

# Лекция 24 от 14.03.2016

## Корневые подпространства

Вспомним конец прошлой лекции.

Пусть  $V$  — векторное пространство над полем  $F$ ,  $\varphi \in L(V)$  — линейный оператор.

Вектор  $v \in V$  — корневой для  $\varphi$ , отвечающий собственному значению  $\lambda \in F$  тогда и только тогда, когда существует  $m \geq 0$  такое, что  $(\varphi - \lambda \text{id})^m(v) = 0$ . Высотой корневого вектора называется наименьшее такое  $m$ .

Корневым подпространством называется пространство из корневых векторов, соответствующих одному значению  $\lambda$ . Другими словами,  $V^\lambda(\varphi) = \{v \in V \mid \exists m \geq 0 : (\varphi - \lambda \text{id})^m(v) = 0\}$ . Поскольку собственный вектор является корневым вектором высоты 1, то собственное подпространство включено в корневое подпространство с тем же значением:  $V_\lambda(\varphi) \subseteq V^\lambda(\varphi)$ .

**Предложение.** Корневое подпространство нетривиально тогда и только тогда, когда  $\lambda$  является собственным значением. Другими словами,  $V^\lambda(\varphi) \neq \{0\} \Leftrightarrow \chi_\varphi(\lambda) = 0$ .

*Доказательство.*

$$\Leftarrow \chi_\varphi(\lambda) = 0 \Rightarrow V_\lambda(\varphi) \neq \{0\} \Rightarrow V^\lambda(\varphi) \neq \{0\}, \text{ так как } V^\lambda(\varphi) \supset V_\lambda(\varphi).$$

$$\Rightarrow \text{Пусть } V^\lambda(\varphi) \neq \{0\} \Rightarrow \exists v \neq 0 \in V^\lambda(\varphi) \Rightarrow \exists m \geq 1 : (\varphi - \lambda \text{id})^m(v) = 0.$$

Рассмотрим  $u = (\varphi - \lambda \text{id})^{m-1}(v) \neq 0$ , тогда:

$$(\varphi - \lambda \text{id})(u) = (\varphi - \lambda \text{id})(\varphi - \lambda \text{id})^{m-1}(v) = (\varphi - \lambda \text{id})^m(v) = 0.$$

То есть вектор  $u$  — это вектор, для которого  $(\varphi - \lambda \text{id})(u) = 0$ , то есть собственный вектор. Следовательно  $\lambda$  — собственное значение.

□

**Предложение.** Для любого собственного значения  $\lambda \in F$  подпространство  $V^\lambda(\varphi)$  инвариантно относительно  $\varphi$ .

*Доказательство.* Пусть  $v$  — корневой вектор высоты  $m$ . Докажем, что  $\varphi(v)$  — также корневой вектор.

Заметим, что если  $u = (\varphi - \lambda \text{id})(v)$ , то  $u$  — корневой вектор высоты  $m - 1$ , и, соответственно, лежит в корневом подпространстве:

$$u = (\varphi - \lambda \text{id})(v) = \varphi(v) - \lambda v \in V^\lambda(\varphi).$$

Мы получили, что  $\varphi(v) \in \lambda v + V^\lambda(\varphi)$ . Но  $\lambda v \in V^\lambda(\varphi)$ , то есть  $\lambda v + V^\lambda(\varphi) = V^\lambda(\varphi)$  и  $\varphi(v) \in V^\lambda(\varphi)$ . Что и означает, что пространство инвариантно относительно оператора  $\varphi$ . □

Положим для краткости, что  $\varphi - \lambda \text{id} = \varphi_\lambda$ .

Заметим, что ядра степеней линейного оператора «вкладываются» друг в друга — те векторы, которые стали нулевыми при применении линейного оператора  $\varphi_\lambda^k$ , при применении линейного оператора  $\varphi_\lambda$  ещё раз так и остаются нулевыми, а также «добиваются» (переводятся в нулевые) некоторые ранее ненулевые векторы. Итого, получаем следующее:

$$V_\lambda(\varphi) = \ker \varphi_\lambda \subset \ker \varphi_\lambda^2 \subset \dots \subset \ker \varphi_\lambda^m \subset \dots$$

Причём существует такое  $m$ , что  $\ker \varphi_\lambda^m = \ker \varphi_\lambda^{m+1}$ , так как  $V$  — конечномерно и размерность его не может увеличиваться бесконечно. Выберем наименьшее такое  $m$ .

