Лекции по предмету

Линейная алгебра и геометрия

Группа лектория ФКН ПМИ 2015-2016
Ася Иовлева
Ксюша Закирова
Руслан Хайдуров

2016 год

Содержание

Лекция 15 от 11.01.2016

Скаляры. Поля

Для начала вспомним, что такое *векторное пространство* — это множество, на котором введены операции сложения, умножения на скаляр и в котором будут выполнятся восемь аксиом (см. 1 семестр). Но что такое скаляр?

Определение. *Скаляры — это элементы некоторого фиксированного поля.*

Определение. *Полем называется множество F, на котором заданы две операции — «сложение» $(+)$ и «умножение» $(\cdot)$,*

$$F \times F \to F \Rightarrow \begin{array}{c} +\colon (a,b) \mapsto a+b \\ \cdot\colon (a,b) \mapsto a \cdot b \end{array}$$

удовлетворяющие следующим свойствам («аксиомам поля»): $\forall a, b, c \in F$

1. $a + b = b + a$ *(коммутативность по сложению);*
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$ *(ассоциативность по сложению);*
3. $\exists\, 0 \in F\colon 0 + a = a + 0 = a$ *(существование нулевого элемента);*
4. $\exists\, {-a} \in F\colon a + (-a) = (-a) + a = 0$ *(существование противоположного элемента);*
5. $a(b + c) = ab + ac$ *(дистрибутивность; связь между сложением и умножением);*
6. $ab = ba$ *(коммутативность по умножению);*
7. $(ab)c = a(bc)$ *(ассоциативность по умножению);*
8. $\exists\, 1 \in F \setminus \{0\} : 1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ *(существование единицы);*
9. $a \neq 0 \Rightarrow \exists a^{-1} \in F : a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$ *(существование обратного элемента).*

Пример.

- $\mathbb{Q}$ — *рациональные числа;*
- $\mathbb{R}$ — *вещественные числа;*
- $\mathbb{C}$ — *комплексные числа;*
- $F_2 = \{0, 1\}$, *при сложении и умножении по модулю 2.*

Поле комплексных чисел

Поле вещественных чисел $\mathbb{R}$ плохо тем, что в нем уравнение $x^2 + 1 = 0$ не имеет решения. Отсюда возникает идея определить поле, удовлетворяющее следующим требованиям:

(T1) новое поле содержит $\mathbb{R}$;

(T2) уравнение $x^2 + 1 = 0$ имеет решение.

Давайте формально простроим такое поле.

Определение. *Полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел называется множество $\{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$, на котором заданы операции сложения: $(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$ и умножения: $(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + b_1a_2)$.*

Предложение. $\mathbb{C}$ *и впрямь является полем.*

Доказательство. Операции сложения и умножения введены, осталось только проверить выполнение всех аксиом.

1. очевидно, так как сложение идет поэлементно;
2. также очевидно;

3. $0 = (0, 0)$;

4. $-(a, b) = (-a, -b)$;

5. почти очевидно (т.е. прямая проверка);

6. ясно (тоже прямая проверка);

7. проверим:

$$\begin{gathered}((a_1, b_1)(a_2, b_2))(a_3, b_3) = (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + b_1a_2)(a_3, b_3) = \\ = (a_1a_2a_3 - b_1b_2b_3 - a_1b_2b_3 - b_1a_2b_3, a_1a_2b_3 - b_1b_2b_3 + a_1b_2a_3 + b_1a_2a_3) = \\ = (a_1, b_1)(a_2a_3 - b_2b_3, a_2b_3 + b_2a_3) = (a_1, b_1)((a_2, b_2)(a_3, b_3));\end{gathered}$$

8. $1 = (1, 0)$;

9. $(a, b) \neq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \neq 0 \to (a, b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$.

$\square$

Осталось только проверить, правда ли введенное поле $\mathbb{C}$ удовлетворяет нашим требованиям:

(T1) Заметим, что в подмножестве $\mathbb{C}$, состоящим из элементов вида $(a, 0)$ операции сложения и умножения будут работать как в поле вещественных чисел.

$$\begin{gathered}(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0) \\ (a, 0) \cdot (b, 0) = (ab, 0)\end{gathered}$$

Следовательно, отображение $a \mapsto (a, 0)$ отождествляет $\mathbb{R}$ с этим подмножеством, то есть $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Что нам и требуется.

