 & v_2 &= \varphi^{-1}(w_2) \end{aligned}$$

Тогда осталось только доказать линейность обратного отображения. Для этого проверим выполнение необходимых условий линейности.

1.  $\varphi^{-1}(w_1 + w_2) = \varphi^{-1}(\varphi(v_1) + \varphi(v_2)) = \varphi^{-1}(\varphi(v_1 + v_2)) = \text{id}(v_1 + v_2) = v_1 + v_2$
2.  $\alpha \in F, \quad \varphi^{-1}(\alpha w_1) = \varphi^{-1}(\alpha \varphi(v_1)) = \varphi^{-1}(\varphi(\alpha v_1)) = \text{id}(\alpha v_1) = \alpha v_1.$

□

**Определение.** Два векторных пространства  $V$  и  $W$  называются изоморфными, если существует изоморфизм  $\varphi : V \xrightarrow{\sim} W$  (и тогда существует изоморфизм  $V \xleftarrow{\sim} W$  по предположению). Обозначение:  $V \simeq W$  или  $V \cong W$ .

Отображения можно соединять в композиции:

$$\left. \begin{array}{l} \varphi : U \rightarrow V \\ \psi : V \rightarrow W \end{array} \right| \Rightarrow \psi \circ \varphi : U \rightarrow W \quad \psi \circ \varphi(u) = \psi(\varphi(u))$$

**Предложение.**

1. Если  $\varphi$  и  $\psi$  линейны, то  $\psi \circ \varphi$  тоже линейно.
2. Если  $\varphi$  и  $\psi$  изоморфизмы, то  $\psi \circ \varphi$  тоже изоморфизм.

*Доказательство.*

1. Опять-таки, просто проверим необходимые условия линейности.

$$(a) \quad (\psi \circ \varphi)(u_1 + u_2) = \psi(\varphi(u_1 + u_2)) = \psi(\varphi(u_1) + \varphi(u_2)) = \psi(\varphi(u_1)) + \psi(\varphi(u_2)) = \\ = (\psi \circ \varphi)(u_1) + (\psi \circ \varphi)(u_2)$$

$$(b) \quad (\psi \circ \varphi)(\alpha u) = \psi(\varphi(\alpha u)) = \psi(\alpha \varphi(u)) = \alpha \psi(\varphi(u)) = \alpha(\psi \circ \varphi)(u)$$

2. Следует из сохранения линейности и того, что композиция биекций тоже биекция.

□

**Следствие.** Изоморфизм это отношение эквивалентности на множестве всех векторных пространств над фиксированным полем  $F$ .

*Доказательство.*

**Рефлексивность**  $V \simeq V$ .

**Симметричность**  $V \simeq W \Rightarrow W \simeq V$ .

**Транзитивность**  $(V \simeq U) \wedge (U \simeq W) \Rightarrow V \simeq W$ .

□

То есть множество всех векторных пространств над фиксированным полем  $F$  разбивается на попарно непересекающиеся классы, причем внутри одного класса любые два пространства изоморфны. Такие классы называются *классами эквивалентности*.

**Теорема.** Если два конечномерных векторных пространства  $V$  и  $W$  над полем  $F$  изоморфны, то  $\dim V = \dim W$ .

Но для начала докажем следующую лемму.

**Лемма (1).** Для векторного пространства  $V$  над полем  $F$  размерности  $n$  верно, что  $V \simeq F^n$ .

*Доказательство.* Рассмотрим отображение  $\varphi : V \rightarrow F^n$  из примера 4. Пусть  $(e_1, \dots, e_n)$  — базис пространства  $V$ . Тогда:

$$x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad x_i \in F.$$

Отображение  $\varphi$  линейно и биективно, следовательно  $\varphi$  — изоморфизм. А раз существует изоморфное отображение между пространствами  $V$  и  $F^n$ , то они изоморфны. □

# Лекция 19 от 01.02.2016

## Изоморфизм (продолжение)

На прошлой лекции мы ввели теорему и доказали одну лемму. Напомним их.

**Теорема.** Если два конечномерных векторных пространства  $V$  и  $W$  изоморфны, то  $\dim V = \dim W$ .

**Лемма (1).** Если  $\dim V = n$ , то  $V \simeq F^n$ .

**Замечание.** Говорят, что функция  $\varphi$  отождествляет пространство  $V$  с пространством  $F^n$ , если  $\varphi : V \xrightarrow{\sim} F^n$ .

Но перед тем, как доказывать эту теорему, докажем лучше еще одну лемму.

**Лемма (2).** Пусть  $\varphi : V \xrightarrow{\sim} W$  — изоморфизм векторных пространств, а  $e_1, \dots, e_n$  — базис  $V$ . Тогда  $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$  — базис  $W$ .

*Доказательство.* Пусть  $w \in W$  — произвольный вектор. Положим  $v \in V$  таковым, что  $v = \varphi^{-1}(w)$ .

$$\begin{aligned} v &= x_1 e_1 + \dots + x_n e_n, \quad x_i \in F \\ w &= \varphi(v) = \varphi(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1 \varphi(e_1) + \dots + x_n \varphi(e_n) \Rightarrow W = \langle \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n) \rangle \end{aligned}$$

Покажем, что  $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$  — линейно независимые вектора.

Пусть  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$  таковы, что  $\alpha_1 \varphi(e_1) + \dots + \alpha_n \varphi(e_n) = 0$ . Это то же самое, что  $\varphi(\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n) = 0$ . Применяя  $\varphi^{-1}$ , получаем  $\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n = \varphi^{-1}(0) = 0$ . Но так как  $e_1, \dots, e_n$  — базис в  $V$ , то  $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ , и потому вектора  $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$  линейно независимы. Следовательно, этот набор векторов — базис в  $W$ .  $\square$

Теперь приступим наконец к доказательству теоремы.

*Доказательство.*

$\Rightarrow V \simeq W \Rightarrow \exists \varphi : V \xrightarrow{\sim} W$ . Тогда по лемме 2, если  $e_1, \dots, e_n$  — базис  $V$ , то  $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$  — базис  $W$ , и тогда  $\dim V = \dim W$ .

$\Leftarrow$  Пусть  $\dim V = \dim W = n$ . Тогда по лемме 1 существуют изоморфизмы  $\varphi : V \xrightarrow{\sim} F^n$  и  $\psi : W \xrightarrow{\sim} F^n$ . Следовательно,  $\psi^{-1} \circ \varphi : V \rightarrow W$  — изоморфизм.  $\square$

То есть получается, что с точностью до изоморфизма существует только одно векторное пространство размерности  $n$ . Однако не стоит заканчивать на этом курс линейной алгебры. Теперь главная наша проблема — это как из бесконечного множества базисов в каждом векторном пространстве выбрать тот, который будет наиболее простым и удобным для каждой конкретной задачи.

Например, рассмотрим вектор  $v \in F^n$  с координатами  $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ . Пусть  $v \neq 0$ . Тогда существует такой базис  $e_1, \dots, e_n$ , что  $v = e_1$ , то есть в этом базисе вектор имеет координаты  $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Пусть  $V, W$  — векторные пространства над  $F$ , и  $e_1, \dots, e_n$  — базис  $V$ .



### Предложение.

1. Всякое линейное отображение  $\varphi : V \rightarrow W$  однозначно определяется векторами  $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ .
2. Для всякого набора векторов  $f_1, \dots, f_n \in W$  существует единственное линейное отображение  $\varphi : V \rightarrow W$  такое, что  $\varphi(e_1) = f_1, \dots, \varphi(e_n) = f_n$ .

*Доказательство.*

1. Пусть  $v \in V$ ,  $v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ , где  $x_i \in F$ . Тогда  $\varphi(v) = x_1 \varphi(e_1) + \dots + x_n \varphi(e_n)$ , то есть если мы знаем вектора  $\varphi(e_i)$ , то сможем задать  $\varphi(v)$  для любого  $v \in V$ .
2. Определим отображение  $\varphi : V \rightarrow W$  по формуле  $\varphi(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1 f_1 + \dots + x_n f_n$ . Прямая проверка показывает, что  $\varphi$  линейна, а единственность следует из пункта 1.

□

**Следствие.** Если  $\dim V = \dim W = n$ , то для всякого базиса  $e_1, \dots, e_n$  пространства  $V$  и всякого базиса  $f_1, \dots, f_n$  пространства  $W$  существует единственный изоморфизм  $\varphi : V \xrightarrow{\sim} W$  такой, что  $\varphi(e_1) = f_1, \dots, \varphi(e_n) = f_n$ .

*Доказательство.* Из пункта 2. предложения следует, что существует единственное линейное отображение  $\varphi : V \rightarrow W$  такое, что  $\varphi(e_1) = f_1, \dots, \varphi(e_n) = f_n$ . Но тогда  $\varphi(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1 \varphi(e_1) + \dots + x_n \varphi(e_n) = x_1 f_1 + \dots + x_n f_n$  для любых  $x_i \in F$ . Отсюда следует, что  $\varphi$  — биекция. □

## Матрицы линейных отображений

Пусть  $V$  и  $W$  — векторные пространства,  $e = (e_1, \dots, e_n)$  — базис  $V$ ,  $f = (f_1, \dots, f_m)$  — базис  $W$ ,  $\varphi : V \rightarrow W$  — линейное отображение. Тогда:

$$\varphi(e_j) = a_{1j} f_1 + \dots + a_{mj} f_m = \sum_{i=1}^m a_{ij} f_i.$$

**Определение.** Матрица  $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}_{m \times n}(F)$  называется матрицей линейного отображения  $\varphi$  в базисах  $e$  и  $f$  (или по отношению к базисам  $e$  и  $f$ ).

**Замечание.** Существует биекция  $\{\text{линейные отображения } V \rightarrow W\} \rightleftharpoons \text{Mat}_{m \times n}$ .

**Замечание.** В  $A^{(j)}$  стоят координаты  $\varphi(e_j)$  в базисе  $f$ .

$$(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) = (f_1, \dots, f_n) \cdot A$$

Рассмотрим пример.

Пусть  $P_n = F[x]_{\leq n}$  — множество многочленов над полем  $F$  степени не выше  $n$ . Возьмем дифференцирование  $\Delta : P_n \rightarrow P_{n-1}$ .

