

Лекции по предмету Линейная алгебра и геометрия

Группа лектория ФКН ПМИ 2015-2016

Анастасия Иовлева

Ксюша Закирова

Руслан Хайдуров

2016 год

Содержание

1 Лекция 15 от 11.01.2016	1
1.1 Скаляры. Поля	1
1.2 Поле комплексных чисел	2
1.3 Геометрическая модель поля \mathbb{C}	3
2 Лекция 16 от 18.01.2016	5
2.1 Комплексные числа (продолжение)	5
2.2 Корни из комплексного числа	6
2.3 Решение квадратных уравнений с комплексными коэффициентами	7
2.4 Векторные пространства над произвольным полем	7
3 Лекция 17 от 25.01.2016	7
3.1 Овеществление и комплексификация	7
3.2 Сумма подпространств	8
3.3 Переход к новому базису	9
4 Лекция 18 от 29.01.2016	10
4.1 Матрица перехода и переход к новому базису	10
4.2 Линейные отображения	11
4.3 Изоморфизм	13
5 Лекция 19 от 01.02.2016	14
5.1 Изоморфизм (продолжение)	14
5.2 Матрицы линейных отображений	16
6 Лекция 20 от 08.02.2016	18
6.1 Линейные отображения (продолжение)	18
6.2 Линейные операторы	20

7 Лекция 21 от 15.02.2016	21
7.1 Инвариантность и обратимость	21
7.2 Собственные векторы и собственные значения	23
7.3 Диагонализуемость	24
7.4 Собственное подпространство	25
8 Лекция 22 от 22.02.2016	25
8.1 Деление многочленов с остатком	25
8.2 Собственные значения и характеристический многочлен	26
8.3 Геометрическая и алгебраическая кратности	26
8.4 Сумма и прямая сумма нескольких подпространств	27
9 Лекция 23 от 29.02.2016	28
9.1 Сумма собственных подпространств	28
9.2 Диагонализуемость	29
9.3 Инвариантные подпространства в \mathbb{R}^n	30
9.4 Корневые векторы и корневые подпространства	31
10 Лекция 24 от 14.03.2016	31
10.1 Корневые подпространства	31
10.2 Жордановы клетки	34

Лекция 15 от 11.01.2016

Скаляры. Поля

Для начала вспомним, что такое *векторное пространство* — это множество, на котором введены операции сложения, умножения на скаляр и в котором будут выполняться восемь аксиом (см. 1 семестр). Но что такое скаляр?

Определение. Скаляры — это элементы некоторого фиксированного поля.

Определение. Полем называется множество F , на котором заданы две операции — «сложение» $(+)$ и «умножение» (\cdot) ,

$$F \times F \rightarrow F \Rightarrow \begin{aligned} +: (a, b) &\mapsto a + b \\ \cdot: (a, b) &\mapsto a \cdot b \end{aligned}$$

удовлетворяющие следующим свойствам («аксиомам поля»): $\forall a, b, c \in F$

1. $a + b = b + a$ (коммутативность по сложению);
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$ (ассоциативность по сложению);
3. $\exists 0 \in F: 0 + a = a + 0 = a$ (существование нулевого элемента);
4. $\exists -a \in F: a + (-a) = (-a) + a = 0$ (существование противоположного элемента);
5. $a(b + c) = ab + ac$ (дистрибутивность; связь между сложением и умножением);
6. $ab = ba$ (коммутативность по умножению);
7. $(ab)c = a(bc)$ (ассоциативность по умножению);

8. $\exists 1 \in F \setminus \{0\} : 1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ (существование единицы);

9. $a \neq 0 \Rightarrow \exists a^{-1} \in F : a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$ (существование обратного элемента).

Пример.

- \mathbb{Q} — рациональные числа;
- \mathbb{R} — вещественные числа;
- \mathbb{C} — комплексные числа;
- $F_2 = \{0, 1\}$, при сложении и умножении по модулю 2.

Поле комплексных чисел

Поле действительных чисел \mathbb{R} плохо тем, что в нем уравнение $x^2 + 1 = 0$ не имеет решения. Отсюда возникает идея определить поле, удовлетворяющее следующим требованиям:

(T1) новое поле содержит \mathbb{R} ;

(T2) уравнение $x^2 + 1 = 0$ имеет решение.

Давайте формально построим такое поле.

Определение. Полем \mathbb{C} комплексных чисел называется множество $\{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$, на котором заданы операции сложения: $(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$ и умножения: $(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + b_1 a_2)$.

Предложение. \mathbb{C} и впрямь является полем.

Доказательство. Операции сложения и умножения введены, осталось только проверить выполнение всех аксиом.

1. очевидно, так как сложение идет поэлементно;
2. также очевидно;
3. $0 = (0, 0)$;
4. $-(a, b) = (-a, -b)$;
5. почти очевидно (т.е. прямая проверка);
6. ясно (тоже прямая проверка);
7. проверим:

$$\begin{aligned} ((a_1, b_1)(a_2, b_2))(a_3, b_3) &= (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + b_1 a_2)(a_3, b_3) = \\ &= (a_1 a_2 a_3 - b_1 b_2 b_3 - a_1 b_2 b_3 - b_1 a_2 b_3, a_1 a_2 b_3 - b_1 b_2 b_3 + a_1 b_2 a_3 + b_1 a_2 a_3) = \\ &= (a_1, b_1)(a_2 a_3 - b_2 b_3, a_2 b_3 + b_2 a_3) = (a_1, b_1)((a_2, b_2)(a_3, b_3)); \end{aligned}$$

8. $1 = (1, 0)$;

9. $(a, b) \neq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \neq 0 \rightarrow (a, b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right)$.

□

Осталось только проверить, правда ли введенное поле \mathbb{C} удовлетворяет нашим требованиям:

(T1) Заметим, что в подмножестве \mathbb{C} , состоящим из элементов вида $(a, 0)$ операции сложения и умножения будут работать как в поле вещественных чисел.

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0)$$

$$(a, 0) \cdot (b, 0) = (ab, 0)$$

Следовательно, отображение $a \mapsto (a, 0)$ отождествляет \mathbb{R} с этим подмножеством, то есть $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Что нам и требуется.

(T2) Примем $i = (0, 1)$. Тогда $i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$. Итого, требование выполнено.

Однако запись комплексных чисел в виде упорядоченной пары (a, b) не очень удобна и громоздка. Поэтому преобразуем запись следующим образом:

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1) = a + bi.$$

Тем самым мы получили реализацию поля \mathbb{C} комплексных чисел как множества $\{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$, с обычным сложением и умножением.

Определение. Запись $z = a + bi$ называется алгебраической формой комплексного числа $z \in \mathbb{C}$.

$a = \operatorname{Re} z$ — действительная часть числа z .

$b = \operatorname{Im} z$ — мнимая часть числа z .

Определение. Числа вида $z = bi$ (т.е. $\operatorname{Re} z = 0$) называются чисто мнимыми.

Определение. Отображение $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : a + bi \mapsto a - bi$ называется (комплексным) сопряжением. Само число $\bar{z} = a - bi$ называется (комплексно) сопряженным к числу $z = a + bi$.

Лемма. Для любых двух комплексных чисел $z, w \in \mathbb{C}$ выполняется, что

$$1. \overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w};$$

$$2. \overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}.$$

Доказательство. Пусть $z = a + bi$, а $w = c + di$.

$$1. \bar{z} + \bar{w} = a - bi + c - di = (a + c) - (b + d)i = \overline{z + w}$$

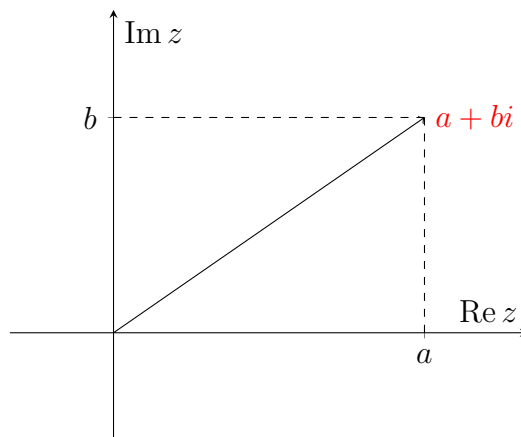
$$2. \bar{z} \cdot \bar{w} = (a - bi)(c - di) = ac - adi - bci + bdi^2 = (ac - bd) - (ad + bc)i = \overline{zw}$$

□

Замечание. Равенство $z = \bar{z}$ равносильно равенству $\operatorname{Im} z = 0$, то есть $z \in \mathbb{R}$.

Геометрическая модель поля \mathbb{C}

Заметим, что поле комплексных чисел $\mathbb{C} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ равно \mathbb{R}^2 . Следовательно, комплексные числа можно представить как точки на действительной плоскости \mathbb{R}^2 , или сопоставить их векторам.



В таком представлении сложение комплексных чисел сопоставляется со сложением векторов, а сопряжение — с отражением относительно оси $Ox(\operatorname{Re} z)$.

Определение. Модулем комплексного числа $z = a + bi$ называется длина соответствующего вектора. Обозначение: $|z|; |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Свойства модуля:

1. $|z| \geq 0$, причем $|z| = 0$ тогда и только тогда, когда $z = 0$;
2. $|z + w| \leq |z| + |w|$ — неравенство треугольника;
3. $z \cdot \bar{z} = |z|^2$;

Доказательство. $(a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$. □

4. $|zw| = |z| \cdot |w|$;

Доказательство. Возведем в квадрат.

$$|z|^2 \cdot |w|^2 = z\bar{z}w\bar{w} = (zw)\overline{zw} = zw\bar{z}\bar{w} = |zw|^2$$

□

Замечание. Из свойства 3 следует, что при $z \neq 0$ выполняется:

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

$$(a + bi)^{-1} = \frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}.$$

Определение. Аргументом комплексного числа $z \neq 0$ называется всякий угол φ такой что

$$\cos \varphi = \frac{a}{|z|} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \quad \sin \varphi = \frac{b}{|z|} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Неформально говоря, аргумент z — это угол между осью Ox и соответствующим вектором.

Замечание.

1. Аргумент определен с точностью до 2π .
2. Аргумент $z = 0$ не определен.

Для $z \neq 0$ введем множество $\operatorname{Arg} z = \{\text{множество всех аргументов } z\}$ — *большой аргумент*. Также введем *малый аргумент* $\arg z$ — это такой $\varphi \in \operatorname{Arg} z$, который удовлетворяет условию $0 \leq \varphi < 2\pi$ и, следовательно, определен однозначно.

Используя аргумент, можно представить комплексное число следующим образом:

$$\begin{cases} a = |z| \cos \varphi \\ b = |z| \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow z = a + bi = |z| \cos \varphi + i|z| \sin \varphi = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

Определение. Запись $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ называется *тригонометрической формой комплексного числа* z .

Замечание.

$$r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = r_2 \\ \varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Лекция 16 от 18.01.2016

Вспомним предыдущую лекцию и кое-что дополним

Замечание.

1. Элемент 0 — единственный.
2. И элемент $-a$ единственный.
3. Даже элемент 1 единственный.
4. Как это ни удивительно, но a^{-1} тоже единственный.

Легко увидеть, что пункты 2 и 4 доказываются одинаково с точностью до замены операции, как и пункты 1 и 3.

Доказательство. Докажем пункт 3. Если существует $1'$ — еще одна единица, тогда по аксиомам $1' = 1' \cdot 1 = 1$.

Докажем теперь пункт 4. Пусть b и c таковы, что $b \neq c$ и $ba = ab = ac = ca = 1$. Тогда

$$bac = (ba)c = b(ac) = 1 \cdot c = c = 1 \cdot b = b$$

То есть $b = c$. □

Комплексные числа (продолжение)

Предложение. Пусть $z_1 = |z_1|(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$, $z_2 = |z_2|(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$. Тогда

$$z_1 z_2 = |z_1| |z_2| (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

Иными словами, при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.

Доказательство. Просто раскроем скобки и приведем подобные.

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= |z_1| |z_2| (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + i (\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_2 \sin \varphi_1)) = \\ &= |z_1| |z_2| (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \end{aligned}$$

□

Следствие. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$

Следствие (Формула Муавра). Пусть $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Тогда:

$$z^n = |z|^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)) \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Замечание. В комплексном анализе функция $\exp x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ доопределяется до $\exp z: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ следующим образом:

$$\exp z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

И тогда оказывается, что $\exp z$ обладает теми же свойствами, кроме того:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi \quad \forall \varphi \in \mathbb{C}.$$

Всякое $z \in \mathbb{C}$ можно представить в виде $z = |z|e^{i\varphi}$, где $\varphi \in \text{Arg}(z)$. Тогда формула Муавра приобретает совсем очевидный вид:

$$|z_1|e^{i\varphi_1} \cdot |z_2|e^{i\varphi_2} = |z_1| |z_2| e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}.$$

Замечание. Отображение $R_\varphi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \rightarrow ze^{i\varphi}$, $\varphi \in \mathbb{R}$ определяет поворот на угол φ вокруг 0.