(T2) Примем $i = (0, 1)$. Тогда $i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$. Итого, требование выполнено.

Однако запись комплексных чисел в виде упорядоченной пары (a, b) не очень удобна и громоздка. Поэтому преобразуем запись следующим образом:

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1) = a + bi.$$

Тем самым мы получили реализацию поля $\mathbb{C}$ комплексных чисел как множества $\{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R},\ i^2 = -1\}$, с обычным сложением и умножением.

Определение. *Запись $z = a + bi$ называется алгебраической формой комплексного числа $z \in \mathbb{C}$.*

$a = \operatorname{Re} z$ — действительная часть числа z.

$b = \operatorname{Im} z$ — мнимая часть числа z.

Определение. *Числа вида $z = bi$ (т.е. $\operatorname{Re} z = 0$) называются чисто мнимыми.*

Определение. *Отображение $\mathbb{C} \to \mathbb{C} : a + bi \mapsto a - bi$ называется (комплексным) сопряжением. Само число $\overline{z} = a - bi$ называется (комплексно) сопряженным к числу $z = a + bi$.*

Лемма. *Для любых двух комплексных числе $z, w \in \mathbb{C}$ выполняется, что*

1. $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$;

2. $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.

Доказательство. Пусть $z = a + bi$, а $w = c + di$.

1. $\overline{z} + \overline{w} = a - bi + c - di = (a + c) - (b + d)i = \overline{z + w}$

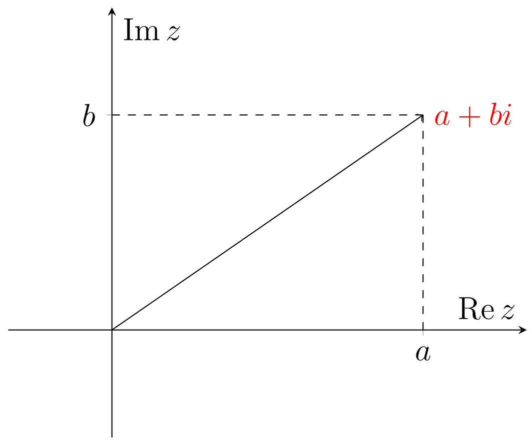
2. $\overline{z} \cdot \overline{w} = (a - bi)(c - di) = ac - adi - bci + bdi^2 = (ac - bd) - (ad + bc)i = \overline{zw}$

$\square$

Замечание. *Равенство $z = \overline{z}$ равносильно равенству $\operatorname{Im} z = 0$, то есть $z \in \mathbb{R}$.*

Геометрическая модель поля $\mathbb{C}$

Заметим, что поле комплексных числе $\mathbb{C} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ равно $\mathbb{R}^2$. Следовательно, комплексные числа можно представить как точки на действительной плоскости $\mathbb{R}^2$, или сопоставить их векторам.



В таком представлении сложение комплексных чисел сопоставляется со сложением векторов, а сопряжение — с отражением относительно оси $Ox(\operatorname{Re} z)$.

Определение. *Модулем комплексного числа $z = a+bi$ называется длина соответствующего вектора. Обозначение: $|z|$; $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.*

Свойства модуля:

1. $|z| \geqslant 0$, причем $|z| = 0$ тогда и только тогда, когда $z = 0$;
2. $|z + w| \leqslant |z| + |w|$ — неравенство треугольника;
3. $z \cdot \overline{z} = |z|^2$;

   Доказательство. $(a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$. □

4. $|zw| = |z| \cdot |w|$;

   Доказательство. Возведем в квадрат.

$$|z|^2 \cdot |w|^2 = z\overline{z}w\overline{w} = (zw)\overline{z}\overline{w} = zw\overline{zw} = |zw|^2$$

□

Замечание. *Из свойства 3 следует, что при $z \neq 0$ выполняется:*

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$
$$(a + bi)^{-1} = \frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}.$$

Определение. *Аргументом комплексного числа $z \neq 0$ называется всякий угол φ такой что*

$$\cos\varphi = \frac{a}{|z|} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \quad \sin\varphi = \frac{b}{|z|} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Неформально говоря, аргумент z — это угол между осью Ox и соответствующим вектором.