Базис  $P_n = 1, x, x^2, \dots, x^n$ . Базис  $P_{n-1} = 1, x, \dots, x^{n-1}$ . Тогда матрица линейного отображения будет размерности  $n \times (n+1)$  и иметь следующий вид.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{pmatrix}$$

**Предложение.** Если  $v = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$  и  $\varphi(v) = y_1f_1 + \dots + y_mf_m$ , то

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

*Доказательство.* С одной стороны:

$$\varphi(v) = x_1\varphi(e_1) + \dots + x_n\varphi(e_n) = (\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (f_1, \dots, f_m)A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Однако с другой стороны:

$$\varphi(v) = (f_1, \dots, f_m) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

Сравнивая обе части, получаем требуемое. □

А теперь проанализируем операции над матрицами линейных отображений.

$V$  и  $W$  — векторные пространства. **Обозначение:**  $\text{Hom}(V, W) :=$  множество всех линейных отображений  $V \rightarrow W$ .

Пусть  $\varphi, \psi \in \text{Hom}(V, W)$ .

**Определение.**

1.  $\varphi + \psi \in \text{Hom}(V, W)$  — это  $(\varphi + \psi)(v) := \varphi(v) + \psi(v)$ .
2.  $\alpha \in F, \alpha\varphi \in \text{Hom}(V, W)$  — это  $(\alpha\varphi)(v) := \alpha(\varphi(v))$ .

**Упражнение.**

1. Проверить, что  $\varphi + \psi$  и  $\alpha\varphi$  действительно принадлежат  $\text{Hom}(V, W)$ .
2. Проверить, что  $\text{Hom}(V, W)$  является векторным пространством.

**Предложение.** Пусть  $e = (e_1, \dots, e_n)$  — базис  $V$ ,  $f = (f_1, \dots, f_m)$  — базис  $W$ ,  $\varphi, \psi \in \text{Hom}(V, W)$ . При этом  $A_\varphi$  — матрица линейного отображения  $\varphi$ ,  $A_\psi$  — матрица для  $\psi$ ,  $A_{\varphi+\psi}$  — для  $\varphi+\psi$ , а  $A_{\alpha\varphi}$  — для  $\alpha\varphi$ .

Тогда  $A_{\varphi+\psi} = A_\varphi + A_\psi$  и  $A_{\alpha\varphi} = \alpha A_\varphi$ .

*Доказательство.* Упражнение. □

Теперь возьмем три векторных пространства —  $U, V$  и  $W$  размерности  $n, m$  и  $k$  соответственно, и их базисы  $e, f$  и  $g$ . Также рассмотрим цепочку линейных отображений  $U \xrightarrow{\psi} V \xrightarrow{\varphi} W$ . Пусть  $A$  — матрица  $\varphi$  в базисах  $f$  и  $g$ ,  $B$  — матрица  $\psi$  в базисах  $e$  и  $f$ ,  $C$  — матрица  $\varphi \circ \psi$  в базисах  $e$  и  $g$ .

**Предложение.**  $C = AB$ .

**Замечание.** Собственно говоря, отсюда и взялось впервые определение умножения матриц.

*Доказательство.* Запишем по определению:

$$\begin{aligned}(\varphi \circ \psi)(e_r) &= \sum_{p=1}^k c_{pr} g_p, \quad r = 1, \dots, n \\ \psi(e_r) &= \sum_{q=1}^m b_{qr} f_q, \quad r = 1, \dots, n \\ \varphi(f_q) &= \sum_{p=1}^k a_{pq} g_p, \quad q = 1, \dots, m\end{aligned}$$

Тогда:

$$\begin{aligned}(\psi \circ \varphi)(e_r) &= \varphi(\psi(e_r)) = \varphi\left(\sum_{q=1}^m b_{qr} f_q\right) = \sum_{q=1}^m b_{qr} \varphi(f_q) = \sum_{q=1}^m b_{qr} \left(\sum_{p=1}^k a_{pq} g_p\right) = \sum_{p=1}^k \left(\sum_{q=1}^m a_{pq} b_{qr}\right) g_p \\ &\Downarrow \\ c_{pr} &= \sum_{q=1}^m a_{pq} b_{qr} \\ &\Downarrow \\ C &= AB\end{aligned}$$

□

И снова, пусть  $V$  и  $W$  — векторные пространства с линейным отображением  $\varphi : V \rightarrow W$ .

**Определение.** Ядро  $\varphi$  — это множество  $\text{Ker } \varphi := \{v \in V \mid \varphi(v) = 0\}$ .

**Определение.** Образ  $\varphi$  — это множество  $\text{Im } \varphi := \{w \in W \mid \exists v \in V : \varphi(v) = w\}$ .

**Пример.** Все то же  $\Delta : P_n \rightarrow P_{n-1}$ . Для него  $\text{Ker } \Delta = \{f \mid f = \text{const}\}$ ,  $\text{Im } \Delta = P_{n-1}$ .

## Лекция 20 от 08.02.2016

### Линейные отображения (продолжение)

Пусть  $\varphi : V \rightarrow W$  — линейное отображение.

**Предложение.**

1.  $\text{Ker } \varphi$  — подпространство в  $V$ .
2.  $\text{Im } \varphi$  — подпространство в  $W$ .

*Доказательство.* Проверим по определению.

1.
  - $\varphi(0_v) = 0_w$  — этот факт мы уже доказали.
  - $v_1, v_2 \in \text{Ker } \varphi \Rightarrow \varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) = 0_w + 0_w = 0_w \Rightarrow v_1 + v_2 \in \text{Ker } \varphi$ .
  - $v \in \text{Ker } \varphi, \alpha \in F \Rightarrow \varphi(\alpha v) = \alpha \varphi(v) = \alpha 0 = 0$ , то есть  $\alpha v$  тоже лежит в ядре.
2.
  - $0_w = \varphi(0_v) \Rightarrow 0_w \in \text{Im } (\varphi)$ .

- $w_1, w_2 \in \text{Im } \varphi \Rightarrow \exists v_1, v_2 \in V: w_1 = \varphi(v_1), w_2 = \varphi(v_2) \Rightarrow w_1 + w_2 = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) = \varphi(v_1 + v_2) \Rightarrow w_1 + w_2 \in \text{Im } \varphi$ .
- $w \in \text{Im } \varphi, \alpha \in F \Rightarrow \exists v \in V: \varphi(v) = w \Rightarrow \alpha w = \alpha \varphi(v) = \varphi(\alpha v) \Rightarrow \alpha w \in \text{Im } \varphi$ .

То есть все условия подпространства по определению выполнены и предложение доказано.  $\square$

**Предложение.**

1. *Отображение  $\varphi$  инъективно тогда и только тогда, когда  $\text{Ker } \varphi = \{0\}$ .*
2. *Отображение  $\varphi$  сюръективно тогда и только тогда, когда  $\text{Im } \varphi = W$ .*

*Доказательство.*

1.
  - $[\Rightarrow]$  Очевидно.
  - $[\Leftarrow]$   $v_1, v_2 \in V: \varphi(v_1) = \varphi(v_2) \Rightarrow \varphi(v_1 - v_2) = 0 \Rightarrow v_1 - v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = v_2$ .
2. Очевидно из определения образа.

$\square$

**Следствие.** *Отображение  $\varphi$  является изоморфизмом тогда и только тогда, когда  $\text{Ker } \varphi = \{0\}$  и  $\text{Im } \varphi = W$ .*

**Предложение.** *Пусть  $U \subset V$  — подпространство и  $e_1, \dots, e_k$  — его базис. Тогда:*

1.  $\varphi(U)$  — подпространство,  $\varphi(U) = \langle \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_k) \rangle$ ;
2.  $\dim \varphi(U) \leq \dim U$ .

*Доказательство.*

1.  $\varphi(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_k e_k) = x_1 \varphi(e_1) + \dots + x_k \varphi(e_k) \in \langle \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_k) \rangle$ .
2.  $\varphi(U) = \langle \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_k) \rangle \Rightarrow \dim \varphi(U) \leq \dim U$  по основной лемме о линейной зависимости.

$\square$

Пусть  $V, W$  — векторные пространства,  $e = (e_1, \dots, e_n)$  — базис  $V$ ,  $f = (f_1, \dots, f_m)$  — базис  $W$ ,  $A$  — матрица  $\varphi$  по отношению к  $e, f$ .

**Предложение.**  $\dim \text{Im } \varphi = \text{rk } A$ .

*Доказательство.*

$$v \in V, v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$$

$$\varphi(v) = y_1 f_1 + \dots + y_m f_m$$

Тогда:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

$A^{(j)}$  — столбец координат в базисе  $f$ ,  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$ .

$$\alpha_1 \varphi(e_1) + \dots + \alpha_n \varphi(e_n) = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 A^{(1)} + \dots + \alpha_n A^{(n)} = 0$$

Отсюда следует, что:

$$\text{rk } A = \text{rk } \{\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)\} = \dim \underbrace{\langle \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n) \rangle}_{\text{Im } \varphi} = \dim \text{Im } \varphi.$$

$\square$

**Следствие.** Величина  $\text{rk } A$  не зависит от выбора базисов  $e$  и  $f$ .

**Определение.** Величина  $\text{rk } A$  называется рангом линейного отображения  $\varphi$ . Обозначение:  $\text{rk } \varphi$ .

**Следствие.** Если  $\dim V = \dim W = n$ , то  $\varphi$  — изоморфизм тогда и только тогда, когда  $\det A \neq 0$ . Тогда  $A$  — квадратная.

*Доказательство.*

$[\Rightarrow]$   $\varphi$  — изоморфизм, следовательно:

$$\text{Im } \varphi = W \Rightarrow \dim \text{Im } \varphi = n \Rightarrow \text{rk } A = n \Rightarrow \det A \neq 0.$$

$$[\Leftarrow] \det A \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}.$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

Таким образом, линейное отображение  $\varphi$  является биекцией, а значит, и изоморфизмом.  $\square$

**Следствие.** Пусть  $A \in \text{Mat}_{k \times m}$ ,  $B \in \text{Mat}_{m \times n}$ . Тогда  $\text{rk } AB \leq \min\{\text{rk } A, \text{rk } B\}$ .