Корни из комплексного числа

Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $n \geq 2$.

Определение. Корнем n -й степени из числа z называется всякое $w \in \mathbb{C}$: $w^n = z$. То есть

$$\sqrt[n]{z} = \{w \in \mathbb{C} \mid w^n = z\}.$$

Если $z = 0$, то $|z| = 0$, а значит $|w| = 0$, $w = 0$. Получается, 0 — единственное комплексное число, у которого корень определён однозначно.

Далее рассмотрим случай $z \neq 0$.

$$z = |z| (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

$$w = |w| (\cos \psi + i \sin \psi)$$

$$z = w^n \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = |w|^n \\ n\psi \in \text{Arg}(z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |w| = \sqrt[n]{|z|} \\ n\psi = \varphi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |w| = \sqrt[n]{|z|} \\ \psi = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

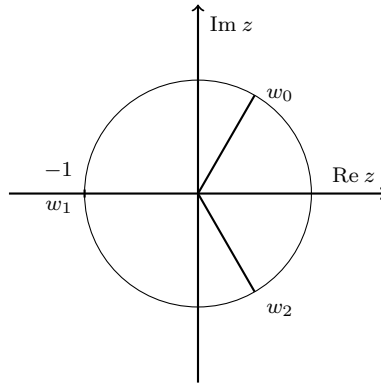
С точностью до кратного 2π различные значения в формуле $\psi = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}$ получаются при $k = 0, 1, \dots, n-1$. Значит z имеет ровно n корней n -й степени.

$$\sqrt[n]{z} = \left\{ |z| \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right) \mid k = 0, \dots, n-1 \right\}$$

Замечание. Точки из множества $\sqrt[n]{z}$ при $z \neq 0$ лежат в вершинах правильного n -угольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{|z|}$.

Пример. $z = -1 = \cos \pi + i \sin \pi$

$$\sqrt[3]{z} = \left\{ \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}; \cos \pi + i \sin \pi; \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right\}$$



Решение квадратных уравнений с комплексными коэффициентами

Пусть дано квадратное уравнение $az^2 + bz + c = 0$, где $a, b, c \in \mathbb{C}$ и $a \neq 0$. Тогда имеем:

$$\begin{aligned} z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} &= 0 \\ z^2 + 2\frac{b}{2a}z + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} &= 0 \\ \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\ z + \frac{b}{2a} &\in \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{aligned}$$

То есть все решения — это $z_1 = \frac{-b + d_1}{2a}$, $z_2 = \frac{-b + d_2}{2a}$, где $\{d_1, d_2\} = \sqrt[2]{b^2 - 4ac}$. В частности, квадратное уравнение всегда имеет комплексный корень, а при $b^2 - 4ac \neq 0$ два корня.

Теорема (Основная теорема алгебры). *Всякий многочлен $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ степени n , где $n \geq 1$, $a_n \neq 0$, и $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ имеет корень.*

Векторные пространства над произвольным полем

И снова вспомним, что такое векторное пространство:

- некоторое множество V ;
- есть операция сложения $V \times V \rightarrow V$;
- есть операция умножения на скаляр $F \times V \rightarrow V$;
- выполняются 8 аксиом.

Все основные понятия и результаты теории векторных пространств из прошлого полугодия можно перенести на случай пространства над произвольным полем F без изменений.

Пример. Пусть V — векторное пространство над полем из двух элементов, $\dim V = n$. Тогда $|V| = 2^n$. Действительно, каждое конечномерное пространство обладает базисом (в данном случае e_1, \dots, e_n). Тогда $V = \{k_1 e_1 + k_2 e_2 + \dots + k_n e_n \mid k_i \in F\}$. Но очень легко заметить, что всего таких линейных комбинаций 2^n .

Лекция 17 от 25.01.2016

Овеществление и комплексификация

Пусть V — векторное пространство над \mathbb{C} .

Определение. Овеществление пространства V — это то же пространство V , рассматриваемое как пространство над \mathbb{R} . Обозначение: $V_{\mathbb{R}}$.

Операция умножения на элементы \mathbb{R} в V уже есть, так как \mathbb{R} — подполе в \mathbb{C} .

Пример. $\mathbb{C}_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^2$.

Предложение. V — векторное пространство над \mathbb{C} , $\dim V < \infty$. Тогда $\dim V_{\mathbb{R}} = 2 \dim V$.

Доказательство. Пусть e_1, \dots, e_n — базис в V . Тогда $V = \{z_1 e_1 + \dots + z_n e_n \mid z_k \in \mathbb{C}\}$, причём такая запись единственная в силу определения базиса. Пусть $z_k = a_k + ib_k$, причём такая запись тоже единственная. Тогда будем иметь

$$\begin{aligned} V &= \{(a_1 + ib_1)e_1 + \dots + (a_n + ib_n)e_n \mid a_k, b_k \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{a_1 e_1 + \dots + a_n e_n + b_1 i e_1 + \dots + b_n i e_n \mid a_k, b_k \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

И причём такая запись тоже единственная. Выходит, что $e_1, e_2, \dots, e_n, i e_1, i e_2, \dots, i e_n$ — базис в $V_{\mathbb{R}}$, в котором $2n = 2 \dim V$ элементов. \square

Определение. Комплексификация пространства W — это множество $W \times W = W^{\mathbb{C}} = \{(u, v) \mid u, v \in W\}$ с операциями $(u_1, v_1) + (u_2, v_2) = (u_1 + u_2, v_1 + v_2)$, $(a + ib)(u, v) = (au - bv, av - bu)$.

Пример. $\mathbb{R}^{\mathbb{C}} = \mathbb{R}$.

Утверждение. В нём выполняются все 8 аксиом векторного пространства над \mathbb{C} .

W отождествляется подмножеством $\{(u, 0) \mid u \in W\}$. Действительно

$$w \in W \Leftrightarrow (w, 0) \in W^{\mathbb{C}}; i(w, 0) = (0, w) \in W^{\mathbb{C}}$$

В итоге $\forall (u, v) \in W^{\mathbb{C}}$ представим в виде

$$(u, v) = (u, 0) + (0, v) = (u, 0) + i(v, 0) = u + iv$$

То есть $W^{\mathbb{C}} = \{u + iv \mid u, v \in W\}$.

Предложение. $\dim W^{\mathbb{C}} = \dim W$

Замечание. Здесь $W^{\mathbb{C}}$ — пространство над \mathbb{C} , а W — над \mathbb{R} .

Доказательство. Пусть e_1, \dots, e_n — базис в W . Тогда

$$\begin{aligned} W^{\mathbb{C}} &= \{(u, v) \mid u, v \in W\} = \{(a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n, b_1 e_1 + b_2 e_2 + \dots + b_n e_n) \mid a_k, b_k \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{(a_1 e_1, b_1 e_1) + \dots + (a_n e_n, b_n e_n)\} = \{(a_1 + ib_1)e_1 + \dots + (a_n + ib_n)e_n\} = \\ &= \{z_1 e_1 + \dots + z_n e_n \mid z_k \in \mathbb{C}\} \end{aligned}$$

То есть выходит, что e_1, \dots, e_n — базис в $W^{\mathbb{C}}$. \square

Сумма подпространств

Пусть V — конечномерное векторное пространство, а U и W — подпространства (в качестве упражнения лектор предлагает доказать, что их пересечение — тоже подпространство).

Определение. Сумма подпространств U и W — это множество.

$$U + W = \{u + w \mid u \in U, w \in W\}$$

Замечание. $\dim(U \cap W) \leq \dim U \leq \dim(U + W)$

Пример. Двумерные плоскости в пространстве \mathbb{R}^3 содержат общую прямую.

Теорема. $\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U + W)$

Доказательство. Положим $p = \dim(U \cap W)$, $k = \dim U$, $m = \dim W$. Выберем базис $a = \{a_1, \dots, a_p\}$ в пересечении. Его можно дополнить до базиса W и до базиса U . Значит $\exists b = \{b_1, \dots, b_{k-p}\}$ такой, что $a \cup b$ — базис в U и $\exists c = \{c_1, \dots, c_{m-p}\}$ такой, что $a \cup c$ — базис в W .

Докажем, что $a \cup b \cup c$ — базис в $U + W$.

Во-первых, докажем, что $U + W$ порождается множеством $a \cup b \cup c$.

$$\left. \begin{array}{l} v \in U + W \Rightarrow \exists u \in U, w \in W: v = u + w \\ u \in U = \langle a \cup b \rangle \subset \langle a \cup b \cup c \rangle \\ w \in W = \langle a \cup c \rangle \subset \langle a \cup b \cup c \rangle \end{array} \right| \Rightarrow v = u + w \in \langle a \cup b \cup c \rangle \Rightarrow U + W = \langle a \cup b \cup c \rangle$$

Во-вторых, докажем линейную независимость векторов из $a \cup b \cup c$.

Пусть скаляры $\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_{k-p}, \gamma_1, \dots, \gamma_{m-p}$ таковы, что:

$$\begin{aligned} \underbrace{\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_p a_p}_x + \underbrace{\beta_1 b_1 + \dots + \beta_{k-p} b_{k-p}}_y + \underbrace{\gamma_1 c_1 + \dots + \gamma_{m-p} c_{m-p}}_z &= 0 \\ x + y + z &= 0 \\ z &= -x - y \\ z &\in W \\ -x - y &\in U \cap W \\ \Rightarrow \exists \lambda_1, \dots, \lambda_p \in F: z &= \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_p a_p \end{aligned}$$

Тогда $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_p a_p - \gamma_1 c_1 - \dots - \gamma_{m-p} c_{m-p} = 0$. Но $a \cup c$ — базис W . Следовательно, $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = \gamma_1 = \dots = \gamma_{m-p} = 0$. Но тогда $0 = x + y = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_p a_p + \beta_1 b_1 + \dots + \beta_{k-p} b_{k-p}$. Но $a \cup b$ — базис U $\Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_p = \beta_1 = \dots = \beta_{k-p} = 0$. Итого, все коэффициенты равны нулю и линейная независимость тем самым доказана. То есть $a \cup b \cup c$ — базис $U + W$.

$$\begin{aligned} \dim(U + W) &= |a \cup b \cup c| = |a| + |b| + |c| = p + k - p + m - p = k + m - p = \\ &= \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) \end{aligned}$$

□

Определение. Если $U \cap W = \{0\}$, то $U + W$ называется прямой суммой.

Следствие. В таком случае $\dim(U + W) = \dim U + \dim W$.

Пример. U — плоскость, W — прямая в \mathbb{R}^3 .

Переход к новому базису

Пусть V — векторное пространство, $\dim V = n$, e_1, \dots, e_n — базис. То есть

$$\forall v \in V \quad \exists! v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n,$$

где $x_1, \dots, x_n \in F$ — координаты вектора v в базисе (e_1, \dots, e_n) . Пусть также есть базис e'_1, \dots, e'_n :

$$\begin{aligned} e'_1 &= c_{11}e_1 + c_{21}e_2 + \dots + c_{n1}e_n \\ e'_2 &= c_{12}e_1 + c_{22}e_2 + \dots + c_{n2}e_n \\ &\vdots \\ e'_n &= c_{1n}e_1 + c_{2n}e_2 + \dots + c_{nn}e_n \end{aligned}$$

Обозначим матрицу $C = (c_{ij})$. Тогда можно переписать (e'_1, \dots, e'_n) как $(e_1, \dots, e_n) \cdot C$.

Предложение. e'_1, \dots, e'_n образуют базис тогда и только тогда, когда $\det C \neq 0$.

Доказательство.

