

Линейная алгебра и геометрия, 3 модуль, лекция 17

25.01.2016

Пусть V - векторное пространство над \mathbb{C} .

Определение. Овеществление пространства V - это то же пространство V , рассматриваемое как пространство над \mathbb{R} .

Операция умножения на элементы \mathbb{R} в V уже есть, так как \mathbb{R} - подполе в \mathbb{C} . Обозначение $V_{\mathbb{R}}$

Пример. $\mathbb{C}_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^2$

Предложение. V - векторное пространство над \mathbb{C} , $\dim V < \infty$. Тогда $\dim V_{\mathbb{R}} = 2 \dim V$.

Доказательство. Пусть e_1, \dots, e_n - базис в V . Тогда $V = \{z_1 e_1 + \dots + z_n e_n \mid z_k \in \mathbb{C}\}$, причём такая запись единственная в силу определения базиса. Пусть $z_k = a_k + ib_k$, причём такая запись тоже единственная. Тогда будем иметь

$$\begin{aligned} V &= \{(a_1 + ib_1)e_1 + \dots + (a_n + ib_n)e_n \mid a_k, b_k \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{a_1 e_1 + \dots + a_n e_n + b_1 i e_1 + \dots + b_n i e_n \mid a_k, b_k \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

И причём такая запись тоже единственная. Выходит, что $e_1, e_2, \dots, e_n, i e_1, i e_2, \dots, i e_n$ - базис в $V_{\mathbb{R}}$, в котором $2n = 2 \dim V$ элементов. \square

Определение. Комплексификация пространства W - это множество $W \times W = W^{\mathbb{C}} = \{(u, v) \mid u, v \in W\}$ с операциями $(u_1, v_1) + (u_2, v_2) = (u_1 + u_2, v_1 + v_2)$, $(a + ib)(u, v) = (au - bv, av + bu)$.

Пример. $\mathbb{R}^{\mathbb{C}} = \mathbb{R}$

Утверждение. В нём выполняются все 8 аксиом векторного пространства над \mathbb{C} .

W отождествляется подмножеством $\{(u, 0) \mid u \in W\}$. Действительно

$$w \in W \leftrightarrow (w, 0) \in W^{\mathbb{C}}; \quad i(w, 0) = (0, w) \in W^{\mathbb{C}}$$

В итоге $\forall (u, v) \in W^{\mathbb{C}}$ представим в виде

$$(u, v) = (u, 0) + (0, v) = (u, 0) + i(v, 0) = u + iv$$

То есть $W^{\mathbb{C}} = \{u + iv \mid u, v \in W\}$.

Предложение. $\dim W^{\mathbb{C}} = \dim W$

Замечание. Здесь $W^{\mathbb{C}}$ - пространство над \mathbb{C} , а W - над \mathbb{R} .

Доказательство. Пусть e_1, \dots, e_n - базис в W . Тогда

$$\begin{aligned} W^{\mathbb{C}} &= \{(u, v) \mid u, v \in W\} = \{(a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n, b_1 e_1 + b_2 e_2 + \dots + b_n e_n) \mid a_k, b_k \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{(a_1 e_1, b_1 e_1) + \dots + (a_n e_n, b_n e_n)\} = \{(a_1 + ib_1)e_1 + \dots + (a_n + ib_n)e_n\} = \\ &= \{z_1 e_1 + \dots + z_n e_n \mid z_k \in \mathbb{C}\} \end{aligned}$$

То есть выходит, что e_1, \dots, e_n - базис в $W^{\mathbb{C}}$. \square

Пусть V - конечномерное векторное пространство, а U, W — подпространства (в качестве упражнения лектор предлагает доказать, что их пересечение — тоже подпространство)

Определение. Сумма подпространств U, W — это множество

$$U + W = \{u + w \mid u \in U, w \in W\}$$

Замечание. $\dim(U \cap W) \leq \dim U \leq \dim(U + W)$

Пример. Двумерные плоскости в пространстве \mathbb{R}^3 содержат общую прямую.

