Лекция 21 от 15.02.2016

Инвариантность и обратимость

Пусть $\varphi\colon V \to V$ — линейный оператор. $\mathbb{e}$ — базис в V.

Обозначение. $A(\varphi, \mathbb{e})$ *— матрица линейного оператора* φ *в базисе* $\mathbb{e}$*.*

Если $\mathbb{e}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ — ещё один базис, причём $(e'_1, \ldots, e'_n) = (e_1, \ldots, e_n)C$, где C — матрица перехода. $A = A(\varphi, \mathbb{e})$, $A' = A(\varphi, \mathbb{e}')$. В прошлый раз мы доказали, что $A' = C^{-1}AC$.

Следствие. *Величина* $\det A$ *не зависит от выбора базиса.*

Доказательство. A' — матрица φ в другом базисе. Тогда получается

$$\det A' = \det\left(C^{-1}AC\right) = \det C^{-1} \det A \det C = \det A \det C \frac{1}{\det C} = \det A$$

□

Заметим, что $\det A$ — инвариант самого φ.

Обозначение. $\det \varphi$

Определение. *Две матрицы* $A', A \in M_n(F)$ *называются подобными, если* $\exists C \in M_n(F), \det C \neq 0\colon A' = C^{-1}AC$

Замечание. *Отношение подобия на* M_n *является отношением эквивалентности.*

Предложение. *Пусть* $\varphi \in L(V)$*. Тогда эти условия эквивалентны*

1. $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$
2. $\operatorname{Im}\varphi = V$
3. φ *обратим (то есть биекция, изоморфизм)*
4. $\det \varphi = 0$

Доказательство.

1. $\Leftrightarrow 2$ — следует из формулы $\dim V = \dim \operatorname{Ker}\varphi + \dim \operatorname{Im}\varphi$
2. $\Leftrightarrow 3$ — уже было
3. $\Leftrightarrow 4$ — уже было

□

Определение. *Линейный оператор* φ *называется вырожденным, если* $\det\varphi = 0$*, и невырожденным, если* $\det\varphi \neq 0$

Определение. *Подпространство* $U \subset V$ *называется инвариантным относительно* φ *(или* φ*-инвариантным), если* $\varphi(U) \subset U$*. То есть* $\varphi(u) \in U$ $\forall u \in U$*.*

Пример.

1. $\{0\}, V$ *— они инвариантны для любого* φ*.*
2. $\operatorname{Ker}\varphi$ φ*-инвариантно,* $\varphi(\operatorname{Ker}\varphi) = \{0\} \subset \operatorname{Ker}\varphi$

3. $\operatorname{Im}\varphi$ *тоже* φ*-инвариантно,* $\varphi(\operatorname{Im}\varphi) \subset \varphi(V) = \operatorname{Im}\varphi$.

Пусть $U \subset V$ — φ-инвариантное подпространство. Также пусть $(e_1, \ldots, e_n)$ — базис в U. Дополним его до базиса V: $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$.

$$\underbrace{A(\varphi, \mathbb{e})}_{\text{Матрица с углом нулей}} = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}, \text{ где } B \in M_k$$

Это нетрудно понять, если учесть, что $\varphi(e_i) \in \langle e_1, \ldots, e_k \rangle$, $i = 1, \ldots, k$. Если $U = \operatorname{Ker}\varphi$, то $B = 0$. Если $U = \operatorname{Im}\varphi$, то $D = 0$.

Обратно, если в базисе $\mathbb{e}$ имеет такой вид вид, то $U = \langle e_1, \ldots e_k \rangle$ — инвариантное подпространство.

Обобщение. *$V = U \oplus W$, где U, W — инвариантные подпространства, $(e_1, \ldots, e_k)$ — базис W, тогда $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ — базис V.*

$$A(\varphi, \mathbb{e}) = \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

Обобщение.

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} * \, 0 \, 0 \ldots 0 \\ 0 * 0 \ldots 0 \\ 0 \, 0 * \ldots 0 \\ \vdots \; \vdots \; \vdots \; \ddots \; \vdots \\ 0 \, 0 \, 0 \ldots * \end{pmatrix} & \begin{array}{c} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ \vdots \\ k_s \end{array} \end{array}$$

Здесь $k_1, \ldots, k_s$ — размеры квадратных блоков блочно-диагональной матрицы. $A(\varphi, \mathbb{e})$ имеет такой вид тогда и только тогда, когда все подпространства

$$U_1 = \langle e_1, \ldots, e_{k_1} \rangle$$
$$U_2 = \langle e_{k_1+1}, \ldots, e_{k_2} \rangle$$
$$\vdots$$
$$U_{k_s} = \langle e_{n-k_s+1}, \ldots, e_n \rangle$$

Предел мечтаний. *Найти такой базис, в котором матрица линейного оператора была бы диагональной. Но такое возможно не всегда*

