Лекция 29 от 27.04.2016

Ортогональные дополнения

Пусть $\mathbb{E}$ — евклидово пространство, $\dim \mathbb{E} = n$.

Определение. *Векторы x,y называются ортогональными, если $(x,y) = 0$. Обозначение: $x \perp y$.*

Определение. *Пусть $S \subseteq \mathbb{E}$ — произвольное подпространство. Ортогональным дополнением к S называется множество $S^\perp = \{x \in \mathbb{E} \mid (x,y) = 0 \ \forall y \in S\}$.*

Замечание.

1. *$S^\perp$ — подпространство в $\mathbb{E}$.*
2. *$S^\perp = \langle S \rangle^\perp$.*

Предложение. *Пусть S — подпространство в $\mathbb{E}$. Тогда:*

1. *$\dim S^\perp = n - \dim S$;*
2. *$\mathbb{E} = S \oplus S^\perp$;*
3. *$(S^\perp)^\perp = S$.*

Доказательство.

1. Выделим в S базис $(e_1, \ldots, e_k)$ и дополним его векторами $(e_{k+1}, \ldots, e_n)$ до базиса $\mathbb{E}$. Рассмотрим вектор $x \in \mathbb{E}$ и представим его в виде $x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$. Если $x \in S^\perp$, то это то же самое, если $(x, e_i) = 0$ для $i = 1 \ldots k$. Итого:
$$(x,e_i) = (e_1, e_i)x_1 + (e_2, e_i)x_2 + \ldots, (e_n, e_i)x_n = 0, \quad i = 1 \ldots k$$
Получим однородную СЛУ $G \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$, где $G \in Mat_{k\times n}(\mathbb{R})$ и $g_{ij} = (e_i, e_j)$. Заметим, что $\operatorname{rk} G = k$, так как это часть матрицы Грама, и ее левый верхний $k \times k$ минор больше нуля. Следовательно, размерность пространства решений $\dim S^\perp = n - \operatorname{rk} G = n - \dim S$.
2. Из предыдущего пункта получаем, что $\dim S + \dim S^\perp = n$. Вместе с тем, поскольку $(x,x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$, то $S \cap S^\perp = \{0\}$. Следовательно, $\mathbb{E} = S \oplus S^\perp$.
3. $S \subset (S^\perp)^\perp$ — всегда. Вместе с тем, $\dim(S^\perp)^\perp = n - \dim S^\perp = n - (n - k) = k = \dim S$. И так как размерности совпадают, то $S = (S^\perp)^\perp$.

□

Итак, мы теперь знаем, что $\mathbb{E} = S \oplus S^\perp$. Значит, для $x \in \mathbb{E}$ существует единственное представление его в виде $x = y + z$, где $y \in S$, $z \in S^\perp$.

Определение. *Вектор y называется ортогональной проекцией вектора x на подпространство S. Обозначение: $\mathrm{pr}_S x$.*
Вектор z называется ортогональной составляющей вектора x вдоль подпространства S. Обозначение: $\mathrm{ort}_S x$.

Ортогональные и ортонормированные базисы. Свойства

Определение. *Базис* $(e_1, \ldots, e_n)$ *в* $\mathbb{E}$ *называется ортогональным, если* $(e_i, e_j) = 0$ $\forall i \neq j$. *Это равносильно тому, что* $G(e_1, \ldots, e_n)$ *диагональна.*
Базис называется ортонормированным, если дополнительно $(e_i, e_i) = 1$ $\forall i$. *Это равносильно тому, что* $G(e_1, \ldots, e_n) = E$.

Замечание. *Если* $(e_1, \ldots, e_n)$ *ортогональный базис, то* $\left(\frac{e_1}{|e_1|}, \ldots, \frac{e_n}{|e_n|}\right)$ *ортонормированный.*

Теорема. *В любом конечномерном евклидовом пространстве существует ортонормированный базис.*

Доказательство. Следует из того, что всякую положительно определенную квадратичную форму можно привести к нормальному виду. □

Пусть $(e_1, \ldots, e_n)$ — ортонормированный базис в $\mathbb{E}$. Пусть также есть ещё один базис $(e'_1, \ldots, e'_n)$, причём $(e'_1, \ldots, e'_n) = (e_1, \ldots, e_n)C$.

