Линейная Алгебра и Геометрия

Лекторий ПМИ ФКН

3-4 июня 2016

Определения

1. **Алгебраическая форма комплексного числа. Сложение, умножение и деление комплексных чисел в алгебраической форме.**

   Запись $z = a + bi$, где $a, b \in \mathbb{R}$, называется алгебраической формой комплексного числа $z \in \mathbb{C}$.

   $a = \operatorname{Re} z$ — действительная часть числа z.

   $b = \operatorname{Im} z$ — мнимая часть числа z.

   Сложение:
   $$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i.$$

   Умножение:
   $$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

   Деление:
   $$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{c^2 + d^2}, \quad (c + di) \neq 0.$$

   В делении используется формула обратного элемента:
   $$\frac{1}{a + bi} = \frac{\overline{a + bi}}{|a + bi|^2} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}.$$

2. **Комплексное сопряжение и его свойства: сопряжение суммы и произведения комплексных чисел.**

   Отображение $\mathbb{C} \to \mathbb{C} : a + bi \mapsto a - bi$ называется (комплексным) сопряжением. Само число $\overline{z} = a - bi$ называется (комплексно) сопряженным к числу $z = a + bi$.

   Для любых двух комплексных числе $z, w \in \mathbb{C}$ выполняется, что

   (a) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$;

   (b) $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.

3. **Геометрическая модель комплексных чисел, интерпретация в ней сложения и сопряжения.**

   Заметим, что поле комплексных числе $\mathbb{C} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ равно $\mathbb{R}^2$. Следовательно, комплексные числа можно представить как точки на действительной плоскости $\mathbb{R}^2$, или сопоставить их векторам.

   В таком представлении сложение комплексных чисел сопоставляется со сложением векторов, а сопряжение — с отражением относительно оси $Ox(\operatorname{Re} z)$.

4. **Модуль комплексного числа и его свойства: неотрицательность, неравенство треугольника, модуль произведения двух комплексных чисел.**

   Модулем комплексного числа $z = a + bi$ называется длина соответствующего вектора. Обозначение: $|z|; |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

   Свойства модуля:

   (a) $|z| \geqslant 0$, причем $|z| = 0$ тогда и только тогда, когда $z = 0$;

   (b) $|z + w| \leqslant |z| + |w|$ — неравенство треугольника;

   (c) $z \cdot \overline{z} = |z|^2$;

   (d) $|zw| = |z| \cdot |w|$;

5. **Аргумент комплексного числа.**

   Аргументом комплексного числа $z \neq 0$ называется всякий угол φ такой что

   $$\cos\varphi = \frac{a}{|z|} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \quad \sin\varphi = \frac{b}{|z|} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

6. **Тригонометрическая форма комплексного числа.**

   Используя аргумент, можно представить комплексное число следующим образом:

   $$\left.\begin{aligned} a &= |z|\cos\varphi \\ b &= |z|\sin\varphi \end{aligned}\right| \Rightarrow z = a + bi = |z|\cos\varphi + i|z|\sin\varphi = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

   Запись $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ называется тригонометрической формой комплексного числа z.

7. **Формула Муавра.**

   Пусть $z = |z|\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)$. Тогда:

   $$z^n = |z|^n \left(\cos\left(n\varphi\right) + i\sin\left(n\varphi\right)\right) \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

8. **Извлечение корней из комплексных чисел.**

   Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $n \geqslant 2$.

   Корнем n-й степени из числа z называется всякое $w \in \mathbb{C}$: $w^n = z$. То есть

   $$\sqrt[n]{z} = \{w \in \mathbb{C} \mid w^n = z\}.$$

9. **Решение квадратных уравнений с комплексными коэффициентами.**

Пусть дано квадратное уравнение $az^2 + bz + c = 0$, где a, b, $c \in \mathbb{C}$ и $a \neq 0$. Тогда имеем:

$$z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} = 0$$

$$z^2 + 2\frac{b}{2a}z + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = 0$$

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$z + \frac{b}{2a} \in \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

То есть все решения — это $z_1 = \dfrac{-b + d_1}{2a}$, $z_2 = \dfrac{-b + d_2}{2a}$, где $\{d_1,d_2\} = \sqrt[2]{b^2 - 4ac}$. В частности, квадратное уравнение всегда имеет комплексный корень, а при $b^2 - 4ac \neq 0$ два корня.

