Дискретная математика. Модуль 3. Лекция 3

Лекторий ПМИ ФКН 2015-2016
Гринберг Вадим
Жижин Пётр
Пузырев Дмитрий

25 января 2016

1 Равномощные множества. Конечные и бесконечные. Счётные множества. Свойства счётных множеств

Равномощные множества. Конечные множества

Определение: Равномощными множествами называются такие множества, между которыми установима биекция. Обозначение: $A \sim B$.

Очевидные свойства равномощных множеств: $\forall A$ – множеств.

- $A \sim A$.
- $A \sim B \Rightarrow B \sim A$.
- $A \sim B, B \sim C \Rightarrow A \sim C$.

Определение: Множество A – конечно тогда и только тогда, когда $\exists n \in \mathbb{N}_0 : A \sim [n]$ ($[n] = \{1, 2, \dots, n\}, [0] = \varnothing$).

Но ведь могло бы так получиться, что $[n] \sim [k]$? Оказывается, нет.

Утверждение: Если $n > k \Rightarrow [n] \nsim [k]$.

Доказательство. Докажем по индукции от n.

База

$n = 0 \Rightarrow \forall k \Rightarrow n < k \Rightarrow$ Нет таких множеств $\Rightarrow [n] \nsim [k]$.

Предположение

$\forall j \leqslant n \Rightarrow \forall k < j \Rightarrow [j] \nsim [k]$.

Переход

$k < n + 1$. Доказать: $[n + 1] \nsim [k]$. Предположим это не так.

Тогда существует функция $f : [n + 1] \to [k]$ и f – биекция. Пусть $f(n + 1) = b$. Но b может и не совпадать с k. Для этого введём транспозицию $\tau : [k] \to [k], \tau(b) = k, \tau(k) = b, \forall i \neq k, i \neq b \Rightarrow \tau(i) = i$.

Получили функцию $g = \tau \circ f$. Причем g – биекция как композиция двух биекций. $g(n + 1) = \tau(b) = k$ и $g([n]) = [k - 1]$ (так как g – биекция).

Получили биекцию $g : [n] \to [k - 1], k - 1 < n$, а это противоречит предположению индукции ($k - 1 < j = n$).

А значит $[n + 1] \nsim [k]$.

Q.E.D.

Бесконечные множества. Счётные множества

Определение: Множество бесконечно тогда и только тогда, когда оно не конечно.

A – бесконечно. Значит A – не пусто. $\exists a_o \in A$. Пусто ли $A \setminus a_0$? Нет. Иначе A – содержит один элемент и конечно. Тогда $\exists a_1 \in A \setminus a_0$. Множество и без этих двух элементов бесконечно. Ну и так далее.

Определение: Получившееся множество $A' = \{a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ назовем счётным (равномощным множеству натуральных чисел). Биекция в этом случае очевидна: $f : i \mapsto a_i$.

Утверждение: $\mathbb{N}$ – бесконечно.

Доказательство. Пусть это не так и $\exists f : [n] \to \mathbb{N}$ – инъекция. Тогда верно следующее: $\mathbb{N} \ni max\{f(0), f(1), \dots, f(n)\} + 1 \notin f([n])$. А значит f – не биекция. А значит $\mathbb{N}$ не равномощно никакому $[n]$. **Q.E.D.**

Заметим вот что: $\mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$ путём биекции $f : n \mapsto n - 1$.

Утверждение: Множество бесконечно тогда и только тогда, когда оно равномощно собственному подмножеству.

Доказательство. Докажем, что если множество бесконечно, то оно равномощно некоторому подмножеству.

Как мы уже выяснили, в любом бесконечном множестве есть счётное подмножество. Пусть $B = \{b_0, b_1, \dots, b_n, \dots\}$ – счётное подмножество бесконечного множества A.

Установим биекцию $f : A \setminus \{b_0\} \to A$.

$$f(x) = \begin{cases} b_{n-1}, x \in B \\ x, x \notin B \end{cases}$$

Получили то, что и требовалось.

В обратную сторону доказывается на семинарах, но примерно так: пусть $B \subset A, B \sim A$. Пусть A – конечно. Тогда $|B| < |A|$ **Q.E.D.**

Свойства счётных множеств

1. A – счётное множество. Тогда $A \subseteq A$ счётно или конечно.

   Доказательство. $A = \{a_0, a_1, \dots, a_n, \dots\}$. Вычеркнем все элементы, в A' не входящие. $A' = \{a_{j_0}, a_{j_1}, \dots, a_{j_n}, \dots\}$.

   Если последовательность $\{a_{j_n}\}$ конечна, то и A' конечно. Если она бесконечна, то A' очевидно счётно. **Q.E.D.**

2. Если A,B – счётные, то и $A \cup B$ счётно.