Теорема. $\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U + W)$

Доказательство. Положим $p = \dim(U \cap W)$, $k = \dim U$, $m = \dim W$. Выберем базис $a = \{a_1, \dots, a_k\}$ в пересечении. Его можно дополнить до базиса W и до базиса U . Значит $\exists b = \{b_1, \dots, b_{k-p}\}$ такой, что $a \cup b$ - базис в U и $\exists c = \{c_1, \dots, c_{m-p}\}$ такой, что $a \cup c$ - базис в W . Докажем, что $a \cup b \cup c$ - базис в $U + W$. Во-первых, докажем, что $U + W$ порождается множеством $a \cup b \cup c$.

$$\begin{aligned} v \in U + W &\Rightarrow \exists u \in U, w \in W: v = u + w \\ u \in U &= \langle a \cup b \rangle \subset \langle a \cup b \cup c \rangle \\ w \in W &= \langle a \cup c \rangle \subset \langle a \cup b \cup c \rangle \\ &\Rightarrow v = u + w \in \langle a \cup b \cup c \rangle \\ &\Rightarrow U + W = \langle a \cup b \cup c \rangle \end{aligned}$$

Во-вторых докажем их линейную независимость. Пусть скаляры $\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_{k-p}, \gamma_1, \dots, \gamma_{m-p}$ таковы, что

$$\begin{aligned} \underbrace{\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_p a_p}_x + \underbrace{\beta_1 b_1 + \dots + \beta_{k-p} b_{k-p}}_y + \underbrace{\gamma_1 c_1 + \dots + \gamma_{m-p} c_{m-p}}_z &= 0 \\ x + y + z &= 0 \\ z &= -x - y \\ z &\in W \\ -x - y &\in U \cap W \\ &\Rightarrow \exists \lambda_1, \dots, \lambda_p \in F: z = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_p a_p \end{aligned}$$

Тогда $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_p a_p - \gamma_1 c_1 - \dots - \gamma_{m-p} c_{m-p} = 0$. Но $a \cup c$ - базис W . $\Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_p = \gamma_1 = \dots = \gamma_{m-p} = 0$. Но тогда $0 = x + y = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_p a_p + \beta_1 b_1 + \dots + \beta_{k-p} b_{k-p}$. Но $a \cup b$ - базис U $\Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_p = \beta_1 = \dots = \beta_{k-p} = 0$. Значит все коэффициенты равны нулю и линейная независимость тем самым доказана. То есть $a \cup b \cup c$ - базис $U + W$.

$$\begin{aligned} \dim(U + W) &= |a \cup b \cup c| = |a| + |b| + |c| = p + k - p + m - p = k + m - p = \\ &= \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) \end{aligned}$$

□

Определение. Если $U \cap W = \{0\}$, то $U + W$ называется прямой суммой

Следствие. В таком случае $\dim(U + W) = \dim U + \dim W$

Пример. U - плоскость, W - прямая в \mathbb{R}^3 .

Переход к новому базису

Пусть V - векторное пространство, $\dim V = n$, e_1, \dots, e_n — базис. То есть

$$\forall v \in V \exists! v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$$

где $x_1, \dots, x_n \in F$ — координаты v в базисе (e_1, \dots, e_n) . Пусть также есть базис e'_1, \dots, e'_n .

$$e'_1 = c_{11}e_1 + c_{21}e_2 + \dots + c_{n1}e_n$$

$$e'_2 = c_{12}e_1 + c_{22}e_2 + \dots + c_{n2}e_n$$

...

$$e'_n = c_{1n}e_1 + c_{2n}e_2 + \dots + c_{nn}e_n$$

Обозначим матрицу $C = (c_{ij})$. Тогда можно переписать $(e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n) \cdot C$.

Предложение. e'_1, \dots, e'_n образуют базис $\Leftrightarrow \det C \neq 0$.

Доказательство. (\Rightarrow) e'_1, \dots, e'_n - базис, а значит $\exists C' \in M_n$:

$$(e_1, \dots, e_n) = (e'_1, \dots, e'_n) C' = (e_1, \dots, e_n) C' C$$

$$E = C C'$$

$$C' = C^{-1} \Leftrightarrow \exists C^{-1} \Leftrightarrow \det C \neq 0$$

(\Leftarrow) $\det C \neq 0 \Rightarrow \exists C^{-1}$. Покажем, что e'_1, \dots, e'_n в таком случае линейно независимы. Пусть $x_1 e'_1 + x_2 e'_2 + \dots + x_n e'_n = 0$. Тогда можно записать

$$(e'_1, e'_2, \dots, e'_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

$$(e_1, \dots, e_n) C \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

Поскольку (e_1, \dots, e_n) — базис, то $C \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$. Умножая слева на обратную матрицу,

получаем, что $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$

□