Собственные векторы и собственные значения

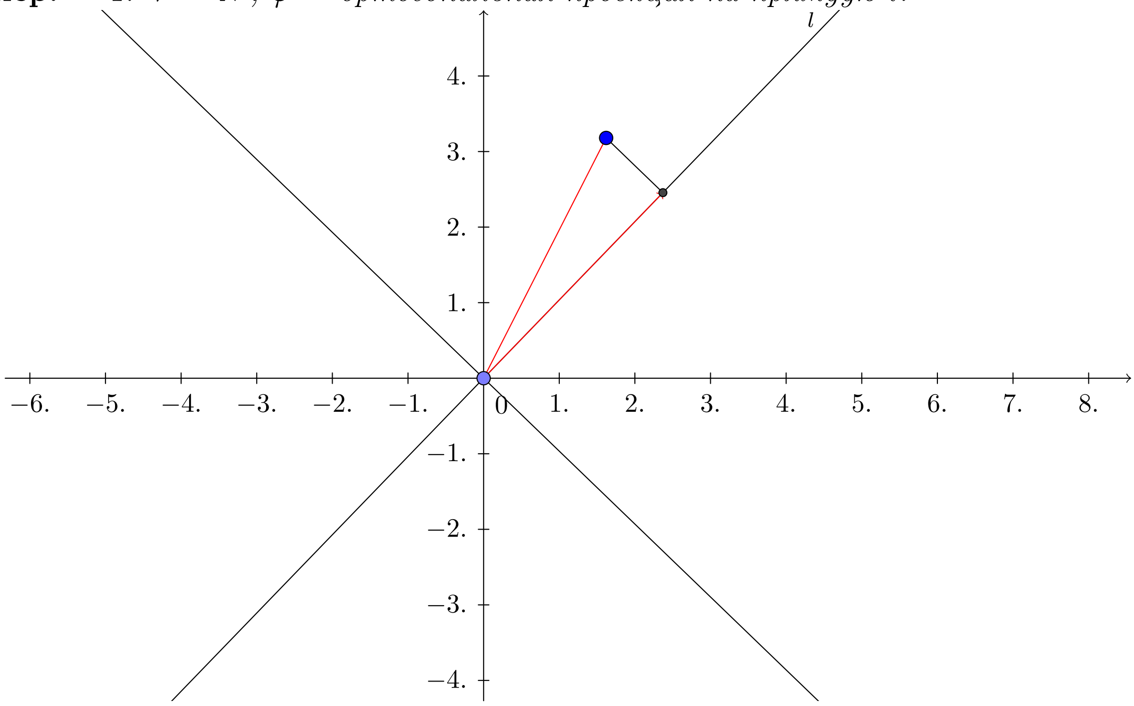
Пусть $\varphi \in L(V)$

Определение. *Ненулевой вектор $v \in V$ называется собственным для V, если $\varphi(v) = \lambda v$ для некоторго $\lambda \in F$. При этом число λ называется собственным значением линейного оператора φ, отвечающим собственному вектору v.*

Предложение. *$0 \neq v \in V$ — собственный вектор в V тогда и только тогда, когда $\langle v \rangle$ является φ-инвариантным подпространством*

Доказательство. $[\Rightarrow]$ $\varphi(v) = \lambda v \Rightarrow \langle v \rangle = \{kv \mid k \in F\}$. Тогда $\varphi(kv) = \lambda kv \in \langle v \rangle$. $[\Leftarrow]$ $\varphi(V) \in \langle v \rangle \Rightarrow \exists \lambda \in F\colon \varphi(v) = \lambda v$ □

Пример. *1.* $V = \mathbb{R}^2$, φ *— ортогональная проекция на прямую* l.



$0 \neq v \in l \Rightarrow \varphi(v) = 1 \cdot v,\ \lambda = 1$
$0 \neq v \perp l \Rightarrow \varphi(v) = 0 = 0 \cdot v,\ \lambda = 1$

2. Поворот на угол φ *вокруг нуля на угол* α.

- $\alpha = 0 + 2\pi k$. *Любой ненулевой вектор собственный.* $\lambda = 1$.
- $\alpha = \pi + 2\pi k$. *Любой ненулевой вектор собственный.* $\lambda = -1$.
- $\alpha \neq \pi k$. *Собственных векторов нет.*

3. $V = P_n(F)$ *— многочлены степени.* $\varphi = \Delta\colon f \to f'$. *Тогда* $0 \neq f$ *— собственный вектор тогда, и только тогда, когда* $f = const$

Диагонализуемость

Определение. *Линейный оператор* φ *называется диагонализуемым, если* $\exists$ *базис* $\mathbb{e}$ *в* $V\colon A(\varphi, \mathbb{e})$ *диагональна.*

Предложение (Критерий диагонализуемости)**.** *φ диагонализуем тогда и только тогда, когда в V существует базис из собственных векторов.*

Доказательство. $\mathbb{e}$ — базис V. $A = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \Leftrightarrow \varphi(e_i) = \lambda_i e_i$, что эквивалентно тому, что все векторы собственные. □

В примерах выше

1. φ диагонализуем. $e_1 \in l$, $e_2 \perp l$. Тогда матрица примет вид $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Если $\alpha = \pi k$, то φ диагонализуем ($\varphi = \mathrm{id}$ или $\varphi = -\mathrm{id}$). Не диагонализуем в других случаях.

3. φ диагонализуем тогда и только тогда, когда $n = 0$. При $n > 0$ собственных векторов **МАЛО**.

Собственное подпространство

Пусть $\varphi \in L(V)$, $x \in F$.

Определение. *Множество* $V_\lambda(\varphi) = \{v \in V \mid \varphi(v) = \lambda V\}$ *называется собственным подпространством линейного оператора, отвечающим собственному значению* λ. *Лектор предлагает доказать то, что это подпротранство, в качестве упражнения.*

Предложение. $V_\lambda(\varphi) = \mathrm{Ker}\,(\varphi - \lambda \mathrm{id})$

Доказательство. $v \in V_\lambda(\varphi) \Leftrightarrow \varphi(v) = \lambda v \Leftrightarrow \varphi(v) - \lambda v = 0 \Leftrightarrow (\varphi - \lambda \mathrm{id})(v) = 0 \Leftrightarrow v \in \mathrm{Ker}\,(\varphi - \lambda \mathrm{id})$ □

Следствие. $v_\lambda(\varphi) \neq 0 \Leftrightarrow \det(\varphi - \lambda \mathrm{id}) = 0$

Определение. *Многочлен* $\chi_\varphi(t) = (-1)^n \det(\varphi - t\mathrm{id})$ *называется характеристическим.*