

ЛЕКЦИЯ 4

*Строение конечно порождённых абелевых групп. Конечные абелевы группы. Экспонента конечной абелевой группы.*

В теории абелевых групп операция прямого произведения конечного числа групп обычно называется *прямой суммой* и обозначается символом  $\oplus$ , так что пишут  $A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_n$  вместо  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ .

**Определение 1.** Конечная абелева группа  $A$  называется *примарной*, если её порядок равен  $p^k$  для некоторого простого числа  $p$ .

*Замечание 1.* В общем случае (когда группы не предполагаются коммутативными) конечная группа  $G$  с условием  $|G| = p^k$  ( $p$  — простое) называется  *$p$ -группой*.

Следствие 2 лекции 2 показывает, что каждая конечная циклическая группа разлагается в прямую сумму примарных циклических подгрупп.

**Теорема 1.** Всякая конечно порождённая абелева группа  $A$  разлагается в прямую сумму примарных и бесконечных циклических подгрупп, т. е.

$$(1) \quad A \cong \mathbb{Z}_{p_1^{k_1}} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{p_s^{k_s}} \oplus \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z},$$

где  $p_1, \dots, p_s$  — простые числа (не обязательно попарно различные) и  $k_1, \dots, k_s \in \mathbb{N}$ . Кроме того, число бесконечных циклических слагаемых, а также число и порядки примарных циклических слагаемых определено однозначно.

*Доказательство.* Пусть  $a_1, \dots, a_n$  — конечная система порождающих группы  $A$ . Рассмотрим гомоморфизм

$$\varphi: \mathbb{Z}^n \rightarrow A, \quad (s_1, \dots, s_n) \mapsto s_1 a_1 + \dots + s_n a_n.$$

Ясно, что  $\varphi$  сюръективен. Тогда по теореме о гомоморфизме получаем  $A \cong \mathbb{Z}^n / N$ , где  $N = \text{Ker } \varphi$ . По теореме о согласованных базисах существует такой базис  $e_1, \dots, e_n$  группы  $\mathbb{Z}^n$  и такие натуральные числа  $u_1, \dots, u_m$ ,  $m \leq n$ , что  $u_1 e_1, \dots, u_m e_m$  — базис группы  $N$ . Тогда имеем

$$\begin{aligned} L &= \langle e_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle e_m \rangle \oplus \langle e_{m+1} \rangle \oplus \dots \oplus \langle e_n \rangle, \\ N &= \langle u_1 e_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle u_m e_m \rangle \oplus \{0\} \oplus \dots \oplus \{0\}. \end{aligned}$$

Применяя теорему о факторизации по сомножителям, мы получаем

$$\mathbb{Z}^n / N \cong \mathbb{Z} / u_1 \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z} / u_m \mathbb{Z} \oplus \underbrace{\mathbb{Z} / \{0\} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z} / \{0\}}_{n-m} \cong \mathbb{Z}_{u_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{u_m} \oplus \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_{n-m}.$$

Чтобы добиться разложения (1), остаётся представить каждое из циклических слагаемых  $\mathbb{Z}_{u_i}$  в виде прямой суммы примарных циклических подгрупп, воспользовавшись следствием 2 из лекции 2.

Перейдём к доказательству единственности разложения (1). Пусть  $\langle c \rangle_q$  обозначает циклическую группу порядка  $q$  с порождающей  $c$ . Пусть имеется разложение

$$(2) \quad A = \langle c_1 \rangle_{p_1^{k_1}} \oplus \dots \oplus \langle c_s \rangle_{p_s^{k_s}} \oplus \langle c_{s+1} \rangle_{\infty} \oplus \dots \oplus \langle c_{s+t} \rangle_{\infty}$$

(заметьте, что мы просто переписали в другом виде правую часть соотношения (1)). Рассмотрим в  $A$  так называемую *подгруппу кручения*

$$\text{Tor } A := \{a \in A \mid ma = 0 \text{ для некоторого } m \in \mathbb{N}\}.$$

Иными словами,  $\text{Tor } A$  — это подгруппа в  $A$ , состоящая из всех элементов конечного порядка. Выделим эту подгруппу в разложении (2). Рассмотрим произвольный элемент  $a \in A$ . Он представим в виде

$$a = r_1 c_1 + \dots + r_m c_m + r_{m+1} c_{m+1} + \dots + r_n c_n$$

для некоторых целых чисел  $r_1, \dots, r_n$ . Легко видеть, что  $a$  имеет конечный порядок тогда и только тогда, когда  $r_{m+1} = \dots = r_n = 0$ . Отсюда получаем, что

$$(3) \quad \text{Tor } A = \langle c_1 \rangle_{p_1^{k_1}} \oplus \dots \oplus \langle c_s \rangle_{p_s^{k_s}}.$$

Применяя опять теорему о факторизации по сомножителям, мы получаем  $A / \text{Tor } A \cong \mathbb{Z}^t$ . Отсюда следует, что число  $t$  однозначно выражается в терминах самой группы  $A$  (как ранг свободной абелевой группы  $A / \text{Tor } A$ ). Значит,  $t$  не зависит от разложения (2).