*Доказательство.* Реализуем  $A$  и  $B$  как матрицы линейных отображений, то есть  $\varphi_A: F^m \rightarrow F^k$ ,  $\varphi_B: F^n \rightarrow F^m$ . Тогда  $AB$  будет матрицей отображения  $\varphi_A \circ \varphi_B$ .

$$\text{rk } (AB) = \text{rk } (\varphi_A \circ \varphi_B) \begin{cases} \leq \dim \text{Im } \varphi_A = \text{rk } A \\ \leq \dim \text{Im } \varphi_B = \text{rk } B \end{cases}$$

Первое неравенство следует из того, что  $\text{Im } (\varphi_A \circ \varphi_B) \subset \text{Im } \varphi_A$ , откуда в свою очередь следует, что  $\dim \text{Im } (\varphi_A \circ \varphi_B) \leq \dim \text{Im } \varphi_A$ . Рассматривая второе неравенство, получаем:

$$\text{Im } (\varphi_A \circ \varphi_B) = \varphi_A(\text{Im } \varphi_B) \Rightarrow \dim \text{Im } (\varphi_A \circ \varphi_B) = \dim(\varphi_A(\text{Im } \varphi_B)) \leq \dim \text{Im } \varphi_B.$$

$\square$

**Упражнение.**

- Если  $A$  квадрата и  $\det A \neq 0$ , то  $\text{rk } AB = \text{rk } B$ .
- Если  $B \in M_n$  и  $\det B \neq 0$ , то  $\text{rk } AB = \text{rk } A$ .

**Теорема.**  $\dim \text{Im } \varphi = \dim \varphi - \dim \text{Ker } \varphi$ .

Существует 2 способа доказательства. Рассмотрим оба.

*Бескоординатный способ.* Пусть  $\dim \text{Ker } \varphi = k$  и  $e_1, \dots, e_k$  — базис в  $\text{Ker } \varphi$ . Дополним его до базиса  $V$  векторами  $e_{k+1}, \dots, e_n$ . Тогда:

$$\text{Im } \varphi = \langle \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_k), \dots, \varphi(e_n) \rangle = \langle 0, 0, \dots, 0, \varphi(e_{k+1}), \dots, \varphi(e_n) \rangle = \langle \varphi(e_{k+1}), \dots, \varphi(e_n) \rangle$$

Пусть  $\alpha_{k+1}\varphi(e_{k+1}) + \dots + \alpha_n\varphi(e_n) = 0$  для некоторых  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$ . Тогда:

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha_{k+1}e_{k+1} + \dots + \alpha_n e_n) &= 0 \\ \alpha_{k+1}e_{k+1} + \dots + \alpha_n e_n &\in \text{Ker } \varphi \\ \alpha_{k+1}e_{k+1} + \dots + \alpha_n e_n &= \beta_1 e_1 + \dots + \beta_k e_k, \end{aligned}$$

для некоторых  $\beta_1, \dots, \beta_k \in F$ .

Но так как  $e_1, \dots, e_n$  — базис в  $V$ , то  $\alpha_{k+1} = \dots = \alpha_n = \beta_1 = \dots = \beta_k = 0$ . То есть векторы  $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$  линейно независимы, а значит, образуют базис  $\text{Im } \varphi$ . Что и означает, что  $\dim \text{Im } \varphi = n - k = \dim V - \dim \text{Ker } \varphi$ .  $\square$

*Координатный способ.* Зафиксируем базис  $\mathfrak{e} = (e_1, \dots, e_n)$  в  $V$  и базис  $\mathfrak{f} = (f_1, \dots, f_m)$  в  $W$ . Пусть  $A$  — матрица  $\varphi$  в базисе  $\mathfrak{f}$ . Тогда  $v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ ,  $\varphi(v) = y_1 f_1 + \dots + y_m f_m$ . Получим, что

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

$\text{Ker } \varphi$  состоит из векторов, координаты которых удовлетворяют СЛУ  $A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$ . Ранее в курсе мы уже доказали, что размерность пространства решений равна  $n - \text{rk } A$ , то есть  $\dim \text{Im } \varphi = n - \text{rk } A = \dim V - \dim \text{Ker } \varphi$ .  $\square$

## Линейные операторы

Пусть  $V$  — конечномерное векторное пространство.

**Определение.** *Линейным оператором (или линейным преобразованием) называется всякое линейное отображение  $\varphi: V \rightarrow V$ , то есть из  $V$  в себя. Обозначение:  $L(V) = \text{Hom}(V, V)$ .*

Пусть  $\mathfrak{e} = (e_1, \dots, e_n)$  — базис в  $V$  и  $\varphi \in L(V)$ . Тогда:

$$(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) = (e_1, \dots, e_n) A,$$

где  $A$  — матрица линейного оператора в базисе  $\mathfrak{e}$ . В столбце  $A^{(j)}$  стоят координаты  $\varphi(e_j)$  в базисе  $\mathfrak{e}$ . Матрица  $A$  — квадратная.

### Пример.

1.  $\forall v \in V : \varphi(v) = 0$  — нулевая матрица.
2. Тождественный оператор:  $\forall v \in V : \text{id}(v) = v$  — единичная матрица.
3. Скалярный оператор  $\lambda \text{id}(v) = \lambda V$  — матрица  $\lambda E$  в любом базисе.

**Следствие** (Следствия из общих фактов о линейных отображениях).

1. Всякий линейный оператор однозначно определяется своей матрицей в любом фиксированном базисе.
2. Для всякой квадратной матрицы существует, причем единственный, линейный оператор  $\varphi$  такой, что матрица  $\varphi$  есть  $A$ .
3. Пусть  $\varphi \in L(V)$ ,  $A$  — матрица  $\varphi$  в базисе  $\mathfrak{e}$ . Тогда:

$$\begin{aligned} v &= x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \\ \varphi(v) &= y_1 e_1 + \dots + y_n e_n \\ \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} &= A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Пусть  $\varphi \in L(V)$ ,  $A$  — матрица  $\varphi$  в базисе  $\mathfrak{e} = (e_1, \dots, e_n)$ . Пусть  $\mathfrak{e}' = (e'_1, \dots, e'_n)$  — другой базис, причём  $(e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n)C$ , где  $C$  — матрица перехода, и  $A'$  — матрица  $\varphi$  в базисе  $\mathfrak{e}'$ .

**Предложение.**  $A' = C^{-1}AC$ .

Доказательство.

$$\begin{aligned}(e'_1, \dots, e'_n) &= (e_1, \dots, e_n)C \\ e'_j &= \sum_{i=1}^n c_{ij}e_i \\ \varphi(e'_j) &= \varphi\left(\sum_{i=1}^n c_{ij}e_i\right) = \sum_{i=1}^n c_{ij}\varphi(e_i) \\ (\varphi(e'_1), \dots, \varphi(e'_n)) &= (\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))C = (e_1, \dots, e_n)AC = (e'_1, \dots, e'_n)\underbrace{C^{-1}AC}_{A'}\end{aligned}$$

□

## Лекция 21 от 15.02.2016

### Инвариантность и обратимость

Пусть  $\varphi: V \rightarrow V$  — линейный оператор, и  $e$  — базис в  $V$ .

**Обозначение.**  $A(\varphi, e)$  — матрица линейного оператора  $\varphi$  в базисе  $e$ .

Если  $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$  — ещё один базис, причём  $(e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n)C$ , где  $C$  — матрица перехода,  $A = A(\varphi, e)$  и  $A' = A(\varphi, e')$ . В прошлый раз мы доказали, что  $A' = C^{-1}AC$ .

**Следствие.** Величина  $\det A$  не зависит от выбора базиса. Обозначение:  $\det \varphi$ .

Доказательство. Пусть  $A'$  — матрица  $\varphi$  в другом базисе. Тогда получается, что:

$$\det A' = \det(C^{-1}AC) = \det C^{-1} \det A \det C = \det A \det C \frac{1}{\det C} = \det A.$$

□

Заметим, что  $\det A$  — инвариант самого  $\varphi$ .

**Определение.** Две матрицы  $A', A \in M_n(F)$  называются подобными, если существует такая матрица  $C \in M_n(F)$ ,  $\det C \neq 0$ , что  $A' = C^{-1}AC$ .

**Замечание.** Отношение подобия на  $M_n$  является отношением эквивалентности.

**Предложение.** Пусть  $\varphi \in L(V)$ . Тогда эти условия эквивалентны:

1.  $\text{Ker } \varphi = \{0\}$ ;
2.  $\text{Im } \varphi = V$ ;
3.  $\varphi$  обратим (то есть это биекция, изоморфизм);
4.  $\det \varphi \neq 0$ .

Доказательство.

1.  $\Leftrightarrow$  2 — следует из формулы  $\dim V = \dim \text{Ker } \varphi + \dim \text{Im } \varphi$ .
2.  $\Leftrightarrow$  3 — уже было.

3.  $\Leftrightarrow$  4 — уже было.

□

**Определение.** Линейный оператор  $\varphi$  называется вырожденным, если  $\det \varphi = 0$ , и невырожденным, если  $\det \varphi \neq 0$ .

**Определение.** Подпространство  $U \subset V$  называется инвариантным относительно  $\varphi$  (или  $\varphi$ -инвариантным), если  $\varphi(U) \subset U$ . То есть  $\forall u \in U: \varphi(u) \in U$ .

**Пример.**

1.  $\{0\}, V$  — они инвариантны для любого  $\varphi$ .
2.  $\text{Ker } \varphi$   $\varphi$ -инвариантно,  $\varphi(\text{Ker } \varphi) = \{0\} \subset \text{Ker } \varphi$
3.  $\text{Im } \varphi$  тоже  $\varphi$ -инвариантно,  $\varphi(\text{Im } \varphi) \subset \varphi(V) = \text{Im } \varphi$ .

Пусть  $U \subset V$  —  $\varphi$ -инвариантное подпространство. Также пусть  $(e_1, \dots, e_n)$  — базис в  $U$ . Дополним его до базиса  $V$ :  $e = (e_1, \dots, e_n)$ .

$$\underbrace{A(\varphi, e)}_{\text{Матрица с углом нулей}} = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}, \quad \text{где } B \in M_k$$

Это нетрудно понять, если учесть, что  $\varphi(e_i) \in \langle e_1, \dots, e_k \rangle$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Если  $U = \text{Ker } \varphi$ , то  $B = 0$ . Если  $U = \text{Im } \varphi$ , то  $D = 0$ .

Обратно, если матрица  $A$  имеет в базисе  $e$  такой вид, то  $U = \langle e_1, \dots, e_k \rangle$  — инвариантное подпространство.