Предложение. $(e'_1, \ldots, e'_n)$ *— ортонормированный тогда и только тогда, когда* $C^T C = E$ *или, что то же самое,* $C^{-1} = C^T$.

Доказательство. Условие, что базис $(e'_1, \ldots, e'_n)$ является ортонормированным, равносильно тому, что $G(e'_1, \ldots, e'_n) = E$. С другой стороны, $G(e'_1, \ldots, e'_n) = C^T G(e_1, \ldots, e_n) C$, причем аналогично $G(e_1, \ldots, e_n) = E$. Откуда и следует, что $C^T C = E$. □

Определение. *Матрица* C *в таком случае называется ортогональной.*

Свойства.

1. $C^T C = E$, *значит,* $C^T = C^{-1}$, *и тогда* $CC^T = E$. *Итого, получаем:*
$$\sum_{k=1}^{n} c_{ki} c_{kj} = \delta_{ij} = \sum_{k=1}^{n} c_{ik} c_{jk}$$
Напомним, что δ_{ij} *это символ Кронекера.*

2. $\det C = \pm 1$.

Пример. $C = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ *— матрица поворота на угол* φ *в* $\mathbb{R}^2$.

Пусть $S \subseteq \mathbb{E}$ — подпространство, $(e_1, \ldots, e_k)$ — его ортогональный базис, $x \in \mathbb{E}$.

Предложение. $\mathrm{pr}_S x = \sum\limits_{i=1}^{k} \frac{(x, e_i)}{(e_i, e_i)} e_i$. *В частности, если базис ортонормированный,* $\mathrm{pr}_S x = \sum\limits_{i=1}^{k} (x, e_i) e_i$

Доказательство. Представим вектор x в виде суммы $x = \mathrm{pr}_S x + \mathrm{ort}_S x$. Тогда:
$$(x, e_i) = (\mathrm{pr}_S x, e_i) + \underbrace{(\mathrm{ort}_S x, e_i)}_{=0} = (\mathrm{pr}_S x, e_i) \quad i = 1, \ldots, k.$$

Вместе с тем, $\mathrm{pr}_S x = \sum\limits_{j=1}^{k} \lambda_j e_j$, следовательно, $(x, e_i) = \sum\limits_{j=1}^{k} \lambda_j (e_j, e_i)$. Но так как базис ортогональный, все слагаемые, кроме одного, занулятся, и останется только $(x, e_i) = \lambda_i (e_i, e_i)$. Откуда и следует, что $\lambda_i = \frac{(x, e_i)}{(e_i, e_i)}$. □

Пусть есть базис $(e_1, \ldots, e_n)$ в $\mathbb{E}$. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта даёт ортогональный базис $(f_1, \ldots, f_n)$, причем:

$$\begin{aligned}
&f_1 = e_1\\
&f_2 \in e_2 + \langle e_1 \rangle\\
&\ldots\\
&f_n \in e_n + \langle e_1, \ldots, e_{n-1} \rangle
\end{aligned}$$

Точно так же можно заметить, что $\langle f_1, \ldots, f_i \rangle = \langle e_1, \ldots, e_i \rangle$ для всех $i = 1, \ldots, n$.

Предложение. *$f_i = \operatorname{ort}_{\langle e_1, \ldots, e_{i-1} \rangle} e_i$ для всех $i = 1, \ldots, n$.*

Доказательство. Воспользовавшись равенством линейных оболочек, получаем, что $e_i \in f_i + \langle f_1, \ldots, f_{i-1} \rangle$. Следовательно, данный базисный вектор можно представить в виде $e_i = f_i + \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_{i-1} f_{i-1}$. И из того, что $f_i \perp \langle e_1, \ldots, e_{i-1} \rangle = \langle f_1, \ldots, f_{i-1} \rangle$ как раз и получаем, что $f_i = \operatorname{ort}_{\langle e_1, \ldots, e_{i-1} \rangle} e_i$. □

Пример. *Данное рассуждение проще понять, если представить себе частный случай для $\mathbb{E} = \mathbb{R}^3$.*

У нас зафиксированы векторы e_1, e_2, e_3, и мы их ортогонализируем. Для начала, $f_1 = e_1$. Вектор f_2 получается как проекция вектора e_2 на прямую, ортогональную f_1. А вектор f_3 — как проекция e_3 на прямую, ортогональную плоскости, образованной векторами f_1 и f_2. Аналогично для пространств большей размерности.