**Упражнение.** Доказать, что для любого  $s \geq 0$  выполняется равенство  $\ker \varphi_\lambda^m = \ker \varphi_\lambda^{m+s}$ .

Заметим также, что  $V^\lambda(\varphi) = \ker \varphi_\lambda^m$ . Пусть  $k_i = \dim \ker \varphi_\lambda^i$ . Тогда:

$$\dim V_\lambda(\varphi) = k_1 < k_2 < \dots < k_m = \dim V^\lambda(\varphi).$$

Будем обозначать как  $\varphi|_V$  ограничение линейного оператора на пространство  $V$ .

**Предложение.**

1. Характеристический многочлен линейного отображения  $\varphi|_{V^\lambda(\varphi)}$  равен  $(t - \lambda)^{k_m}$ .
2. Если  $\mu \neq \lambda$ , то линейный оператор  $\varphi - \mu \text{id}$  невырожден на  $V^\lambda(\varphi)$ .

*Доказательство.* Напомним, что  $k_i = \dim \ker \varphi_\lambda^i$ , для  $i = 1, \dots, m$ . Пусть также  $k_0 = 0$ .

Выберем базис  $\mathfrak{e} = (e_1, \dots, e_{k_m})$  в  $V^\lambda(\varphi)$  так, чтобы  $(e_1, \dots, e_{k_i})$  также был базисом в  $\ker \varphi_\lambda^i$ . Тогда матрица ограничения  $\varphi_\lambda$  на  $V^\lambda(\varphi)$  в этом базисе имеет блочный вид:

$$A(\varphi_\lambda|_{V^\lambda(\varphi)}, \mathfrak{e}) = \begin{pmatrix} 0 & * & * & \dots & * & * \\ 0 & 0 & * & \dots & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \dots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где  $(i, j)$ -ый блок — это матрица  $\text{Mat}_{(k_i - k_{i-1}) \times (k_j - k_{j-1})}$ .

Но тогда:

$$A(\varphi|_{V^\lambda(\varphi)}, \mathfrak{e}) = A(\varphi_\lambda|_{V^\lambda(\varphi)}, \mathfrak{e}) + \lambda E = \begin{pmatrix} A_1 & * & * & \dots & * & * \\ 0 & A_2 & * & \dots & * & * \\ 0 & 0 & A_3 & \dots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_{m-1} & * \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & A_m \end{pmatrix}, \quad \text{где } A_i = \lambda E_{k_i - k_{i-1}} \quad (*)$$

А значит, характеристический многочлен линейного отображения  $\varphi|_{V^\lambda(\varphi)}$  равен  $(t - \lambda)^{k_m}$ .

Теперь докажем невырожденность линейного оператора  $(\varphi - \mu \text{id})$  при  $\mu \neq \lambda$ .

Рассмотрим матрицу ограничения этого оператора на корневое подпространство:

$$A((\varphi - \mu \text{id})|_{V^\lambda(\varphi)}, \mathfrak{e}) = A(\varphi|_{V^\lambda(\varphi)}, \mathfrak{e}) - \mu E.$$

Она имеет вид  $(*)$ , где  $A_i = (\lambda - \mu)E_{k_i}$ . Следовательно,

$$\det((\varphi - \mu \text{id})|_{V^\lambda(\varphi)}) = (\lambda - \mu)^{k_m} \neq 0.$$

Что и означает, что линейный оператор невырожден. □

**Предложение.** Если  $\lambda$  — собственное значение  $\varphi$ , то  $\dim V^\lambda(\varphi)$  равен кратности  $\lambda$  как корня многочлена  $\chi_\varphi(t)$ .

*Доказательство.* Пусть  $(e_1, \dots, e_k)$  — базис  $V^\lambda(\varphi)$ ,  $k = \dim V^\lambda(\varphi)$ . Дополним  $(e_1, \dots, e_k)$  до базиса  $\mathfrak{e} = (e_1, \dots, e_n)$  всего пространства  $V$ . Тогда матрица линейного оператора имеет следующий вид:

$$A_\varphi = \left( \begin{array}{c|c} B & * \\ \hline 0 & C \end{array} \right), \quad B \in M_k, C \in M_{n-k}$$

$$\chi_\varphi(t) = \det(tE - A) = \det(tE - B) \det(tE - C).$$

Заметим, что  $\det(tE - B)$  — это характеристический многочлен  $\varphi|_{V^\lambda(\varphi)}$ , следовательно,

$$\chi_\varphi(t) = (t - \lambda)^k \det(tE - C).$$

Осталось показать, что  $\lambda$  — не корень  $\det(tE - C)$ .