**Обобщение.** Пусть  $V = U \oplus W$ , где  $U, W$  — инвариантные подпространства, и  $(e_1, \dots, e_k)$  — базис  $U$ . Тогда  $e = (e_1, \dots, e_n)$  — базис  $V$ .

$$A(\varphi, e) = \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

**Обобщение.**

$$A(\varphi, e) = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & * & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & * & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & * \end{pmatrix} \begin{matrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ \vdots \\ k_s \end{matrix}$$

Здесь  $k_1, \dots, k_s$  — размеры квадратных блоков блочно-диагональной матрицы. Матрица  $A(\varphi, e)$  имеет такой вид тогда и только тогда, когда:

$$\begin{aligned} U_1 &= \langle e_1, \dots, e_{k_1} \rangle \\ U_2 &= \langle e_{k_1+1}, \dots, e_{k_1+k_2} \rangle \\ &\vdots \\ U_{k_s} &= \langle e_{n-k_s+1}, \dots, e_n \rangle \end{aligned}$$

**Предел мечтаний.** Найти такой базис, в котором матрица линейного оператора была бы диагональной. Но такое возможно не всегда.



# Собственные векторы и собственные значения

Пусть  $\varphi \in L(V)$ .

**Определение.** Ненулевой вектор  $v \in V$  называется собственным для  $V$ , если  $\varphi(v) = \lambda v$  для некоторого  $\lambda \in F$ . При этом число  $\lambda$  называется собственным значением линейного оператора  $\varphi$ , отвечающим собственному вектору  $v$ .

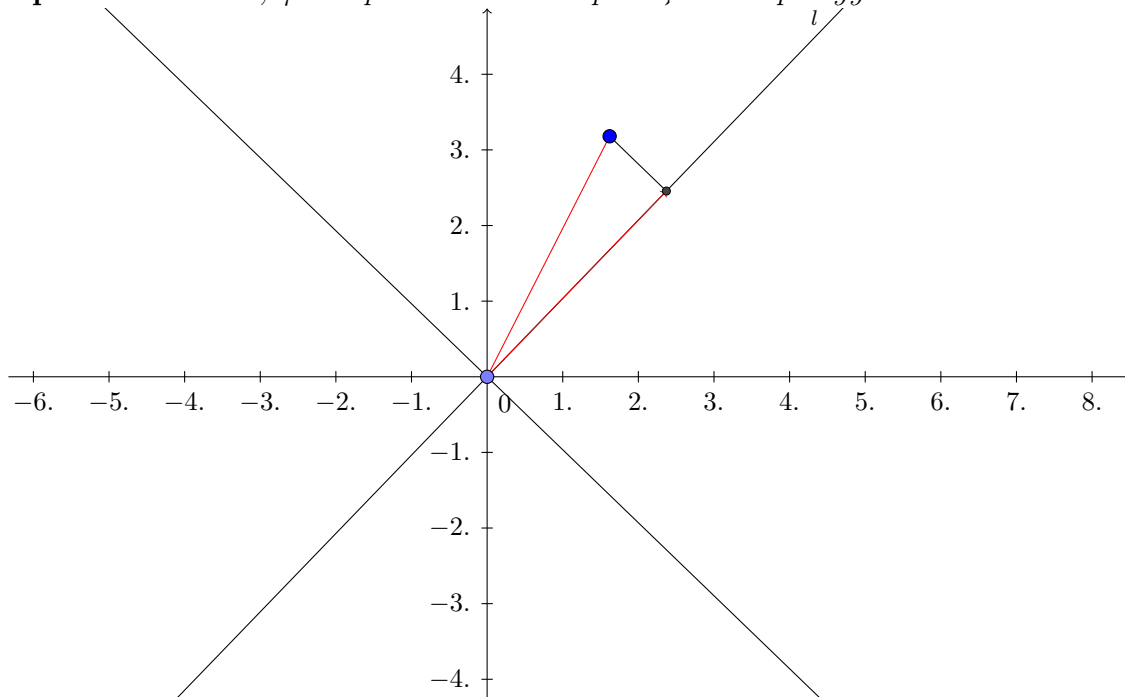
**Предложение.** Вектор  $v \in V$ ,  $v \neq 0$  — собственный вектор в  $V$  тогда и только тогда, когда линейная оболочка  $\langle v \rangle$  является  $\varphi$ -инвариантным подпространством

*Доказательство.*

- $[\Rightarrow] \varphi(v) = \lambda v \Rightarrow \langle v \rangle = \{kv \mid k \in F\}$ . Тогда  $\varphi(kv) = \lambda kv \in \langle v \rangle$ .
- $[\Leftarrow] \varphi(\langle v \rangle) \subset \langle v \rangle \Rightarrow \exists \lambda \in F: \varphi(v) = \lambda v$ .

□

**Пример.** 1.  $V = \mathbb{R}^2$ ,  $\varphi$  — ортогональная проекция на прямую  $l$ .



$$\begin{aligned} 0 \neq v \in l &\Rightarrow \varphi(v) = 1 \cdot v, \lambda = 1 \\ 0 \neq v \perp l &\Rightarrow \varphi(v) = 0 = 0 \cdot v, \lambda = 0 \end{aligned}$$

2. Поворот на угол  $\varphi$  вокруг нуля на угол  $\alpha$ .

- $\alpha = 0 + 2\pi k$ . Любой ненулевой вектор собственный.  $\lambda = 1$ .
- $\alpha = \pi + 2\pi k$ . Любой ненулевой вектор собственный.  $\lambda = -1$ .
- $\alpha \neq \pi k$ . Собственных векторов нет.

3.  $V = P_n(F)$  — многочлены степени  $n$ ,  $\varphi = \Delta: f \rightarrow f'$ . Тогда  $0 \neq f$  — собственный вектор тогда, и только тогда, когда  $f = \text{const}$ .

## Диагонализуемость

**Определение.** Линейный оператор  $\varphi$  называется диагонализуемым, если существует базис  $e$  в  $V$  такой, что  $A(\varphi, e)$  диагональна.

**Предложение** (Критерий диагонализуемости). *Отображение  $\varphi$  диагонализуемо тогда и только тогда, когда в  $V$  существует базис из собственных векторов.*

*Доказательство.* Пусть  $e$  — базис  $V$ . Тогда  $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , что равносильно  $\varphi(e_i) = \lambda_i e_i$ . Это и означает, что все векторы собственные.  $\square$

В примерах выше:

1.  $\varphi$  диагонализуем.  $e_1 \in l$ ,  $e_2 \perp l$ . Тогда матрица примет вид  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .
2. Если  $\alpha = \pi k$ , то  $\varphi$  диагонализуем ( $\varphi = \text{id}$  или  $\varphi = -\text{id}$ ). Не диагонализуем в других случаях.
3.  $\varphi$  диагонализуем тогда и только тогда, когда  $n = 0$ . При  $n > 0$  собственных векторов **МАЛО**.

## Собственное подпространство

Пусть  $\varphi \in L(V)$ ,  $\lambda \in F$ .

**Определение.** Множество  $V_\lambda(\varphi) = \{v \in V \mid \varphi(v) = \lambda v\}$  называется собственным подпространством линейного оператора, отвечающим собственному значению  $\lambda$ .

**Упражнение.** Доказать, что  $V_\lambda(\varphi)$  — действительно подпространство.

**Предложение.**  $V_\lambda(\varphi) = \text{Ker}(\varphi - \lambda \text{id})$ .

*Доказательство.*

$$v \in V_\lambda(\varphi) \Leftrightarrow \varphi(v) = \lambda v \Leftrightarrow \varphi(v) - \lambda v = 0 \Leftrightarrow (\varphi - \lambda \text{id})(v) = 0 \Leftrightarrow v \in \text{Ker}(\varphi - \lambda \text{id})$$

$\square$

**Следствие.** Собственное подпространство  $V_\lambda(\varphi) \neq \{0\}$  тогда и только тогда, когда  $\det(\varphi - \lambda \text{id}) = 0$ .

**Определение.** Многочлен  $\chi_\varphi(t) = (-1)^n \det(\varphi - t \text{id})$  называется характеристическим.

## Лекция 22 от 22.02.2016

### Деление многочленов с остатком

Пусть  $F$  — поле,  $\mathbb{F}[x]$  — множество всех многочленов от переменной  $x$  с коэффициентами из  $\mathbb{F}$ .

**Теорема.** Пусть  $G(x), H(x) \in \mathbb{F}[x]$  — ненулевые многочлены, тогда существует единственная пара  $Q(x), R(x) \in \mathbb{F}[x]$  такая, что:

1.  $G(x) = Q(x) \cdot H(x) + R(x)$ ;
2.  $\deg R(x) < \deg H(x)$  или  $R(x) = 0$ .

*Доказательство.* Аналогично делению рациональных чисел с остатком.  $\square$

Рассмотрим важный частный случай:  $H(x) = x - a$ .

**Теорема (Безу).** Если  $G(x), Q(x) \in \mathbb{F}[x]$  — ненулевые многочлены,  $a \in \mathbb{F}$ , то  $R = G(a)$  и  $G(x) = Q(x)(x - a) + R$ .

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} G(x) &= Q(x) \cdot H(x) + R(x) \\ H(x) &= (x - a) \Rightarrow \deg R < \deg(x - a) \Rightarrow \deg R = 0 \end{aligned}$$

Подставим  $x = a$ :

$$G(a) = Q(a)(a - a) + R = 0 + R = R \Rightarrow G(a) = R.$$

□

**Теорема.** Многочлен степени  $n$  в поле комплексных чисел имеет  $n$  комплексных корней.

*Доказательство.* По основной теореме алгебры каждый многочлен  $G(x) \in \mathbb{C}[x]$  степени больше 1 имеет корень. Тогда  $G(x) = (x - a_1)G_1(x)$ , где  $a_1$  — корень многочлена  $G(x)$ . В свою очередь, многочлен  $G_1(x)$  также имеет корень, и тогда  $G(x) = (x - a_1)G_1(x) = (x - a_1)(x - a_2)G_2(x)$ . Продолжая по индукции, получаем, что  $G(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)b_n$ , где  $b_n$  — коэффициент при старшем члене. □

Также мы получаем следующее представление:

$$b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_0 = b_n (x - a_1)^{k_1} \dots (x - a_s)^{k_s}$$

**Определение.** Кратностью корня  $a_i$  называется число  $k_i$  такое, что в многочлене  $b_n(x - a_1)^{k_1} \dots (x - a_s)^{k_s}$  множитель  $(x - a_i)$  имеет степень  $k_i$ .