Замечание.

1. *Аргумент определен с точностью до 2π.*

2. *Аргумент $z = 0$ не определен.*

Для $z \neq 0$ введем множество $\operatorname{Arg} z = \{$множество всех аргументов $z\}$ — *большой аргумент.* Также введем *малый аргумент* $\arg z$ — это такой $\varphi \in \operatorname{Arg} z$, который удовлетворяет условию $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ и, следовательно, определен однозначно.

Используя аргумент, можно представить комплексное число следующим образом:

$$\left.\begin{array}{l} a = |z|\cos\varphi \\ b = |z|\sin\varphi \end{array}\right| \Rightarrow z = a + bi = |z|\cos\varphi + i|z\sin\varphi = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Определение. *Запись $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ называется тригонометрической формой комплексного числа z.*

Замечание.

$$r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = r_2 \\ \varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Лекция 16 от 18.01.2016

Вспомним предыдущую лекцию и кое-что дополним

Замечание.

1. *Элемент 0 — единственный.*

2. *И элемент $-a$ единственный.*

3. *Даже элемент 1 единственный.*

4. *Как это ни удивительно, но a^{-1} тоже единственный.*

Легко увидеть, что пункты 2 и 4 доказываются одинаково с точностью до замены операции, как и пункты 1 и 3.

Доказательство. Докажем пункт 3. Если существует $1'$ — еще одна единица, тогда по аксиомам $1' = 1' \cdot 1 = 1$.

Докажем теперь пункт 4. Пусть b и c таковы, что $b \neq c$ и $ba = ab = ac = ca = 1$. Тогда

$$bac = (ba)\,c = b\,(ac) = 1 \cdot c = c = 1 \cdot b = b$$

То есть $b = c$. $\square$

Комплексные числа (продолжение)

Предложение. *Пусть* $z_1 = |z_1|\left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right)$, $z_2 = |z_2|\left(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\right)$. *Тогда*

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2|\left(\cos\left(\varphi_1+\varphi_2\right) + i\sin\left(\varphi_1+\varphi_2\right)\right)$$

Иными словами, при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.

Доказательство. Просто раскроем скобки и приведём подобные.

$$\begin{gathered} z_1 z_2 = |z_1||z_2|\left(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i\left(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \cos\varphi_2\sin\varphi_1\right)\right) = \\ = |z_1||z_2|\left(\cos\left(\varphi_1+\varphi_2\right) + i\sin\left(\varphi_1+\varphi_2\right)\right) \end{gathered}$$

□

Следствие. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}\left(\cos\left(\varphi_1-\varphi_2\right) + i\sin\left(\varphi_1-\varphi_2\right)\right)$

Следствие (Формула Муавра). *Пусть* $z = |z|\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)$. *Тогда:*

$$z^n = |z|^n\left(\cos\left(n\varphi\right) + i\sin\left(n\varphi\right)\right) \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Замечание. *В комплексном анализе функция* $\exp x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *доопределяется до* $\exp z\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *следующим образом:*

$$\exp z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\,.$$

И тогда оказывается, что $\exp z$ *обладает теми же свойствами, кроме того:*

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \quad \forall \varphi \in \mathbb{C}.$$

Всякое $z \in \mathbb{C}$ можно представить в виде $z = |z|e^{i\varphi}$, где $\varphi \in \operatorname{Arg}\ (z)$. Тогда формула Муавра приобретает совсем очевидный вид:

$$|z_1|e^{i\varphi_2} \cdot |z_2|e^{i\varphi_2} = |z_1||z_2|e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}.$$

Замечание. *Отображение* $R_\varphi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \to ze^{i\varphi}$, $\varphi \in \mathbb{R}$ *определяет поворот на угол* φ *вокруг* 0.

Корни из комплексного числа

Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $n \geqslant 2$.

Определение. *Корнем n-й степени из числа z называется всякое* $w \in \mathbb{C}$: $w^n = z$. *То есть*

$$\sqrt[n]{z} = \{w \in \mathbb{C} \mid w^n = z\}.$$

Если $z = 0$, то $|z| = 0$, а значит $|w| = 0$, $w = 0$. Получается, 0 — единственное комплексное число, у которого корень определён однозначно.

