Дискретная математика. Модуль 3. Лекция 7

Лекторий ПМИ ФКН 2015-2016
Гринберг Вадим
Жижин Пётр
Пузырев Дмитрий

22 февраля 2016

Возвращаясь к материалам предыдущей лекции, там было введено понятие универсальной функции. Однако непонятны свойства этой функции. Что можно сделать с этой функцией? Что можно узнать о программе, зная её номер? Этим и другими вопросами занимается раздел "Автоматическая обработка программ".

Замечание: По сравнению с лекцией ход изложения материала был изменён для простоты письменного изложения.

Перед тем как доказать главную теорему введём несколько определений и докажем несколько свойств.

Определение: Главная универсальная функция (гёделева) – такая универсальная функция, что для любой вычислимой функции $V(n, x)$ существует всюду определённая вычислимая функция $s(n)$, что:

$$\forall\ n,\, x \Rightarrow V(n,\, x) = U(s(n),\, x).$$

Неформально это значит, что главная универсальная функция позволяет транслировать в себя любую другую унивесальная функция. Ну, вот например, есть язык C++, его можно назвать главной универсальной функцией так как любую программу на другом универсальном языке можно переписать на C++ автоматически (при помощи *транслятора*).

Теорема о неподвижной точке. *Пусть U – главная универсальная функция, $h(n)$ – любая всюду определённая вычислимая функция. Тогда:*

$$\exists\ q\ :\ U(q,\, x) = U(h(q),\, x).$$

Честно сказать, не все учёные понимают эту теорему, однако её можно объяснить неформально так: для любой программы на любом универсальном языке существует ещё одна программа, которая делает то же самое (то есть программы совпадают).

Доказательство. Для начала найдем такую функцию $f(p)$: $\forall g(p)$ – вычислимой $\exists p$: $f(p) = g(p)$. В действительности, она существует, вот например: $f(p) = U(p, p)$. Тогда $g(p)$ тоже имеет какой-то номер q и тогда $g(q) = U(q, q) = f(q)$.

Рассмотрим функцию $V(p, x) = U(f(p), x)$. Тогда $V(p, x)$ – универсальная, ведь если была функция φ с номером k, тогда в некоторой точке $f(p)$ принимает значение k и $\varphi(x) = U(f(p), x) = V(p, x)$. Тогда (по определению главной универсальной функции) $V(p, x) = U(s(p), x)$.

Соберём все вместе и получим: $U(f(p), x) = V(p, x) = U(s(p), x)$. Заметим, что $f(p)$ не обязана быть всюдуопределённой, а $s(p)$ уже всюдуопределена.

Тогда вспомним про нашу функцию $h(n)$ из условия и введём функцию $g(p) = h(s(p))$. Тогда (по построению функции f): $\exists p : g(p) = f(p)$.

Опять же, собираем всё вместе:

$$\exists p : U(s(p), x) = V(p, x) = U(f(p), x) = U(g(p), x) = U(h(s(p)), x)$$

Пусть $q = s(p)$. Тогда:

$$\exists q : U(q, x) = U(h(q), x)$$

Q.E.D.

Нам теорема о неподвижной точке нужна только чтобы доказать следующее утверждение:

Свойство рекурсии. *Для любой вычислимой функции $V(n,\, x)$ и главной универсальной функции $U(n, x)$ существует q такое, что:*

$$V(q,\, x) = U(q,\, x).$$

Доказательство. Найдем $s(n) : V(n, x) = U(s(n), x)$. $s(n)$ – всюдуопределённая. Тогда (по теореме о неподвижной точке) $\exists q : V(q, x) = U(s(q), x) = U(q, x)$. **Q.E.D.**

Теперь главный вопрос: пусть есть некоторое свойство, которое мы хотим проверить для некоторой функции.

Перепишем наше условие в более формальном виде: Пусть $\{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\}$ – множество вычислимых функций. Разделим его на два непересеающихся подмножества A и $\overline{A}$.

$$\{f \mid f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\} = A \cup \overline{A}$$

A – множество тех функций, для которых выполняется свойство, $\overline{A}$ – множество тех функций, для которых это не выполняется.

Возьмём некоторую универсальню функцию $U(p,\, x)$.