## Собственные значения и характеристический многочлен

**Определение.** Пусть  $V$  — конечномерное векторное пространство над полем  $\mathbb{F}$ . Рассмотрим линейный оператор  $\varphi : V \rightarrow V$ . Тогда характеристический многочлен  $\varphi$  имеет вид:

$$\begin{aligned} \chi_\varphi(t) &= (-1)^n \det(\varphi - tE) = (-1)^n \begin{vmatrix} a_{11} - t & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - t & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - t \end{vmatrix} = \\ &= (-1)^n (t^n(-1)^n + \dots) = t^n + c_{n-1}t^{n-1} + \dots + c_0 \end{aligned}$$

**Упражнение.** Доказать, что:

$$\begin{aligned} c_{n-1} &= -\operatorname{tr} \varphi; \\ c_0 &= (-1)^n \det \varphi. \end{aligned}$$

**Утверждение.**  $\lambda$  — собственное значение линейного оператора  $\varphi$  тогда и только тогда, когда  $\chi_\varphi(\lambda) = 0$ .

*Доказательство.*  $\lambda$  — собственное значение  $\Leftrightarrow \exists v \neq 0 : \varphi(v) = \lambda v \Leftrightarrow (\varphi - \lambda E)v = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Ker}(\varphi - \lambda E) \neq \{0\} \Leftrightarrow \det(\varphi - \lambda E) = 0 \Leftrightarrow \chi_\varphi(\lambda) = 0$ . □

**Утверждение.** Если  $\mathbb{F} = \mathbb{C}$  и  $\dim V > 0$ , то любой линейный оператор имеет собственный вектор.

*Доказательство.* Пусть  $\varphi : V \rightarrow V$  — линейный оператор. У него существует характеристический многочлен  $\chi_\varphi(x)$ . Тогда по основной теореме алгебры у  $\chi_\varphi(x)$  есть корень  $t_0$  — собственное значение  $\varphi$ , следовательно существует и собственный вектор  $v_0$  с собственным значением  $t_0$ . □

**Пример.** Для линейного оператора  $\varphi = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  (поворот на  $90^\circ$  градусов против часовой стрелки относительно начала координат) характеристический многочлен имеет вид  $\chi_\varphi(x) = x^2 + 1$ .

При  $\mathbb{F} = \mathbb{R} \Rightarrow$  собственных значений нет.

При  $\mathbb{F} = \mathbb{C} \Rightarrow$  собственные значения  $\pm i$ .

## Геометрическая и алгебраическая кратности

**Определение.** Пусть  $\lambda$  — собственное значение  $\varphi$ , тогда  $V_\lambda = \{v \in V \mid \varphi(v) = \lambda v\}$  — собственное подпространство, то есть пространство, состоящее из собственных векторов с собственным значением  $\lambda$  и нуля.

**Определение.**  $\dim V_\lambda$  — геометрическая кратность собственного значения  $\lambda$ .

**Определение.** Если  $k$  — кратность корня характеристического многочлена, то  $k$  — алгебраическая кратность собственного значения.

**Утверждение.** Геометрическая кратность не больше алгебраической кратности.

*Доказательство.* Зафиксируем базис  $u_1, \dots, u_p$  в пространстве  $V_\lambda$ , где  $p = \dim V_\lambda$ . Дополним базис  $u_1, \dots, u_p$  до базиса  $u_1, \dots, u_p, u_{p+1}, \dots, u_n$  пространства  $V$ . Матрица линейного оператора  $\varphi$  будет выглядеть следующим образом:

$$A_\varphi = \left( \begin{array}{c|c} \lambda E & A \\ \hline 0 & B \end{array} \right), \quad \lambda E \in M_p, A \in M_{n-p}$$

Тогда характеристический многочлен будет следующим:

$$\chi_\varphi(t) = (-1)^n \det(A_\varphi - t) = \left( \begin{array}{ccc|c} \lambda - t & & 0 & \\ & \ddots & & A \\ 0 & & \lambda - t & \\ \hline & 0 & & b - tE \end{array} \right) = (-1)^n (\lambda - t)^p \det(B - tE)$$

Как видим,  $\chi_\varphi(t)$  имеет корень кратности хотя бы  $p$ , следовательно, геометрическая кратность, которая равна  $p$  по условию, точно не превосходит алгебраическую.  $\square$

**Пример.** Рассмотрим линейный оператор  $\varphi = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

$V_2 = \langle e_1 \rangle \Rightarrow$  геометрическая кратность равна 1.

$\chi_\varphi(t) = (t - 2)^2 \Rightarrow$  алгебраическая кратность равна 2.

## Сумма и прямая сумма нескольких подпространств

**Определение.** Пусть  $U_1, \dots, U_k \subseteq V$  — векторные пространства. Суммой нескольких пространств называется  $U_1 + \dots + U_k = \{u_1 + \dots + u_k \mid u_i \in U_i\}$ .

**Упражнение.**  $U_1 + \dots + U_k$  — подпространство.

**Определение.** Сумма пространств называется прямой, если  $u_1 + \dots + u_k = 0$  тогда и только тогда, когда  $u_1 = \dots = u_k = 0$ . Обозначение:  $U_1 \oplus \dots \oplus U_k$ .

**Упражнение.** Если  $v \in U_1 \oplus \dots \oplus U_k$ , то существует единственный такой набор  $u_1 \in U_1, \dots, u_k \in U_k$ , что  $v = u_1 + \dots + u_k$ .

**Теорема.** Следующие условия эквивалентны:

1. Сумма  $U_1 + \dots + U_k$  — прямая;
2. Если  $e_i$  — базис  $U_i$ , то  $e = e_1 \cup \dots \cup e_k$  — базис  $U_1 + \dots + U_k$ ;
3.  $\dim(U_1 + \dots + U_k) = \dim U_1 + \dots + \dim U_k$ .

*Доказательство.*

(1)  $\Rightarrow$  (2) Пусть мы имеем прямую сумму  $U_1 \oplus \dots \oplus U_k$ . Покажем, что  $e_1 \cup \dots \cup e_k$  — базис  $U_1 \oplus \dots \oplus U_k$ .

Возьмем вектор  $v \in U_1 \oplus \dots \oplus U_k$  и представим его в виде суммы  $v = u_1 + \dots + u_k$ , где  $u_i \in U_i$ . Такое разложение единственное, так как сумма прямая. Теперь представим каждый вектор этой суммы в виде линейной комбинации базиса соответствующего пространства:

$$v = (c_1^1 e_1^1 + \dots + c_{s_1}^1 e_{s_1}^1) + \dots + (c_1^k e_1^k + \dots + c_{s_k}^k e_{s_k}^k)$$

Здесь  $e_j^i$  это  $j$ -ый базисный вектор в  $e_i$ , базисе  $U_i$ . Соответственно,  $c_j^i$  это коэффициент перед данным вектором.

Если  $e \neq e_1 \cup \dots \cup e_k$ , то существует какая-то еще линейная комбинация вектора  $v$  через эти же векторы:

$$v = (d_1^1 e_1^1 + \dots + d_{s_1}^1 e_{s_1}^1) + \dots + (d_1^k e_1^k + \dots + d_{s_k}^k e_{s_k}^k)$$

Вычтем одно из другого:

$$0 = v - v = ((d_1^1 - c_1^1) e_1^1 + \dots + (d_{s_1}^1 - c_{s_1}^1) e_{s_1}^1) + \dots + ((d_1^k - c_1^k) e_1^k + \dots + (d_{s_k}^k - c_{s_k}^k) e_{s_k}^k)$$

Но по определению прямой суммы, ноль представим только как сумма нулей, то есть  $d_j^i$  должно равняться  $c_j^i$ . А это значит, что не существует никакой другой линейной комбинации вектора  $v$ . Что нам и требовалось.

(2)  $\Rightarrow$  (1) Пусть  $e = e_1 \cup \dots \cup e_k$  — базис  $U_1 + \dots + U_k$ . Тогда представим 0 в виде суммы векторов из данных пространств:  $0 = u_1 + \dots + u_k$ , где  $u_i \in U_i$ . Аналогично прошлому пункту, разложим векторы по базисам:

$$0 = (c_1^1 e_1^1 + \dots + c_{s_1}^1 e_{s_1}^1) + \dots + (c_1^k e_1^k + \dots + c_{s_k}^k e_{s_k}^k)$$

Но только тривиальная комбинация базисных векторов дает ноль. Следовательно,  $u_1 = \dots = u_k = 0$ , и наша сумма по определению прямая.

(2)  $\Rightarrow$  (3) Пусть  $e = e_1 \cup \dots \cup e_k$  — базис  $U_1 + \dots + U_k$ . Тогда:

$$\dim(U_1 + \dots + U_k) = \dim(e) = \dim(e_1) + \dots + \dim(e_k) = \dim(U_1) + \dots + \dim(U_k).$$

(3)  $\Rightarrow$  (2) Пусть  $\dim(U_1 + \dots + U_k) = \dim U_1 + \dots + \dim U_k$ .

Векторы  $e$  порождают сумму, следовательно, из  $e$  можно выделить базис суммы:

$$\dim(U_1 + \dots + U_k) \leq \dim(e) \leq \dim(e_1) + \dots + \dim(e_k) = \dim U_1 + \dots + \dim U_k.$$

Но по условию  $\dim(U_1 + \dots + U_k) = \dim U_1 + \dots + \dim U_k$ . Тогда  $\dim(U_1 + \dots + U_k) = \dim(e)$ , и  $e$  это базис  $U_1 + \dots + U_k$ .

□

# Лекция 23 от 29.02.2016

## Сумма собственных подпространств

Вспомним, чем закончилась прошлая лекция.

Пусть  $V$  — векторное пространство,  $U_1, \dots, U_k \subseteq V$  — векторные подпространства.

Сумма  $U = U_1 + \dots + U_k$  является прямой, если из условия  $u_1 + \dots + u_k = 0$  следует, что  $u_1 = \dots = u_k = 0$ , где  $u_i \in U_i$ . Обозначение:  $U = U_1 \oplus \dots \oplus U_k$ .

Эквивалентные условия:

1.  $U = U_1 \oplus \dots \oplus U_k$ .
2. Если  $e_i$  — базис  $U_i$ , то  $e = e_1 \cup \dots \cup e_k$  — базис  $U$ .
3.  $\dim U = \dim U_1 + \dots + \dim U_k$ .

Пусть  $V$  — векторное пространство над полем  $F$ ,  $\varphi \in L(V)$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  — набор собственных значений  $\varphi$ , где  $\lambda_i \neq \lambda_j$  при  $i \neq j$ , и  $V_{\lambda_i}(\varphi) \subseteq V$  — соответствующее собственное подпространство.