Далее рассмотрим случай $z \neq 0$.

$$\begin{gathered} z = |z|\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right) \\ w = |w|\left(\cos\psi + i\sin\psi\right) \end{gathered}$$

$$z = w^n \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = |w|^n \\ n\psi \in \operatorname{Arg}(z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |w| = \sqrt[n]{|z|} \\ n\psi = \varphi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |w| = \sqrt[n]{|z|} \\ \psi = \dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

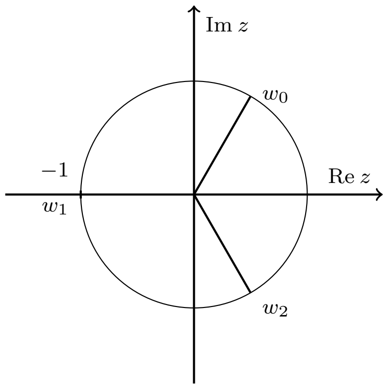
С точностью до кратного 2π различные значения в формуле $\psi = \dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}$ получаются при $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Значит z имеет ровно n корней n-й степени.

$$\sqrt[n]{z} = \left\{ |z| \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right) \;\middle|\; k = 0, \ldots, n-1 \right\}$$

Замечание. *Точки из множества $\sqrt[n]{z}$ при $z \neq 0$ лежат в вершинах правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{|z|}$.*

Пример. $z = -1 = \cos\pi + i\sin\pi$

$$\sqrt[3]{z} = \left\{ \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3};\ \cos\pi + i\sin\pi;\ \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} \right\}$$



Решение квадратных уравнений с комплексными коэффициентами

Пусть дано квадратное уравнение $az^2 + bz + c = 0$, где a, b, $c \in \mathbb{C}$ и $a \neq 0$. Тогда имеем:

$$z^2 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} = 0$$

$$z^2 + 2\frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = 0$$

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$z + \frac{b}{2a} \in \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

То есть все решения — это $z_1 = \dfrac{-b + d_1}{2a}$, $z_2 = \dfrac{-b + d_2}{2a}$, где $\{d_1, d_2\} = \sqrt[2]{b^2 - 4ac}$. В частности, квадратное уравнение всегда имеет комплексный корень, а при $b^2 - 4ac \neq 0$ два корня.

Теорема (Основная теорема алгебры). *Всякий многочлен $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ степени n, где $n \geqslant 1$, $a_n \neq 0$, и $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ имеет корень.*

Векторные пространства над произвольным полем

И снова вспомним, что такое векторное пространство:

- некоторое множество V;
- есть операция сложения $V \times V \to V$;
- есть операция умножения на скаляр $F \times V \to V$;
- выполняются 8 аксиом.

Все основные понятия и результаты теории векторных пространств из прошлого полугодия можно перенести на случай пространства над произвольным полем F без изменений.

Пример. *Пусть V — векторное пространство над полем из двух элементов,* $\dim V = n$. *Тогда $|V| = 2^n$. Действительно, каждое конечномерное пространство обладает базисом (в данном случае $e_1, \ldots, e_n$). Тогда $V = \{k_1e_1 + k_2e_2 + \ldots + k_ne_n \mid k_i \in F\}$. Но очень легко заметить, что всего таких линейных комбинаций 2^n*

Лекция 17 от 25.01.2016

Овеществление и комплексификация

Пусть V — векторное пространство над $\mathbb{C}$.

Определение. *Овеществление пространства V — это то же пространство V, рассматриваемое как пространство над $\mathbb{R}$. Обозначение: $V_{\mathbb{R}}$.*

Операция умножения на элементы $\mathbb{R}$ в V уже есть, так как $\mathbb{R}$ — подполе в $\mathbb{C}$.

Пример. $\mathbb{C}_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^2$.

Предложение. *V — векторное пространство над $\mathbb{C}$,* $\dim V < \infty$. *Тогда* $\dim V_{\mathbb{R}} = 2 \dim V$.