10. **Основная теорема алгебры комплексных чисел.**

    Всякий многочлен $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ степени n, где $n \geqslant 1$, $a_n \neq 0$, и $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ имеет корень.

11. **Овеществление комплексного векторного пространства и его размерность.**

    V — векторное пространство над $\mathbb{C}$. Овеществление пространства V — это то же пространство V, рассматриваемое как пространство над $\mathbb{R}$. Обозначение: $V_{\mathbb{R}}$.

    Пусть $\dim V < \infty$. Тогда $\dim V_{\mathbb{R}} = 2 \dim V$.

12. **Комплексификация вещественного векторного пространства и его размерность.**

    Пусть W — пространство над $\mathbb{R}$. Комплексификация пространства W — это множество $W \times W = W^{\mathbb{C}} = \{(u, v) \mid u,v \in W\}$ с операциями $(u_1, v_1) + (u_2, v_2) = (u_1 + u_2, v_1 + v_2)$, $(a, b)(u, v) = (au - bv, av + bu)$.

    $\dim W^{\mathbb{C}} = \dim W$, где $W^{\mathbb{C}}$ — пространство над $\mathbb{C}$.

13. **Сумма двух подпространств векторного пространства.**

    Пусть V — конечномерное векторное пространство, а U и W — подпространства.

    Сумма подпространств U и W — это множество.

    $$U + W = \{u + w \mid u \in U, w \in W\}$$

14. **Теорема о связи размерности суммы двух подпространств с размерностью их пересечения.**

    Пусть V — конечномерное векторное пространство, а U и W — подпространства.

    $\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U + W)$

15. **Прямая сумма двух подпространств векторного пространства.** Пусть V — конечномерное векторное пространство, а U и W — подпространства.

    Если $U \cap W = \{0\}$, то $U + W$ называется прямой суммой.

16. **Матрица перехода от одного базиса векторного пространства к другому.**

Пусть V — векторное пространство, $\dim V = n$, вектора $e_1, \ldots, e_n$ — базис, а $e'_1, \ldots, e'_n$ — некий набор из n векторов. Тогда каждый вектор из этого набора линейно выражается через базис.

$$e'_j = \sum_{i=1}^{n} c_{ij} e_i, \quad c_{ij} \in F$$
$$(e'_1, \ldots, e'_n) = (e_1, \ldots, e_n) \cdot C, \quad C = (c_{ij})$$

То есть мы получили матрицу, где в j-ом столбце стоят коэффициенты линейного разложения вектора e'_j в базисе $(e_1, \ldots, e_n)$. Теперь пусть $e'_1, \ldots, e'_n$ — тоже базис в V.

Матрица C называется матрицей перехода от базиса $(e_1, \ldots, e_n)$ к базису $(e'_1, \ldots, e'_n)$.

17. **Формула преобразования координат вектора при замене базиса векторного пространства.**

Имеем два базиса пространства V, $(e_1, \ldots, e_n)$ и $(e'_1, \ldots, e'_n)$, и матрицу перехода C такую, что $(e'_1, \ldots, e'_n) = (e_1, \ldots, e_n) \cdot C$. Возьмем некий вектор v и разложим его по обоим базисам.

$$v \in V \Rightarrow \begin{array}{ll} v = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n, & x_i \in F \\ v = x'_1 e'_1 + \ldots + x'_n e'_n, & x'_i \in F \end{array}$$

Формула преобразования координат при переходе к другому базису:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \qquad \text{или} \qquad x_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x'_j$$

18. **Линейное отображение.**

Пусть V и W — два векторных пространства над полем F.

Отображение $f : V \to W$ называется линейным, если:

(a) $f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2), \quad \forall u_1, u_2 \in V$;

(b) $f(\alpha u) = \alpha f(u), \quad \forall u \in V, \forall \alpha \in F$.

