

Линейная алгебра, 3 модуль, лекция 15

11.01.2016

Для начала вспомним, что такое *векторное пространство* — это множество, на котором введены операции сложения, умножения на скаляр и в котором будут выполняться восемь аксиом (см. 1 семестр). Но что такое скаляр?

Определение. *Скаляры — это элементы некоторого фиксированного поля.*

Определение. *Полем называется множество F , на котором заданы две операции — «сложение» $(+)$ и «умножение» (\cdot) ,*

$$F \times F \rightarrow F \Rightarrow \begin{array}{l} +: (a, b) \mapsto a + b \\ \cdot: (a, b) \mapsto a \cdot b \end{array}$$

удовлетворяющие следующим свойствам («аксиомам поля»): $\forall a, b, c \in F$

1. $a + b = b + a$ (коммутативность по сложению);
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$ (ассоциативность по сложению);
3. $\exists 0 \in F: 0 + a = a + 0 = a$ (существование нулевого элемента);
4. $\exists -a \in F: a + (-a) = (-a) + a = 0$ (существование противоположного элемента);
5. $a(b + c) = ab + ac$ (дистрибутивность; связь между сложением и умножением);
6. $ab = ba$ (коммутативность по умножению);
7. $(ab)c = a(bc)$ (ассоциативность по умножению);
8. $\exists 1 \in F \setminus \{0\}: 1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ (существование единицы);
9. $a \neq 0 \Rightarrow \exists a^{-1} \in F: a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$ (существование обратного элемента).

Примеры.

- \mathbb{Q} — рациональные числа;
- \mathbb{R} — вещественные числа;
- \mathbb{C} — комплексные числа;
- $F_2 = \{0, 1\}$, при сложении и умножении по модулю 2.

Поле комплексных чисел

Поле вещественных чисел \mathbb{R} плохо тем, что в нем уравнение $x^2 + 1 = 0$ не имеет решения. Отсюда возникает идея определить поле, удовлетворяющее следующим требованиям:

- (T1) новое поле содержит \mathbb{R} ;
- (T2) уравнение $x^2 + 1 = 0$ имеет решение.

Давайте формально построим такое поле.

Определение. Поле \mathbb{C} комплексных чисел называется множество $\{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$, на котором заданы операции сложения: $(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$ и умножения: $(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + b_1 a_2)$.

Предложение. \mathbb{C} и впрямь является полем.

Доказательство. Операции сложения и умножения введены, осталось только проверить выполнение всех аксиом.

1. очевидно, так как сложение идет поэлементно;
2. также очевидно;
3. $0 = (0, 0)$;
4. $-(a, b) = (-a, -b)$;
5. почти очевидно (т.е. прямая проверка);
6. ясно (тоже прямая проверка);
7. проверим:

$$\begin{aligned} ((a_1, b_1)(a_2, b_2))(a_3, b_3) &= (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + b_1 a_2)(a_3, b_3) = \\ &= (a_1 a_2 a_3 - b_1 b_2 b_3 - a_1 b_2 b_3 - b_1 a_2 b_3, a_1 a_2 b_3 - b_1 b_2 b_3 + a_1 b_2 a_3 + b_1 a_2 a_3) = \\ &= (a_1, b_1)(a_2 a_3 - b_2 b_3, a_2 b_3 + b_2 a_3) = (a_1, b_1)((a_2, b_2)(a_3, b_3)); \end{aligned}$$

8. $1 = (1, 0)$;
9. $(a, b) \neq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \neq 0 \rightarrow (a, b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$.

□

Осталось только проверить, правда ли введенное поле \mathbb{C} удовлетворяет нашим требованиям:

- (T1) Заметим, что в подмножестве \mathbb{C} , состоящим из элементов вида $(a, 0)$ операции сложения и умножения будут работать как в поле вещественных чисел.

$$\begin{aligned} (a, 0) + (b, 0) &= (a + b, 0) \\ (a, 0) \cdot (b, 0) &= (ab, 0) \end{aligned}$$

Следовательно, отображение $a \mapsto (a, 0)$ отождествляет \mathbb{R} с этим подмножеством, то есть $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Что нам и требуется.

- (T2) Примем $i = (0, 1)$. Тогда $i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$. Итого, требование выполнено.

Однако запись комплексных чисел в виде упорядоченной пары (a, b) не очень удобна и громоздка. Поэтому преобразуем запись следующим образом:

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1) = a + bi.$$

Тем самым мы получили реализацию поля \mathbb{C} комплексных чисел как множества $\{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$, с обычным сложением и умножением.