**Предложение.** Сумма  $V_{\lambda_1}(\varphi) + \dots + V_{\lambda_k}(\varphi)$  является прямой.

*Доказательство.* Докажем индукцией по  $k$ .

База:  $k = 1$ . Тут все ясно.

Теперь пусть утверждение доказано для всех значений, меньших  $k$ . Докажем для  $k$ .

Пусть  $v_i \in V_{\lambda_i}(\varphi)$  и пусть  $v_1 + \dots + v_k = 0$ . Тогда:

$$\varphi(v_1 + \dots + v_k) = \varphi(0) = 0$$

$$\varphi(v_1) + \dots + \varphi(v_k) = 0$$

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k = 0$$

Теперь вычтем из нижней строчки  $v_1 + \dots + v_k = 0$ , домноженное на  $\lambda_k$ . Получим:

$$(\lambda_1 - \lambda_k)v_1 + \dots + (\lambda_k - \lambda_k)v_k = 0$$

$$(\lambda_1 - \lambda_k)v_1 + \dots + (\lambda_{k-1} - \lambda_k)v_{k-1} + 0v_k = 0$$

Но из предположения индукции, а также потому что  $\lambda_i \neq \lambda_j$  при  $i \neq j$ , следует, что  $v_1 = \dots = v_{k-1} = 0$ . Но тогда и  $v_k = 0$ .

Следовательно, сумма прямая, что нам и требовалось.  $\square$

## Диагонализируемость

**Следствие.** Если характеристический многочлен имеет ровно  $n$  попарно различных корней, где  $n = \dim V$ , то  $\varphi$  диагонализируем.

*Доказательство.* Пусть  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  — корни  $\chi_\varphi(t)$ ,  $\lambda_i \neq \lambda_j$ . Тогда для всех  $i$  выполняется, что  $V_{\lambda_i}(\varphi) \neq \{0\}$  и, следовательно,  $\dim V_{\lambda_i}(\varphi) = 1$ . Но так как сумма  $V_{\lambda_1}(\varphi) + \dots + V_{\lambda_k}(\varphi)$  — прямая, то  $\dim(V_{\lambda_1}(\varphi) + \dots + V_{\lambda_k}(\varphi)) = \dim V_{\lambda_1}(\varphi) + \dots + \dim V_{\lambda_k}(\varphi) = n$ . Иными словами,  $V = V_{\lambda_1}(\varphi) \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}(\varphi)$ .

Выберем произвольные  $v_i \in V_{\lambda_i} \setminus \{0\}$ . Тогда  $(v_1, \dots, v_n)$  будет базисом в  $V$ . И так как все  $v_i$  — собственные значения для  $\varphi$ , то  $\varphi$  диагонализируем.  $\square$

**Теорема** (Критерий диагонализируемости - 2). Линейный оператор  $\varphi$  диагонализируем тогда и только тогда, когда

1.  $\chi_\varphi(t)$  разлагается на линейные множители;
2. Если  $\chi_\varphi(t) = (t - \lambda_1)^{k_1} \dots (t - \lambda_s)^{k_s}$ , где  $\lambda_i \neq \lambda_j$  при  $i \neq j$ , то  $\dim V_{\lambda_i}(\varphi) = k_i \forall i$  (то есть для любого собственного значения  $V$  равны геометрическая и алгебраическая кратности).

*Доказательство.*

$\Rightarrow$  Так как  $\varphi$  — диагонализируем, то существует базис  $\mathfrak{e} = (e_1, \dots, e_n)$  такой, что:

$$A(\varphi, \mathfrak{e}) = \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix} = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n).$$

Тогда:

$$\chi_\varphi(t) = (-1)^n \begin{vmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{vmatrix} = (-1)^n (\mu_1 - t) \dots (\mu_n - t) = (t - \mu_1) \dots (t - \mu_n).$$

Итого, первое условие выполняется.

Теперь перепишем характеристический многочлен в виде  $\chi_\varphi(t) = (t - \lambda_1)^{k_1} \dots (t - \lambda_s)^{k_s}$ , где  $\lambda_i \neq \lambda_j$  при  $i \neq j$  и  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_s\} = \{\mu_1, \dots, \mu_n\}$ . Тогда  $V_{\lambda_i} \supseteq \langle e_j \mid \mu_j = \lambda_i \rangle$ , следовательно,  $\dim V_{\lambda_i}(\varphi) \geq k_i$ . Но мы знаем, что  $\dim V_{\lambda_i} \leq k_i$ ! Значит,  $\dim V_{\lambda_i} = k_i$ .

$\Leftarrow$  Так как  $V_{\lambda_1}(\varphi) + \dots + V_{\lambda_s}(\varphi)$  — прямая, то  $\dim(V_{\lambda_1}(\varphi) + \dots + V_{\lambda_s}(\varphi)) = k_1 + \dots + k_s = n$ .

Пусть  $\mathfrak{e}_i$  — базис в  $V_{\lambda_i}$ . Тогда  $\mathfrak{e}_1 \cup \dots \cup \mathfrak{e}_s$  — базис в  $V$ . То есть мы нашли базис из собственных векторов, следовательно,  $\varphi$  диагонализируем.

□

## Инвариантные подпространства в $\mathbb{R}^n$

Пусть  $V$  — векторное пространство над полем  $\mathbb{C}$ ,  $\varphi \in L(V)$ . Тогда в  $V$  есть собственный вектор (или одномерное  $\varphi$ -инвариантное пространство).

Теперь пусть  $V$  — векторное пространство над полем  $\mathbb{R}$ ,  $\varphi \in L(V)$ .

**Теорема.** Существует одномерное или двумерное  $\varphi$ -инвариантное векторное подпространство.

*Доказательство.* Пусть  $\mathfrak{e} = (e_1, \dots, e_n)$  — базис в  $V$ . Комплексифицируем  $V$ .

$$\begin{aligned} V^{\mathbb{C}} &= \{u + iv \mid u, v \in V\} \\ V^{\mathbb{C}} \supset V &= \{u + i \cdot 0 \mid u \in V\} \end{aligned}$$

Рассмотрим линейный оператор  $\varphi_{\mathbb{C}} \in L(V^{\mathbb{C}})$ , заданный как  $\varphi_{\mathbb{C}}(e_i) = \varphi(e_i), \forall i$ . Значит,  $e_1, \dots, e_n$  — базис в  $V^{\mathbb{C}}$ . Следовательно,  $\chi_{\varphi_{\mathbb{C}}}(t) = \chi_\varphi(t)$ , так как  $A(\varphi_{\mathbb{C}}, \mathfrak{e}) = A(\varphi, \mathfrak{e})$ .

Случай 1:  $\chi_\varphi(t)$  имеет хотя бы один действительный корень. Отсюда следует, что в  $V$  есть собственный вектор, что равносильно существованию одномерного  $\varphi$ -инвариантного подпространства (тогда  $V^{\mathbb{C}}$  нам не нужен).

Случай 2:  $\chi_\varphi$  не имеет действительных корней. Пусть  $\lambda + i\mu$  — некоторый корень  $\chi_\varphi(t)$ , который, напомним, равен  $\chi_{\varphi_{\mathbb{C}}}(t)$ . Тогда существует собственный вектор  $u + iv \in V^{\mathbb{C}}$  такой, что:

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathbb{C}}(u + iv) &= (\lambda + i\mu)(u + iv) \\ \varphi_{\mathbb{C}}(u + iv) &= \varphi_{\mathbb{C}}(u) + i\varphi_{\mathbb{C}}(v) = \varphi(u) + i\varphi(v) \\ (\lambda + i\mu)(u + iv) &= \lambda u - \mu v + i(\mu u + \lambda v)\end{aligned}$$

Сравнивая два последних равенства, получаем:

$$\begin{aligned}\varphi(u) &= \lambda u - \mu v \\ \varphi(v) &= \mu u + \lambda v\end{aligned}$$

Следовательно,  $\langle u, v \rangle$  —  $\varphi$ -инвариантное подпространство, двумерное если  $u$  и  $v$  линейно независимы и одномерное в противном случае.  $\square$

**Пример.** Поворот на  $\alpha$  в  $\mathbb{R}^2$ :  $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ . Тогда  $u = e_1$ ,  $v = e_2$ ,  $\lambda + i\mu = \cos \alpha + i \sin \alpha$ .

Пусть  $V$  — векторное пространство над  $F$ ,  $\dim V = n$ .

Операции над  $L(V)$ :

1. Сложение:  $(\varphi + \psi)(v) = \varphi(v) + \psi(v)$ .
2. Умножение на скаляр:  $(\alpha\varphi)(v) = \alpha\varphi(v)$ .
3. Умножение:  $(\varphi\psi)(v) = \varphi(\psi(v))$ .

В частности, для любого  $P(x) \in \mathbb{F}[x]$ ,  $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$  и для любого  $\varphi \in L(V)$  определен линейный оператор  $P(\varphi) \in L(V)$ :  $P(\varphi) = a_n \varphi^n + \dots + a_1 \varphi + a_0 \text{id}$ .

## Корневые векторы и корневые подпространства

**Определение.** Вектор  $v \in V$  называется *корневым вектором* линейного оператора  $\varphi$ , отвечающим значению  $\lambda \in F$ , если существует  $m \geq 0$  такое, что  $(\varphi - \lambda \text{id})^m(v) = 0$ .

Наименьшее такое  $m$  называют *высотой* корневого вектора  $v$ .

**Замечание.**

1. Вектор  $v = 0$  для любого  $\varphi$  имеет высоту 0.
2. Высоту 1 имеют все собственные векторы.

**Пример.**  $V = \mathbb{F}[x]_{\leq n}$ ,  $\Delta : f \rightarrow f'$ . Здесь  $\lambda = 0$  — единственное собственное значение. Все векторы — корневые, отвечающие  $\lambda = 0$ .

**Определение.** Множество  $V^\lambda(\varphi) = \{v \in V \mid \exists m \geq 0 : (\varphi - \lambda \text{id})^m(v) = 0\}$  называется *корневым пространством* для  $\lambda \in F$ .

**Упражнение.**  $V^\lambda(\varphi)$  — подпространство в  $V$ .

**Замечание.**  $V_\lambda(\varphi) \subseteq V^\lambda(\varphi) \forall \lambda \in F$ .



# Лекция 24 от 14.03.2016

## Корневые подпространства

Вспомним конец прошлой лекции.

Пусть  $V$  — векторное пространство над полем  $\mathbb{F}$ ,  $\varphi \in L(V)$  — линейный оператор.

