

# Лекция 28 от 19.04.2016

## Ортогонализация

Пусть  $V$  — векторное пространство над полем  $F$  размерности  $n$ , и  $e = (e_1, \dots, e_n)$  — его базис. Пусть также  $Q: V \rightarrow F$  — квадратичная форма,  $\beta: V \times V \rightarrow F$  — соответствующая билинейная функция и  $B = B(\beta, e)$  — ее матрица.

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \vdots \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \vdots \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \ddots \end{pmatrix}$$

Рассмотрим  $B_i$  — левые верхние  $i \times i$ -подматрицы. Например,  $B_1 = (b_{11})$ ,  $B_2 = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$  и так далее.

Матрица  $B_i$  — это матрица ограничения билинейной функции  $\beta$  на подпространство, натянутое на векторы  $(e_1, \dots, e_i)$ . Назовем *верхним угловым минором* число  $\delta_i = \det(B_i)$ . Также будем считать, что  $\delta_0 = 1$ .

**Определение.** Базис  $e$  называется *ортогональным* (по отношению к  $\beta$ ), если  $\beta(e_i, e_j) = 0$  для любых  $i \neq j$ . В ортогональном базисе матрица квадратичной формы имеет канонический вид.

**Теорема** (Метод ортогонализации Грама – Шмидта). *Предположим, что  $\delta_i \neq 0$  для всех  $i$ . Тогда существует единственный базис  $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$  в  $V$  такой, что*

1.  $e'$  — ортогональный

2.  $e'_1 = e_1$ ,  
 $e'_2 \in e_2 + \langle e'_1 \rangle$ ,  
 $e'_3 \in e_3 + \langle e'_1, e'_2 \rangle$ ,  
 $\dots$   
 $e'_n \in e_n + \langle e'_1, \dots, e'_{n-1} \rangle$

3.  $Q(e'_i) = \frac{\delta_i}{\delta_{i-1}}$  для всех  $i$ .

*Доказательство.* Индукция по  $n$ . База для  $n = 1$  очевидна.

Теперь пусть всё доказано для всех  $k < n$ . Докажем для  $n$ . По предположению индукции, существует единственный базис  $(e'_1, e'_2, \dots, e'_{n-1})$  с требуемыми свойствами.

Наблюдение:  $\langle e_i, \dots, e_n \rangle = \langle e'_i, \dots, e'_n \rangle$ .

Ищем  $e'_n$  в виде  $e'_n = e_n + \lambda_1 e'_1 + \dots + \lambda_{n-1} e'_{n-1}$ . Тогда для всех  $i$ :

$$\beta(e'_n, e'_i) = \beta(e_n, e'_i) + \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j \beta(e'_j, e'_i)$$

Чтобы выполнялись требуемые условия, необходимо, чтобы эта сумма равнялась нулю.

Заметим, что последнее слагаемое обращается в нуль при  $i \neq j$  по свойству выбранного базиса. Тогда остается только следующее:

$$0 = \beta(e_n, e'_i) + \lambda_i \beta(e'_i, e'_i) = \beta(e_n, e'_i) + \lambda_i Q(e'_i) = \beta(e_n, e'_i) + \lambda_i \underbrace{\delta_{i-1}}_{\neq 0}.$$

Выбирая  $\lambda_i = -\frac{\beta(e_n, e'_i)}{\beta(e'_i, e'_i)}$ , получаем нужное равенство и однозначность разложения. Таким образом, условия 1 и 2 выполнены.

Проверим условие 3. Пусть  $C$  — матрица перехода от  $e$  к  $e'$ . Тогда легко понять, что  $C$  — верхнетреугольная с единицами на главной диагонали. Значит, матрица  $B' = C^T B C$  тоже диагональна. Заметим также, что  $C_i$  (та самая верхняя  $i \times i$ -подматрица) является матрицей перехода от  $(e_1, \dots, e_i)$  к  $(e'_1, \dots, e'_i)$ . Тогда:

$$B'_i = C_i^T B_i C_i \Rightarrow \det B'_i = 1 \cdot \det(B_i) \cdot 1 = \delta_i.$$

Но поскольку  $B' = \begin{pmatrix} Q(e'_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & Q(e'_n) \end{pmatrix}$ , то  $\delta_n = Q(e'_1) \cdot \dots \cdot Q(e'_n)$ . Отсюда и получаем, что

$$\frac{\delta_n}{\delta_{n-1}} = Q(e'_n).$$

□

**Пример.** Пусть  $V = \mathbb{R}^2$ . Тогда  $e'_1 = e_1$ , а  $e'_2$  получается, если спроецировать вектор  $e_2$  на прямую, ортогональную  $e_1$ . Если  $V = \mathbb{R}^3$ , то  $e'_3$  является проекцией на прямую, ортогональную плоскости  $(e'_1, e'_2)$ .

## Теорема Якоби и критерий Сильвестра

Рассмотрим следствия данной теоремы для случая, когда  $F = \mathbb{R}$ .

**Теорема (Якоби).** Пусть  $\delta_i \neq 0$  для всех  $i$ . Тогда  $\text{rk } Q = n$  и  $i_-(Q)$  равен числу перемен знака последовательности  $\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_n$  (напомним, что  $\delta_0 = 1$ ).

*Доказательство.* Применим процесс ортогонализации. Получим базис  $(e'_1, \dots, e'_n)$ , в котором

$$Q(y_1, \dots, y_n) = \frac{\delta_1}{\delta_0} y_1^2 + \dots + \frac{\delta_n}{\delta_{n-1}} y_n^2, \text{ где } y_1, \dots, y_n \text{ — координаты некоторого вектора в данном}$$

базисе. Если для некоторого  $i$  выполняется, что  $\frac{\delta_i}{\delta_{i-1}} < 0$ , то значит,  $\text{sgn } \delta_i \neq \text{sgn } \delta_{i-1}$ . Что и означает, что отрицательный индекс равен количеству перемен знака в последовательности  $\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_n$ .

