Лекция 01 от 05.09.2016

Определение 1. *Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность действительных чисел.* Числовым рядом *называется выражение вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, записываемая также как $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$*

Определение 2. *N-й частичной суммой называется сумма первых N членов. $S_n = a_1 + \ldots + a_N$.*

Определение 3. *Последовательность $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется последовательностью частичных сумм.*

Определение 4. *Говорят, что ряд сходится, если сходится его последовательность его частичных сумм.*

Определение 5. *Суммой ряда называется этот предел, если он существует.*

Определение 6. *А если предела нет, то говорят, что ряд расходится.*

Вспоминая, что $a_n = S_n - S_{n-1}$, можно заключить, что особой разницы между самим рядом и последовательностью его частичных сумм нет.

Пример 1 (Предел Коши для последовательностей)**.** *$\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условию Коши, т.е.*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \colon \forall m,k > N \Rightarrow |S_m - S_k| < \varepsilon$$

Нахаляву получили теорему.

Теорема 1 (Критерий Коши сходимости ряда)**.** *Для сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ необходимо и достаточно, чтобы*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \colon \forall k > N, \forall p \in \mathbb{N} |a_{k+1} + a_{k+2} \ldots + a_{k+p}| < \varepsilon$$

Отсюда сразу же очевидно следует утверждение.

Утверждение 1 (Необходимое условие сходимости ряда)**.** *Если ряд сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.*

Доказательство. Ряд сходится, значит

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \colon \forall k > N, p = 1 \Rightarrow |a_{k+1}| < \varepsilon$$

— определение предела, равного нулю.

Другой способ доказательства:

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

А принимая во внимание, что S_n, как и S_{n-1} стремятся к одному пределу при стремлении n к бесконечности, получим, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. □

Сформулируем и докажем несколько тривиальных свойств.

Теорема 2. *Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = b$. *Тогда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = a + b$.

Доказательство. Это напрямую следует из свойсва пределов $S_n^{a+b} = S_n^a + S_n^b$ □

Аналогично, вспоминая свойства предела последовательности, можно доказать, что, если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha a_n = \alpha a$ для любого действительного α.

Введём важное определение.

Определение 7. *Пусть дан ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. *Обозначим некоторые из его сумм*

$$\underbrace{a_1 + \ldots + a_{n_1}}_{b_1} + \underbrace{a_{n_1+1} + \ldots + a_{n_2}}_{b_2} + \ldots + a_{n_3} + a_{n_3+1} + \ldots$$

где $\{b_j\}_{j=1}^{\infty}$ *— возрастающая последовательность натуральных чисел. В таком случае говорят, что ряд* $\sum\limits_{j=1}^{\infty} b_j$ *получен из исходного* расстановкой скобок.

Утверждение 2. *Если ряд сходится, то после любой расстановки скобок он сходится, скажем неформально, туда же.*

Доказательство. Достаточно заметить, что частичные суммы ряда, полученного расстановкой скобок, образуют подпоследовательость в последовательности частичных сумм исходного ряда. Вспоминая свойство предела последовательности, что любая подпоследовательность сходящейся последовательности сходится туда же, куда и сама последовательность. □

Обратное неверно!!! Пример такого ряда

$$1 - 1 + 1 - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$$

который при расстановке скобок $(1-1)+(1-1)+\ldots = 0$ даёт сходящийся ряд, в то время как исходный ряд расходится (не выполняется необходимое условие о стремлении членов ряда 0).

Утверждение 3. *Если* $a_n \to 0$ *и длины скобок ограничены (т.е. существует такое* $c \in \mathbb{R}$*, что* $n_{k+1} - n_k < c$ *при всех* k*), то из сходимости исходного ряда следует сходимость исходного ряда*

Утверждение 4. *Изменение, удаление, добавление конечного числа членов ряда не влияют на сходимость.*

Определение 8. *Если сходится ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$*, то говорят, что ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится абсолютно.*

Определение 9. *Если ряд сходится, но не сходится абсолютно, то говорят, что ряд сходится условно.*

Утверждение 5. *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится абслютно, то он сходится.*

Доказательство. Сразу следует из критерия Коши. Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$. Так как ряд из модулей сходится, то

$$\exists N \in \mathbb{N} \colon \forall k > N, \forall p \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum_{k+1}^{k+p} |a_k| < \varepsilon$$

Тогда

$$\left| \sum_{n=k+1}^{k+p} a_n \right| \leqslant \sum_{n=k+1}^{k+p} |a_n| < \varepsilon$$

□

Введём ещё парочку определений

Определение 10. *Для ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *N-й хвост это сумма* $r_N = \sum\limits_{n=N}^{\infty} a_n$.

Для сходящегося ряда очевидно, что $r_n \in \mathbb{R}$.