[\Rightarrow] e'_1, \dots, e'_n — базис, а значит $\exists C' \in M_n$:

$$\begin{aligned}(e_1, \dots, e_n) &= (e'_1, \dots, e'_n) C' = (e_1, \dots, e_n) C' C \\ E &= C C' \\ C' &= C^{-1} \Leftrightarrow \exists C^{-1} \Leftrightarrow \det C \neq 0\end{aligned}$$

[\Leftarrow] $\det C \neq 0 \Rightarrow \exists C^{-1}$. Покажем, что e'_1, \dots, e'_n в таком случае линейно независимы. Пусть $x_1 e'_1 + x_2 e'_2 + \dots + x_n e'_n = 0$. Тогда можно записать

$$\begin{aligned}(e'_1, e'_2, \dots, e'_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} &= 0 \\ (e_1, \dots, e_n) C \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} &= 0\end{aligned}$$

Поскольку (e_1, \dots, e_n) — базис, то $C \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$. Умножая слева на обратную матрицу, получаем, что $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$

□

Лекция 18 от 29.01.2016

Матрица перехода и переход к новому базису

Пусть V — векторное пространство, $\dim V = n$, вектора e_1, \dots, e_n — базис, а e'_1, \dots, e'_n — некий набор из n векторов. Тогда каждый вектор из этого набора линейно выражается через базис.

$$\begin{aligned}e'_j &= \sum_{i=1}^n c_{ij} e_i, \quad c_{ij} \in F \\ (e'_1, \dots, e'_n) &= (e_1, \dots, e_n) \cdot C, \quad C = (c_{ij})\end{aligned}$$

То есть мы получили матрицу, где в j -ом столбце стоят коэффициенты линейного разложения вектора e'_j в базисе (e_1, \dots, e_n) .

Теперь пусть e'_1, \dots, e'_n — тоже базис в V . Вспомним, что на прошлой лекции уже было сказано, что в этом случае $\det C \neq 0$.

Определение. Матрица C называется матрицей перехода от базиса (e_1, \dots, e_n) к базису (e'_1, \dots, e'_n) .

Замечание. Матрица перехода от (e'_1, \dots, e'_n) к (e_1, \dots, e_n) есть C^{-1} .

И небольшое замечание касательно записи: когда базис записан в скобках, то есть (e_1, \dots, e_n) , то нам важен порядок векторов в нем, в противном случае, при записи e_1, \dots, e_n , порядок не важен.

Итого, имеем два базиса пространства V , (e_1, \dots, e_n) и (e'_1, \dots, e'_n) , и матрицу перехода C такую, что $(e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n) \cdot C$. Возьмем некий вектор v и разложим его по обоим базисам.

$$v \in V \Rightarrow \begin{cases} v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n, & x_i \in F \\ v = x'_1 e'_1 + \dots + x'_n e'_n, & x'_i \in F \end{cases}$$

Предложение. Формула преобразования координат при переходе к другому базису:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad x_i = \sum_{j=1}^n c_{ij} x'_j$$

Доказательство. С одной стороны:

$$v = x'_1 e'_1 + \dots + x'_n e'_n = (e'_1 \quad \dots \quad e'_n) \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = (e_1 \quad \dots \quad e_n) C \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

Однако с другой стороны:

$$v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n = (e_1 \quad \dots \quad e_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Сравнивая одно с другим, получаем, что:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

□

Линейные отображения

Пусть V и W — два векторных пространства над полем F .

Определение. Отображение $f : V \rightarrow W$ называется линейным, если:

1. $f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2), \quad \forall u_1, u_2 \in V;$
2. $f(\alpha u) = \alpha f(u), \quad \forall u \in V, \forall \alpha \in F.$

Замечание. Свойства 1–2 эквивалентны тому, что

$$f(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 f(u_1) + \alpha_2 f(u_2), \quad \forall u_1, u_2 \in V, \forall \alpha_1, \alpha_2 \in F.$$

Здесь важно понимать, что сначала сложение векторов и умножение на скаляр происходит в пространстве V , а потом в пространстве W .

Простейшие свойства.

$$1. f(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$$

$$\text{Доказательство. } f(\vec{0}_V) = f(0 \cdot \vec{0}_V) = 0f(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$$

□

$$2. \varphi(-u) = -\varphi(u), \text{ где } (-u) \text{ — обратный элемент к } u.$$

$$\text{Доказательство. } \varphi(-u) + \varphi(u) = \varphi(-u + u) = \varphi(\vec{0}_V) = \vec{0}_W \Rightarrow \varphi(-u) = -\varphi(u)$$

□

Примеры

(0) $V \rightarrow V : v \mapsto v$ — тождественное отображение.

(1) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ линейно $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : f(x) = kx, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Доказательство.

$$\Rightarrow f(x) = f(x \cdot 1) = xf(1) = kx, \text{ где } k = f(1)$$

\Leftarrow Проверим необходимые условия линейности.

$$1. f(x) = kx \Rightarrow f(x_1 + x_2) = k(x_1 + x_2) = kx_1 + kx_2 = kf(x_1) + kf(x_2)$$

$$2. f(\alpha x) = k\alpha x = \alpha kx = \alpha f(x)$$

□

(2) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ — декартова система координат.

2.1 Поворот вокруг 0 на угол α линейен.

2.2 Проекция на прямую, проходящую через 0, линейна.

(3) $P_n = R[x]_{\leq n}$ — пространство всех многочленов от x степени не больше n .

$$\Delta : f \mapsto f' \text{ (производная)}$$

$$\left. \begin{aligned} (f+g)' &= f' + g' \\ (\alpha f)' &= \alpha f' \end{aligned} \right| \Rightarrow \Delta \text{ — линейное отображение из } P_n \text{ в } P_{n-1}$$

(4) Векторное пространство V , $\dim V = n$, e_1, \dots, e_n — базис.

$$V \mapsto \mathbb{R}^n$$

$$x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ — тоже линейное отображение.}$$

(5) $A \in \text{Mat}_{m \times n}$, $k \geq 1$ — любое, $\varphi : \text{Mat}_{n \times k} \rightarrow \text{Mat}_{m \times k}$.

$$\varphi(X) = A \cdot X$$

$$A(X_1 + X_2) = AX_1 + AX_2$$

$$A(\alpha X) = \alpha(AX)$$

Частный случай, при $k = 1$ — $\varphi : F^n \rightarrow F^m$.

Изоморфизм

Определение. *Отображение $\varphi : V \rightarrow W$ называется изоморфизмом, если φ линейно и биективно. Обозначение: $\varphi : V \xrightarrow{\sim} W$.*

Рассмотрим те же примеры:

(0) Изоморфизм.

(1) Изоморфизм, при $k \neq 0$.

(2) 2.1 Изоморфизм.

2.2 Не изоморфизм.

(3) Не изоморфизм.

(4) Изоморфизм.

(5) Задача: доказать, что φ — изоморфизм тогда и только тогда, когда $n = m$ и $\det A \neq 0$.

Предложение. *Пусть $\varphi : V \rightarrow W$ — изоморфизм. Тогда $\varphi^{-1} : W \rightarrow V$ — тоже изоморфизм.*

Доказательство. Так как φ — биекция, то φ^{-1} — тоже биекция.

$$w_1, w_2 \in W \Rightarrow \exists v_1, v_2 \in V : \begin{cases} \varphi(v_1) = w_1 & v_1 = \varphi^{-1}(w_1) \\ \varphi(v_2) = w_2 & v_2 = \varphi^{-1}(w_2) \end{cases}$$

Тогда осталось только доказать линейность обратного отображения. Для этого проверим выполнение необходимых условий линейности.

1. $\varphi^{-1}(w_1 + w_2) = \varphi^{-1}(\varphi(v_1) + \varphi(v_2)) = \varphi^{-1}(\varphi(v_1 + v_2)) = \text{id}(v_1 + v_2) = v_1 + v_2$
2. $\alpha \in F, \quad \varphi^{-1}(\alpha w_1) = \varphi^{-1}(\alpha \varphi(v_1)) = \varphi^{-1}(\varphi(\alpha v_1)) = \text{id}(\alpha v_1) = \alpha v_1.$

□

Определение. *Два векторных пространства V и W называются изоморфными, если существует изоморфизм $\varphi : V \xrightarrow{\sim} W$ (и тогда существует изоморфизм $V \xleftarrow{\sim} W$ по предположению). Обозначение: $V \simeq W$ или $V \cong W$.*

Отображения можно соединять в композиции:

$$\left. \begin{array}{l} \varphi : U \rightarrow V \\ \psi : V \rightarrow W \end{array} \right| \Rightarrow \psi \circ \varphi : U \rightarrow W \quad \psi \circ \varphi(u) = \psi(\varphi(u))$$

Предложение.

1. Если φ и ψ линейны, то $\psi \circ \varphi$ тоже линейно.
2. Если φ и ψ изоморфизмы, то $\psi \circ \varphi$ тоже изоморфизм.

Доказательство.

1. Опять-таки, просто проверим необходимые условия линейности.

- (a) $(\psi \circ \varphi)(u_1 + u_2) = \psi(\varphi(u_1 + u_2)) = \psi(\varphi(u_1) + \varphi(u_2)) = \psi(\varphi(u_1)) + \psi(\varphi(u_2)) = (\psi \circ \varphi)(u_1) + (\psi \circ \varphi)(u_2)$
- (b) $(\psi \circ \varphi)(\alpha u) = \psi(\varphi(\alpha u)) = \psi(\alpha \varphi(u)) = \alpha \psi(\varphi(u)) = \alpha(\psi \circ \varphi)(u)$

2. Следует из сохранения линейности и того, что композиция биекций тоже биекция.

□

Следствие. *Изоморфизм это отношение эквивалентности на множестве всех векторных пространств над фиксированным полем F .*

Доказательство.

Рефлексивность $V \simeq V$.

Симметричность $V \simeq W \Rightarrow W \simeq V$.

Транзитивность $(V \simeq U) \wedge (U \simeq W) \Rightarrow V \simeq W$.

□

То есть множество всех векторных пространств над фиксированным полем F разбивается на попарно непересекающиеся классы, причем внутри одного класса любые два пространства изоморфны. Такие классы называются *классами эквивалентности*.

Теорема. *Если два конечномерных векторных пространства V и W над полем F изоморфны, то $\dim V = \dim W$.*

Но для начала докажем следующую лемму.

Лемма (1). *Для векторного пространства V над полем F размерности n верно, что $V \simeq F^n$.*

Доказательство. Рассмотрим отображение $\varphi : V \rightarrow F^n$ из примера 4. Пусть (e_1, \dots, e_n) — базис пространства V . Тогда:

$$x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad x_i \in F.$$

Отображение φ линейно и биективно, следовательно φ — изоморфизм. А раз существует изоморфное отображение между пространствами V и F^n , то они изоморфны. □

Лекция 19 от 01.02.2016

Изоморфизм (продолжение)

На прошлой лекции мы ввели теорему и доказали одну лемму. Напомним их.

Теорема. *Если два конечномерных векторных пространства V и W изоморфны, то $\dim V = \dim W$.*

Лемма (1). *Если $\dim V = n$, то $V \simeq F^n$.*

Замечание. *Говорят, что функция φ отождествляет пространство V с пространством F^n , если $\varphi : V \xrightarrow{\sim} F^n$.*

Но перед тем, как доказывать эту теорему, докажем лучше еще одну лемму.

Лемма (2). *Пусть $\varphi : V \xrightarrow{\sim} W$ — изоморфизм векторных пространств, а e_1, \dots, e_n — базис V . Тогда $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ — базис W .*

Доказательство. Пусть $w \in W$ — произвольный вектор. Положим $v \in V$ таковым, что $v = \varphi^{-1}(w)$.

$$\begin{aligned} v &= x_1 e_1 + \dots + x_n e_n, \quad x_i \in F \\ w &= \varphi(v) = \varphi(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1 \varphi(e_1) + \dots + x_n \varphi(e_n) \Rightarrow W = \langle \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n) \rangle \end{aligned}$$

Покажем, что $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ — линейно независимые вектора.

Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$ таковы, что $\alpha_1 \varphi(e_1) + \dots + \alpha_n \varphi(e_n) = 0$. Это то же самое, что $\varphi(\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n) = 0$. Применяя φ^{-1} , получаем $\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n = \varphi^{-1}(0) = 0$. Но так как e_1, \dots, e_n — базис в V , то $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$, и потому вектора $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ линейно независимы. Следовательно, этот набор векторов — базис в W . \square

Теперь приступим наконец к доказательству теоремы.

Доказательство.

$\Rightarrow V \simeq W \Rightarrow \exists \varphi : V \xrightarrow{\sim} W$. Тогда по лемме 2, если e_1, \dots, e_n — базис V , то $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ — базис W , и тогда $\dim V = \dim W$.

\Leftarrow Пусть $\dim V = \dim W = n$. Тогда по лемме 1 существуют изоморфизмы $\varphi : V \xrightarrow{\sim} F^n$ и $\psi : W \xrightarrow{\sim} F^n$. Следовательно, $\psi^{-1} \circ \varphi : V \rightarrow W$ — изоморфизм. \square

То есть получается, что с точностью до изоморфизма существует только одно векторное пространство размерности n . Однако не стоит заканчивать на этом курс линейной алгебры. Теперь главная наша проблема — это как из бесконечного множества базисов в каждом векторном пространстве выбрать тот, который будет наиболее простым и удобным для каждой конкретной задачи.