   Доказательство. $A = (a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$. $B = (b_1, b_2, \dots, b_n, \dots)$.

   $A \cup B = (a_0, b_0, a_1, b_1 \dots, a_n, b_n, \dots)$.

   Но может получиться так, что в новой последовательности некоторые элементы встречаются по два раза (они входят в оба множества). Вычеркнем каждый такой элемент по одному разу. И получим последовательность, задающую счётное множество. **Q.E.D.**

3. $\mathbb{Z}$ – счётно.

Доказательство. $Z = \mathbb{N} \cup (-\mathbb{N})$ – объединение счётных множеств. Счётно по свойству 2 ($-A = \{-a \mid a \in A\}$). **Q.E.D.**

4. Если A – счётно, а B – конечно или счётно, то $A \cup B$ счётно.

   Доказательство. Доказывается аналогично свойству 2. **Q.E.D.**

5. Если A – счётно. И $B_1, B_2, \ldots, B_k$ – счётны или конечны, то $A \cup B_1 \cup \ldots \cup B_k$ – счётно.

   Доказательство. К доказательству свойства 4 нужно добавить доказательство по индукции. **Q.E.D.**

6. Счётное объединение конечных или бесконечных множеств конечно или счётно.

   $\{A_0, A_1, \ldots, A_n, \ldots\} = \mathfrak{F} \sim \mathbb{N}$. A_i – множество. $\mathfrak{F}$ называется семейством множеств. $A = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} A_i$.

   Утверждение: A – счётно.

   Доказательство.

   $$A_0 = (a_{00}, a_{01}, \ldots, a_{0n}, \ldots)$$
   $$A_1 = (a_{10}, a_{11}, \ldots, a_{1n}, \ldots)$$

   Некоторые из множеств могут быть конечны. Дополним их до счётных пустым символом $\lambda \notin A$.

   Построим последовательность: $a_{00}, a_{01}, a_{10}, a_{02}, a_{11}, a_{20}, \ldots$. (то есть проходим последовательно все значения сумм индексов от 0 до ∞).

   Теперь исключим из последовательности повторения и символы λ. Получим требуемую последовательность $(a'_0, a'_1, \ldots, a'_n, \ldots)$.

   Теперь получим функцию $f : [n] \to A$ или $f : \mathbb{N} \to A$. f – биекция. В первом случае множество конечно, во втором счётно.

   Можно было бы и не вводить λ, а исключать эти элементы сразу, но так проще (нет никаких условий). **Q.E.D.**

   Примеры:

   - Пусть $A_i = \{i\}$. Тогда $A = \mathbb{N}$ (счётно).
   - Пусть $A_i = \{1\}$. Тогда $A = \{1\}$ (конечно).

7. Декартово произведение счётных множеств счётно. Напомним, что

   $$A \times B = \{(a; b) \mid a \in A, b \in B\}$$

   Доказательство. $A = (a_0, \ldots, a_n, \ldots) \Rightarrow A \times B = \{a_0\} \times B \cup \ldots \cup \{a_n\} \times B \cup \ldots \Rightarrow A \times B$ – счётно (по свойству 6). **Q.E.D.**

8. Если A – счётно, то A^k – счётно.

   Доказательство. Очевидно по индукции из свойства 7. **Q.E.D.**

9. $\mathbb{Q}$ – счётно.

   Доказательство. Рассмотрим множество $\mathbb{Q}_p$ несократимых дробей. Пусть функция $f : \mathbb{Q}_p \to \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_+$ – инъекция (она переводит дробь в пару чисел числитель-знаменатель). Тогда она является биекцией на $f(\mathbb{Q}_p) \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_+$. Причём $f(\mathbb{Q}_p)$ тогда счётно по свойству 1 так как не является конечным, а $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}_+$ счётно по свойству 7. **Q.E.D.**

10. Пусть A^* – конечные последовательности конечного (непустого) или счётного алфавита A.

    Утверждение: A^* – счётно

    Доказательство. $A^* = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} A^n$. При этом A^n – слова длины n. A^n – счётно по свойству 8. И тогда само A^* счётно по свойству 6. **Q.E.D.**

11. Определение: $\alpha \in \mathbb{R}$ – алгебраическое число тогда и только тогда, когда α – корень некоторого многочлена с целыми коэфициентами.

    Утверждение: Множество алгебраических чисел счётно.

    Доказательство. Приведём только план доказательства:

    (a) Докажем, что многочленов с целыми коэфициентами счётно.

    (b) Для каждого из этих многочленов есть не более n корней – алгебраических чисел.

    (c) Удаляем повторяющиеся корни.

    (d) Получим все алгебраические числа, которых, очевидно, счётно.

    Q.E.D.