Обозначим за P_A множество всех p таких, что $U(p,\, x) \in A$.

$$P_A = \{p \mid U(p, x) \in A\}$$

Тогда вопрос можно поставить так: разрешимо ли множество программ, удовлетворяющих нашему свойству? На этот вопрос и отвечает теорема Успенского-Райса.

Теорема Успенского-Райса. *Если A – нетривиально ($A \neq \varnothing$, $\overline{A} \neq \varnothing$), а $U(q,\, x)$ – главная универсальная функция, то множество P_A неразрешимо.*

Введём для удобства ещё функции $\varepsilon \in \overline{A}$ (нигде не определённая) и $\xi \in A$ (какая-то функция, удовлетворяющая условию). Сделать это можно по аксиоме выбора.

Если A – это множество нигде не определённых функций, то поменяем их местами так как P_A разрешимо тогда и только тогда, когда его дополнение разрешимо.

Доказательство 1. Пусть P_A разрешимо. Тогда существует всюдуопределённая характеристическая функция χ_{P_A}. Построим алгоритм на странице 3 (алгоритм 1).

Он имеет некоторый номер p (который использован в программе) в U.

- $p \in P_A$. Тогда $U_p(x) = \varepsilon(x)$, но $\varepsilon(x) \in \overline{A} \implies p \notin P_A$. Противоречие.
- $p \notin P_A$. Тогда $U_p(x) = \xi(x)$, но $\xi(x) \in A \implies p \in P_A$. Противоречие.

Значит алгоритма разрешения не существует.

Может показаться, что использование номера программы в ней самой недопустимо, однако по свойству рекурсии это делать абсолютно законно. **Q.E.D.**

Algorithm 1 Алгоритм, создающий противоречие для разрешимости P_A в док-ве 1

```
function PROBLEM(x)
    if χ_{P_A} then
        return ξ(x)
    else
        return ε(x).
    end if
end function
```

Algorithm 2 Шаблон алгоритма p_n для функции φ в док-ве 2

```
function PROBLEM(x)
    U(n, n)
    return ξ(x)
end function
```

Доказательство 2. Пусть есть алгоритм, который строит алгоритм по номеру из шаблона (функция $\varphi : n \mapsto p_n$). Алгоритм выглядит так, как показано на странице 3 (алгоритм 2).

Пусть $H = \{n \mid U(n,n) \text{ останавливается}\}$. Рассмотрим два случая:

1. $n \in H \implies U(p_n, x) = \xi(x)$.
2. $n \notin H \implies U(p_n, x) = \varepsilon(x)$.

Что это значит? Это значит, что мы выразили (по факту) одну характеристическую функцию через другую:

$$\chi_H(n) = (\chi_{P_A} \circ \varphi)(n)$$
$$n \in H \iff p_n \in P_A$$

Если χ_{P_A} вычислима, то вычислима и χ_H, однако это не так.

Так как функция U – главная, то φ представима в виде функции от двух аргументов $V(n,x)$ (номера шаблона и аргумента).

$$U(p_n, x) = V(n, x) = U(s(n), x)$$

Значит χ_{P_A} не является вычислимой.

Q.E.D.

Мы в доказательстве пользовались тем, что $U(p,x)$ – главная универсальная функция. А может быть эта теорема верна вообще для всех универсальных функций? Но нет, это не так:

<u>Утверждение:</u> Существует универсальная функция V и нетривиальное множество A, что A разрешимо.

Доказательство. Будем пользоваться фактом из Домашнего задания 19 (номер 4): множество $Comp \backslash \{\varepsilon(x)\}$ перечислимо. p – номера программ этого множества, а $\widetilde{p}$ – множество чисел p.

$\widetilde{p} = f(\mathbb{N})$ – всюдуопределённой вычислимой (прошлая лекция).

Введём функцию V:

$$V = \begin{cases} \text{не определена, } n = 0 \\ U(f(n-1), x),\ n > 0 \end{cases}$$

Нетрудно заметить, что V – универсальная.

Пусть $Comp \setminus \{\varepsilon(x)\} = \overline{A} \implies P_A = \{0\}$ – номер в V. А любое конечное множество разрешимо. **Q.E.D.**