Определение. Запись $z = a + bi$ называется алгебраической формой комплексного числа $z \in \mathbb{C}$.

$a = \operatorname{Re} z$ — действительная часть числа z .

$b = \operatorname{Im} z$ — мнимая часть числа z .

Определение. Числа вида $z = bi$ (т.е. $\operatorname{Re} z = 0$) называются чисто мнимыми.

Определение. Отображение $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : a + bi \mapsto a - bi$ называется (комплексным) сопряжением. Само число $\bar{z} = a - bi$ называется (комплексно) сопряженным к числу $z = a + bi$.

Лемма. Для любых двух комплексных чисел $z, w \in \mathbb{C}$ выполняется, что

$$1. \overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w};$$

$$2. \overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}.$$

Доказательство. Пусть $z = a + bi$, а $w = c + di$.

$$1. \overline{z + w} = a - bi + c - di = (a + c) - (b + d)i = \overline{z + w}$$

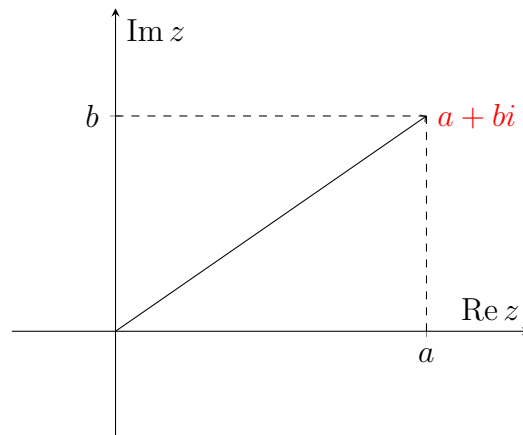
$$2. \overline{z \cdot w} = (a - bi)(c - di) = ac - adi - bci + bdi^2 = (ac - bd) - (ad + bc)i = \overline{zw}$$

□

Замечание. Равенство $z = \bar{z}$ равносильно равенству $\operatorname{Im} z = 0$, то есть $z \in \mathbb{R}$.

Геометрическая модель поля \mathbb{C}

Заметим, что поле комплексных чисел $\mathbb{C} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ равно \mathbb{R}^2 . Следовательно, комплексные числа можно представить как точки на действительной плоскости \mathbb{R}^2 , или сопоставить их векторам.



В таком представлении сложение комплексных чисел сопоставляется со сложением векторов, а сопряжение — с отражением относительно оси $Ox(\operatorname{Re} z)$.

Определение. Модулем комплексного числа $z = a + bi$ называется длина соответствующего вектора. Обозначение: $|z|$; $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Свойства модуля:

1. $|z| \geq 0$, причем $|z| = 0$ тогда и только тогда, когда $z = 0$;
2. $|z + w| \leq |z| + |w|$ — неравенство треугольника;
3. $z \cdot \bar{z} = |z|^2$;

Доказательство. $(a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$. □

4. $|zw| = |z| \cdot |w|$;

Доказательство. Возведем в квадрат.

$$|z|^2 \cdot |w|^2 = z\bar{z}w\bar{w} = (zw)\overline{zw} = zw\overline{zw} = |zw|^2$$

□

Замечание. Из свойства 3 следует, что при $z \neq 0$ выполняется:

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$
$$(a + bi)^{-1} = \frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}.$$

Определение. Аргументом комплексного числа $z \neq 0$ называется всякий угол φ такой что

$$\cos \varphi = \frac{a}{|z|} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \quad \sin \varphi = \frac{b}{|z|} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Неформально говоря, аргумент z — это угол между осью Ox и соответствующим вектором.

Замечание.

1. Аргумент определен с точностью до 2π .
2. Аргумент $z = 0$ не определен.

Для $z \neq 0$ введем множество $\text{Arg } z = \{\text{множество всех аргументов } z\}$ — *большой аргумент*. Также введем *малый аргумент* $\arg z$ — это такой $\varphi \in \text{Arg } z$, который удовлетворяет условию $0 \leq \varphi < 2\pi$ и, следовательно, определен однозначно.

Используя аргумент, можно представить комплексное число следующим образом:

$$\begin{aligned} a &= |z| \cos \varphi \\ b &= |z| \sin \varphi \end{aligned} \Rightarrow z = a + bi = |z| \cos \varphi + i|z| \sin \varphi = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

Определение. Запись $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ называется *тригонометрической формой* комплексного числа z .

Замечание.

$$r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = r_2 \\ \varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$