Например, рассмотрим вектор $v \in F^n$ с координатами $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Пусть $v \neq 0$. Тогда существует такой базис e_1, \dots, e_n , что $v = e_1$, то есть в этом базисе вектор имеет координаты $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Пусть V, W — векторные пространства над F , и e_1, \dots, e_n — базис V .

Предложение.

1. Всякое линейное отображение $\varphi : V \rightarrow W$ однозначно определяется векторами $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$.
2. Для всякого набора векторов $f_1, \dots, f_n \in W$ существует единственное линейное отображение $\varphi : V \rightarrow W$ такое, что $\varphi(e_1) = f_1, \dots, \varphi(e_n) = f_n$.

Доказательство.

1. Пусть $v \in V$, $v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$, где $x_i \in F$. Тогда $\varphi(v) = x_1 \varphi(e_1) + \dots + x_n \varphi(e_n)$, то есть если мы знаем вектора $\varphi(e_i)$, то сможем задать $\varphi(v)$ для любого $v \in V$.
2. Определим отображение $\varphi : V \rightarrow W$ по формуле $\varphi(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1 f_1 + \dots + x_n f_n$. Прямая проверка показывает, что φ линейна, а единственность следует из пункта 1. \square

Следствие. Если $\dim V = \dim W = n$, то для всякого базиса e_1, \dots, e_n пространства V и всякого базиса f_1, \dots, f_n пространства W существует единственный изоморфизм $\varphi : V \xrightarrow{\sim} W$ такой, что $\varphi(e_1) = f_1, \dots, \varphi(e_n) = f_n$.

Доказательство. Из пункта 2. предложения следует, что существует единственное линейное отображение $\varphi : V \rightarrow W$ такое, что $\varphi(e_1) = f_1, \dots, \varphi(e_n) = f_n$. Но тогда $\varphi(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1 \varphi(e_1) + \dots + x_n \varphi(e_n) = x_1 f_1 + \dots + x_n f_n$ для любых $x_i \in F$. Отсюда следует, что φ — биекция. \square

Матрицы линейных отображений

Пусть V и W — векторные пространства, $\mathfrak{e} = (e_1, \dots, e_n)$ — базис V , $\mathfrak{f} = (f_1, \dots, f_m)$ — базис W , $\varphi : V \rightarrow W$ — линейное отображение. Тогда:

$$\varphi(e_j) = a_{1j}f_1 + \dots + a_{mj}f_m = \sum_{i=1}^m a_{ij}f_i.$$

Определение. Матрица $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}_{m \times n}(F)$ называется матрицей линейного отображения φ в базисах \mathfrak{e} и \mathfrak{f} (или по отношению к базисам \mathfrak{e} и \mathfrak{f}).

Замечание. Существует биекция $\{\text{линейные отображения } V \rightarrow W\} \rightleftharpoons \text{Mat}_{m \times n}$.

Замечание. В $A^{(j)}$ стоят координаты $\varphi(e_j)$ в базисе \mathfrak{f} .

$$(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) = (f_1, \dots, f_n) \cdot A$$

Рассмотрим пример.

Пусть $P_n = F[x]_{\leq n}$ — множество многочленов над полем F степени не выше n . Возьмем дифференцирование $\Delta : P_n \rightarrow P_{n-1}$.

Базис $P_n = 1, x, x^2, \dots, x^n$. Базис $P_{n-1} = 1, x, \dots, x^{n-1}$. Тогда матрица линейного отображения будет размерности $n \times (n+1)$ и иметь следующий вид.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{pmatrix}$$

Предложение. Если $v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ и $\varphi(v) = y_1 f_1 + \dots + y_m f_m$, то

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Доказательство. С одной стороны:

$$\varphi(v) = x_1 \varphi(e_1) + \dots + x_n \varphi(e_n) = (\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (f_1, \dots, f_m) A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Однако с другой стороны:

$$\varphi(v) = (f_1, \dots, f_m) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

Сравнивая обе части, получаем требуемое. \square

А теперь проанализируем операции над матрицами линейных отображений.

V и W — векторные пространства. **Обозначение:** $\text{Hom}(V, W) :=$ множество всех линейных отображений $V \rightarrow W$.

Пусть $\varphi, \psi \in \text{Hom}(V, W)$.

Определение.

1. $\varphi + \psi \in \text{Hom}(V, W)$ — это $(\varphi + \psi)(v) := \varphi(v) + \psi(v)$.
2. $\alpha \in F, \alpha\varphi \in \text{Hom}(V, W)$ — это $(\alpha\varphi)(v) := \alpha(\varphi(v))$.

Упражнение.

1. Проверить, что $\varphi + \psi$ и $\alpha\varphi$ действительно принадлежат $\text{Hom}(V, W)$.
2. Проверить, что $\text{Hom}(V, W)$ является векторным пространством.

Предложение. Пусть $e = (e_1, \dots, e_n)$ — базис V , $f = (f_1, \dots, f_m)$ — базис W , $\varphi, \psi \in \text{Hom}(V, W)$. При этом A_φ — матрица линейного отображения φ , A_ψ — матрица для ψ , $A_{\varphi+\psi}$ — для $\varphi + \psi$, а $A_{\alpha\varphi}$ — для $\alpha\varphi$.

Тогда $A_{\varphi+\psi} = A_\varphi + A_\psi$ и $A_{\alpha\varphi} = \alpha A_\varphi$.

Доказательство. Упражнение. □

Теперь возьмем три векторных пространства — U, V и W размерности n, m и k соответственно, и их базисы e, f и g . Также рассмотрим цепочку линейных отображений $U \xrightarrow{\psi} V \xrightarrow{\varphi} W$. Пусть A — матрица φ в базисах f и g , B — матрица ψ в базисах e и f , C — матрица $\varphi \circ \psi$ в базисах e и g .

Предложение. $C = AB$.

Замечание. Собственно говоря, отсюда и взялось впервые определение умножения матриц.

Доказательство. Запишем по определению:

$$\begin{aligned} (\varphi \circ \psi)(e_r) &= \sum_{p=1}^k c_{pr} g_p, \quad r = 1, \dots, n \\ \psi(e_r) &= \sum_{q=1}^m b_{qr} f_q, \quad r = 1, \dots, n \\ \varphi(f_q) &= \sum_{p=1}^k a_{pq} g_p, \quad q = 1, \dots, m \end{aligned}$$

Тогда:

$$\begin{aligned} (\varphi \circ \psi)(e_r) &= \varphi(\psi(e_r)) = \varphi\left(\sum_{q=1}^m b_{qr} f_q\right) = \sum_{q=1}^m b_{qr} \varphi(f_q) = \sum_{q=1}^m b_{qr} \left(\sum_{p=1}^k a_{pq} g_p\right) = \sum_{p=1}^k \left(\sum_{q=1}^m a_{pq} b_{qr}\right) g_p \\ &\Downarrow \\ c_{pr} &= \sum_{q=1}^m a_{pq} b_{qr} \\ &\Downarrow \\ C &= AB \end{aligned}$$

□

И снова, пусть V и W — векторные пространства с линейным отображением $\varphi : V \rightarrow W$.

Определение. Ядро φ — это множество $\text{Ker } \varphi := \{v \in V \mid \varphi(v) = 0\}$.

Определение. Образ φ — это множество $\text{Im } \varphi := \{w \in W \mid \exists v \in V : \varphi(v) = w\}$.

Пример. Все то же $\Delta : P_n \rightarrow P_{n-1}$. Для него $\text{Ker } \Delta = \{f \mid f = \text{const}\}$, $\text{Im } \Delta = P_{n-1}$.

Лекция 20 от 08.02.2016

Линейные отображения (продолжение)

Пусть $\varphi : V \rightarrow W$ — линейное отображение.

Предложение.

1. $\text{Ker } \varphi$ — подпространство в V .
2. $\text{Im } \varphi$ — подпространство в W .

Доказательство. Проверим по определению.

1.
 - $\varphi(0_v) = 0_w$ — этот факт мы уже доказали.
 - $v_1, v_2 \in \text{Ker } \varphi \Rightarrow \varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) = 0_w + 0_w = 0_w \Rightarrow v_1 + v_2 \in \text{Ker } \varphi$.
 - $v \in \text{Ker } \varphi, \alpha \in F \Rightarrow \varphi(\alpha v) = \alpha \varphi(v) = \alpha 0 = 0$, то есть αv тоже лежит в ядре.
2.
 - $0_w = \varphi(0_v) \Rightarrow 0_w \in \text{Im } (\varphi)$.
 - $w_1, w_2 \in \text{Im } \varphi \Rightarrow \exists v_1, v_2 \in V : w_1 = \varphi(v_1), w_2 = \varphi(v_2) \Rightarrow w_1 + w_2 = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) = \varphi(v_1 + v_2) \Rightarrow w_1 + w_2 \in \text{Im } \varphi$.
 - $w \in \text{Im } \varphi, \alpha \in F \Rightarrow \exists v \in V : \varphi(v) = w \Rightarrow \alpha w = \alpha \varphi(v) = \varphi(\alpha v) \Rightarrow \alpha w \in \text{Im } \varphi$.

То есть все условия подпространства по определению выполнены и предложение доказано. \square

Предложение.

1. φ инъективно тогда и только тогда, когда $\text{Ker } \varphi = \{0\}$.
2. φ сюръективно тогда и только тогда, когда $\text{Im } \varphi = W$.

Доказательство.

1.
 - $[\Rightarrow]$ Очевидно.
 - $[\Leftarrow]$ Пусть v_1, v_2 таковы, что $\varphi(v_1) = \varphi(v_2) \Rightarrow \varphi(v_1 - v_2) = 0 \Rightarrow v_1 - v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = v_2$.
2. Очевидно из определения образа.

\square

Следствие. φ — изоморфизм тогда, и только тогда, когда $\text{Ker } \varphi = \{0\}$ и $\text{Im } \varphi = W$.

Предложение. $U \subset V$ — подпространство и e_1, \dots, e_k — базис. Тогда

1. $\varphi(U)$ — подпространство, $\varphi(U) = \langle \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_k) \rangle$.
2. $\dim \varphi(U) \leq \dim U$.

Доказательство.

1. $\varphi(x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_ke_k) = x_1\varphi(e_1) + \dots + x_k\varphi(e_k) \in \langle \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_k) \rangle$.
2. $\varphi(U) = \langle \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_k) \rangle \Rightarrow \dim \varphi(U) \leq \dim U$ по основной лемме о линейной зависимости.

□

V, W — векторные пространства, $\mathfrak{e} = (e_1, \dots, e_n)$ — базис V , $\mathfrak{f} = (f_1, \dots, f_m)$ — базис W . A — матрица φ по отношению к $\mathfrak{e}, \mathfrak{f}$.

Предложение. $\dim \operatorname{Im} \varphi = \operatorname{rk} A$.

Доказательство.

$$\begin{aligned} v \in V, v &= x_1e_1 + \dots + x_ne_n \\ \varphi(v) &= y_1f_1 + \dots + y_mf_m \end{aligned}$$

Тогда
$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

$A^{(j)}$ — столбец координат в базисе \mathfrak{f} , $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$.

$$\alpha_1\varphi(e_1) + \dots + \alpha_n\varphi(e_n) = 0 \Leftrightarrow \alpha_1A^{(1)} + \dots + \alpha_nA^{(n)} = 0$$

Отсюда следует, что

$$\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} \{\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)\} = \dim \underbrace{\langle \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n) \rangle}_{\operatorname{Im} \varphi} = \dim \operatorname{Im} \varphi$$

□

Следствие. Величина $\operatorname{rk} A$ не зависит от выбора базисов $\mathfrak{e}, \mathfrak{f}$.

Определение. $\operatorname{rk} A$ называется рангом линейного отображения φ , обозначается $\operatorname{rk} \varphi$.

Следствие. Если $\dim V = \dim W = n$, то φ — изоморфизм тогда и только тогда, когда $\det A \neq 0$. Тогда A — квадратная.

Доказательство.

$[\Rightarrow]$ φ — изоморфизм, следовательно

$$\operatorname{Im} \varphi = W \Rightarrow \dim \operatorname{Im} \varphi = n \Rightarrow \operatorname{rk} A = n \Rightarrow \det A \neq 0$$

$$[\Leftarrow] \det A \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}.$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

Таким образом, φ — биекция, а значит изоморфизм.

