

# Лекция 23 от 29.02.2016

## Сумма собственных подпространств

Вспомним, чем закончилась прошлая лекция.

Пусть  $V$  — векторное пространство,  $U_1, \dots, U_k \subseteq V$  — векторные подпространства.

Сумма  $U = U_1 + \dots + U_k$  является прямой, если из условия  $u_1 + \dots + u_k = 0$  следует, что  $u_1 = \dots = u_k = 0$ , где  $u_i \in U_i$ . Обозначение:  $U = U_1 \oplus \dots \oplus U_k$ .

Эквивалентные условия:

1.  $U = U_1 \oplus \dots \oplus U_k$ .
2. Если  $e_i$  — базис  $U_i$ , то  $e = e_1 \cup \dots \cup e_k$  — базис  $U$ .
3.  $\dim U = \dim U_1 + \dots + \dim U_k$ .

Пусть  $V$  — векторное пространство над полем  $F$ ,  $\varphi \in L(V)$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  — набор собственных значений  $\varphi$ , где  $\lambda_i \neq \lambda_j$  при  $i \neq j$ , и  $V_{\lambda_i}(\varphi) \subseteq V$  — соответствующее собственное подпространство.

**Предложение.** Сумма  $V_{\lambda_1}(\varphi) + \dots + V_{\lambda_k}(\varphi)$  является прямой.

*Доказательство.* Докажем индукцией по  $k$ .

База:  $k = 1$ . Тут все ясно.

Теперь пусть утверждение доказано для всех значений, меньших  $k$ . Докажем для  $k$ .

Пусть  $v_i \in V_{\lambda_i}(\varphi)$  и пусть  $v_1 + \dots + v_k = 0$ . Тогда:

$$\begin{aligned}\varphi(v_1 + \dots + v_k) &= \varphi(0) = 0 \\ \varphi(v_1) + \dots + \varphi(v_k) &= 0 \\ \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k &= 0\end{aligned}$$

Теперь вычтем из нижней строчки  $v_1 + \dots + v_k = 0$ , домноженное на  $\lambda_k$ . Получим:

$$\begin{aligned}(\lambda_1 - \lambda_k)v_1 + \dots + (\lambda_k - \lambda_k)v_k &= 0 \\ (\lambda_1 - \lambda_k)v_1 + \dots + (\lambda_{k-1} - \lambda_k)v_{k-1} + 0v_k &= 0\end{aligned}$$

Но из предположения индукции, а также потому что  $\lambda_i \neq \lambda_j$  при  $i \neq j$ , следует, что  $v_1 = \dots = v_{k-1} = 0$ . Но тогда и  $v_k = 0$ .

Следовательно, сумма прямая, что нам и требовалось. □

## Диагонализируемость

**Следствие.** Если характеристический многочлен имеет ровно  $n$  попарно различных корней, где  $n = \dim V$ , то  $\varphi$  диагонализуем.

*Доказательство.* Пусть  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  — корни  $\chi_\varphi(t)$ ,  $\lambda_i \neq \lambda_j$ . Тогда для всех  $i$  выполняется, что  $V_{\lambda_i}(\varphi) \neq \{0\}$  и, следовательно,  $\dim V_{\lambda_i}(\varphi) = 1$ . Но так как сумма  $V_{\lambda_1}(\varphi) + \dots + V_{\lambda_k}(\varphi)$  — прямая, то  $\dim(V_{\lambda_1}(\varphi) + \dots + V_{\lambda_k}(\varphi)) = \dim V_{\lambda_1}(\varphi) + \dots + \dim V_{\lambda_k}(\varphi) = n$ . Иными словами,  $V = V_{\lambda_1}(\varphi) \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}(\varphi)$ .

Выберем произвольные  $v_i \in V_{\lambda_i} \setminus \{0\}$ . Тогда  $(v_1, \dots, v_n)$  будет базисом в  $V$ . И так как все  $v_i$  — собственные значения для  $\varphi$ , то  $\varphi$  диагонализировать.  $\square$

**Теорема** (Критерий диагонализированности - 2). *Линейный оператор  $\varphi$  диагонализировать тогда и только тогда, когда*

1.  $\chi_\varphi(t)$  разлагается на линейные множители;
2. Если  $\chi_\varphi(t) = (t - \lambda_1)^{k_1} \dots (t - \lambda_s)^{k_s}$ , где  $\lambda_i \neq \lambda_j$  при  $i \neq j$ , то  $\dim V_{\lambda_i}(\varphi) = k_i \forall i$  (то есть для любого собственного значения  $V$  равны геометрическая и алгебраическая кратности).

*Доказательство.*

$\Rightarrow$  Так как  $\varphi$  — диагонализировать, то существует базис  $e = (e_1, \dots, e_n)$  такой, что:

$$A(\varphi, e) = \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix} = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n).$$

Тогда:

$$\chi_\varphi(t) = (-1)^n \begin{vmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{vmatrix} = (-1)^n (\mu_1 - t) \dots (\mu_n - t) = (t - \mu_1) \dots (t - \mu_n).$$

Итого, первое условие выполняется.

Теперь перепишем характеристический многочлен в виде  $\chi_\varphi(t) = (t - \lambda_1)^{k_1} \dots (t - \lambda_s)^{k_s}$ , где  $\lambda_i \neq \lambda_j$  при  $i \neq j$  и  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_s\} = \{\mu_1, \dots, \mu_n\}$ . Тогда  $V_{\lambda_i} \supseteq \langle e_j \mid \mu_j = \lambda_i \rangle$ , следовательно,  $\dim V_{\lambda_i}(\varphi) \geq k_i$ . Но мы знаем, что  $\dim V_{\lambda_i} \leq k_i$ ! Значит,  $\dim V_{\lambda_i} = k_i$ .

