# Лекция 24 от 14.03.2016

## Корневые подпространства

Вспомним конец прошлой лекции.

Пусть $V$ — векторное пространство над полем $\mathbb{F}$, $\varphi \in L(V)$ — линейный оператор.

Вектор $v \in V$ — корневой для $\varphi$, отвечающий собственному значению $\lambda \in \mathbb{F}$ тогда и только тогда, когда существует $m \geqslant 0$ такое, что $(\varphi - \lambda \mathrm{id})^m(v) = 0$. Высотой корневого вектора называется наименьшее такое $m$.

Корневым подпространством называется пространство из корневых векторов, соответствующих одному значению $\lambda$ и нулевого вектора. Другими словами, $V^\lambda(\varphi) = \{v \in V \mid \exists m \geqslant 0 : (\varphi - \lambda \mathrm{id})^m(v) = 0\}$. Поскольку собственный вектор является корневым вектором высоты 1, то собственное подпространство включено в корневое подпространство с тем же значением: $V_\lambda(\varphi) \subseteq V^\lambda(\varphi)$.

**Предложение.** *Корневое подпространство нетривиально тогда и только тогда, когда $\lambda$ является собственным значением. Другими словами, $V^\lambda \neq \{0\} \Leftrightarrow \chi_\varphi(\lambda) = 0$.*

*Доказательство.*

- $\Leftarrow$ $\chi_\varphi(\lambda) = 0 \Rightarrow V_\lambda(\varphi) \neq \{0\} \Rightarrow V^\lambda(\varphi) \neq \{0\}$, так как $V^\lambda(\varphi) \supset V_\lambda(\varphi)$.
- $\Rightarrow$ Пусть $V^\lambda(\varphi) \neq \{0\} \Rightarrow \exists v \neq 0 \in V^\lambda(\varphi) \Rightarrow \exists m \geqslant 1 : (\varphi - \lambda \mathrm{id})^m(v) = 0$.
  Рассмотрим $u = (\varphi - \lambda \mathrm{id})^{m-1}(v) \neq 0$, тогда:
  $$(\varphi - \lambda \mathrm{id})(u) = (\varphi - \lambda \mathrm{id})(\varphi - \lambda \mathrm{id})^{m-1}(v) = (\varphi - \lambda \mathrm{id})^m(v) = 0.$$
  То есть вектор $u$ — это вектор, для которого $(\varphi - \lambda \mathrm{id})(u) = 0$, то есть собственный вектор. Следовательно $\lambda$ — собственное значение.

□

**Предложение.** *Для любого собственного значения $\lambda \in \mathbb{F}$ подпространство $V^\lambda(\varphi)$ инвариантно относительно $\varphi$.*

*Доказательство.* Пусть $v$ — корневой вектор высоты $m$. Докажем, что $\varphi(v)$ — также корневой вектор.

Заметим, что если $u = (\varphi - \lambda \mathrm{id})(v)$, то $u$ — корневой вектор высоты $m - 1$, и, соответственно, лежит в корневом пространстве:

$$u = (\varphi - \lambda \mathrm{id})(v) = \varphi(v) - \lambda v \in V^\lambda(\varphi).$$

Мы получили, что $\varphi(v) \in \lambda v + V^\lambda(\varphi)$. Но $\lambda v \in V^\lambda(\varphi)$, то есть $\lambda v + V^\lambda(\varphi) = V^\lambda(\varphi)$ и $\varphi(v) \in V^\lambda(\varphi)$. Что и означает, что пространство инвариантно относительно оператора $\varphi$. □

Положим для краткости, что $\varphi - \lambda \mathrm{id} = \varphi_\lambda$.

Заметим, что ядра степеней линейного оператора «вкладываются» друг в друга — те векторы, которые стали нулевыми при применении линейного оператора $\varphi_\lambda^k$, при применении линейного оператора $\varphi_\lambda$ ещё раз так и остаются нулевыми, а также «добиваются» (переводятся в нулевые) некоторые ранее ненулевые векторы. Итого, получаем следующее:

$$V_\lambda(\varphi) = \ker \varphi_\lambda \subset \ker \varphi_\lambda^2 \subset \ldots \subset \ker \varphi_\lambda^m \subset \ldots$$

Причём существует такое $m$, что $\ker \varphi_\lambda^m = \ker \varphi_\lambda^{m+1}$, так как $V$ — конечномерно и размерность его не может уменьшаться бесконечно. Выберем наименьшее такое $m$.

