Лекция 23 от 29.02.2016

Сумма собственных подпространств

Вспомним, чем закончилась прошлая лекция.

Пусть V — векторное пространство, $U_1, \ldots, U_k \subseteq V$ — векторные подпространства.

Сумма $U = U_1 + \ldots + U_k$ является прямой, если из условия $u_1 + \ldots + u_k = 0$ следует, что $u_1 = \ldots = u_k = 0$, где $u_i \in U_i$. Обозначение: $U = U_1 \oplus \ldots \oplus U_k$.

Эквивалентные условия:

1. $U = U_1 \oplus \ldots \oplus U_k$.
2. Если $\mathbb{e}_i$ — базис U_i, то $\mathbb{e} = \mathbb{e}_1 \cup \ldots \cup \mathbb{e}_k$ — базис U.
3. $\dim U = \dim U_1 + \ldots + \dim U_k$.

Пусть V — векторное пространство над полем F, $\varphi \in L(V)$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ — набор собственных значений φ, где $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$, и $V_{\lambda_i}(\varphi) \subseteq V$ — соответствующее собственное подпространство.

Предложение. *Сумма $V_{\lambda_1}(\varphi) + \ldots + V_{\lambda_k}(\varphi)$ является прямой.*

Доказательство. Докажем индукцией по k.

База: $k = 1$. Тут все ясно.

Теперь пусть утверждение доказано для всех значений, меньших k. Докажем для k.

Пусть $v_i \in V_{\lambda_i}(\varphi)$ и пусть $v_1 + \ldots + v_k = 0$. Тогда:

$$\begin{gathered}
\varphi(v_1 + \ldots + v_k) = \varphi(0) = 0 \\
\varphi(v_1) + \ldots + \varphi(v_k) = 0 \\
\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k = 0
\end{gathered}$$

Теперь вычтем из нижней строчки $v_1 + \ldots + v_k = 0$, домноженное на λ_k. Получим:

$$\begin{gathered}
(\lambda_1 - \lambda_k)v_1 + \ldots + (\lambda_k - \lambda_k)v_k = 0 \\
(\lambda_1 - \lambda_k)v_1 + \ldots + (\lambda_{k-1} - \lambda_k)v_{k-1} + 0v_k = 0
\end{gathered}$$

Но из предположения индукции, а также потому что $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$, следует, что $v_1 = \ldots = v_{k-1} = 0$. Но тогда и $v_k = 0$.

Следовательно, сумма прямая, что нам и требовалось. □

Диагонализируемость

Следствие. *Если характеристический многочлен имеет ровно n попарно различных корней, где $n = \dim V$, то φ диагонализируем.*

Доказательство. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — корни $\chi_\varphi(t)$, $\lambda_i \neq \lambda_j$. Тогда для всех i выполняется, что $V_{\lambda_i}(\varphi) \neq \{0\}$ и, следовательно, $\dim V_{\lambda_i}(\varphi) = 1$. Но так как сумма $V_{\lambda_1}(\varphi) + \ldots + V_{\lambda_k}(\varphi)$ — прямая, то $\dim(V_{\lambda_1}(\varphi) + \ldots + V_{\lambda_k}(\varphi)) = \dim V_{\lambda_1}(\varphi) + \ldots + \dim V_{\lambda_k}(\varphi) = n$. Иными словами, $V = V_{\lambda_1}(\varphi) \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_k}(\varphi)$.

Выберем произвольные $v_i \in V_{\lambda_i} \setminus \{0\}$. Тогда $(v_1, \ldots, v_n)$ будет базисом в V. И так как все v_i — собственные значения для φ, то φ диагонализируем. $\square$

Теорема (Критерий диагонализируемости - 2)**.** *Линейный оператор φ диагонализируем тогда и только тогда, когда*

1. *$\chi_\varphi(t)$ разлагается на линейные множители;*
2. *Если $\chi_\varphi(t) = (t - \lambda_1)^{k_1} \ldots (t - \lambda_s)^{k_s}$, где $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$, то $\dim V_{\lambda_i}(\varphi) = k_i$ $\forall i$ (то есть для любого собственного значения V равны геометрическая и алгебраическая кратности).*

Доказательство.

$\Rightarrow$ Так как φ — диагонализируем, то существует базис $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ такой, что:

$$A(\varphi, \mathbb{e}) = \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix} = \operatorname{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n).$$

Тогда:

$$\chi_\varphi(t) = (-1)^n \begin{vmatrix} \mu_1 - t & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n - t \end{vmatrix} = (-1)^n (\mu_1 - t) \ldots (\mu_n - t) = (t - \mu_1) \ldots (t - \mu_n).$$

Итого, первое условие выполняется.

Теперь перепишем характеристический многочлен в виде $\chi_\varphi(t) = (t-\lambda_1)^{k_1} \ldots (t-\lambda_s)^{k_s}$, где $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$ и $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_s\} = \{\mu_1, \ldots, \mu_n\}$. Тогда $V_{\lambda_i} \supseteq \langle e_j \mid \mu_j = \lambda_i \rangle$, следовательно, $\dim V_{\lambda_i}(\varphi) \geqslant k_i$. Но мы знаем, что $\dim V_{\lambda_i} \leqslant k_i$! Значит, $\dim V_{l_i} = k_i$.