Далее, для каждого простого числа  $p$  определим в  $A$  *подгруппу  $p$ -кращения*

$$(4) \quad \text{Тог}_p A := \{a \in A \mid p^k a = 0 \text{ для некоторого } k \in \mathbb{N}\}.$$

Ясно, что  $\text{Тог}_p A \subset \text{Тог } A$ . Выделим подгруппу  $\text{Тог}_p A$  в разложении (3). Легко видеть, что  $\langle c_i \rangle_{p_i^{k_i}} \subseteq \text{Тог}_p A$  для всех  $i$  с условием  $p_i = p$ . Если же  $p_i \neq p$ , то по следствию 2 из теоремы Лагранжа (см. лекцию 1) порядок любого ненулевого элемента  $x \in \langle c_i \rangle_{p_i^{k_i}}$  является степенью числа  $p_i$ , а значит,  $p^k x \neq 0$  для всех  $k \in \mathbb{N}$ . Отсюда следует, что  $\text{Тог}_p A$  является суммой тех конечных слагаемых в разложении (3), порядки которых суть степени  $p$ . Поэтому доказательство теперь сводится к случаю, когда  $A$  — примарная группа.

Пусть  $|A| = p^k$  и

$$A = \langle c_1 \rangle_{p^{k_1}} \oplus \dots \oplus \langle c_r \rangle_{p^{k_r}}, \quad k_1 + \dots + k_r = k.$$

Докажем индукцией по  $k$ , что набор чисел  $k_1, \dots, k_r$  не зависит от разложения.

Если  $k = 1$ , то  $|A| = p$ , но тогда  $A \cong \mathbb{Z}_p$  по следствию 5 из теоремы Лагранжа (см. лекцию 1). Пусть теперь  $k > 1$ . Рассмотрим подгруппу  $pA := \{pa \mid a \in A\}$ . В терминах равенства (4) имеем

$$pA = \langle pc_1 \rangle_{p^{k_1-1}} \oplus \dots \oplus \langle pc_r \rangle_{p^{k_r-1}}.$$

В частности, при  $k_i = 1$  соответствующее слагаемое равно  $\{0\}$  (и тем самым исчезает). Так как  $|pA| = p^{k-r} < p^k$ , то по предположению индукции группа  $pA$  разлагается в прямую сумму примарных циклических подгрупп однозначно с точностью до порядка слагаемых. Следовательно, ненулевые числа в наборе  $k_1 - 1, \dots, k_r - 1$  определены однозначно (с точностью до перестановки). Отсюда мы находим значения  $k_i$ , отличные от 1. Количество тех  $k_i$ , которые равны 1, однозначно восстанавливается из условия  $k_1 + \dots + k_r = k$ .  $\square$

**Следствие 1.** *Всякая конечная абелева группа разлагается в прямую сумму примарных циклических подгрупп, причём число и порядки примарных циклических слагаемых определено однозначно.*

Заметим, что теорема о согласованных базисах даёт нам другое разложение конечной абелевой группы  $A$ :

$$(5) \quad A = \mathbb{Z}_{u_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{u_m}, \quad \text{где } u_i \mid u_{i+1} \text{ при } i = 1, \dots, m-1.$$

Числа  $u_1, \dots, u_m$  называют *инвариантными множителями* конечной абелевой группы  $A$ .

**Определение 2.** *Экспонентой* конечной абелевой группы  $A$  называется число  $\text{ехр } A$ , равное наименьшему общему кратному порядков элементов из  $A$ .

*Замечание 2.* Легко видеть, что  $\text{ехр } A = \min\{n \in \mathbb{N} \mid na = 0 \text{ для всех } a \in A\}$ .

**Предложение 1.** *Экспонента конечной абелевой группы  $A$  равна её последнему инвариантному множителю  $u_m$ .*

*Доказательство.* Обратимся к разложению (5). Так как  $u_i \mid u_m$  для всех  $i = 1, \dots, m$ , то  $u_m a = 0$  для всех  $a \in A$ . Это означает, что  $\text{ехр } A \leq u_m$  (и тем самым  $\text{ехр } A \mid u_m$ ). С другой стороны, в  $A$  имеется циклическая подгруппа порядка  $u_m$ . Значит,  $\text{ехр } A \geq u_m$ .  $\square$

**Следствие 2.** *Конечная абелева группа  $A$  является циклической тогда и только тогда, когда  $\text{ехр } A = |A|$ .*

*Доказательство.* Группа  $A$  является циклической тогда и только тогда, когда в разложении (5) присутствует только одно слагаемое, т. е.  $A = \mathbb{Z}_{u_m}$  и  $|A| = u_m$ .  $\square$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Э.Б. Винберг. Курс алгебры. М.: Факториал Пресс, 2002 (глава 9, § 1)
- [2] А.И. Кострикин. Введение в алгебру. Основные структуры алгебры. М.: Наука. Физматлит, 2000 (глава 2, § 3)
- [3] Сборник задач по алгебре под редакцией А.И. Кострикина. Новое издание. М.: МЦНМО, 2009 (глава 13, § 60)