Доказательство. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — базис в V. Тогда $V = \{z_1e_1 + \ldots + z_ne_n \mid z_k \in \mathbb{C}\}$, причём такая запись единственная в силу определения базиса. Пусть $z_k = a_k + ib_k$, причём такая запись тоже единственная. Тогда будем иметь

$$\begin{aligned} V &= \{(a_1 + ib_1)\, e_1 + \ldots + (a_n + ib_n)\, e_n \mid a_k, b_k \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{a_1e_1 + \ldots + a_ne_n + b_1ie_1 + \ldots + b_nie_n \mid a_k, b_k \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

И причём такая запись тоже единственная. Выходит, что $e_1, e_2, \ldots, e_n, ie_1, ie_2, \ldots, ie_n$ — базис в $V_{\mathbb{R}}$, в котором $2n = 2\dim V$ элементов. $\square$

Определение. *Комплексификация пространства W — это множество $W \times W = W^{\mathbb{C}} = \{(u, v) \mid u, v \in W\}$ с операциями $(u_1, v_1) + (u_2, v_2) = (u_1 + u_2, v_1 + v_2)$, $(a + ib)\,(u, v) = (au - bv, av - bu)$.*

Пример. $\mathbb{R}^{\mathbb{C}} = \mathbb{R}$.

Утверждение. *В нём выполняются все 8 аксиом векторного пространства над $\mathbb{C}$.*

W отождествляется подмножеством $\{(u,0) \mid u \in W\}$. Действительно

$$w \in W \Leftrightarrow (w,0) \in W^{\mathbb{C}};\ i\,(w,0) = (0,w) \in W^{\mathbb{C}}$$

В итоге $\forall\,(u,v) \in W^{\mathbb{C}}$ представим в виде

$$(u,v) = (u,0) + (0,v) = (u,0) + i\,(v,0) = u + iv$$

То есть $W^{\mathbb{C}} = \{u + iv \mid u,v \in W\}$.

Предложение. $\dim W^{\mathbb{C}} = \dim W$

Замечание. *Здесь $W^{\mathbb{C}}$ — пространство над $\mathbb{C}$, а W — над $\mathbb{R}$.*

Доказательство. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — базис в W. Тогда

$$\begin{gathered} W^{\mathbb{C}} = \{(u,v) \mid u,v \in W\} = \{(a_1e_1 + a_2e_2 + \ldots + a_ne_n, b_1e_1 + b_2e_2 + \ldots + b_ne_n) \mid a_k,b_k \in \mathbb{R}\} = \\ = \{(a_1e_1,b_1e_1) + \ldots + (a_ne_n, b_ne_n)\} = \{(a_1 + ib_1)\,e_1 + \ldots + (a_n + ib_n)e_n)\} = \\ = \{z_1e_1 + \ldots + z_ne_n \mid z_k \in \mathbb{C}\} \end{gathered}$$

То есть выходит, что $e_1, \ldots, e_n$ — базис в $W^{\mathbb{C}}$. $\square$

Сумма подпространств

Пусть V — конечномерное векторное пространство, а U и W — подпространства (в качестве упражнения лектор предлагает доказать, что их пересечение — тоже подпространство).

Определение. *Сумма подпространств U и W — это множество.*

$$U + W = \{u + w \mid u \in U, w \in W\}$$

Замечание. $\dim(U \cap W) \leqslant \dim U \leqslant \dim(U + W)$

Пример. *Двумерные плоскости в пространстве $\mathbb{R}^3$ содержат общую прямую.*

Теорема. $\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U + W)$

Доказательство. Положим $p = \dim(U \cap W)$, $k = \dim U$, $m = \dim W$. Выберем базис $a = \{a_1, \ldots, a_k\}$ в пересечении. Его можно дополнить до базиса W и до базиса U. Значит $\exists b = \{b_1, \ldots, b_{k-p}\}$ такой, что $a \cup b$ — базис в U и $\exists c = \{c_1, \ldots, c_{m-p}\}$ такой, что $a \cup c$ — базис в W.

Докажем, что $a \cup b \cup c$ — базис в $U + W$.

Во-первых, докажем, что $U + W$ порождается множеством $a \cup b \cup c$.

$$\left.\begin{array}{l} v \in U + W \Rightarrow \exists u \in U, w \in W\colon\ v = u + w \\ u \in U = \langle a \cup b\rangle \subset \langle a \cup b \cup c\rangle \\ w \in W = \langle a \cup c\rangle \subset \langle a \cup b \cup c\rangle \end{array}\right| \Rightarrow v = u + w \in \langle a \cup b \cup c\rangle \Rightarrow U + W = \langle a \cup b \cup c\rangle$$

Во-вторых, докажем линейную независимость векторов из $a \cup b \cup c$.