$\Leftarrow$ Так как $V_{\lambda_1}(\varphi) + \ldots + V_{\lambda_s}(\varphi)$ — прямая, то $\dim(V_{\lambda_1}(\varphi) + \ldots + V_{\lambda_s}(\varphi)) = k_1 + \ldots + k_s = n$.

Пусть $\mathbb{e}_i$ — базис в V_{λ_i}. Тогда $\mathbb{e}_1 \cup \ldots \cup \mathbb{e}_s$ — базис в V. То есть мы нашли базис из собственных векторов, следовательно, φ диагонализируем.

$\square$

Инвариантные подпространства в $\mathbb{R}^n$

Пусть V — векторное пространство над полем $\mathbb{C}$, $\varphi \in L(V)$. Тогда в V есть собственный вектор (или одномерное φ–инвариантное пространство).

Теперь пусть V — векторное пространство над полем $\mathbb{R}$, $\varphi \in L(V)$.

Теорема. *Существует одномерное или двумерное φ–инвариантное векторное подпространство.*

Доказательство. Пусть $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ — базис в V. Комплексифицируем V.

$$V^{\mathbb{C}} = \{u + iv \mid u, v \in V\}$$
$$V^{\mathbb{C}} \supset V = \{u + i \cdot 0 \mid u \in V\}$$

Рассмотрим линейный оператор $\varphi_{\mathbb{C}} \in L(V^{\mathbb{C}})$, заданный как $\varphi_{\mathbb{C}}(e_i) = \varphi(e_i), \forall i$. Значит, $e_1, \ldots, e_n$ — базис в $V^{\mathbb{C}}$. Следовательно, $\chi_{\varphi_{\mathbb{C}}}(t) = \chi_{\varphi}(t)$, так как $A(\varphi_{\mathbb{C}}, \mathbb{e}) = A(\varphi, \mathbb{e})$.

Случай 1: $\chi_{\varphi}(t)$ имеет хотя бы один действительный корень. Отсюда следует, что в V есть собственный вектор, что равносильно существованию одномерного φ–инвариантного подпространства (тогда $V^{\mathbb{C}}$ нам не нужен).

Случай 2: χ_{φ} не имеет действительных корней. Пусть $\lambda + i\mu$ — некоторый корень $\chi_{\varphi}(t)$, который, напомним, равен $\chi_{\varphi_{\mathbb{C}}}(t)$. Тогда существует собственный вектор $u + iv \in V^{\mathbb{C}}$ такой, что:

$$\varphi_{\mathbb{C}}(u + iv) = (\lambda + i\mu)(u + iv)$$
$$\varphi_{\mathbb{C}}(u + iv) = \varphi_{\mathbb{C}}(u) + i\varphi_{\mathbb{C}}(v) = \varphi(u) + i\varphi(v)$$
$$(\lambda + u\mu)(u + iv) = \lambda\mu - \mu v + i(\mu u + \lambda v)$$

Сравнивая два последних равенства, получаем:

$$\varphi(u) = \lambda u - \mu v$$
$$\varphi(v) = \mu u + \lambda v$$

Следовательно, $\langle u, v\rangle$ — φ–инвариантное подпространство, двумерное если u и v линейно независимы и одномерное в противном случае. $\square$

Пример. *Поворот на α в $\mathbb{R}^2$:* $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$. *Тогда $u = e_1$, $v = e_2$, $\lambda + i\mu = \cos\alpha + i\sin\alpha$.*

Пусть V — векторное пространство над F, $\dim V = n$.

Операции над $L(V)$:

1. Сложение: $(\varphi + \psi)(v) = \varphi(v) + \psi(v)$.
2. Умножение на скаляр: $(\alpha\varphi)(v) = \alpha\varphi(v)$.
3. Умножение: $(\varphi\psi)(v) = \varphi(\psi(v))$.

В частности, для любого $P(x) \in \mathbb{F}[x]$, $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ и для любого $\varphi \in L(V)$ определен линейный оператор $P(\varphi) \in L(V)$: $P(\varphi) = a_n\varphi^n + \ldots + a_1\varphi + a_0\mathrm{id}$.

Корневые векторы и корневые подпространства

Определение. *Вектор $v \in V$ называется корневым вектором линейного оператора φ, отвечающим значению $\lambda \in F$, если существует $m \geqslant 0$ такое, что $(\varphi - \lambda\mathrm{id})^m(v) = 0$.*

Наименьшее такое m называют высотой корневого вектора v.

Замечание.

1. *Вектор $v = 0$ для любого φ имеет высоту 0.*

2. *Высоту 1 имеют все собственные векторы.*

Пример. $V = \mathbb{F}[x]_{\leqslant n}$, $\Delta : f \to f'$. *Здесь* $\lambda = 0$ *— единственное собственное значение. Все векторы — корневые, отвечающие* $\lambda = 0$.

Определение. *Множество* $V^{\lambda}(\varphi) = \{v \in V \mid \exists m \geqslant 0 : (\varphi - \lambda \mathrm{id})^m(v) = 0\}$ *называется корневым пространством для* $\lambda \in F$.

Упражнение. $V^{\lambda}(\varphi)$ *— подпространство в* V.

Замечание. $V_{\lambda}(\varphi) \subseteq V^{\lambda}(\varphi)$ $\forall \lambda \in F$.