

Лекция 19 от 01.02.2016

Изоморфизм (продолжение)

На прошлой лекции мы ввели теорему и доказали одну лемму. Напомним их.

Теорема. Два конечномерных векторных пространства V и W изоморфны тогда и только тогда, когда $\dim V = \dim W$.

Лемма (1). Если $\dim V = n$, то $V \simeq F^n$.

Замечание. Говорят, что функция φ отождествляет пространство V с пространством F^n , если $\varphi : V \xrightarrow{\sim} F^n$.

Но перед тем, как доказывать эту теорему, докажем лучше еще одну лемму.

Лемма (2). Пусть $\varphi : V \xrightarrow{\sim} W$ — изоморфизм векторных пространств, а e_1, \dots, e_n — базис V . Тогда $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ — базис W .

Доказательство. Пусть $w \in W$ — произвольный вектор. Положим $v \in V$ таковым, что $v = \varphi^{-1}(w)$.

$$\begin{aligned} v &= x_1 e_1 + \dots + x_n e_n, \quad x_i \in F \\ w &= \varphi(v) = \varphi(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1 \varphi(e_1) + \dots + x_n \varphi(e_n) \Rightarrow W = \langle \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n) \rangle \end{aligned}$$

Покажем, что $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ — линейно независимые вектора.

Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$ таковы, что $\alpha_1 \varphi(e_1) + \dots + \alpha_n \varphi(e_n) = 0$. Это то же самое, что $\varphi(\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n) = 0$. Применяя φ^{-1} , получаем $\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n = \varphi^{-1}(0) = 0$. Но так как e_1, \dots, e_n — базис в V , то $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$, и потому вектора $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ линейно независимы. Следовательно, этот набор векторов — базис в W . \square

Теперь приступим наконец к доказательству теоремы.

Доказательство.

$\Rightarrow V \simeq W \Rightarrow \exists \varphi : V \xrightarrow{\sim} W$. Тогда по лемме 2, если e_1, \dots, e_n — базис V , то $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ — базис W , и тогда $\dim V = \dim W$.

\Leftarrow Пусть $\dim V = \dim W = n$. Тогда по лемме 1 существуют изоморфизмы $\varphi : V \xrightarrow{\sim} F^n$ и $\psi : W \xrightarrow{\sim} F^n$. Следовательно, $\psi^{-1} \circ \varphi : V \rightarrow W$ — изоморфизм. \square

То есть получается, что с точностью до изоморфизма существует только одно векторное пространство размерности n . Однако не стоит заканчивать на этом курс линейной алгебры. Теперь главная наша проблема — это как из бесконечного множества базисов в каждом векторном пространстве выбрать тот, который будет наиболее простым и удобным для каждой конкретной задачи.

Например, рассмотрим вектор $v \in F^n$ с координатами $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Пусть $v \neq 0$. Тогда существует такой базис e_1, \dots, e_n , что $v = e_1$, то есть в этом базисе вектор имеет координаты $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Пусть V, W — векторные пространства над F , и e_1, \dots, e_n — базис V .

Предложение.

1. Всякое линейное отображение $\varphi : V \rightarrow W$ однозначно определяется векторами $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$.
2. Для всякого набора векторов $f_1, \dots, f_n \in W$ существует единственное линейное отображение $\varphi : V \rightarrow W$ такое, что $\varphi(e_1) = f_1, \varphi(e_2) = f_2, \dots, \varphi(e_n) = f_n$.

Доказательство.

1. Пусть $v \in V$, $v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$, где $x_i \in F$. Тогда $\varphi(v) = x_1 \varphi(e_1) + \dots + x_n \varphi(e_n)$, то есть если мы знаем вектора $\varphi(e_i)$, то сможем задать $\varphi(v)$ для любого $v \in V$.
2. Определим отображение $\varphi : V \rightarrow W$ по формуле $\varphi(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1 f_1 + \dots + x_n f_n$. Прямая проверка показывает, что φ линейна, а единственность следует из пункта 1.

□

Следствие. Если $\dim V = \dim W = n$, то для всякого базиса e_1, \dots, e_n пространства V и всякого базиса f_1, \dots, f_n пространства W существует единственный изоморфизм $\varphi : V \xrightarrow{\sim} W$ такой, что $\varphi(e_1) = f_1, \dots, \varphi(e_n) = f_n$.

Доказательство. Из пункта 2. предложения следует, что существует единственное линейное отображение $\varphi : V \rightarrow W$ такое, что $\varphi(e_1) = f_1, \dots, \varphi(e_n) = f_n$. Но тогда $\varphi(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1 \varphi(e_1) + \dots + x_n \varphi(e_n) = x_1 f_1 + \dots + x_n f_n$ для любых $x_i \in F$. Отсюда следует, что φ — биекция. □

Матрицы линейных отображений

Пусть V и W — векторные пространства, $e = (e_1, \dots, e_n)$ — базис V , $f = (f_1, \dots, f_m)$ — базис W , $\varphi : V \rightarrow W$ — линейное отображение. Тогда:

$$\varphi(e_j) = a_{1j} f_1 + \dots + a_{mj} f_m = \sum_{i=1}^m a_{ij} f_i.$$

Определение. Матрица $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}_{m \times n}(F)$ называется матрицей линейного отображения φ в базисах e и f (или по отношению к базисам e и f).