19. **Изоморфизм векторных пространств. Изоморфные векторные пространства.**

Пусть V и W — два векторных пространства над полем F.

Отображение $\varphi : V \to W$ называется изоморфизмом, если φ линейно и биективно. Обозначение: $\varphi : V \xrightarrow{\sim} W$.

Два векторных пространства V и W называются изоморфными, если существует изоморфизм $\varphi : V \xrightarrow{\sim} W$ (и тогда существует изоморфизм $V \xleftarrow{\sim} W$). Обозначение: $V \simeq W$ или $V \cong W$.

20. **Критерий изоморфности двух конечномерных векторных пространств.**

Два конечномерных векторных пространства V и W изоморфны тогда и только тогда, когда $\dim V = \dim W$.

21. **Матрица линейного отображения.**

Пусть V и W — векторные пространства, $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ — базис V, $\mathbb{f} = (f_1, \ldots, f_m)$ — базис W, $\varphi : V \to W$ — линейное отображение. Тогда:

$$\varphi(e_j) = a_{1j} f_1 + \ldots + a_{mj} f_m = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i.$$

Матрица $A = (a_{ij}) \in Mat_{m\times n}(F)$ называется *матрицей линейного отображения* φ в базисах $\mathbb{e}$ и $\mathbb{f}$ (или по отношению к базисам $\mathbb{e}$ и $\mathbb{f}$).

22. **Сумма двух линейных отображений и её матрица.**

    Пусть $\varphi, \psi \in \operatorname{Hom}(V, W)$.

    Отображение $\varphi + \psi \in \operatorname{Hom}(V, W)$ — это $(\varphi + \psi)(v) := \varphi(v) + \psi(v)$ – сумма отображений.

    Пусть $\mathbb{e} = (e_1, \dots, e_n)$ — базис V, $\mathbb{f} = (f_1, \dots, f_m)$ — базис W, $\varphi, \psi \in \operatorname{Hom}(V, W)$. При этом A_φ — матрица линейного отображения φ, A_ψ — матрица для ψ, $A_{\varphi+\psi}$ — для $\varphi + \psi$.

    Тогда $A_{\varphi+\psi} = A_\varphi + A_\psi$.

23. **Произведение линейного отображения на скаляр и его матрица.**

    Пусть $\varphi, \psi \in \operatorname{Hom}(V, W)$.

    Отображение $\alpha \in F, \alpha\varphi \in \operatorname{Hom}(V, W)$ — это $(\alpha\varphi)(v) := \alpha(\varphi(v))$ – произведение линейного отображения на скаляр.

    Пусть $\mathbb{e} = (e_1, \dots, e_n)$ — базис V, $\mathbb{f} = (f_1, \dots, f_m)$ — базис W, $\varphi, \psi \in \operatorname{Hom}(V, W)$. При этом A_φ — матрица линейного отображения φ, A_ψ — матрица для ψ, $A_{\alpha\varphi}$ — для $\alpha\varphi$.

    Тогда $A_{\alpha\varphi} = \alpha A_\varphi$.

24. **Композиция линйных отображений и её матрица.**

    Возьмем три векторных пространства — U, V и W размерности n, m и k соответственно, и их базисы $\mathbb{e}, \mathbb{f}$ и $\mathbb{g}$. Также рассмотрим цепочку линейных отображений $U \xrightarrow{\psi} V \xrightarrow{\varphi} W$.

    Отображение $\varphi \circ \psi \in \operatorname{Hom}(U, W)$ – это $(\varphi \circ \psi)(v) := \varphi(\psi(v))$ – композиция линейных отображений.

    Пусть A — матрица φ в базисах $\mathbb{f}$ и $\mathbb{g}$, B — матрица ψ в базисах $\mathbb{e}$ и $\mathbb{f}$, C — матрица $\varphi \circ \psi$ в базисах $\mathbb{e}$ и $\mathbb{g}$.

    Тогда $C = AB$.

25. **Ядро и образ линейного отображения.**

    Пусть V и W — векторные пространства с линейным отображением $\varphi : V \to W$.

    Ядро φ — это множество $\operatorname{Ker}\varphi := \{v \in V \mid \varphi(v) = 0\}$.