Вектор  $v \in V$  — корневой для  $\varphi$ , отвечающий собственному значению  $\lambda \in \mathbb{F}$  тогда и только тогда, когда существует  $m \leq 0$  такое, что  $(\varphi - \text{id})^m(v) = 0$ . Высотой корневого вектора называется наименьшее такое  $m$ .

Корневым подпространством называется пространство из корневых векторов, соответствующих одному значению  $\lambda$  и нулевого вектора. Другими словами,  $V^\lambda(\varphi) = \{v \in V \mid \exists m \geq 0 : (\varphi - \text{id})^m(v) = 0\}$ . Поскольку собственный вектор является корневым вектором высоты 1, то собственное подпространство включено в корневое подпространство с тем же значением:  $V_\lambda(\varphi) \subseteq V^\lambda(\varphi)$ .

**Предложение.** Корневое подпространство нетривиально тогда и только тогда, когда  $\lambda$  является собственным значением. Другими словами,  $V^\lambda \neq \{0\} \Leftrightarrow \chi_\varphi(\lambda) = 0$ .

*Доказательство.*

$$\Leftarrow \chi_\varphi(\lambda) = 0 \Rightarrow V_\lambda(\varphi) \neq \{0\} \Rightarrow V^\lambda(\varphi) \neq \{0\}, \text{ так как } V^\lambda(\varphi) \supset V_\lambda(\varphi).$$

$$\Rightarrow \text{Пусть } V^\lambda(\varphi) \neq \{0\} \Rightarrow \exists v \neq 0 \in V^\lambda(\varphi) \Rightarrow \exists m \geq 1 : (\varphi - \text{id})^m(v) = 0.$$

Рассмотрим  $u = (\varphi - \text{id})^{m-1}(v) \neq 0$ , тогда:

$$(\varphi - \text{id})(u) = (\varphi - \text{id})(\varphi - \text{id})^{m-1}(v) = (\varphi - \text{id})^m(v) = 0.$$

То есть вектор  $u$  — это вектор, для которого  $(\varphi - \text{id})(u) = 0$ , то есть собственный вектор. Следовательно  $\lambda$  — собственное значение.

□

**Предложение.** Для любого собственного значения  $\lambda \in \mathbb{F}$  подпространство  $V^\lambda(\varphi)$  инвариантно относительно  $\varphi$ .

*Доказательство.* Пусть  $v$  — корневой вектор высоты  $m$ . Докажем, что  $\varphi(v)$  — также корневой вектор.

Заметим, что если  $u = (\varphi - \text{id})(v)$ , то  $u$  — корневой вектор высоты  $m-1$ , и, соответственно, лежит в корневом пространстве:

$$u = (\varphi - \text{id})(v) = \varphi(v) - \lambda v \in V^\lambda(\varphi).$$

Мы получили, что  $\varphi(v) \in \lambda v + V^\lambda(\varphi)$ . Но  $\lambda v \in V^\lambda(\varphi)$ , то есть  $\lambda v + V^\lambda(\varphi) = V^\lambda(\varphi)$  и  $\varphi(v) \in V^\lambda(\varphi)$ . Что и означает, что пространство инвариантно относительно оператора  $\varphi$ . □

Положим для краткости, что  $\varphi - \text{id} = \varphi_\lambda$ .

Заметим, что ядра степеней линейного оператора «вкладываются» друг в друга — те векторы, которые стали нулевыми при применении линейного оператора  $\varphi_\lambda^k$ , при применении линейного оператора  $\varphi_\lambda$  ещё раз так и остаются нулевыми, а также «добиваются» (переводятся в нулевые) некоторые ранее ненулевые векторы. Итого, получаем следующее:

$$V_\lambda(\varphi) = \ker \varphi_\lambda \subset \ker \varphi_\lambda^2 \subset \dots \subset \ker \varphi_\lambda^m \subset \dots$$

Причём существует такое  $m$ , что  $\ker \varphi_\lambda^m = \ker \varphi_\lambda^{m+1}$ , так как  $V$  — конечномерно и размерность его не может уменьшаться бесконечно. Выберем наименьшее такое  $m$ .

**Упражнение.** Доказать, что для любого  $s \geq 0$  выполняется равенство  $\ker \varphi_\lambda^m = \ker \varphi_\lambda^{m+s}$ .

Заметим также, что  $V^\lambda(\varphi) = \ker \varphi_\lambda^m$ . Пусть  $k_i = \dim \ker \varphi_\lambda^i$ . Тогда:

$$\dim V_\lambda(\varphi) = k_1 < k_2 < \dots < k_m = \dim V^\lambda(\varphi).$$

Будем обозначать как  $\varphi|_V$  ограничение линейного оператора на пространство  $V$ .

**Предложение.**

1. Характеристический многочлен линейного отображения  $\varphi|_{V^\lambda(\varphi)}$  равен  $(t - \lambda)^{k_m}$ .
2. Если  $\mu \neq \lambda$ , то линейный оператор  $\varphi - \mu \text{id}$  невырожден на  $V^\lambda(\varphi)$ .

*Доказательство.* Напомним, что  $k_i = \dim \ker \varphi_\lambda^i$ , для  $i = 1, \dots, m$ . Пусть также  $k_0 = 0$ .

Выберем базис  $\mathfrak{e} = (e_1, \dots, e_{k_m})$  в  $V^\lambda(\varphi)$  так, чтобы  $(e_1, \dots, e_{k_i})$  также был базисом в  $\ker \varphi_\lambda^i$ . Тогда:

$$A(\varphi|_{V^\lambda(\varphi)}, \mathfrak{e}) = \begin{pmatrix} 0 & * & * & \dots & * & * \\ 0 & 0 & * & \dots & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \dots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{где } a_{ij} \in \text{Mat}_{(k_i - k_{i-1}) \times (k_j - k_{j-1})}$$

Но тогда:

$$A(\varphi|_{V^\lambda(\varphi)}, \mathfrak{e}) = A(\varphi_\lambda|_{V^\lambda(\varphi)}, \mathfrak{e}) + \lambda E = \begin{pmatrix} A_1 & * & * & \dots & * & * \\ 0 & A_2 & * & \dots & * & * \\ 0 & 0 & A_3 & \dots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_{m-1} & * \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & A_m \end{pmatrix}, \quad \text{где } A_i = \lambda E_{k_i - k_{i-1}} \quad (*)$$

А значит, характеристический многочлен линейного отображения  $\varphi|_{V^\lambda(\varphi)}$  равен  $(t - \lambda)^{k_m}$ .

Теперь докажем невырожденность линейного оператора  $(\varphi - \mu \text{id})$  при  $\mu \neq \lambda$ .

Рассмотрим матрицу ограничения этого оператора на корневое подпространство:

$$A((\varphi - \mu \text{id})|_{V^\lambda(\varphi)}, \mathfrak{e}) = A(\varphi|_{V^\lambda(\varphi)}, \mathfrak{e}) - \mu E.$$

Она имеет вид  $(*)$ , где  $A_i = (\lambda - \mu)E_{k_i}$ . Следовательно,

$$\det((\varphi - \mu \text{id})|_{V^\lambda(\varphi)}) = (\lambda - \mu)^{k_m} \neq 0.$$

Что и означает, что линейный оператор невырожден. □

**Предложение.** Если  $\lambda$  – собственное значение  $\varphi$ , то  $\dim V^\lambda(\varphi)$  равен кратности  $\lambda$  как корня многочлена  $\chi_\varphi(t)$ .

*Доказательство.* Пусть  $(e_1, \dots, e_k)$  – базис  $V^\lambda(\varphi)$ ,  $k = \dim V^\lambda(\varphi)$ . Дополним  $(e_1, \dots, e_k)$  до базиса  $\mathfrak{e} = (e_1, \dots, e_n)$  всего пространства  $V$ . Тогда матрица линейного оператора имеет следующий вид:

$$A_\varphi = \left( \begin{array}{c|c} B & * \\ \hline 0 & C \end{array} \right), \quad B \in M_k, C \in M_{n-k}$$

$$\chi_\varphi(t) = \det(tE - A) = \det(tE - B) \det(tE - C).$$

Заметим, что  $\det(tE - B)$  — это характеристический многочлен  $\varphi|_{V^\lambda(\varphi)}$ , следовательно,

$$\chi_\varphi(t) = (t - \lambda)^k \det(tE - C).$$

Осталось показать, что  $\lambda$  — не корень  $\det(tE - C)$ .

Пусть  $W = \langle e_{k+1}, \dots, e_n \rangle$ . Тогда рассмотрим линейный оператор  $\psi \in L(W)$ , у которого матрица в базисе  $(e_{k+1}, \dots, e_n)$  есть  $C$ . Предположим, что  $\det(\lambda E - C) = 0$ . Это значит, что  $\lambda$  — собственное значение для  $\psi$  и существует вектор  $w \in W$ ,  $w \neq 0$  такой, что  $\psi(w) = \lambda w$ .

Тогда:

$$\begin{aligned}\varphi(w) &= \lambda w + u, \quad u \in V^\lambda(\varphi) \\ \varphi(w) - \lambda w &\in V^\lambda(\varphi) \\ (\varphi - \lambda \text{id})(w) &\in V^\lambda(\varphi) \Rightarrow w \in V^\lambda(\varphi)\end{aligned}$$

Получили противоречие. Значит,  $\lambda$  — не корень  $\det(tE - C)$ . □

**Следствие.**  $V^\lambda(\varphi) = \ker \varphi_\lambda^s$ , где  $s$  — кратность  $\lambda$  как корня многочлена  $\varphi_\lambda(t)$ .

**Предложение.** Если  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ , где  $\lambda_i \neq \lambda_j$  при  $i \neq j$  — собственные значения  $\varphi$ , то сумма  $V^{\lambda_1}(\varphi) + \dots + V^{\lambda_k}(\varphi)$  — прямая.

*Доказательство.* Докажем индукцией по  $k$ .

База при  $k = 1$  — ясно.

Теперь пусть утверждение доказано для всех значений, меньших  $k$ . Докажем для  $k$ .

