Лекция 19 от 01.02.2016

Изоморфизм (продолжение)

На прошлой лекции мы ввели теорему и доказали одну лемму. Напомним их.

Теорема. *Если два конечномерных векторных пространства V и W изоморфны, то* $\dim V = \dim W$.

Лемма (1)**.** *Если* $\dim V = n$*, то* $V \simeq F^n$.

Замечание. *Говорят, что функция φ отождествляет пространство V с пространством F^n, если* $\varphi : V \xrightarrow{\sim} F^n$.

Но перед тем, как доказывать эту теорему, докажем лучше еще одну лемму.

Лемма (2)**.** *Пусть $\varphi : V \xrightarrow{\sim} W$ — изоморфизм векторных пространств, а $e_1, \ldots, e_n$— базис V. Тогда $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)$ — базис W.*

Доказательство. Пусть $w \in W$ — произвольный вектор. Положим $v \in V$ таковым, что $v = \varphi^{-1}(w)$.

$$\left.\begin{array}{c} v = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n, \quad x_i \in F \\ w = \varphi(v) = \varphi(x_1e_1 + \ldots + x_ne_n) = x_1\varphi(e_1) + \ldots + x_n\varphi(e_n) \end{array}\right. \Rightarrow W = \langle \varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n) \rangle$$

Покажем, что $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)$ — линейно независимые вектора.

Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$ таковы, что $\alpha_1\varphi(e_1) + \ldots + \alpha_n\varphi(e_n) = 0$. Это то же самое, что $\varphi(\alpha_1e_1 + \ldots + \alpha_ne_n) = 0$. Применяя φ^{-1}, получаем $\alpha_1e_1 + \ldots \alpha_ne_n = \varphi^{-1}(0) = 0$. Но так как $e_1, \ldots, e_n$ — базис в V, то $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$, и потому вектора $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)$ линейно независимы. Следовательно, этот набор векторов — базис в W. □

Теперь приступим наконец к доказательству теоремы.

Доказательство.

$\Rightarrow$ $V \simeq W \Rightarrow \exists \varphi : V \xrightarrow{\sim} W$. Тогда по лемме 2, если $e_1, \ldots, e_n$ — базис V, то $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)$ — базис W, и тогда $\dim V = \dim W$.

$\Leftarrow$ Пусть $\dim V = \dim W = n$. Тогда по лемме 1 существуют изоморфизмы $\varphi : V \xrightarrow{\sim} F^n$ и $\psi : W \xrightarrow{\sim} F^n$. Следовательно, $\psi^{-1} \circ \varphi : V \to W$ — изоморфизм.

□

То есть получается, что с точностью до изоморфизма существует только одно векторное пространство размерности n. Однако не стоит заканчивать на этом курс линейной алгебры. Теперь главная наша проблема — это как из бесконечного множества базисов в каждом векторном пространстве выбрать тот, который будет наиболее простым и удобным для каждой конкретной задачи.

Например, рассмотрим вектор $v \in F^n$ с координатами $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Пусть $v \neq 0$. Тогда существует такой базис $e_1, \ldots, e_n$, что $v = e_1$, то есть в этом базисе вектор имеет координаты $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Пусть V, W — векторные пространства над F, и $e_1, \ldots, e_n$ — базис V.

Предложение.

1. *Всякое линейное отображение $\varphi : V \to W$ однозначно определяется векторами $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)$.*
2. *Для всякого набора векторов $f_1, \ldots, f_n \in W$ существует единственное линейное отображение $\varphi : V \to W$ такое, что $\varphi(e_1) = f_1, \ldots, \varphi(e_n) = f_n$.*

Доказательство.

1. Пусть $v \in V$, $v = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$, где $x_i \in F$. Тогда $\varphi(v) = x_1\varphi(e_1) + \ldots + x_n\varphi(e_n)$, то есть если мы знаем вектора $\varphi(e_i)$, то сможем задать $\varphi(v)$ для любого $v \in V$.
2. Определим отображение $\varphi : V \to W$ по формуле $\varphi(x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n) = x_1 f_1 + \ldots + x_n f_n$. Прямая проверка показывает, что φ линейна, а единственность следует из пункта 1.

$\square$

Следствие. *Если $\dim V = \dim W = n$, то для всякого базиса $e_1, \ldots, e_n$ пространства V и всякого базиса $f_1, \ldots, f_n$ пространства W существует единственный изоморфизм $\varphi : V \xrightarrow{\sim} W$ такой, что $\varphi(e_1) = f_1, \ldots, \varphi(e_n) = f_n$.*

Доказательство. Из пункта 2. предложения следует, что существует единственное линейное отображение $\varphi : V \to W$ такое, что $\varphi(e_1) = f_1, \ldots, \varphi(e_n) = f_n$. Но тогда $\varphi(x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n) = = x_1\varphi(e_1) + \ldots + x_n\varphi(e_n) = x_1 f_1 + \ldots + x_n f_n$ для любых $x_i \in F$. Отсюда следует, что φ — биекция. $\square$

Матрицы линейных отображений

Пусть V и W — векторные пространства, $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ — базис V, $\mathbb{f} = (f_1, \ldots, f_m)$ — базис W, $\varphi : V \to W$ — линейное отображение. Тогда:

$$\varphi(e_j) = a_{1j} f_1 + \ldots + a_{mj} f_m = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i.$$

Определение. *Матрица $A = (a_{ij}) \in Mat_{m\times n}(F)$ называется матрицей линейного отображения φ в базисах $\mathbb{e}$ и $\mathbb{f}$ (или по отношению к базисам $\mathbb{e}$ и $\mathbb{f}$).*

Замечание. *Существует биекция $\{$линейные отображения $V \to W\} \rightleftarrows Mat_{m\times n}$.*

Замечание. *В $A^{(j)}$ стоят координаты $\varphi(e_j)$ в базисе $\mathbb{f}$.*

$$(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)) = (f_1, \ldots, f_n) \cdot A$$

Рассмотрим пример.