    Образ φ — это множество $\operatorname{Im}\varphi := \{w \in W \mid \exists v \in V : \varphi(v) = w\}$.

26. **Критерий инъективности линейного отображения в терминах его ядра.**

    Пусть $\varphi \colon V \to W$ — линейное отображение.

    Отображение φ инъективно тогда и только тогда, когда $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$.

27. **Связь между рангом матрицы линейного отображения и размерностью его образа.**

    Пусть V, W — векторные пространства, $\mathbb{e} = (e_1, \dots, e_n)$ — базис V, $\mathbb{f} = (f_1, \dots, f_m)$ — базис W, A — матрица φ по отношению к $\mathbb{e}$, $\mathbb{f}$.

    Тогда $\dim \operatorname{Im}\varphi = \operatorname{rk} A$.

28. **Критерий изоморфности линейного отображения в терминах его матрицы.**

    Пусть $\varphi \colon V \to W$ — линейное отображение.

    Если $\dim V = \dim W = n$, то φ— изоморфизм тогда и только тогда, когда $\det A \neq 0$. Тогда A — квадратная.

29. **Ранг произведения двух матриц.**

Пусть $A \in \mathrm{Mat}_{k\times m}$, $B \in \mathrm{Mat}_{m\times n}$. Тогда $\mathrm{rk}\, AB \leqslant \min\{\mathrm{rk}\, A, \mathrm{rk}\, B\}$.

30. **Теорема о связи размерностей ядра и образа линейного отображения.**

Пусть $\varphi\colon V \to W$ — линейное отображение.

Тогда $\dim \mathrm{Im}\, \varphi = \dim \varphi - \dim \mathrm{Ker}\, \varphi$.

31. **Линейный оператор.**

Пусть V — конечномерное векторное пространство.

Линейным оператором (или линейным преобразованием) называется всякое линейное отображение $\varphi\colon V \to V$, то есть из V в себя. Обозначение: $L(V) = \mathrm{Hom}(V, V)$.

32. **Матрица линейного оператора.**

Пусть $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ — базис в V и $\varphi \in L(V)$. Тогда:

$$(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)) = (e_1, \ldots, e_n)\, A,$$

где A — матрица линейного оператора в базисе $\mathbb{e}$. В столбце $A^{(j)}$ стоят координаты $\varphi(e_j)$ в базисе $\mathbb{e}$. Матрица A — квадратная.

33. **Формула изменения матрицы линейного оператора при переходе к другому базису.**

Пусть $\varphi \in L(V)$, A — матрица φ в базисе $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$. Пусть $\mathbb{e}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ — другой базис, причём $(e'_1, \ldots, e'_n) = (e_1, \ldots, e_n)C$, где C — матрица перехода, и A' — матрица φ в базисе $\mathbb{e}'$.

Тогда $A' = C^{-1}AC$.

34. **Подобные матрицы.**

Две матрицы $A', A \in M_n(F)$ называются подобными, если существует такая матрица $C \in M_n(F), \det C \neq 0$, что $A' = C^{-1}AC$.

35. **Подпространство, инвариантное относительно линейного оператора.**

Пусть $\varphi\colon V \to V$ — линейный оператор.

Подпространство $U \subseteq V$ называется инвариантным относительно φ (или φ-инвариантным), если $\varphi(U) \subseteq U$. То есть $\forall u \in U : \varphi(u) \in U$.

36. **Матрица линейного оператора в базисе, дополняющем базис инвариантного подпространства.**

Пусть $\varphi\colon V \to V$ — линейный оператор.

Пусть $U \subset V$ — φ-инвариантное подпространство. Также пусть $(e_1, \ldots, e_k)$ — базис в U. Дополним его до базиса V: $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$. Тогда

$$\underbrace{A(\varphi, \mathbb{e})}_{\text{Матрица с углом нулей}} = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}, \quad \text{где } B \in M_k$$

37. **Собственный вектор линейного оператора.**

Пусть $\varphi\colon V \to V$ — линейный оператор.

Ненулевой вектор $v \in V$ называется *собственным* для V, если $\varphi(v) = \lambda v$ для некоторго $\lambda \in F$.