$\Leftarrow$  Так как  $V_{\lambda_1}(\varphi) + \dots + V_{\lambda_s}(\varphi)$  — прямая, то  $\dim(V_{\lambda_1}(\varphi) + \dots + V_{\lambda_s}(\varphi)) = k_1 + \dots + k_s = n$ .

Пусть  $e_i$  — базис в  $V_{\lambda_i}$ . Тогда  $e_1 \cup \dots \cup e_s$  — базис в  $V$ . То есть мы нашли базис из собственных векторов, следовательно,  $\varphi$  диагонализировать.  $\square$

## Инвариантные подпространства в $\mathbb{R}^n$

Пусть  $V$  — векторное пространство над полем  $\mathbb{C}$ ,  $\varphi \in L(V)$ . Тогда в  $V$  есть собственный вектор (или одномерное  $\varphi$ -инвариантное пространство).

Теперь пусть  $V$  — векторное пространство над полем  $\mathbb{R}$ ,  $\varphi \in L(V)$ .

**Теорема.** *Существует одномерное или двумерное  $\varphi$ -инвариантное векторное подпространство.*

*Доказательство.* Пусть  $e = (e_1, \dots, e_n)$  — базис в  $V$ . Комплексифицируем  $V$ .

$$V^{\mathbb{C}} = \{u + iv \mid u, v \in V\}$$

$$V^{\mathbb{C}} \supset V = \{u + i \cdot 0 \mid u \in V\}$$

Рассмотрим линейный оператор  $\varphi_{\mathbb{C}} \in L(V^{\mathbb{C}})$ , заданный как  $\varphi_{\mathbb{C}}(e_i) = \varphi(e_i)$ ,  $\forall i$ . Значит,  $e_1, \dots, e_n$  — базис в  $V^{\mathbb{C}}$ . Следовательно,  $\chi_{\varphi_{\mathbb{C}}}(t) = \chi_{\varphi}(t)$ , так как  $A(\varphi_{\mathbb{C}}, e) = A(\varphi, e)$ .

Случай 1:  $\chi_{\varphi}(t)$  имеет хотя бы один действительный корень. Отсюда следует, что в  $V$  есть собственный вектор, что равносильно существованию одномерного  $\varphi$ -инвариантного подпространства (тогда  $V^{\mathbb{C}}$  нам не нужен).

Случай 2:  $\chi_{\varphi}$  не имеет действительных корней. Пусть  $\lambda + i\mu$  — некоторый корень  $\chi_{\varphi}(t)$ , который, напомним, равен  $\chi_{\varphi_{\mathbb{C}}}(t)$ . Тогда существует собственный вектор  $u + iv \in V^{\mathbb{C}}$  такой, что:

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathbb{C}}(u + iv) &= (\lambda + i\mu)(u + iv) \\ \varphi_{\mathbb{C}}(u + iv) &= \varphi_{\mathbb{C}}(u) + i\varphi_{\mathbb{C}}(v) = \varphi(u) + i\varphi(v) \\ (\lambda + i\mu)(u + iv) &= \lambda u - \mu v + i(\mu u + \lambda v)\end{aligned}$$

Сравнивая два последних равенства, получаем:

$$\begin{aligned}\varphi(u) &= \lambda u - \mu v \\ \varphi(v) &= \mu u + \lambda v\end{aligned}$$

Следовательно,  $\langle u, v \rangle$  —  $\varphi$ -инвариантное подпространство, двумерное если  $u$  и  $v$  линейно независимы и одномерное в противном случае.  $\square$

**Пример.** Поворот на  $\alpha$  в  $\mathbb{R}^2$ :  $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ . Тогда  $u = e_1$ ,  $v = e_2$ ,  $\lambda + i\mu = \cos \alpha + i \sin \alpha$ .

Пусть  $V$  — векторное пространство над  $F$ ,  $\dim V = n$ .

Операции над  $L(V)$ :

1. Сложение:  $(\varphi + \psi)(v) = \varphi(v) + \psi(v)$ .
2. Умножение на скаляр:  $(\alpha\varphi)(v) = \alpha\varphi(v)$ .
3. Умножение:  $(\varphi\psi)(v) = \varphi(\psi(v))$ .

В частности, для любого  $P(x) \in \mathbb{F}[x]$ ,  $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$  и для любого  $\varphi \in L(V)$  определен линейный оператор  $P(\varphi) \in L(V)$ :  $P(\varphi) = a_n \varphi^n + \dots + a_1 \varphi + a_0 \text{id}$ .

## Корневые векторы и корневые подпространства

**Определение.** Вектор  $v \in V$  называется *корневым вектором* линейного оператора  $\varphi$ , отвечающим значению  $\lambda \in F$ , если существует  $m \geq 0$  такое, что  $(\varphi - \lambda \text{id})^m(v) = 0$ .

Наименьшее такое  $m$  называют *высотой* корневого вектора  $v$ .

**Замечание.**

1. Вектор  $v = 0$  для любого  $\varphi$  имеет высоту 0.

2. Высоту 1 имеют все собственные векторы.

**Пример.**  $V = \mathbb{F}[x]_{\leq n}$ ,  $\Delta : f \rightarrow f'$ . Здесь  $\lambda = 0$  — единственное собственное значение. Все векторы — корневые, отвечающие  $\lambda = 0$ .

**Определение.** Множество  $V^\lambda(\varphi) = \{v \in V \mid \exists m \geq 0 : (\varphi - \lambda \text{id})^m(v) = 0\}$  называется корневым пространством для  $\lambda \in F$ .

**Упражнение.**  $V^\lambda(\varphi)$  — подпространство в  $V$ .

**Замечание.**  $V_\lambda(\varphi) \subseteq V^\lambda(\varphi) \forall \lambda \in F$ .