Что касательно определителя, то условие  $\text{rk } Q = n$  равносильно условию  $\det B \neq 0$ . Но  $\det B = \delta_n \neq 0$ , а значит, все верно. □

**Теорема (Критерий Сильвестра).**  $Q > 0$  тогда и только тогда, когда  $\delta_i > 0$  для всех  $i$ .

*Доказательство.*

[ $\Leftarrow$ ] Следует из предыдущей теоремы.

[ $\Rightarrow$ ] Докажем, что  $\delta_i = \det(B_i) > 0$ . Действительно,  $B_i$  — это матрица ограничения  $Q|_{\langle e_1, \dots, e_i \rangle}$ .

Оно так же будет строго положительным, следовательно, существует матрица  $C_i \in M_n(\mathbb{R})$ ,  $\det(C_i) \neq 0$ , такая, что  $C_i^T B C_i = E$ . Но тогда  $\det C_i^T \det B_i \det C_i = \det E = 1$ . Следовательно,

$$\det B_i = \frac{1}{(\det C_i)^2} > 0, \text{ что и требовалось.}$$

□

**Теорема.**  $Q < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \delta_i < 0, & 2 \nmid i \\ \delta_i > 0, & 2 \mid i \end{cases}$

*Доказательство.* Применяя критерий Сильвестра для  $B(Q, \mathfrak{e}) = -B(-Q, \mathfrak{e})$ , получаем требуемое.  $\square$

## Евклидовы пространства. Основные понятия

**Определение.** Евклидово пространство — это векторное пространство  $\mathbb{E}$  над полем  $\mathbb{R}$ , на котором задана положительно определённая симметрическая билинейная функция  $(\cdot, \cdot)$ , которую мы будем называть скалярным произведением.

**Пример.**

$$1. \mathbb{R}^n, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, (x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

$$2. \mathbb{E} = C[0, 1], (f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx, (f, f) = \int_0^1 f^2(x)dx > 0.$$

**Замечание.** Важно отметить, что евклидово пространство можно определить только над полем  $\mathbb{R}$ .

**Определение.** Пусть  $x \in \mathbb{E}$ . Тогда длиной вектора называют величину  $|x| = \sqrt{(x, x)}$ .

Очевидно, что  $|x| \geq 0$ , причем  $|x| = 0$  тогда и только тогда, когда  $x = 0$ .

**Предложение** (Неравенство Коши-Буняковского). Пусть  $x, y \in \mathbb{E}$ . Тогда  $|(x, y)| \leq |x||y|$ , причём знак равенства возможен тогда и только тогда, когда  $x$  и  $y$  пропорциональны.

*Доказательство.*

1.  $x, y$  пропорциональны, т.е.  $x = \lambda y$  для некоторого  $\lambda$ . Тогда:

$$|(x, y)| = |(x, \lambda x)| = \lambda |(x, x)| = |x|\lambda|x| = |x||y|.$$

2.  $x, y$  линейно независимы. Тогда они будут базисом своей линейной оболочки. Тогда матрица  $B$  билинейной функции  $(\cdot, \cdot)|_{\langle x, y \rangle}$  равна:

$$B = \begin{pmatrix} (x, x) & (x, y) \\ (y, x) & (y, y) \end{pmatrix}$$

Так как  $\det B > 0$ , то  $(x, x)(y, y) - (x, y)^2 > 0$ . Следовательно:

$$\begin{aligned} |(x, y)|^2 &< |x|^2|y|^2 \\ |(x, y)| &< |x||y| \end{aligned}$$

$\square$

**Определение.** Углом между векторами  $x$  и  $y$  называют такой  $\alpha$ , что  $\cos \alpha = \frac{(x, y)}{|x||y|}$ .

Рассмотрим систему векторов  $(v_1, \dots, v_k)$ , где  $v_i \in \mathbb{E}$ .

**Определение.** Матрица Грама системы  $v_1, \dots, v_k$  это

$$G(v_1, \dots, v_k) := (g_{ij}), \quad g_{ij} = (v_i, v_j).$$

**Предложение.**

1.  $\det G(v_1, \dots, v_k) \geq 0$
2.  $\det G(v_1, \dots, v_k) = 0$  тогда и только тогда, когда  $v_1, \dots, v_k$  линейно зависимы.

*Доказательство.*

1.  $v_1, \dots, v_k$  линейно независимы. Следовательно, матрица  $G(v_1, \dots, v_k)$  является матрицей ограничения  $(\cdot, \cdot)$  на  $\langle v_1, \dots, v_k \rangle$ , базисом в котором является  $(v_1, \dots, v_k)$ . А значит,  $\det G(v_1, \dots, v_k) > 0$ .
2.  $v_1, \dots, v_k$  линейно зависимы. Значит, существуют коэффициенты  $(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \neq (0, \dots, 0)$  такие, что  $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k = 0$ . Если обозначить матрицу Грама  $G(v_1, \dots, v_k)$  за  $G$ , то тогда

$$\begin{aligned} \lambda_1 G_{(1)} + \dots + \lambda_k G_{(k)} &= \\ = (\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k, v_1) + (\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k, v_2) + \dots + (\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k, v_k) &= \\ = 0 + 0 + \dots + 0 \end{aligned}$$

То есть строки линейно зависимы и  $\det G = 0$ .

□