38. **Собственное значение линейного оператора.**

    Пусть $\varphi\colon V \to V$ — линейный оператор.

    Если ненулевой вектор $v \in V$ – *собственный* для V, то $\varphi(v) = \lambda v$ для некоторго $\lambda \in F$. Это число λ называется собственным значением линейного оператора φ, отвечающим собственному вектору v.

39. **Собственное подпространство линейного оператора.**

    Пусть $\varphi\colon V \to V$ — линейный оператор.

    Множество $V_\lambda(\varphi) = \{v \in V \mid \varphi(v) = \lambda v\}$ называется собственным подпространством линейного оператора, отвечающим собственному значению λ.

40. **Диагонализуемый линейный оператор.**

    Пусть $\varphi\colon V \to V$ — линейный оператор.

    Линейный оператор φ называется диагонализуемым, если существует базис $\mathbb{e}$ в V такой, что $A(\varphi, \mathbb{e})$ диагональна.

41. **Критерий диагонализуемости линейного оператора в терминах собственных векторов.**

    Пусть $\varphi\colon V \to V$ — линейный оператор.

    Отображение φ диагонализуемо тогда и только тогда, когда в V существует базис из собственных векторов.

42. **Характеристический многочлен линейного оператора.**

    Пусть $\varphi\colon V \to V$ — линейный оператор.

    Многочлен $\chi_\varphi(t) = (-1)^n \det(\varphi - t\mathrm{id})$ называется характеристическим.

43. **Связь собственных значений линейного оператора с его характеристическим многочленом.**

    λ — собственное значение линейного оператора φ тогда и только тогда, когда $\chi_\varphi(\lambda) = 0$.

44. **Алгебраическая кратность собственного значения линейного оператора.**

    Кратностью корня a_i называется число k_i такое, что в многочлене
    $G(x) = b_n(x - a_1)^{k_1} \dots (x - a_s)^{k_s}$ множитель $(x - a_i)$ имеет степень k_i.

    Если k — кратность корня характеристического многочлена, то k — алгебраическая кратность собственного значения.

45. **Геометрическая кратность собственного значения линейного оператора.**

    Пусть $\varphi\colon V \to V$ — линейный оператор.

    Пусть λ — собственное значение φ и $V_\lambda(\varphi) = \{v \in V \mid \varphi(v) = \lambda v\}$ — собственное подпространство, то есть пространство, состоящее из собственных векторов с собственным значением λ и нуля.

    Тогда $\dim V_\lambda(\varphi)$ — геометрическая кратность собственного значения λ.

46. **Связь между алгебраической и геометрической кратностями собственного значения линейного оператора.**

    Геометрическая кратность не больше алгебраической кратности.

47. **Сумма нескольких подпространств векторных пространств.**

    Пусть $U_1, \dots, U_k$ — подпространства векторного пространства V. Суммой нескольких пространств называется $U_1 + \ldots + U_k = \{u_1 + \ldots + u_k \mid u_i \in U_i\}$.

48. **Прямая сумма нескольких подпространств векторных пространств.**

Пусть $U_1, \ldots, U_k$ — подпространства векторного пространства V.

Прямой суммой нескольких пространств называется $U_1 + \ldots + U_k = \{u_1 + \ldots + u_k \mid u_i \in U_i\}$, причём из условия $u_1 + \ldots + u_k = 0$ следует, что $u_1 = \ldots = u_k = 0$. Обозначение: $U_1 \oplus \ldots \oplus U_k$.

49. **Эквивалентные условия, определяющие прямую сумму нескольких подпространств векторного пространства.**

Пусть $U_1, \ldots, U_k \subseteq V$ — векторные пространства.

Следующие условия эквивалентны:

(a) Сумма $U_1 + \ldots + U_k$ — прямая;

(b) Если $\mathbb{e}_i$ — базис U_i, то $\mathbb{e} = \mathbb{e}_1 \cup \ldots \cup \mathbb{e}_k$ — базис $U_1 + \ldots + U_k$;

(c) $\dim(U_1 + \ldots + U_k) = \dim U_1 + \ldots + \dim U_k$.