Пусть  $W = \langle e_{k+1}, \dots, e_n \rangle$ . Тогда рассмотрим линейный оператор  $\psi \in L(W)$ , у которого матрица в базисе  $(e_{k+1}, \dots, e_n)$  есть  $C$ . Предположим, что  $\det(\lambda E - C) = 0$ . Это значит, что  $\lambda$  — собственное значение для  $\psi$  и существует вектор  $w \in W$ ,  $w \neq 0$  такой, что  $\psi(w) = \lambda w$ .

Тогда:

$$\begin{aligned} \varphi(w) &= \lambda w + u, \quad u \in V^\lambda(\varphi) \\ \varphi(w) - \lambda w &\in V^\lambda(\varphi) \\ (\varphi - \text{id})(w) &\in V^\lambda(\varphi) \Rightarrow w \in V^\lambda(\varphi) \end{aligned}$$

Получили противоречие. Значит,  $\lambda$  — не корень  $\det(tE - C)$ . □

**Следствие.**  $V^\lambda(\varphi) = \ker \varphi_\lambda^s$ , где  $s$  — кратность  $\lambda$  как корня многочлена  $\chi_\varphi(t)$ .

**Предложение.** Если  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ , где  $\lambda_i \neq \lambda_j$  при  $i \neq j$  — собственные значения  $\varphi$ , то сумма  $V^{\lambda_1}(\varphi) + \dots + V^{\lambda_k}(\varphi)$  — прямая.

*Доказательство.* Докажем индукцией по  $k$ .

База при  $k = 1$  — ясно.

Теперь пусть утверждение доказано для всех значений, меньших  $k$ . Докажем для  $k$ .

Выберем векторы  $v_i \in V^{\lambda_i}(\varphi)$  такие, что  $v_1 + \dots + v_k = 0$ . Пусть  $m$  — высота вектора  $v_k$ . Тогда применим к нашей сумме оператор  $\varphi_{\lambda_k}^m$ , получив следующее:

$$\varphi_{\lambda_k}^m(v_1) + \dots + \varphi_{\lambda_k}^m(v_{k-1}) + \varphi_{\lambda_k}^m(v_k) = 0.$$

С другой стороны,  $\varphi_{\lambda_k}^m(v_k) = 0$ , то есть:

$$\varphi_{\lambda_k}^m(v_1) + \dots + \varphi_{\lambda_k}^m(v_{k-1}) + \varphi_{\lambda_k}^m(v_k) = \varphi_{\lambda_k}^m(v_1) + \dots + \varphi_{\lambda_k}^m(v_{k-1}) = 0.$$

Тогда по предположению индукции  $\varphi_{\lambda_k}^m(v_1) = \dots = \varphi_{\lambda_k}^m(v_{k-1}) = 0$ . Но  $\varphi_{\lambda_k}|_{V^{\lambda_i}(\varphi)}$  невырожден и, следовательно, обратим при  $i \neq k$ . Значит,  $v_1 = \dots = v_{k-1} = 0$ . Но тогда и  $v_k = 0$ .

Следовательно, сумма прямая, что нам и требовалось. □

**Теорема.** Если характеристический многочлен  $\chi_\varphi(t)$  разлагается на линейные множители, причём  $\chi_\varphi(t) = (t - \lambda_1)^{k_1} \dots (t - \lambda_s)^{k_s}$ , то  $V = \bigoplus_{i=1}^s V^{\lambda_i}(\varphi)$ .

*Доказательство.* Так как сумма  $V^{\lambda_1}(\varphi) + \dots + V^{\lambda_s}(\varphi)$  прямая и для любого  $i$  выполняется, что  $\dim(V^{\lambda_i}(\varphi)) = k_i$ , то:

$$\dim(V^{\lambda_1}(\varphi) + \dots + V^{\lambda_s}(\varphi)) = k_1 + \dots + k_s = \dim V.$$

Следовательно,  $V = \bigoplus_{i=1}^s V^{\lambda_i}(\varphi)$ . □

## Жордановы клетки

**Определение.** Пусть  $\lambda \in F$ . *Жордановой клеткой* порядка  $n$ , отвечающей значению  $\lambda$ , называется матрица вида:

$$J_{\lambda}^n = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in M_n(F).$$