□

Следствие. $A \in \operatorname{Mat}_{k \times m}, B \in \operatorname{Mat}_{m \times n}$. Тогда $\operatorname{rk} AB \leq \min\{\operatorname{rk} A, \operatorname{rk} B\}$

Доказательство. Реализуем A, B как матрицы линейных отображений, то есть $\varphi_A: F^m \rightarrow F^k, \varphi_B: F^n \rightarrow F^m$. Тогда матрица AB — матрица отображения $\varphi_A \circ \varphi_B$.

$$\operatorname{rk}(AB) = \operatorname{rk}(\varphi_A \circ \varphi_B) \begin{cases} \leq \dim \operatorname{Im} \varphi_A = \operatorname{rk} A \\ \leq \dim \operatorname{Im} \varphi_B = \operatorname{rk} B \end{cases}$$

Первое неравенство верно так как $\operatorname{Im}(\varphi_A \circ \varphi_B) \subset \operatorname{Im} \varphi_A \Rightarrow \dim \operatorname{Im}(\varphi_A \circ \varphi_B) \leq \dim \operatorname{Im} \varphi_A$. Рассматривая второе неравенство, получаем, что

$$\operatorname{Im}(\varphi_A \circ \varphi_B) = \varphi_A(\operatorname{Im} \varphi_B) \Rightarrow \dim \operatorname{Im}(\varphi_A \circ \varphi_B) = \dim(\varphi_A(\operatorname{Im} \varphi_B)) \leq \dim \operatorname{Im} \varphi_B$$

□

Упражнение.

- Если A квадратна и $\det A \neq 0$, то $\operatorname{rk} AB = \operatorname{rk} B$.
- Если $B \in M_n$ и $\det B \neq 0$, то $\operatorname{rk} AB = \operatorname{rk} A$.

Теорема. $\dim \operatorname{Im} \varphi = \dim \varphi - \dim \operatorname{Ker} \varphi$

Существует 2 способа доказательства. Рассмотрим оба.

Бескоординатный способ. Пусть $\dim \operatorname{Ker} \varphi = k$ и e_1, \dots, e_k — базис в $\operatorname{Ker} \varphi$. Дополним его до базиса V векторами e_{k+1}, \dots, e_n . Тогда

$$\operatorname{Im} \varphi = \langle \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_k), \dots, \varphi(e_n) \rangle = \langle 0, 0, \dots, 0, \varphi(e_{k+1}), \dots, \varphi(e_n) \rangle = \langle \varphi(e_{k+1}), \dots, \varphi(e_n) \rangle$$

Пусть $\alpha_{k+1}\varphi(e_{k+1}) + \dots + \alpha_n\varphi(e_n) = 0$ для некоторых $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$. Тогда

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha_{k+1}e_{k+1} + \dots + \alpha_n e_n) &= 0 \\ \Rightarrow \alpha_{k+1}e_{k+1} + \dots + \alpha_n e_n &\in \operatorname{Ker} \varphi \\ \Rightarrow \alpha_{k+1}e_{k+1} + \dots + \alpha_n e_n &= \beta_1 e_1 + \dots + \beta_k e_k \end{aligned}$$

для некоторых $\beta_1, \dots, \beta_k \in F$. Но так как e_1, \dots, e_k — базис в V , то $\alpha_{k+1} = \dots = \alpha_n = \beta_1 = \dots = \beta_k = 0$. То есть $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ линейно независимы, а значит образуют базис $\operatorname{Im} \varphi$. Отсюда следует, что $\dim \operatorname{Im} \varphi = n - k = \dim V - \dim \operatorname{Ker} \varphi$ □

Координатный способ. Зафиксируем базис $\mathfrak{e} = (e_1, \dots, e_n)$ в V и $\mathfrak{f} = (f_1, \dots, f_m)$ в W . Пусть A — матрица φ в базисе \mathfrak{f} . Тогда $v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$, $\varphi(v) = y_1 f_1 + \dots + y_m f_m$. Получим,

что $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. $\operatorname{Ker} \varphi$ состоит из векторов, координаты которых удовлетворяют СЛУ

$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$. Ранее в курсе мы уже доказали, что размерность пространства решений равна $n - \operatorname{rk} A$, то есть $\dim \operatorname{Im} \varphi = n - \operatorname{rk} A = \dim V - \dim \operatorname{Ker} \varphi$. □

Линейные операторы

Пусть V — конечномерное векторное пространство.

Определение. Линейным оператором (или линейным преобразованием) называется всякое линейное отображение $\varphi: V \rightarrow V$, то есть из V в себя.

Обозначается $L(V) = \text{Hom}(V, V)$.

Пусть $\mathfrak{e} = (e_1, \dots, e_n)$ — базис в V и $\varphi \in L(V)$. $(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) = (e_1, \dots, e_n)A$. В таком случае A — матрица линейного оператора в базисе \mathfrak{e} .

В столбце $A^{(j)}$ стоят координаты $\varphi(e_j)$ в базисе \mathfrak{e} . Матрица A — квадратная.

Пример.

1. $\varphi(v) = 0 \forall v \in V$ — нулевая матрица.
2. Тождественный оператор $\text{id}(v) = v \forall v \in V$ — единичная матрица.
3. Скалярный оператор $\lambda \text{id}(v) = \lambda v$, матрица λE в любом базисе.

Следствие (Следствия из общих фактов о линейных отображениях).

1. Всякий линейный оператор однозначно определяется своей матрицей в любом фиксированном базисе.
2. Для всякой квадратной матрицы $\exists!$ $\varphi \in L(V)$ такой, что матрица φ есть A .
3. $\varphi \in L(V)$, A — матрица φ в базисе \mathfrak{e} .

$$\begin{aligned} v &= x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \\ \varphi(v) &= y_1 e_1 + \dots + y_n e_n \\ \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} &= A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Пусть $\varphi \in L(V)$. A — матрица φ в базисе $\mathfrak{e} = (e_1, \dots, e_n)$. $\mathfrak{e}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ — другой базис, причём $(e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n)C$, где C — матрица перехода. A' — матрица φ в базисе \mathfrak{e}' .

Предложение. $A' = C^{-1}AC$.

Доказательство.

$$\begin{aligned} (e'_1, \dots, e'_n) &= (e_1, \dots, e_n)C. \\ e'_j &= \sum_{i=1}^n c_{ij} e_i \\ \varphi(e'_j) &= \varphi\left(\sum_{i=1}^n c_{ij} e_i\right) = \sum_{i=1}^n c_{ij} \varphi(e_i) \\ (\varphi(e'_1), \dots, \varphi(e'_n)) &= (\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))C = (e_1, \dots, e_n)AC = (e'_1, \dots, e'_n) \underbrace{C^{-1}AC}_{A'} \end{aligned}$$

□

Лекция 21 от 15.02.2016

Инвариантность и обратимость

Пусть $\varphi: V \rightarrow V$ — линейный оператор. \mathfrak{e} — базис в V .

Обозначение. $A(\varphi, \epsilon)$ — матрица линейного оператора φ в базисе ϵ .

Если $\epsilon' = (e'_1, \dots, e'_n)$ — ещё один базис, причём $(e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n)C$, где C — матрица перехода. $A = A(\varphi, \epsilon)$, $A' = A(\varphi, \epsilon')$. В прошлый раз мы доказали, что $A' = C^{-1}AC$.

Следствие. Величина $\det A$ не зависит от выбора базиса.

Доказательство. A' — матрица φ в другом базисе. Тогда получается

$$\det A' = \det (C^{-1}AC) = \det C^{-1} \det A \det C = \det A \det C \frac{1}{\det C} = \det A$$

□

Заметим, что $\det A$ — инвариант самого φ .

Обозначение. $\det \varphi$

Определение. Две матрицы $A', A \in M_n(F)$ называются подобными, если $\exists C \in M_n(F), \det C \neq 0: A' = C^{-1}AC$

Замечание. Отношение подобия на M_n является отношением эквивалентности.

Предложение. Пусть $\varphi \in L(V)$. Тогда эти условия эквивалентны

1. $\text{Ker } \varphi = \{0\}$
2. $\text{Im } \varphi = V$
3. φ обратим (то есть биекция, изоморфизм)
4. $\det \varphi \neq 0$

Доказательство.

1. $\Leftrightarrow 2$ — следует из формулы $\dim V = \dim \text{Ker } \varphi + \dim \text{Im } \varphi$
2. $\Leftrightarrow 3$ — уже было
3. $\Leftrightarrow 4$ — уже было

□

Определение. Линейный оператор φ называется вырожденным, если $\det \varphi = 0$, и невырожденным, если $\det \varphi \neq 0$

Определение. Подпространство $U \subset V$ называется инвариантным относительно φ (или φ -инвариантным), если $\varphi(U) \subset U$. То есть $\varphi(u) \in U \forall u \in U$.

Пример.

1. $\{0\}, V$ — они инвариантны для любого φ .
2. $\text{Ker } \varphi$ φ -инвариантно, $\varphi(\text{Ker } \varphi) = \{0\} \subset \text{Ker } \varphi$
3. $\text{Im } \varphi$ тоже φ -инвариантно, $\varphi(\text{Im } \varphi) \subset \varphi(V) = \text{Im } \varphi$.

Пусть $U \subset V$ — φ -инвариантное подпространство. Также пусть (e_1, \dots, e_n) — базис в U . Дополним его до базиса V : $\mathfrak{e} = (e_1, \dots, e_n)$.

$$\underbrace{A(\varphi, \mathfrak{e})}_{\text{Матрица с углом нулей}} = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}, \text{ где } B \in M_k$$

Это нетрудно понять, если учесть, что $\varphi(e_i) \in \langle e_1, \dots, e_k \rangle$, $i = 1, \dots, k$. Если $U = \text{Ker } \varphi$, то $B = 0$. Если $U = \text{Im } \varphi$, то $D = 0$.

Обратно, если в базисе \mathfrak{e} имеет такой вид, то $U = \langle e_1, \dots, e_k \rangle$ — инвариантное подпространство.

Обобщение. $V = U \oplus W$, где U, W — инвариантные подпространства, (e_1, \dots, e_k) — базис W , тогда $\mathfrak{e} = (e_1, \dots, e_n)$ — базис V .

$$A(\varphi, \mathfrak{e}) = \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

Обобщение.

$$\begin{pmatrix} * & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & * & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & * & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & * \end{pmatrix} \begin{matrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ \vdots \\ k_s \end{matrix}$$

Здесь k_1, \dots, k_s — размеры квадратных блоков блочно-диагональной матрицы. $A(\varphi, \mathfrak{e})$ имеет такой вид тогда и только тогда, когда все подпространства

$$\begin{aligned} U_1 &= \langle e_1, \dots, e_{k_1} \rangle \\ U_2 &= \langle e_{k_1+1}, \dots, e_{k_2} \rangle \\ &\vdots \\ U_{k_s} &= \langle e_{n-k_s+1}, \dots, e_n \rangle \end{aligned}$$

Предел мечтаний. Найти такой базис, в котором матрица линейного оператора была бы диагональной. Но такое возможно не всегда

Собственные векторы и собственные значения

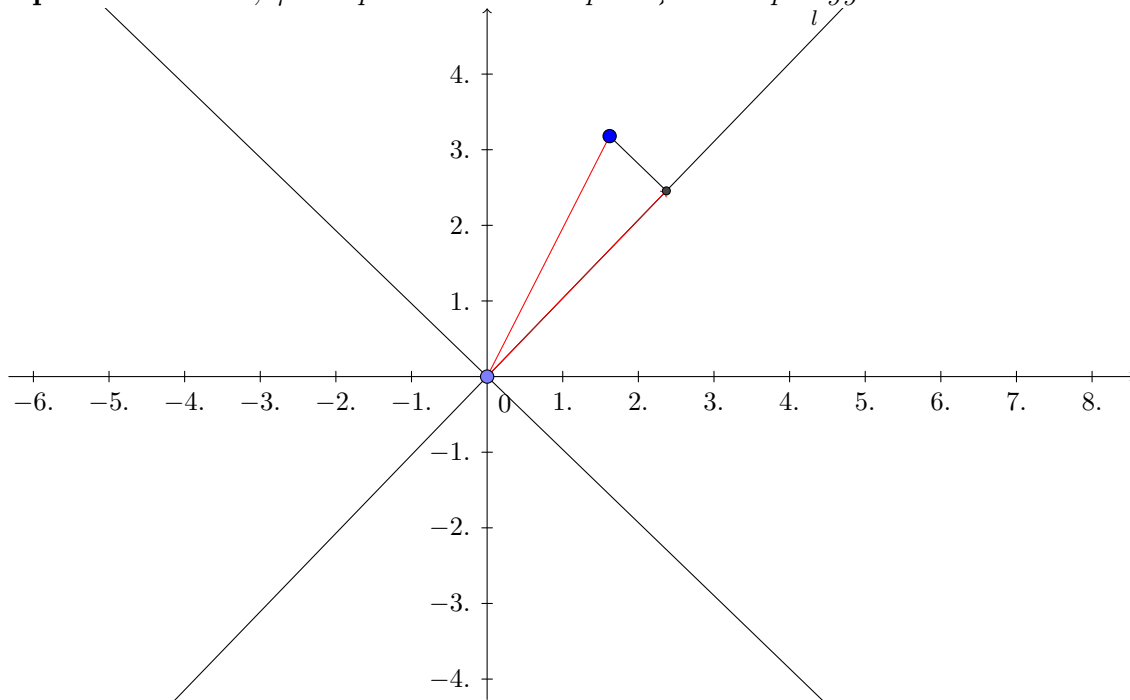
Пусть $\varphi \in L(V)$

Определение. Ненулевой вектор $v \in V$ называется собственным для V , если $\varphi(v) = \lambda v$ для некоторого $\lambda \in F$. При этом число λ называется собственным значением линейного оператора φ , отвечающим собственному вектору v .