Пусть $P_n = F[x]_{\leqslant n}$ — множество многочленов над полем F степени не выше n. Возьмем дифференцирование $\Delta : P_n \to P_{n-1}$.

Базис P_n — $1, x, x^2, \ldots, x^n$. Базис P_{n-1} — $1, x, \ldots, x^{n-1}$. Тогда матрица линейного отображения будет размерности $n \times (n+1)$ и иметь следующий вид.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & n \end{pmatrix}$$

Предложение. *Если* $v = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$ *и* $\varphi(v) = y_1 f_1 + \ldots + y_m f_m$, *то*

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Доказательство. С одной стороны:

$$\varphi(v) = x_1\varphi(e_1) + \ldots + x_n\varphi(e_n) = (\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (f_1, \ldots, f_m) A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Однако с другой стороны:

$$\varphi(v) = (f_1, \ldots, f_m) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

Сравнивая обе части, получаем требуемое. $\square$

А теперь проанализируем операции над матрицами линейных отображений.

V и W — векторные пространства. **Обозначение:** $\mathrm{Hom}(V, W) :=$ множество всех линейных отображений $V \to W$.

Пусть $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}(V, W)$.

Определение.

1. $\varphi + \psi \in \mathrm{Hom}(V, W)$ *— это* $(\varphi + \psi)(v) := \varphi(v) + \psi(v)$.
2. $\alpha \in F, \alpha\varphi \in \mathrm{Hom}(V, W)$ *— это* $(\alpha\varphi)(v) := \alpha(\varphi(v))$.

Упражнение.

1. *Проверить, что* $\varphi + \psi$ *и* $\alpha\varphi$ *действительно принадлежат* $\mathrm{Hom}(V, W)$.
2. *Проверить, что* $\mathrm{Hom}(V, W)$ *является векторным пространством.*

Предложение. *Пусть* $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ *— базис* V, $\mathbb{f} = (f_1, \ldots, f_m)$ *— базис* W, $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}(V, W)$. *При этом* A_φ *— матрица линейного отображения* φ, A_ψ *— матрица для* ψ, $A_{\varphi+\psi}$ *— для* $\varphi+\psi$, *а* $A_{\alpha\varphi}$ *— для* $\alpha\varphi$.

Тогда $A_{\varphi+\psi} = A_\varphi + A_\psi$ *и* $A_{\alpha\varphi} = \alpha A_\varphi$.

Доказательство. Упражнение. □

Теперь возьмем три векторных пространства — U, V и W размерности n, m и k соответственно, и их базисы $\mathbb{e}, \mathbb{f}$ и $\mathbb{g}$. Также рассмотрим цепочку линейных отображений $U \xrightarrow{\psi} V \xrightarrow{\varphi} W$. Пусть A — матрица φ в базисах $\mathbb{f}$ и $\mathbb{g}$, B — матрица ψ в базисах $\mathbb{e}$ и $\mathbb{f}$, C — матрица $\varphi \circ \psi$ в базисах $\mathbb{e}$ и $\mathbb{g}$.

Предложение. $C = AB$.

Замечание. *Собственно говоря, отсюда и взялось впервые определение умножения матриц.*

Доказательство. Запишем по определению:

$$(\varphi \circ \psi)(e_r) = \sum_{p=1}^{k} c_{pr} g_p, \quad r = 1, \ldots, n$$

$$\psi(e_r) = \sum_{q=1}^{m} b_{qr} f_q, \quad r = 1, \ldots, n$$

$$\varphi(f_q) = \sum_{p=1}^{k} a_{pq} g_p, \quad q = 1, \ldots, m$$

Тогда:

$$(\psi \circ \psi)(e_r) = \varphi(\psi(e_r)) = \varphi\left(\sum_{q=1}^{m} b_{qr} f_g\right) = \sum_{q=1}^{m} b_{qr} \varphi(f_g) = \sum_{q=1}^{m} b_{qr} \left(\sum_{p=1}^{k} a_{pq} g_p\right) = \sum_{p=1}^{k} \left(\sum_{q=1}^{m} a_{pq} b_{qr}\right) g_p$$

$$\Downarrow$$

$$c_{pr} = \sum_{q=1}^{m} a_{pq} b_{qr}$$

$$\Downarrow$$

$$C = AB$$

□

И снова, пусть V и W — векторные пространства с линейным отображением $\varphi : V \to W$.

Определение. *Ядро φ — это множество* $\operatorname{Ker} \varphi := \{v \in V \mid \varphi(v) = 0\}$.

Определение. *Образ φ — это множество* $\operatorname{Im} \varphi := \{w \in W \mid \exists v \in V : \varphi(v) = w\}$.

Пример. *Все то же $\Delta : P_n \to P_{n-1}$. Для него* $\operatorname{Ker} \Delta = \{f \mid f = const\}$, $\operatorname{Im} \Delta = P_{n-1}$.