**Упражнение.** *Доказать, что для любого $s \geqslant 0$ выполняется равенство* $\ker\varphi_\lambda^m = \ker\varphi_\lambda^{m+s}$.

Заметим также, что $V^\lambda(\varphi) = \ker\varphi_\lambda^m$. Пусть $k_i = \dim\ker\varphi_\lambda^i$. Тогда:

$$\dim V_\lambda(\varphi) = k_1 < k_2 < \ldots < k_m = \dim V^\lambda(\varphi).$$

Будем обозначать как $\varphi|_V$ ограничение линейного оператора на пространство $V$.

**Предложение.**

1. *Характеристический многочлен линейного отображения* $\varphi\big|_{V^\lambda(\varphi)}$ *равен* $(t-\lambda)^{k_m}$.
2. *Если $\mu \neq \lambda$, то линейный оператор $\varphi - \mu\mathrm{id}$ невырожден на $V^\lambda(\varphi)$.*

*Доказательство.* Напомним, что $k_i = \dim\ker\varphi_\lambda^i$, для $i = 1, \ldots, m$. Пусть также $k_0 = 0$.

Выберем базис $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_{k_m})$ в $V^\lambda(\varphi)$ так, чтобы $(e_1, \ldots, e_{k_i})$ также был базисом в $\ker\varphi_\lambda^i$. Тогда:

$$A(\varphi_\lambda|_{V^\lambda(\varphi)}, \mathbb{e}) = \begin{pmatrix} 0 & * & * & \ldots & * & * \\ 0 & 0 & * & \ldots & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{где } a_{ij} \in \mathrm{Mat}_{(k_i - k_{i-1}) \times (k_j - k_{j-1})}$$

Но тогда:

$$A(\varphi|_{V^\lambda(\varphi)}, \mathbb{e}) = A(\varphi_\lambda|_{V^\lambda(\varphi)}, \mathbb{e}) + \lambda E = \begin{pmatrix} A_1 & * & * & \ldots & * & * \\ 0 & A_2 & * & \ldots & * & * \\ 0 & 0 & A_3 & \ldots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & A_{m-1} & * \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & A_m \end{pmatrix}, \quad \text{где } A_i = \lambda E_{k_i - k_{i-1}} \qquad (*)$$

А значит, характеристический многочлен линейного отображения $\varphi|_{V^\lambda(\varphi)}$ равен $(t-\lambda)^{k_m}$.

Теперь докажем невырожденность линейного оператора $(\varphi - \mu\mathrm{id})$ при $\mu \neq \lambda$.

Рассмотрим матрицу ограничения этого оператора на корневое подпространство:

$$A((\varphi - \mu\mathrm{id})|_{V^\lambda(\varphi)}, \mathbb{e}) = A(\varphi|_{V^\lambda(\varphi)}, \mathbb{e}) - \mu E.$$

Она имеет вид $(*)$, где $A_i = (\lambda - \mu)E_{k_i}$. Следовательно,

$$\det((\varphi - \mu\mathrm{id})|_{V^\lambda(\varphi)}) = (\lambda - \mu)^{k_m} \neq 0.$$

Что и означает, что линейный оператор невырожден. □

**Предложение.** *Если $\lambda$ – собственное значение $\varphi$, то $\dim V^\lambda(\varphi)$ равен кратности $\lambda$ как корня многочлена $\chi_\varphi(t)$.*

*Доказательство.* Пусть $(e_1, \ldots, e_k)$ — базис $V^\lambda(\varphi)$, $k = \dim V^\lambda(\varphi)$. Дополним $(e_1, \ldots, e_k)$ до базиса $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ всего пространства $V$. Тогда матрица линейного оператора имеет следующий вид:

$$A_\varphi = \left(\begin{array}{c|c} B & * \\ \hline 0 & C \end{array}\right), \quad B \in M_k,\, C \in M_{n-k}$$
$$\chi_\varphi(t) = \det(tE - A) = \det(tE - B)\det(tE - C).$$

Заметим, что $\det(tE - B)$ — это характеристический многочлен $\varphi|_{V^\lambda(\varphi)}$, следовательно,

$$\chi_\varphi(t) = (t - \lambda)^k \det(tE - C).$$

Осталось показать, что $\lambda$ — не корень $\det(tE - C)$.

