

Лекция 16 от 18.01.2016

Вспомним предыдущую лекцию и кое-что дополним

Замечание.

1. Элемент 0 — единственный.
2. И элемент $-a$ единственный.
3. Даже элемент 1 единственный.
4. Как это ни удивительно, но a^{-1} тоже единственный.

Легко увидеть, что пункты 2 и 4 доказываются одинаково с точностью до замены операции, как и пункты 1 и 3.

Доказательство. Докажем пункт 3. Если существует $1'$ — еще одна единица, тогда по аксиомам $1' = 1' \cdot 1 = 1$.

Докажем теперь пункт 4. Пусть b и c таковы, что $b \neq c$ и $ba = ab = ac = ca = 1$. Тогда

$$bac = (ba)c = b(ac) = 1 \cdot c = c = 1 \cdot b = b$$

То есть $b = c$. □

Комплексные числа (продолжение)

Предложение. Пусть $z_1 = |z_1|(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$, $z_2 = |z_2|(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$. Тогда

$$z_1 z_2 = |z_1| |z_2| (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

Иными словами, при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.

Доказательство. Просто раскроем скобки и приведем подобные.

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= |z_1| |z_2| (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + i (\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_2 \sin \varphi_1)) = \\ &= |z_1| |z_2| (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \end{aligned}$$

□

Следствие. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$

Следствие (Формула Муавра). Пусть $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Тогда:

$$z^n = |z|^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)) \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Замечание. В комплексном анализе функция $\exp x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ доопределяется до $\exp z: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ следующим образом:

$$\exp z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

И тогда оказывается, что $\exp z$ обладает теми же свойствами, кроме того:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi \quad \forall \varphi \in \mathbb{C}.$$

Всякое $z \in \mathbb{C}$ можно представить в виде $z = |z|e^{i\varphi}$, где $\varphi \in \text{Arg}(z)$. Тогда формула Муавра приобретает совсем очевидный вид:

$$|z_1|e^{i\varphi_1} \cdot |z_2|e^{i\varphi_2} = |z_1| |z_2| e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}.$$

Замечание. Отображение $R_\varphi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \rightarrow ze^{i\varphi}$, $\varphi \in \mathbb{R}$ определяет поворот на угол φ вокруг 0.

Корни из комплексного числа

Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $n \geq 2$.

Определение. Корнем n -й степени из числа z называется всякое $w \in \mathbb{C}$: $w^n = z$. То есть

$$\sqrt[n]{z} = \{w \in \mathbb{C} \mid w^n = z\}.$$

Если $z = 0$, то $|z| = 0$, а значит $|w| = 0$, $w = 0$. Получается, 0 — единственное комплексное число, у которого корень определён однозначно.

Далее рассмотрим случай $z \neq 0$.

$$\begin{aligned} z &= |z| (\cos \varphi + i \sin \varphi) \\ w &= |w| (\cos \psi + i \sin \psi) \end{aligned}$$

$$z = w^n \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = |w|^n \\ n\psi \in \text{Arg}(z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |w| = \sqrt[n]{|z|} \\ n\psi = \varphi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |w| = \sqrt[n]{|z|} \\ \psi = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

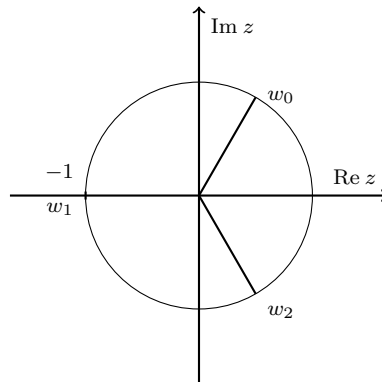
С точностью до кратного 2π различные значения в формуле $\psi = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}$ получаются при $k = 0, 1, \dots, n-1$. Значит z имеет ровно n корней n -й степени.

$$\sqrt[n]{z} = \left\{ |z| \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right) \mid k = 0, \dots, n-1 \right\}$$

Замечание. Точки из множества $\sqrt[n]{z}$ при $z \neq 0$ лежат в вершинах правильного n -угольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{|z|}$.

Пример. $z = -1 = \cos \pi + i \sin \pi$

$$\sqrt[3]{z} = \left\{ \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}; \cos \pi + i \sin \pi; \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right\}$$



Решение квадратных уравнений с комплексными коэффициентами

Пусть дано квадратное уравнение $az^2 + bz + c = 0$, где $a, b, c \in \mathbb{C}$ и $a \neq 0$. Тогда имеем:

$$\begin{aligned} z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} &= 0 \\ z^2 + 2\frac{b}{2a}z + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} &= 0 \\ \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\ z + \frac{b}{2a} &\in \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{aligned}$$

То есть все решения — это $z_1 = \frac{-b + d_1}{2a}$, $z_2 = \frac{-b + d_2}{2a}$, где $\{d_1, d_2\} = \sqrt[2]{b^2 - 4ac}$. В частности, квадратное уравнение всегда имеет комплексный корень, а при $b^2 - 4ac \neq 0$ два корня.

Теорема (Основная теорема алгебры). *Всякий многочлен $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ степени n , где $n \geq 1$, $a_n \neq 0$, и $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ имеет корень.*

Векторные пространства над произвольным полем

И снова вспомним, что такое векторное пространство:

- некоторое множество V ;
- есть операция сложения $V \times V \rightarrow V$;
- есть операция умножения на скаляр $F \times V \rightarrow V$;
- выполняются 8 аксиом.

Все основные понятия и результаты теории векторных пространств из прошлого полугодия можно перенести на случай пространства над произвольным полем F без изменений.

Пример. Пусть V — векторное пространство над полем из двух элементов, $\dim V = n$. Тогда $|V| = 2^n$. Действительно, каждое конечномерное пространство обладает базисом (в данном случае e_1, \dots, e_n). Тогда $V = \{k_1 e_1 + k_2 e_2 + \dots + k_n e_n \mid k_i \in F\}$. Но очень легко заметить, что всего таких линейных комбинаций 2^n .