Теорема (Пифагора)**.** *Если $x, y \in \mathbb{E}$ и $x \perp y$, то $|x + y| = |x|^2 + |y|^2$.*

Доказательство.

$$|x+y|^2 = (x+y, x+y) = (x,x) + (y,y) + \underbrace{(x,y)}_{=0} + \underbrace{(y,x)}_{=0} = (x,x) + (y,y) = |x|^2 + |y|^2$$

□

Расстояния в евклидовых пространствах

Рассмотрим векторы $x, y \in \mathbb{E}$.

Определение. *Расстоянием между векторами x и y называется число $\rho(x,y) := |x - y|$.*

Предложение (Неравенство треугольника)**.** *$\rho(a,b) + \rho(b,c) \geqslant \rho(a,c)$ при $a, b, c \in \mathbb{E}$.*

Доказательство. Пусть $x = a - b$, $y = b - c$. Тогда $a - c = x + y$. Теперь достаточно доказать, что $|x| + |y| \geqslant |x + y|$. Для этого рассмотрим $|x + y|^2$.

$$|x+y|^2 = (x,x) + 2(x,y) + (y,y) = |x|^2 + 2(x,y) + |y|^2 \leqslant |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2$$

Сравнивая начало и конец неравенства, получаем, что $|x + y| \leqslant |x| + |y|$. □

Пусть P и Q — два произвольных подмножества $\mathbb{E}$.

Определение. *Расстоянием между P и Q называют величину*

$$\rho(P,Q) := \inf\{\rho(x,y) \mid x \in P,\ y \in Q\}.$$

Пусть $x \in \mathbb{E}$ и $U \subseteq \mathbb{E}$ — подпространство.

Теорема. $\rho(x,U) = |\mathrm{ort}_U x|$, *причём* $\mathrm{pr}_U x$ *— единственный ближайший к* x *вектор из* U.

Доказательство. Пусть $y = \mathrm{pr}_U x$ и $z = \mathrm{ort}_U x$. Пусть также $y' \in U \backslash \{0\}$, тогда:

$$\rho(x, y + y') = |x - y - y'| = |z - y'| = \sqrt{|z|^2 + \underbrace{|y'|^2}_{>0}} > |z| = \rho(x,y).$$

Из того, что вектор z, которым мы ограничили снизу, определяется однозначно, и следует, что существует единственный ближайший вектор к x из U. □

Пусть $U \subseteq \mathbb{E}$ — подпространство, $x \in \mathbb{E}$, $(e_1, \ldots, e_k)$ — базис U.

Теорема. $(\rho(x,U))^2 = \dfrac{\det G(e_1, \ldots, e_k, x)}{\det G(e_1, \ldots, e_k)}$

Доказательство. Разобьем на два случая: когда x лежит в U и когда не лежит.

1. $x \in U$. Тогда $\rho(x,U) = 0$. Но с другой стороны, $\det G(e_1, \ldots, e_k, x) = 0$, поскольку эти векторы линейно зависимы, и значит, равенство выполняется.

2. $x \notin U$. Тогда $\rho(x,U) = |\mathrm{ort}_U x| = |z|$. Ортогонализация Грама-Шмидта к $(e_1, \ldots, e_k, x)$ даст нам $(f_1, \ldots, f_k, z)$, причём $|z|^2 = (z,z) = \dfrac{\delta_{k+1}}{\delta_k} = \dfrac{\det G(e_1, \ldots, e_k, x)}{\det G(e_1, \ldots, e_k)}$.

□