Пусть $W = \langle e_{k+1}, \ldots, e_n \rangle$. Тогда рассмотрим линейный оператор $\psi \in L(W)$, у которого матрица в базисе $(e_{k+1}, \ldots, e_n)$ есть $C$. Предположим, что $\det(\lambda E - C) = 0$. Это значит, что $\lambda$ — собственное значение для $\psi$ и существует вектор $w \in W$, $w \neq 0$ такой, что $\psi(w) = \lambda w$.

Тогда:

$$\varphi(w) = \lambda w + u, \quad u \in V^\lambda(\varphi)$$
$$\varphi(w) - \lambda w \in V^\lambda(\varphi)$$
$$(\varphi - \lambda \mathrm{id})(w) \in V^\lambda(\varphi) \Rightarrow w \in V^\lambda(\varphi)$$

Получили противоречие. Значит, $\lambda$ — не корень $(tE - C)$. $\square$

**Следствие.** *$V^\lambda(\varphi) = \ker \varphi_\lambda^s$, где $s$ — кратность $\lambda$ как корня многочлена $\varphi_\lambda(t)$.*

**Предложение.** *Если $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, где $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$ — собственные значения $\varphi$, то сумма $V^{\lambda_1}(\varphi) + \ldots + V^{\lambda_k}(\varphi)$ — прямая.*

*Доказательство.* Докажем индукцией по $k$.

База при $k = 1$ — ясно.

Теперь пусть утверждение доказано для всех значений, меньших $k$. Докажем для $k$.

Выберем векторы $v_i \in V^{\lambda_i}(\varphi)$ такие, что $v_1 + \ldots + v_k = 0$. Пусть $m$ — высота вектора $v_k$. Тогда применим к нашей сумме оператор $\varphi_{\lambda_k}^m$, получив следующее:

$$\varphi_{\lambda_k}^m(v_1) + \ldots + \varphi_{\lambda_k}^m(v_{k-1}) + \varphi_{\lambda_k}^m(v_k) = 0.$$

С другой стороны, $\varphi_{\lambda_k}^m(v_k) = 0$, то есть:

$$\varphi_{\lambda_k}^m(v_1) + \ldots + \varphi_{\lambda_k}^m(v_{k-1}) + \varphi_{\lambda_k}^m(v_k) = \varphi_{\lambda_k}^m(v_1) + \ldots + \varphi_{\lambda_k}^m(v_{k-1}) = 0.$$

Тогда по предположению индукции $\varphi_{\lambda_k}^m(v_1) = \ldots = \varphi_{\lambda_k}^m(v_{k-1}) = 0$. Но $\varphi_\lambda|_{V^\lambda(\varphi)}$ не вырожден и обратим при $i \neq k$, следовательно $v_1 = \ldots = v_{k-1} = 0$. Но тогда и $v_k = 0$.

Следовательно, сумма прямая, что нам и требовалось. $\square$

**Теорема.** *Если характеристический многочлен $\chi_\varphi(t)$ разлагается на линейные множители, причём $\chi_\varphi(t) = (t - \lambda_1)^{k_1} \ldots (t - \lambda_s)^{k_s}$, то $V = \bigoplus_{i=1}^s \varphi^{\lambda_i}(\varphi)$.*

*Доказательство.* Так как сумма $\varphi^{\lambda_i}(\varphi) + \ldots + \varphi^{\lambda_i}(\varphi)$ прямая и для любого $i$ выполняется, что $\dim(\varphi^{\lambda_i}(\varphi)) = k_i$, то:

$$\dim(\varphi^{\lambda_1}(\varphi) + \ldots + \varphi^{\lambda_s}(\varphi)) = k_1 + \ldots + k_s = \dim V.$$

Следовательно, $V = \bigoplus_{i=1}^s \varphi^{\lambda_i}(\varphi)$. $\square$

# Жордановы клетки

**Определение.** *Пусть $\lambda \in \mathbb{F}$. **Жордановой клеткой** порядка $n$, отвечающей значению $\lambda$, называется матрица вида:*

$$J_\lambda^n = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{F}).$$