50. **Сумма собственных подпространств линейного оператора, отвечающих попарно различным собственным значениям.**

Пусть V — векторное пространство над полем F, $\varphi \in L(V)$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ — набор собственных значений φ, где $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$, и $V_{\lambda_i}(\varphi) \subseteq V$ — соответствующее собственное подпространство.

Тогда сумма $V_{\lambda_1}(\varphi) + \ldots + V_{\lambda_k}(\varphi)$ является прямой.

51. **Критерий диагонализуемости линейного оператора в терминах его характеристического многочлена и кратностей собственных значений.**

Пусть $\varphi \colon V \to V$ — линейный оператор.

Линейный оператор φ диагонализируем тогда и только тогда, когда

(a) $\chi_\varphi(t)$ разлагается на линейные множители;

(b) Если $\chi_\varphi(t) = (t - \lambda_1)^{k_1} \ldots (t - \lambda_s)^{k_s}$, где $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$, то $\dim V_{\lambda_i}(\varphi) = k_i \ \forall i$ (то есть для любого собственного значения V равны геометрическая и алгебраическая кратности).

52. **Корневой вектор линейного оператора.**

Пусть $\varphi \colon V \to V$ — линейный оператор.

Вектор $v \in V$ называется корневым вектором линейного оператора φ, отвечающим значению $\lambda \in F$, если существует $m \geqslant 0$ такое, что $(\varphi - \lambda \mathrm{id})^m(v) = 0$.

Наименьшее такое m называют высотой корневого вектора v.

53. **Корневое подпространство линейного оператора.**

Пусть $\varphi \colon V \to V$ — линейный оператор.

Множество $V^\lambda(\varphi) = \{v \in V \mid \exists m \geqslant 0 : (\varphi - \lambda \mathrm{id})^m(v) = 0\}$ называется корневым пространством для $\lambda \in F$.

54. **Характеристический многочлен ограничения линейного оператора на корневое подпространство.**

Пусть $\varphi \colon V \to V$ — линейный оператор.

Будем обозначать как $\varphi|_W$ ограничение линейного оператора на пространство W.

Характеристический многочлен линейного отображения $\varphi\big|_{V^\lambda(\varphi)}$ равен $(t - \lambda)^{k_m}$.

55. **Размерность корневого подпространства линейного оператора.**

Пусть $\varphi\colon V \to V$ — линейный оператор.

Если λ — собственное значение φ, то $\dim V^{\lambda}(\varphi)$ равна алгебраической кратности λ.

56. **Сумма корневых подпространств линейного оператора, отвечающих попарно различным собственным значениям.**

Пусть $\varphi\colon V \to V$ — линейный оператор.

Если $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, где $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$ — собственные значения φ, то сумма $V^{\lambda_1}(\varphi) + \ldots + V^{\lambda_k}(\varphi)$ — прямая.

57. **Признак разложимости пространства в прямую сумму корневых подпространств линейного оператора.**

Пусть $\varphi\colon V \to V$ — линейный оператор.

Если характеристический многочлен $\chi_\varphi(t)$ разлагается на линейные множители, причём $\chi_\varphi(t) = (t-\lambda_1)^{k_1} \ldots (t-\lambda_s)^{k_s}$, то $V = \bigoplus_{i=1}^{s} V^{\lambda_i}(\varphi)$.

58. **Жорданова клетка.**

Пусть $\lambda \in F$. **Жордановой клеткой** порядка n, отвечающей значению λ, называется матрица вида:

$$J_\lambda^n = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in M_n(F).$$

59. **Теорема о Жордановой нормальной форме линейного оператора.**

Пусть V — векторное пространство, φ — линейный оператор.

Пусть $\chi_\varphi(t)$ разлагается на линейные множители. Тогда существует базис $\mathbb{e}$ в V такой, что

$$A(\varphi, \mathbb{e}) = \begin{pmatrix} J_{\mu_1}^{n_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & J_{\mu_2}^{n_2} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & J_{\mu_p}^{n_p} \end{pmatrix} \qquad (*)$$

Кроме того, матрица $(*)$ определена однозначно с точностью до перестановок жордановых клеток.