Замечание. Существует биекция $\{\text{линейные отображения } V \rightarrow W\} \rightleftharpoons \text{Mat}_{m \times n}$.

Замечание. В $A^{(j)}$ стоят координаты $\varphi(e_j)$ в базисе f .

$$(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) = (f_1, \dots, f_m) \cdot A$$

Рассмотрим пример.

Пусть $P_n = F[x]_{\leq n}$ — множество многочленов над полем F степени не выше n . Возьмем дифференцирование $\Delta : P_n \rightarrow P_{n-1}$.

Базис $P_n = 1, x, x^2, \dots, x^n$. Базис $P_{n-1} = 1, x, \dots, x^{n-1}$. Тогда матрица линейного отображения будет размерности $n \times (n+1)$ и иметь следующий вид.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{pmatrix}$$

Предложение. Если $v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ и $\varphi(v) = y_1 f_1 + \dots + y_m f_m$, то

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Доказательство. С одной стороны:

$$\varphi(v) = x_1 \varphi(e_1) + \dots + x_n \varphi(e_n) = (\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (f_1, \dots, f_m) A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Однако с другой стороны:

$$\varphi(v) = (f_1, \dots, f_m) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

Сравнивая обе части, получаем требуемое. □

А теперь проанализируем операции над матрицами линейных отображений.

V и W — векторные пространства. **Обозначение:** $\text{Hom}(V, W) :=$ множество всех линейных отображений $V \rightarrow W$.

Пусть $\varphi, \psi \in \text{Hom}(V, W)$.

Определение.

1. $\varphi + \psi \in \text{Hom}(V, W)$ — это $(\varphi + \psi)(v) := \varphi(v) + \psi(v)$.
2. $\alpha \in F, \alpha\varphi \in \text{Hom}(V, W)$ — это $(\alpha\varphi)(v) := \alpha(\varphi(v))$.

Упражнение.

1. Проверить, что $\varphi + \psi$ и $\alpha\varphi$ действительно принадлежат $\text{Hom}(V, W)$.
2. Проверить, что $\text{Hom}(V, W)$ является векторным пространством.

Предложение. Пусть $\mathfrak{e} = (e_1, \dots, e_n)$ — базис V , $\mathfrak{f} = (f_1, \dots, f_m)$ — базис W , $\varphi, \psi \in \text{Hom}(V, W)$. При этом A_φ — матрица линейного отображения φ , A_ψ — матрица для ψ , $A_{\varphi+\psi}$ — для $\varphi+\psi$, а $A_{\alpha\varphi}$ — для $\alpha\varphi$.

Тогда $A_{\varphi+\psi} = A_\varphi + A_\psi$ и $A_{\alpha\varphi} = \alpha A_\varphi$.

Доказательство. Упражнение. □

Теперь возьмем три векторных пространства — U , V и W размерности n , m и k соответственно, и их базисы \mathbf{e} , \mathbf{f} и \mathbf{g} . Также рассмотрим цепочку линейных отображений $U \xrightarrow{\psi} V \xrightarrow{\varphi} W$. Пусть A — матрица φ в базисах \mathbf{f} и \mathbf{g} , B — матрица ψ в базисах \mathbf{e} и \mathbf{f} , C — матрица $\varphi \circ \psi$ в базисах \mathbf{e} и \mathbf{g} .

Предложение. $C = AB$.

Замечание. Собственно говоря, отсюда и взялось впервые определение умножения матриц.

Доказательство. Запишем по определению:

$$\begin{aligned} (\varphi \circ \psi)(e_r) &= \sum_{p=1}^k c_{pr} g_p, \quad r = 1, \dots, n \\ \psi(e_r) &= \sum_{q=1}^m b_{qr} f_q, \quad r = 1, \dots, n \\ \varphi(f_q) &= \sum_{p=1}^k a_{pq} g_p, \quad q = 1, \dots, m \end{aligned}$$

Тогда:

$$\begin{aligned} (\psi \circ \varphi)(e_r) &= \varphi(\psi(e_r)) = \varphi\left(\sum_{q=1}^m b_{qr} f_q\right) = \sum_{q=1}^m b_{qr} \varphi(f_q) = \sum_{q=1}^m b_{qr} \left(\sum_{p=1}^k a_{pq} g_p\right) = \sum_{p=1}^k \left(\sum_{q=1}^m a_{pq} b_{qr}\right) g_p \\ &\Downarrow \\ c_{pr} &= \sum_{q=1}^m a_{pq} b_{qr} \\ &\Downarrow \\ C &= AB \end{aligned}$$

□

И снова, пусть V и W — векторные пространства с линейным отображением $\varphi : V \rightarrow W$.

Определение. Ядро φ — это множество $\text{Ker } \varphi := \{v \in V \mid \varphi(v) = 0\}$.

Определение. Образ φ — это множество $\text{Im } \varphi := \{w \in W \mid \exists v \in V : \varphi(v) = w\}$.

Пример. Все то же $\Delta : P_n \rightarrow P_{n-1}$. Для него $\text{Ker } \Delta = \{f \mid f = \text{const}\}$, $\text{Im } \Delta = P_{n-1}$.