Пусть скаляры $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$, $\beta_1, \ldots, \beta_{k-p}$, $\gamma_1, \ldots, \gamma_{m-p}$ таковы, что:

$$\underbrace{\alpha_1a_1 + \ldots + \alpha_pa_p}_{x} + \underbrace{\beta_1b_1 + \ldots + \beta_{k-p}b_{k-p}}_{y} + \underbrace{\gamma_1c_1 + \ldots + \gamma_{m-p}c_{m-p}}_{z} = 0$$

$$\begin{gathered} x + y + z = 0 \\ z = -x - y \\ z \in W \\ -x - y \in U \cap W \\ \Rightarrow \exists\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in F\colon z = \lambda_1a_1 + \ldots + \lambda_pa_p \end{gathered}$$

Тогда $\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_p a_p - \gamma_1 c_1 - \ldots - \gamma_{m-p} c_{m-p} = 0$. Но $a \cup c$ — базис W. Следовательно, $\lambda_1 = \ldots = \lambda_p = \gamma_1 = \ldots = \gamma_{m-p} = 0$. Но тогда $0 = x + y = \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_p a_p + \beta_1 b_1 + \ldots + \beta_{k-p} b_{k-p}$. Но $a \cup b$ — базис $U + W \Rightarrow \alpha_1 = \ldots = \alpha_p = \beta_1 = \ldots = \beta_{k-p} = 0$. Итого, все коэффициенты равны нулю и линейная независимость тем самым доказана. То есть $a \cup b \cup c$ — базис $U + W$.

$$\begin{gathered}\dim(U+W) = |a \cup b \cup c| = |a| + |b| + |c| = p + k - p + m - p = k + m - p = \\ = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)\end{gathered}$$

□

Определение. *Если $U \cap W = \{0\}$, то $U + W$ называется прямой суммой.*

Следствие. *В таком случае $\dim(U+W) = \dim U + \dim W$.*

Пример. *U — плоскость, W — прямая в $\mathbb{R}^3$.*

Переход к новому базису

Пусть V — векторное пространство, $\dim V = n$, $e_1, \ldots, e_n$ — базис. То есть

$$\forall v \in V \quad \exists!\, v = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n,$$

где $x_1, \ldots, x_n \in F$ — координаты вектора v в базисе $(e_1, \ldots, e_n)$. Пусть также есть базис $e'_1, \ldots, e'_n$:

$$\begin{aligned} e'_1 &= c_{11} e_1 + c_{21} e_2 + \ldots + c_{n1} e_n \\ e'_2 &= c_{12} e_2 + c_{22} e_2 + \ldots + c_{n2} e_n \\ &\vdots \\ e'_n &= c_{1n} e_1 + c_{2n} e_2 + \ldots + c_{nn} e_n \end{aligned}$$

Обозначим матрицу $C = (c_{ij})$. Тогда можно переписать $(e'_1, \ldots, e'_n)$ как $(e_1, \ldots, e_n) \cdot C$.

Предложение. *$e'_1, \ldots, e'_n$ образуют базис тогда и только тогда, когда $\det C \neq 0$.*

Доказательство.

[⇒] $e'_1, \ldots, e'_n$ — базис, а значит $\exists C' \in M_n$:

$$\begin{gathered}(e_1, \ldots, e_n) = (e'_1, \ldots, e'_n)\, C' = (e_1, \ldots, e_n)\, C'C \\ E = CC' \\ C' = C^{-1} \Leftrightarrow \exists C^{-1} \Leftrightarrow \det C \neq 0\end{gathered}$$

[⇐] $\det C \neq 0 \Rightarrow \exists C^{-1}$. Покажем, что $e'_1, \ldots, e'_n$ в таком случае линейно независимы. Пусть $x_1 e'_1 + x_2 e'_2 + \ldots + x_n e'_n = 0$. Тогда можно записать

$$(e'_1, e'_2, \ldots, e'_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

$$(e_1, \ldots, e_n)\, C \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

Поскольку $(e_1, \ldots, e_n)$ — базис, то $C \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$. Умножая слева на обратную матрицу, получаем, что $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$

$\square$