Матрица $(*)$ называется жордановой нормальной формой линейного оператора.

60. **Линейная функция.**

Линейной функцией (формой, функционалом) на векторном пространстве V называется всякое линейное отображение $\sigma\colon V \to F$, где F — одномерное векторное пространство.

Обозначение: $V^* = \mathrm{Hom}(V, F)$.

61. **Двойственный (сопряжённый) базис пространства линейных функций.**

Пусть $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ — базис V. Рассмотрим линейные формы $\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_n$ такие, что $\varepsilon_i(e_j) = \delta_{ij}$, где $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ — символ Кронекера.

То есть $\varepsilon_i = (\delta_{i1}, \ldots, \delta_{ii}, \ldots, \delta_{in}) = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$.

Тогда $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ — базис в V^*, называющийся двойственным (сопряжённым) к базису $\mathbb{e}$.

62. **Билинейная функция.**

    Билинейной функцией (формой) на векторном пространстве V называется всякое билинейное отображение $\beta\colon V \times V \to F$. То есть это отображение, линейное по каждому аргументу:

    (a) $\beta(x_1 + x_2, y) = \beta(x_1, y) + \beta(x_2, y)$;

    (b) $\beta(\lambda x, y) = \lambda\beta(x, y)$;

    (c) $\beta(x, y_1 + y_2) = \beta(x, y_1) + \beta(x, y_2)$;

    (d) $\beta(x, \lambda y) = \lambda\beta(x, y)$.

63. **Матрица билинейной функции.**

    Пусть V — векторное пространство, $\dim V < \infty$, $\beta\colon V \times V \to F$ — билинейная функция.

    Матрицей билинейной функции в базисе $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ называется матрица $B = (b_{ij})$, где $b_{ij} = \beta(e_i, e_j)$. Обозначение: $B(\beta, \mathbb{e})$.

64. **Формула для вычисления значений билинейной функции в координатах.**

    Пусть $(e_1, \ldots, e_n)$ — базис V, $x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n \in V$ и $y = y_1e_1 + \ldots + y_ne_n \in V$. Тогда:

$$\beta(x, y) = (x_1, \ldots, x_n)B \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

65. **Формула изменения матрицы билинейной функции при переходе к другому базису.**

    Пусть $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ и $\mathbb{e}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ — два базиса V, β — билинейная функция на V. Пусть также $\mathbb{e}' = \mathbb{e}C$, где C — матрица перехода, также $B(\beta, \mathbb{e}) = B$ и $B(\beta, \mathbb{e}') = B'$.

    Тогда $B' = C^T BC$.

66. **Ранг билинейной функции.**

    Пусть $B(\beta, \mathbb{e})$ – матрица билинейной функции β в базисе $\mathbb{e}$.

    Число $\operatorname{rk} B$ называется рангом билинейной функции β. Обозначение: $\operatorname{rk}\beta$.

67. **Симметричная билинейная функция.**

    Билинейная функция β называется симметричной, если $\beta(x, y) = \beta(y, x)$ для любых $x, y \in V$.

68. **Квадратичная форма.**

    Пусть $\beta\colon V \times V \to F$ — билинейная функция. Тогда $Q_\beta\colon V \to F$, заданная формулой $Q_\beta(x) = \beta(x, x)$, называется квадратичной функцией (формой), ассоциированной с билинейной функцией β.

69. **Соответствие между симметричными билинейными функциями и квадратичными формами.**

    Пусть $\beta\colon V \times V \to F$ — симметричная билинейная функция.

    Тогда отображение $\beta \mapsto Q_\beta$ является биекцией между симметричными билинейными функциями на V и квадратичными функциями на V.

    Кроме того, значения билинейной функции однозначно задаются соответствующей квадратичной функцией.

70. **Матрица квадратичной формы.**

    Пусть V — векторное пространство, $\dim V < \infty$, $\beta\colon V \times V \to F$ — билинейная функция, $Q_\beta\colon V \times F$ — ассоциированная с ней квадратичная форма.

    Матрица Q_β равна матрице β.