Выберем векторы  $v_i \in V^{\lambda_i}(\varphi)$  такие, что  $v_1 + \dots + v_k = 0$ . Пусть  $m$  — высота вектора  $v_k$ . Тогда применим к нашей сумме оператор  $\varphi_{\lambda_k}^m$ , получив следующее:

$$\varphi_{\lambda_k}^m(v_1) + \dots + \varphi_{\lambda_k}^m(v_{k-1}) + \varphi_{\lambda_k}^m(v_k) = 0.$$

С другой стороны,  $\varphi_{\lambda_k}^m(v_k) = 0$ , то есть:

$$\varphi_{\lambda_k}^m(v_1) + \dots + \varphi_{\lambda_k}^m(v_{k-1}) + \varphi_{\lambda_k}^m(v_k) = \varphi_{\lambda_k}^m(v_1) + \dots + \varphi_{\lambda_k}^m(v_{k-1}) = 0.$$

Тогда по предположению индукции  $\varphi_{\lambda_k}^m(v_1) = \dots = \varphi_{\lambda_k}^m(v_{k-1}) = 0$ . Но  $\varphi_\lambda|_{V^\lambda(\varphi)}$  не вырожден и обратим при  $i \neq k$ , следовательно  $v_1 = \dots = v_{k-1} = 0$ . Но тогда и  $v_k = 0$ .

Следовательно, сумма прямая, что нам и требовалось. □

**Теорема.** Если характеристический многочлен  $\chi_\varphi(t)$  разлагается на линейные множители, причём  $\chi_\varphi(t) = (t - \lambda_1)^{k_1} \dots (t - \lambda_s)^{k_s}$ , то  $V = \bigoplus_{i=1}^s V^{\lambda_i}(\varphi)$ .

*Доказательство.* Так как сумма  $V^{\lambda_1}(\varphi) + \dots + V^{\lambda_i}(\varphi)$  прямая и для любого  $i$  выполняется, что  $\dim(V^{\lambda_i}(\varphi)) = k_i$ , то:

$$\dim(V^{\lambda_1}(\varphi) + \dots + V^{\lambda_s}(\varphi)) = k_1 + \dots + k_s = \dim V.$$

Следовательно,  $V = \bigoplus_{i=1}^s V^{\lambda_i}(\varphi)$ . □

## Жордановы клетки

**Определение.** Пусть  $\lambda \in \mathbb{F}$ . **Жордановой клеткой** порядка  $n$ , отвечающей значению  $\lambda$ , называется матрица вида:

$$J_\lambda^n = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{F}).$$

# Лекция 25 от 21.03.2016

## Жорданова нормальная форма

Пусть  $V$  — векторное пространство,  $\varphi$  — линейный оператор.

**Теорема** (Жорданова нормальная форма линейного оператора). Пусть  $\chi_\varphi(t)$  разлагается на линейные множители. Тогда существует базис  $e$  в  $V$  такой, что

$$A(\varphi, e) = \begin{pmatrix} J_{\mu_1}^{n_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{\mu_2}^{n_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_{\mu_p}^{n_p} \end{pmatrix} \quad (*)$$

Кроме того, матрица  $(*)$  определена однозначно с точностью до перестановок жордановых клеток.

**Определение.** Матрица  $(*)$  называется жордановой нормальной формой линейного оператора.

**Следствие.** В векторном пространстве над полем комплексных чисел для любого линейного оператора существует жорданова нормальная форма.

### Схема построения:

Шаг 1: Разложим характеристический многочлен:  $\chi_\varphi(t) = (t - \lambda_1)^{k_1} \dots (t - \lambda_s)^{k_s}$ , где  $\lambda_i \neq \lambda_j$  при  $i \neq j$ . Тогда, по доказанной на прошлой лекции теореме,  $V = \bigoplus_{i=1}^s V^{\lambda_i}(\varphi)$ , причем  $\dim V^{\lambda_i}(\varphi) = k_i$ .

Введем отображение  $\psi_i = \varphi|_{V^{\lambda_i}(\varphi)} \in L(V^{\lambda_i}(\varphi))$ . Тогда  $\chi_{\psi_i}(t) = (t - \lambda_i)^{k_i}$ . Также введем  $e_i$  — базис  $V^{\lambda_i}(\varphi)$ . Пусть  $e = e_1 \cup \dots \cup e_s$ .

Тогда:

$$A(\varphi, e) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_s \end{pmatrix}, \quad \text{где } A_i = A(\psi_i, e_i) \in M_{k_i}.$$

Шаг 2: Для любого  $i$  можно выбрать базис  $e_i$  так, чтобы

$$A_i = \begin{pmatrix} J_{\lambda_i}^{m_{i1}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{\lambda_i}^{m_{i2}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_{\lambda_i}^{m_{iq}} \end{pmatrix}, \quad m_{i1} + \dots + m_{iq} = k_i$$

Обратите внимание, что здесь все жордановы клетки отвечают одному значению  $\lambda_i$ , но при этом матрица  $A_i$  целиком жорданову клетку не образует, так как линия единиц над диагональю из  $\lambda$  разрывна там, где состыковываются две клетки:

$$\left( \begin{array}{cccc|cccc} \lambda_i & 1 & & & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & & & \\ & & \lambda_i & 1 & & & & \\ & & & \lambda_i & 0 & & & \\ \hline & & & & \lambda_i & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & & \lambda_i & 1 \\ & & & & & & & \lambda_i \end{array} \right)$$

Тогда жорданова нормальная форма матрицы  $A(\varphi, \mathfrak{e})$  составляется из таких матриц  $A_i$ :

$$A(\varphi, \mathfrak{e}) = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1}^{m_{11}} & & & & \\ & J_{\lambda_1}^{m_{12}} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & J_{\lambda_2}^{m_{21}} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & J_{\lambda_s}^{m_{s1}} \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & J_{\lambda_s}^{m_{sk_i}} \end{pmatrix}$$

Шаг 3: Осталось только заметить, что для каждого  $\lambda_i$  число и порядок жордановых клеток однозначно определено из последовательности чисел:

$$\begin{aligned} & \dim \ker(\psi_1 - \lambda_1 \text{id}) \\ & \dim \ker(\psi_2 - \lambda_2 \text{id})^2 \\ & \dots \\ & \dim \ker(\psi_i - \lambda_i \text{id})^i \end{aligned}$$

Откуда и следует однозначность представления в виде жордановой нормальной формы (с точностью до перестановки жордановых клеток).

## Линейные функции на векторном пространстве

Рассмотрим функцию  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

Пусть  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  и  $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$  — приращение, то есть  $x = x_0 + y$ . Из этого следует, что

$$f(x) = f(x_0) + a_1 y_1 + \dots + a_n y_n + b_{11} y_1^2 + \dots + b_{ij} y_i y_j + \dots + b_{nn} y_n^2 + \bar{o}(|y|^2).$$

Тогда сумма  $a_1 y_1 + \dots + a_n y_n$  будет называться линейной формой, а сумма  $b_{11} y_1^2 + \dots + b_{ij} y_i y_j + \dots + b_{nn} y_n^2$  — квадратичной формой.

Теперь дадим строгое определение:

**Определение.** *Линейной функцией (формой) на векторном пространстве  $V$  называется всякое линейное отображение  $\sigma: V \rightarrow F$ , где  $F$  — одномерное векторное пространство.*

Обозначение:  $V^* = \text{Hom}(V, F)$ .

**Замечание.** *Формой принято называть, когда векторное пространство состоит из функций.*

**Пример.**

1.  $\alpha: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}; \varphi(v) = \langle v, e \rangle$  — скалярное произведение с некоторым фиксированным  $e$ .
2.  $\alpha: \mathcal{F}(X, F) \rightarrow F; \alpha(f) = f(x_0)$ . Здесь  $\mathcal{F}(X, F) = \{f: X \rightarrow F\}$ .
3.  $\alpha: C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}; \alpha(f) = \int_a^b f(x) dx$ .
4.  $\alpha: \text{Mat}(F) \rightarrow F; \alpha(X) = \text{tr} A$ .

**Определение.** *Пространство  $V^*$  называется сопряженным (двойственным) к  $V$ .*

Пусть  $e = (e_1, \dots, e_n)$  — базис  $V$ , и существует изоморфизм  $\alpha: V \xrightarrow{\sim} M_n$ . Тогда

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \text{ где } \alpha_i = \alpha(e_i). \text{ При этом, если } x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n, \text{ то } \alpha(x) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

**Следствие.**  $\dim V^* = n$ .

Пусть  $e = (e_1, \dots, e_n)$  — базис  $V$ . Рассмотрим линейные формы  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$  такие, что  $\varepsilon_i(e_j) = \delta_{ij}$ , где  $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$  — символ Кронекера. То есть  $\varepsilon_i = (\delta_{i1}, \dots, \delta_{ii}, \dots, \delta_{in}) = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ .

**Предложение.**  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  — базис в  $V^*$ .

*Доказательство.* Возьмем любое  $\alpha \in V^*$ . Положим  $a_i = \alpha(e_i)$ . Тогда  $\alpha = a_1 \varepsilon_1 + \dots + a_n \varepsilon_n$ . То есть мы получили, что через  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  действительно можно выразить любое  $\alpha$ .

Теперь покажем, что  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$  — линейно независимы. Пусть  $a_1 \varepsilon_1 + \dots + a_n \varepsilon_n = 0$ ,  $a_i \in F$ . Применив эту функцию к  $e_i$ , получим, что  $a_1 \varepsilon_1(e_i) + \dots + a_n \varepsilon_n(e_i) = 0$ . Отсюда следует, что  $a_i = 0$ , а все остальные  $a_j$ , при  $j \neq i$ , равны нулю в силу определения  $\varepsilon_j$ . Итого,  $a_1 = \dots = a_n = 0$ , что и доказывает линейную независимость.  $\square$

**Определение.** Базис  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  называется сопряженным базисом.

**Упражнение.** Всякий базис  $V^*$  сопряжен с некоторым базисом  $V$ .

## Билинейные функции на векторном пространстве

**Определение.** Билинейной функцией (формой) на векторном пространстве  $V$  называется всякое билинейное отображение  $\beta: V \times V \rightarrow F$ . То есть это отображение, линейное по каждому аргументу:

1.  $\beta(x_1 + x_2, y) = \beta(x_1, y) + \beta(x_2, y);$
2.  $\beta(\lambda x, y) = \lambda \beta(x, y);$
3.  $\beta(x, y_1 + y_2) = \beta(x, y_1) + \beta(x, y_2);$
4.  $\beta(x, \lambda y) = \lambda \beta(x, y).$

**Пример.**

1.  $V = \mathbb{R}^n$ ,  $\beta(x, y) = \langle x, y \rangle$  — скалярное произведение.
2.  $V = \mathbb{R}^2$ ,  $\beta(x, y) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$
3.  $V = C[a, b]$ ,  $\beta(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx.$