Предложение. $0 \neq v \in V$ — собственный вектор в V тогда и только тогда, когда $\langle v \rangle$ является φ -инвариантным подпространством

Доказательство. $[\Rightarrow] \varphi(v) = \lambda v \Rightarrow \langle v \rangle = \{kv \mid k \in F\}$. Тогда $\varphi(kv) = \lambda kv \in \langle v \rangle$. $[\Leftarrow] \varphi(V) \in \langle v \rangle \Rightarrow \exists \lambda \in F: \varphi(v) = \lambda v$ □

Пример. 1. $V = \mathbb{R}^2$, φ — ортогональная проекция на прямую l .



$$\begin{aligned} 0 \neq v \in l &\Rightarrow \varphi(v) = 1 \cdot v, \lambda = 1 \\ 0 \neq v \perp l &\Rightarrow \varphi(v) = 0 = 0 \cdot v, \lambda = 0 \end{aligned}$$

2. Поворот на угол φ вокруг нуля на угол α .

- $\alpha = 0 + 2\pi k$. Любой ненулевой вектор собственный. $\lambda = 1$.
- $\alpha = \pi + 2\pi k$. Любой ненулевой вектор собственный. $\lambda = -1$.
- $\alpha \neq \pi k$. Собственных векторов нет.

3. $V = P_n(F)$ — многочлены степени n . $\varphi = \Delta: f \rightarrow f'$. Тогда $0 \neq f$ — собственный вектор тогда, и только тогда, когда $f = \text{const}$

Диагонализуемость

Определение. Линейный оператор φ называется диагонализуемым, если \exists базис e в V : $A(\varphi, e)$ диагональна.

Предложение (Критерий диагонализуемости). φ диагонализуем тогда и только тогда, когда в V существует базис из собственных векторов.

Доказательство. e — базис V . $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \Leftrightarrow \varphi(e_i) = \lambda_i e_i$, что эквивалентно тому, что все векторы собственные. \square

В примерах выше

1. φ диагонализуем. $e_1 \in l$, $e_2 \perp l$. Тогда матрица примет вид $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
2. Если $\alpha = \pi k$, то φ диагонализуем ($\varphi = \text{id}$ или $\varphi = -\text{id}$). Не диагонализуем в других случаях.
3. φ диагонализуем тогда и только тогда, когда $n = 0$. При $n > 0$ собственных векторов МАЛО.

Собственное подпространство

Пусть $\varphi \in L(V)$, $x \in F$.

Определение. Множество $V_\lambda(\varphi) = \{v \in V \mid \varphi(v) = \lambda v\}$ называется собственным подпространством линейного оператора, отвечающим собственному значению λ . Лектор предлагает доказать то, что это подпространство, в качестве упражнения.

Предложение. $V_\lambda(\varphi) = \text{Ker}(\varphi - \lambda \text{id})$

Доказательство. $v \in V_\lambda(\varphi) \Leftrightarrow \varphi(v) = \lambda v \Leftrightarrow \varphi(v) - \lambda v = 0 \Leftrightarrow (\varphi - \lambda \text{id})(v) = 0 \Leftrightarrow v \in \text{Ker}(\varphi - \lambda \text{id})$ \square

Следствие. $v_\lambda(\varphi) \neq 0 \Leftrightarrow \det(\varphi - \lambda \text{id}) = 0$

Определение. Многочлен $\chi_\varphi(t) = (-1)^n \det(\varphi - t \text{id})$ называется характеристическим.

Лекция 22 от 22.02.2016

Деление многочленов с остатком

Пусть F — поле, $\mathbb{F}[x]$ — множество всех многочленов от переменных x с коэффициентами из \mathbb{F} .

Теорема. Пусть $G(x), H(x) \in \mathbb{F}[x]$ — ненулевые многочлены, тогда существует единственная пара $Q(x), R(x) \in \mathbb{F}[x]$ такая, что:

1. $G(x) = Q(x) \cdot H(x) + R(x)$;
2. $\deg R(x) < \deg H(x)$ или $R(x) = 0$.

Доказательство. Аналогично делению рациональных чисел с остатком. \square

Рассмотрим важный частный случай: $H(x) = x - a$.

Теорема (Безу). Если $G(x), Q(x) \in \mathbb{F}[x]$ — ненулевые многочлены, $a \in \mathbb{F}$, то $R = G(a)$ и $G(x) = Q(x)(x - a) + R$.

Доказательство.

$$\begin{aligned} G(x) &= Q(x) \cdot H(x) + R(x) \\ H(x) &= (x - a) \Rightarrow \deg R < \deg(x - a) \Rightarrow \deg R = 0 \end{aligned}$$

Подставим $x = a$:

$$G(a) = Q(a)(a - a) + R = 0 + R = R \Rightarrow G(a) = R.$$

\square

Теорема. Многочлен степени n в поле комплексных чисел имеет n комплексных корней.

Доказательство. По основной теореме алгебры каждый многочлен $G(x) \in \mathbb{C}[x]$ степени больше 1 имеет корень. Тогда $G(x) = (x - a_1)G_1(x)$, где a_1 — корень многочлена $G(x)$. В свою очередь, многочлен $G_1(x)$ также имеет корень, и тогда $G(x) = (x - a_1)G_1(x) = (x - a_1)(x - a_2)G_2(x)$. Продолжая по индукции, получаем, что $G(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)b_n$, где b_n — коэффициент при старшем члене. \square

Также мы получаем следующее представление:

$$b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_0 = b_n (x - a_1)^{k_1} \dots (x - a_s)^{k_s}$$

Определение. Кратностью корня a_i называется число k_i такое, что в многочлене $b_n (x - a_1)^{k_1} \dots (x - a_s)^{k_s}$ множитель $(x - a_i)$ имеет степень k_i .

Собственные значения и характеристический многочлен

Определение. Пусть V — конечномерное векторное пространство над полем \mathbb{F} . Рассмотрим линейный оператор $\varphi : V \rightarrow V$. Тогда характеристический многочлен φ имеет вид:

$$\begin{aligned}\chi_\varphi(t) &= (-1)^n \det(\varphi - tE) = (-1)^n \begin{vmatrix} a_{11} - t & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - t & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - t \end{vmatrix} = \\ &= (-1)^n (t^n(-1)^n + \dots) = t^n + c_{n-1}t^{n-1} + \dots + c_0\end{aligned}$$

Упражнение. Доказать, что:

$$\begin{aligned}c_{n-1} &= -\operatorname{tr} \varphi; \\ c_0 &= (-1)^n \det \varphi.\end{aligned}$$

Утверждение. λ — собственное значение линейного оператора φ тогда и только тогда, когда $\chi_\varphi(\lambda) = 0$.

Доказательство. λ — собственное значение $\Leftrightarrow \exists v \neq 0 : \varphi(v) = \lambda v \Leftrightarrow (\varphi - \lambda E)v = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Ker}(\varphi - \lambda E) \neq \{0\} \Leftrightarrow \det(\varphi - \lambda E) = 0 \Leftrightarrow \chi_\varphi(\lambda) = 0$. \square

Утверждение. Если $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ и $\dim V > 0$, то любой линейный оператор имеет собственный вектор.

Доказательство. Пусть $\varphi : V \rightarrow V$ — линейный оператор. У него существует характеристический многочлен $\chi_\varphi(x)$. Тогда по основной теореме алгебры у $\chi_\varphi(x)$ есть корень t_0 — собственное значение φ , следовательно существует и собственный вектор v_0 с собственным значением t_0 . \square

Пример. Для линейного оператора $\varphi = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (поворот на 90° градусов против часовой стрелки относительно начала координат) характеристический многочлен имеет вид $\chi_\varphi(x) = t^2 + 1$.

При $\mathbb{F} = \mathbb{R} \Rightarrow$ собственных значений нет.

При $\mathbb{F} = \mathbb{C} \Rightarrow$ собственные значения $\pm i$.

Геометрическая и алгебраическая кратности

Определение. Пусть λ — собственное значение φ , тогда $V_\lambda = \{v \in V \mid \varphi(v) = \lambda v\}$ — собственное подпространство, то есть пространство, состоящее из собственных векторов с собственным значением λ и нуля.

Определение. $\dim V_\lambda$ — геометрическая кратность собственного значения λ .

Определение. Если k — кратность корня характеристического многочлена, то k — алгебраическая кратность корня.

Утверждение. Геометрическая кратность не больше алгебраической кратности.

Доказательство. Зафиксируем базис u_1, \dots, u_p в пространстве V_λ , где $p = \dim V_\lambda$. Дополним базис u_1, \dots, u_p до базиса $u_1, \dots, u_p, u_{p+1}, \dots, u_n$ пространства V . Матрица линейного оператора φ будет выглядеть следующим образом:

$$A_\varphi = \left(\begin{array}{c|c} \lambda E & A \\ \hline 0 & B \end{array} \right), \quad \lambda E \in M_p, \quad A \in M_{n-p}$$

Тогда характеристический многочлен будет следующим:

$$\chi_\varphi(t) = (-1)^n \det(A_\varphi - t) = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda - t & & 0 & \\ & \ddots & & \\ 0 & & \lambda - t & A \\ \hline & 0 & & b - tE \end{array} \right) = (-1)^n (\lambda - t)^p \dim(B - tE)$$

Как видим, $\chi_\varphi(t)$ имеет корень кратности хотя бы p , следовательно, геометрическая кратность, которая равна p по условию, точно не превосходит алгебраическую. \square

Пример. Рассмотрим линейный оператор $\varphi = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

$V_2 = \langle e_1 \rangle \Rightarrow$ геометрическая кратность равна 1.

$\chi_\varphi(t) = (t - 2)^2 \Rightarrow$ алгебраическая кратность равна 2.

Сумма и прямая сумма нескольких подпространств

Определение. Пусть $U_1, \dots, U_k \subseteq V$ — векторные пространства. Суммой нескольких пространств называется $U_1 + \dots + U_k = \{u_1 + \dots + u_k \mid u_i \in U_i\}$.

Упражнение. $U_1 + \dots + U_k$ — подпространство.

Определение. Сумма пространств называется прямой, если $u_1 + \dots + u_k = 0$ тогда и только тогда, когда $u_1 = \dots = u_k = 0$. Обозначение: $U_1 \oplus \dots \oplus U_k$.

Упражнение. Если $v \in U_1 \oplus \dots \oplus U_k$, то существует единственный такой набор $u_1 \in U_1, \dots, u_k \in U_k$, что $v = u_1 + \dots + u_k$.

Теорема. Следующие условия эквивалентны:

1. Сумма $U_1 + \dots + U_k$ — прямая;
2. Если e_i — базис U_i , то $e = e_1 \cup \dots \cup e_k$ — базис $U_1 + \dots + U_k$;
3. $\dim(U_1 + \dots + U_k) = \dim U_1 + \dots + \dim U_k$.

Доказательство.

(1) \Rightarrow (2) Пусть мы имеем прямую сумму $U_1 \oplus \dots \oplus U_k$. Покажем, что $e_1 \cup \dots \cup e_k$ — базис $U_1 \oplus \dots \oplus U_k$.

Возьмем вектор $v \in U_1 \oplus \dots \oplus U_k$ и представим его в виде суммы $v = u_1 + \dots + u_k$, где $u_i \in U_i$. Такое разложение единственное, так как сумма прямая. Теперь представим каждый вектор этой суммы в виде линейной комбинации базиса соответствующего пространства:

$$v = (c_1^1 e_1^1 + \dots + c_{s_1}^1 e_{s_1}^1) + \dots + (c_1^k e_1^k + \dots + c_{s_k}^k e_{s_k}^k)$$

Здесь e_j^i это j -ый базисный вектор в e_i , базисе U_i . Соответственно, c_j^i это коэффициент перед данным вектором.

Если $e \neq e_1 \cup \dots \cup e_k$, то существует какая-то еще линейная комбинация вектора v через эти же векторы:

$$v = (d_1^1 e_1^1 + \dots + d_{s_1}^1 e_{s_1}^1) + \dots + (d_1^k e_1^k + \dots + d_{s_k}^k e_{s_k}^k)$$

Вычтем одно из другого:

$$0 = v - v = ((d_1^1 - c_1^1) e_1^1 + \dots + (d_{s_1}^1 - c_{s_1}^1) e_{s_1}^1) + \dots + ((d_1^k - c_1^k) e_1^k + \dots + (d_{s_k}^k - c_{s_k}^k) e_{s_k}^k)$$

Но по определению прямой суммы, ноль представим только как сумма нулей, то есть d_j^i должно равняться c_j^i . А это значит, что не существует никакой другой линейной комбинации вектора v . Что нам и требовалось.

(2) \Rightarrow (1) Пусть $\mathfrak{e} = \mathfrak{e}_1 \cup \dots \cup \mathfrak{e}_k$ — базис $U_1 + \dots + U_k$. Тогда представим 0 в виде суммы векторов из данных пространств: $0 = u_1 + \dots + u_k$, где $u_i \in U_i$. Аналогично прошлому пункту, разложим векторы по базисам:

$$0 = (c_1^1 e_1^1 + \dots + c_{s_1}^1 e_{s_1}^1) + \dots + (c_1^k e_1^k + \dots + c_{s_k}^k e_{s_k}^k)$$

Но только тривиальная комбинация базисных векторов дает ноль. Следовательно, $u_1 = \dots = u_k = 0$, и наша сумма по определению прямая.

(2) \Rightarrow (3) Пусть $\mathfrak{e} = \mathfrak{e}_1 \cup \dots \cup \mathfrak{e}_k$ — базис $U_1 + \dots + U_k$. Тогда:

$$\dim(U_1 + \dots + U_k) = \dim(\mathfrak{e}) = \dim(\mathfrak{e}_1) + \dots + \dim(\mathfrak{e}_k) = \dim(U_1) + \dots + \dim(U_k).$$

(3) \Rightarrow (2) Пусть $\dim(U_1 + \dots + U_k) = \dim U_1 + \dots + \dim U_k$.

Векторы \mathfrak{e} порождают сумму, следовательно, из \mathfrak{e} можно выделить базис суммы:

$$\dim(U_1 + \dots + U_k) \leq \dim(\mathfrak{e}) \leq \dim(\mathfrak{e}_1) + \dots + \dim(\mathfrak{e}_k) = \dim U_1 + \dots + \dim U_k.$$

Но по условию $\dim(U_1 + \dots + U_k) = \dim U_1 + \dots + \dim U_k$. Тогда $\dim(U_1 + \dots + U_k) = \dim(\mathfrak{e})$, и \mathfrak{e} это базис $U_1 + \dots + U_k$.

□

Лекция 23 от 29.02.2016

Сумма собственных подпространств

Вспомним, чем закончилась прошлая лекция.

Пусть V — векторное пространство, $U_1, \dots, U_k \subseteq V$ — векторные подпространства.

Сумма $U = U_1 + \dots + U_k$ является прямой, если из условия $u_1 + \dots + u_k = 0$ следует, что $u_1 = \dots = u_k = 0$, где $u_i \in U_i$. Обозначение: $U = U_1 \oplus \dots \oplus U_k$.

Эквивалентные условия:

1. $U = U_1 \oplus \dots \oplus U_k$.
2. Если \mathfrak{e}_i — базис U_i , то $\mathfrak{e} = \mathfrak{e}_1 \cup \dots \cup \mathfrak{e}_k$ — базис U .
3. $\dim U = \dim U_1 + \dots + \dim U_k$.

Пусть V — векторное пространство над полем F , $\varphi \in L(V)$, $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ — набор собственных значений φ , где $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$, и $V_{\lambda_i}(\varphi) \subseteq V$ — соответствующее собственное подпространство.

Предложение. Сумма $V_{\lambda_1}(\varphi) + \dots + V_{\lambda_k}(\varphi)$ является прямой.

Доказательство. Докажем индукцией по k .

База: $k = 1$. Тут все ясно.

Теперь пусть утверждение доказано для всех значений, меньших k . Докажем для k .

Пусть $v_i \in V_{\lambda_i}(\varphi)$ и пусть $v_1 + \dots + v_k = 0$. Тогда:

$$\begin{aligned} \varphi(v_1 + \dots + v_k) &= \varphi(0) = 0 \\ \varphi(v_1) + \dots + \varphi(v_k) &= 0 \\ \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k &= 0 \end{aligned}$$

Теперь вычтем из нижней строчки $v_1 + \dots + v_k = 0$, домноженное на λ_k . Получим:

$$\begin{aligned} (\lambda_1 - \lambda_k)v_1 + \dots + (\lambda_k - \lambda_k)v_k &= 0 \\ (\lambda_1 - \lambda_k)v_1 + \dots + (\lambda_{k-1} - \lambda_k)v_{k-1} + 0v_k &= 0 \end{aligned}$$

Но из предположения индукции, а также потому что $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$, следует, что $v_1 = \dots = v_{k-1} = 0$. Но тогда и $v_k = 0$.

Следовательно, сумма прямая, что нам и требовалось. \square

Диагонализируемость

Следствие. Если характеристический многочлен имеет ровно n попарно различных корней, где $n = \dim V$, то φ диагонализуем.

Доказательство. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — корни $\chi_\varphi(t)$, $\lambda_i \neq \lambda_j$. Тогда для всех i выполняется, что $V_{\lambda_i}(\varphi) \neq \{0\}$ и, следовательно, $\dim V_{\lambda_i}(\varphi) = 1$. Но так как сумма $V_{\lambda_1}(\varphi) + \dots + V_{\lambda_k}(\varphi)$ — прямая, то $\dim(V_{\lambda_1}(\varphi) + \dots + V_{\lambda_k}(\varphi)) = \dim V_{\lambda_1}(\varphi) + \dots + \dim V_{\lambda_k}(\varphi) = n$. Иными словами, $V = V_{\lambda_1}(\varphi) \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}(\varphi)$.

Выберем произвольные $v_i \in V_{\lambda_i} \setminus \{0\}$. Тогда (v_1, \dots, v_n) будет базисом в V . И так как все v_i — собственные значения для φ , то φ диагонализуем. \square

Теорема (Критерий диагонализируемости - 2). Линейный оператор φ диагонализуем тогда и только тогда, когда

1. $\chi_\varphi(t)$ разлагается на линейные множители;
2. Если $\chi_\varphi(t) = (t - \lambda_1)^{k_1} \dots (t - \lambda_s)^{k_s}$, где $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$, то $\dim V_{\lambda_i}(\varphi) = k_i \forall i$ (то есть для любого собственного значения V равны геометрическая и алгебраическая кратности).

Доказательство.

\Rightarrow Так как φ — диагонализуем, то существует базис $\mathfrak{e} = (e_1, \dots, e_n)$ такой, что:

$$A(\varphi, \mathfrak{e}) = \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix} = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n).$$

Тогда:

$$\chi_\varphi(t) = (-1)^n \begin{vmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{vmatrix} = (-1)^n (\mu_1 - t) \dots (\mu_n - t) = (t - \mu_1) \dots (t - \mu_n).$$

Итого, первое условие выполняется.

Теперь перепишем характеристический многочлен в виде $\chi_\varphi(t) = (t - \lambda_1)^{k_1} \dots (t - \lambda_s)^{k_s}$, где $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$ и $\{\lambda_1, \dots, \lambda_s\} = \{\mu_1, \dots, \mu_n\}$. Тогда $V_{\lambda_i} \supseteq \langle e_j \mid \mu_j = \lambda_i \rangle$, следовательно, $\dim V_{\lambda_i}(\varphi) \geq k_i$. Но мы знаем, что $\dim V_{\lambda_i} \leq k_i$! Значит, $\dim V_{\lambda_i} = k_i$.

\Leftarrow Так как $V_{\lambda_1}(\varphi) + \dots + V_{\lambda_s}(\varphi)$ — прямая, то $\dim(V_{\lambda_1}(\varphi) + \dots + V_{\lambda_s}(\varphi)) = k_1 + \dots + k_s = n$.

Пусть \mathfrak{e}_i — базис в V_{λ_i} . Тогда $\mathfrak{e}_1 \cup \dots \cup \mathfrak{e}_s$ — базис в V . То есть мы нашли базис из собственных векторов, следовательно, φ диагонализуем. \square

Инвариантные подпространства в \mathbb{R}^n

Пусть V — векторное пространство над полем \mathbb{C} , $\varphi \in L(V)$. Тогда в V есть собственный вектор (или одномерное φ -инвариантное пространство).

Теперь пусть V — векторное пространство над полем \mathbb{R} , $\varphi \in L(V)$.

Теорема. *Существует одномерное или двумерное φ -инвариантное векторное подпространство.*

Доказательство. Пусть $e = (e_1, \dots, e_n)$ — базис в V . Комплексифицируем V .

$$V^{\mathbb{C}} = \{u + iv \mid u, v \in V\}$$

$$V^{\mathbb{C}} \supset V = \{u + i0 \mid u \in V\}$$

Рассмотрим линейный оператор $\varphi_{\mathbb{C}} \in L(V^{\mathbb{C}})$, заданный как $\varphi_{\mathbb{C}}(e_i) = \varphi(e_i)$, $\forall i$. Значит, e_1, \dots, e_n — базис в $V^{\mathbb{C}}$. Следовательно, $\chi_{\varphi_{\mathbb{C}}}(t) = \chi_{\varphi}(t)$, так как $A(\varphi_{\mathbb{C}}, e) = A(\varphi, e)$.

Случай 1: $\chi_{\varphi}(t)$ имеет один действительный корень. Отсюда следует, что в V есть собственный вектор, что равносильно существованию одномерного φ -инвариантного подпространства (тогда $V^{\mathbb{C}}$ нам не нужен).

Случай 2: χ_{φ} не имеет действительных корней. Пусть $\lambda + i\mu$ — некоторый корень $\chi_{\varphi}(t)$, который, напомним, равен $\chi_{\varphi_{\mathbb{C}}}(t)$. Тогда существует собственный вектор $u + iv \in V^{\mathbb{C}}$ такой, что:

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathbb{C}}(u + iv) &= (\lambda + i\mu)(u + iv) \\ \varphi_{\mathbb{C}}(u + iv) &= \varphi_{\mathbb{C}}(u) + i\varphi_{\mathbb{C}}(v) = \varphi(u) + i\varphi(v) \\ (\lambda + i\mu)(u + iv) &= \lambda u - \mu v + i(\mu u + \lambda v)\end{aligned}$$

Сравнивая два последних равенства, получаем:

$$\begin{aligned}\varphi(u) &= \lambda u - \mu v \\ \varphi(v) &= \mu u + \lambda v\end{aligned}$$

Следовательно, $\langle u, v \rangle$ — φ -инвариантное подпространство, двумерное если u и v линейно независимы и одномерное в противном случае. \square

Пример. *Поворот на α в \mathbb{R}^2 : $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$. Тогда $u = e_1$, $v = e_2$, $\lambda + i\mu = \cos \alpha + i \sin \alpha$.*

Пусть V — векторное пространство над F , $\dim V = n$.

Операции над $L(V)$:

1. Сложение: $(\varphi + \psi)(v) = \varphi(v) + \psi(v)$.
2. Умножение на скаляр: $(\alpha\varphi)(v) = \alpha\varphi(v)$.
3. Умножение: $(\varphi\psi)(v) = \varphi(\psi(v))$.

В частности, для любого $P(x) \in \mathbb{F}[x]$, $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ и для любого $\varphi \in L(V)$ определен линейный оператор $P(\varphi) \in L(V)$: $P(\varphi) = a_n \varphi^n + \dots + a_1 \varphi + a_0 \text{id}$.

Корневые векторы и корневые подпространства

Определение. Вектор $v \in V$ называется корневым вектором линейного оператора φ , отвечающим значению $\lambda \in F$, если существует $m \geq 0$ такое, что $(\varphi - \lambda \text{id})^m(v) = 0$.

Наименьшее такое m называют высотой корневого вектора v .

Замечание.

1. Вектор $v = 0$ для любого φ имеет высоту 0.
2. Высоту 1 имеют все собственные векторы.

Пример. $V = \mathbb{F}[x]_{\leq n}$, $\Delta : f \rightarrow f'$. Здесь $\lambda = 0$ — единственное собственное значение. Все векторы — корневые, отвечающие $\lambda = 0$.

Определение. Множество $V^\lambda(\varphi) = \{v \in V \mid \exists m \geq 0 : (\varphi - \lambda \text{id})^m(v) = 0\}$ называется корневым пространством для $\lambda \in F$.

Упражнение. $V^\lambda(\varphi)$ — подпространство в V .

Замечание. $V_\lambda(\varphi) \subseteq V^\lambda(\varphi) \forall \lambda \in F$.

Лекция 24 от 14.03.2016

Корневые подпространства

Вспомним конец прошлой лекции.

Пусть V — векторное пространство над полем \mathbb{F} , $\varphi \in L(V)$ — линейный оператор.

Вектор $v \in V$ — корневой для φ , отвечающий собственному значению $\lambda \in \mathbb{F}$ тогда и только тогда, когда существует $m \leq 0$ такое, что $(\varphi - \lambda \text{id})^m(v) = 0$. Высотой корневого вектора называется наименьшее такое m .

Корневым подпространством называется пространство из корневых векторов и нулевого вектора. Другими словами, $V^\lambda(\varphi) = \{v \in V \mid \exists m \geq 0 : (\varphi - \lambda \text{id})^m(v) = 0\}$. Поскольку собственный вектор является корневым вектором высоты 1, то собственное подпространство включено в корневое подпространство: $V_\lambda(\varphi) \subset V^\lambda(\varphi)$.

Предложение. Корневое подпространство нетривиально тогда и только тогда, когда λ является собственным значением. Другими словами, $V^\lambda \neq \{0\} \Leftrightarrow \chi_\varphi(\lambda) = 0$.

Доказательство.

$$\Leftarrow \chi_\varphi(\lambda) = 0 \Rightarrow V_\lambda(\varphi) \neq \{0\} \Rightarrow V^\lambda(\varphi) \neq \{0\}, \text{ так как } V^\lambda(\varphi) \supset V_\lambda(\varphi).$$

$$\Rightarrow \text{Пусть } V^\lambda(\varphi) \neq \{0\} \Rightarrow \exists v \neq 0 \in V^\lambda(\varphi) \Rightarrow \exists m \geq 1 : (\varphi - \lambda \text{id})^m(v) = 0.$$

Рассмотрим $u = (\varphi - \lambda \text{id})^{m-1}(v) \neq 0$, тогда:

$$(\varphi - \lambda \text{id})(u) = (\varphi - \lambda \text{id})(\varphi - \lambda \text{id})^{m-1}(v) = (\varphi - \lambda \text{id})^m(v) = 0.$$

То есть вектор u — это вектор, для которого $(\varphi - \lambda \text{id})(u) = 0$, то есть собственный вектор. Следовательно λ — собственное значение.

□

Предложение. Для любого собственного значения $\lambda \in \mathbb{F}$ подпространство $V^\lambda(\varphi)$ инвариантно относительно φ .

Доказательство. Пусть v — корневой вектор высоты m . Докажем, что $\varphi(v)$ — также корневой вектор.

Заметим, что если $u = (\varphi - \text{id})(v)$, то u — корневой вектор высоты $m-1$, и, соответственно, лежит в корневом пространстве:

$$u = (\varphi - \text{id})(v) = \varphi(v) - \lambda v \in V^\lambda(\varphi).$$

Мы получили, что $\varphi(v) \in \lambda v + V^\lambda(\varphi)$. Но $\lambda v \in V^\lambda(\varphi)$, то есть $\lambda v + V^\lambda(\varphi) = V^\lambda(\varphi)$ и $\varphi(v) \in V^\lambda(\varphi)$. Что и означает, что пространство инвариантно относительно оператора φ . \square

Положим для краткости, что $\varphi - \text{id} = \varphi_\lambda$.

Заметим, что ядра степеней линейного оператора «вкладываются» друг в друга — те векторы, которые стали нулевыми при применении линейного оператора φ_λ^k , при применении линейного оператора φ_λ ещё раз так и остаются нулевыми, а также «добиваются» (переводятся в нулевые) некоторые ранее ненулевые векторы. Итого, получаем следующее:

$$V_\lambda(\varphi) = \ker \varphi_\lambda \subset \ker \varphi_\lambda^2 \subset \dots \subset \ker \varphi_\lambda^m \subset \dots$$

Причём существует такое m , что $\ker \varphi_\lambda^m = \ker \varphi_\lambda^{m+1}$, так как V — конечномерно и размерность его не может уменьшаться бесконечно. Выберем наименьшее такое m .

Упражнение. Доказать, что для любого $s \geq 0$ выполняется равенство $\ker \varphi_\lambda^m = \ker \varphi_\lambda^{m+s}$.

Заметим также, что $V^\lambda(\varphi) = \ker \varphi_\lambda^m$. Пусть $k_i = \dim \ker \varphi_\lambda^i$. Тогда:

$$\dim V_\lambda(\varphi) = k_1 < k_2 < \dots < k_m = \dim V^\lambda(\varphi).$$

Будем обозначать как $\varphi|_V$ ограничение линейного оператора на пространство V .

Предложение.

1. Характеристический многочлен линейного отображения $\varphi|_{V^\lambda(\varphi)}$ равен $(t - \lambda)^{k_m}$.
2. Если $\mu \neq \lambda$, то линейный оператор $\varphi - \mu \text{id}$ невырожден на $V^\lambda(\varphi)$.

Доказательство. Напомним, что $k_i = \dim \ker \varphi_\lambda^i$, для $i = 1, \dots, m$. Пусть также $k_0 = 0$.

Выберем базис $\mathfrak{e} = (e_1, \dots, e_{k_m})$ в $V^\lambda(\varphi)$ так, чтобы (e_1, \dots, e_{k_i}) также был базисом в $\ker \varphi_\lambda^i$. Тогда:

$$A(\varphi_\lambda|_{V^\lambda(\varphi)}, \mathfrak{e}) = \begin{pmatrix} 0 & * & * & \dots & * \\ 0 & 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & * \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{где } a_{ij} \in \text{Mat}_{(k_i - k_{i-1}) \times (k_j - k_{j-1})}$$

Но тогда:

$$A(\varphi|_{V^\lambda(\varphi)}, \mathfrak{e}) = A(\varphi_\lambda|_{V^\lambda(\varphi)}, \mathfrak{e}) + \lambda E = \begin{pmatrix} A_1 & * & * & \dots & * \\ 0 & A_2 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_{m-1} & * \\ 0 & 0 & \dots & 0 & A_m \end{pmatrix}, \quad \text{где } A_i = \lambda E_{k_i - k_{i-1}} \quad (*)$$

А значит, характеристический многочлен линейного отображения $\varphi|_{V^\lambda(\varphi)}$ равен $(t - \lambda)^{k_m}$.

Теперь докажем невырожденность линейного оператора $(\varphi - \mu \text{id})$ при $\mu \neq \lambda$.

Рассмотрим матрицу ограничения этого оператора на корневое подпространство:

$$A((\varphi - \mu \text{id})|_{V^\lambda(\varphi)}, \mathfrak{e}) = A(\varphi|_{V^\lambda(\varphi)}, \mathfrak{e}) - \mu E.$$

Она имеет вид $(*)$, где $A_i = (\lambda - \mu)E_{k_i}$. Следовательно,

$$\det((\varphi - \mu \text{id})|_{V^\lambda(\varphi)}) = (\lambda - \mu)^{k_m} \neq 0.$$

Что и означает, что линейный оператор невырожден. \square

Предложение. Если λ — собственное значение φ , то $\dim V^\lambda(\varphi)$ равен кратности λ как корня многочлена $\chi_\varphi(t)$.

Доказательство. Пусть (e_1, \dots, e_k) — базис $V^\lambda(\varphi)$, $k = \dim V^\lambda(\varphi)$. Дополним (e_1, \dots, e_k) до базиса $\mathfrak{e} = (e_1, \dots, e_n)$ всего пространства V . Тогда матрица линейного оператора имеет следующий вид:

$$A_\varphi = \left(\begin{array}{c|c} B & * \\ \hline 0 & C \end{array} \right), \quad B \in M_k, C \in M_{n-k}$$

$$\chi_\varphi(t) = \det(tE - A) = \det(tE - B) \det(tE - C).$$

Заметим, что $\det(tE - B)$ — это характеристический многочлен $\varphi|_{V^\lambda(\varphi)}$, следовательно,

$$\chi_\varphi(t) = (t - \lambda)^k \det(tE - C).$$

Осталось показать, что λ — не корень $\det(tE - C)$.

Пусть $W = \langle e_{k+1}, \dots, e_n \rangle$. Тогда рассмотрим линейный оператор $\psi \in L(W)$, у которого матрица в базисе (e_{k+1}, \dots, e_n) есть C . Предположим, что $\det(\lambda E - C) = 0$. Это значит, что λ — собственное значение для ψ и существует вектор $w \in W$, $w \neq 0$ такой, что $\psi(w) = \lambda w$.

Тогда:

$$\begin{aligned} \varphi(w) &= \lambda w + u, \quad u \in V^\lambda(\varphi) \\ \varphi(w) - \lambda w &\in V^\lambda(\varphi) \\ (\varphi - \lambda \text{id})(w) &\in V^\lambda(\varphi) \Rightarrow w \in V^\lambda(\varphi) \end{aligned}$$

Получили противоречие. Значит, λ — не корень $\det(tE - C)$. \square

Следствие. $V^\lambda(\varphi) = \ker \varphi_\lambda^s$, где s — кратность λ как корня многочлена $\varphi_\lambda(t)$.

Предложение. Если $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, где $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$ — собственные значения φ , то сумма $V^{\lambda_1}(\varphi) + \dots + V^{\lambda_k}(\varphi)$ — прямая.

Доказательство. Докажем индукцией по k .

База при $k = 1$ — ясно.

Теперь пусть утверждение доказано для всех значений, меньших k . Докажем для k .

Выберем векторы $v_i \in V^{\lambda_i}(\varphi)$ такие, что $v_1 + \dots + v_k = 0$. Пусть m — высота вектора v_k . Тогда применим к нашей сумме оператор $\varphi_{\lambda_k}^m$, получив следующее:

$$\varphi_{\lambda_k}^m(v_1) + \dots + \varphi_{\lambda_k}^m(v_{k-1}) + \varphi_{\lambda_k}^m(v_k) = 0.$$

С другой стороны, $\varphi_{\lambda_k}^m(v_k) = 0$, то есть:

$$\varphi_{\lambda_k}^m(v_1) + \dots + \varphi_{\lambda_k}^m(v_{k-1}) + \varphi_{\lambda_k}^m(v_k) = \varphi_{\lambda_k}^m(v_1) + \dots + \varphi_{\lambda_k}^m(v_{k-1}) = 0.$$

Тогда по предположению индукции $\varphi_{\lambda_k}^m(v_1) = \dots = \varphi_{\lambda_k}^m(v_{k-1}) = 0$. Но $\varphi_\lambda|_{V^\lambda(\varphi)}$ не вырожден и обратим при $i \neq k$, следовательно $v_1 = \dots = v_{k-1} = 0$. Но тогда и $v_k = 0$.

Следовательно, сумма прямая, что нам и требовалось. \square

Теорема. Если характеристический многочлен $\chi_\varphi(t)$ разлагается на линейные множители, причём $\chi_\varphi(t) = (t - \lambda_1)^{k_1} \dots (t - \lambda_s)^{k_s}$, то $V = \bigoplus_{i=1}^s \varphi^{\lambda_i}(\varphi)$.

Доказательство. Так как сумма $\varphi^{\lambda_1}(\varphi) + \dots + \varphi^{\lambda_s}(\varphi)$ прямая и для любого i выполняется, что $\dim(\varphi^{\lambda_i}(\varphi)) = k_i$, то:

$$\dim(\varphi^{\lambda_1}(\varphi) + \dots + \varphi^{\lambda_s}(\varphi)) = k_1 + \dots + k_s = \dim V.$$

Следовательно, $V = \bigoplus_{i=1}^s \varphi^{\lambda_i}(\varphi)$. □

Жордановы клетки

Определение. Пусть $\lambda \in \mathbb{F}$. **Жордановой клеткой** порядка n , отвечающей значению λ , называется матрица вида:

$$J_\lambda^n = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{F}).$$