Лекция 20 от 08.02.2016

Линейные отображения (продолжение)

Пусть $\varphi\colon V \to W$ — лиенйное отображение.

Предложение.

1. *$\operatorname{Ker}\varphi$ — подпространство в V.*

2. *$\operatorname{Im}\varphi$ — подпространство в W.*

Доказательство. Проверим по определению.

1. - $\varphi(0_v) = 0_w$ — этот факт мы уже доказали.
   - $v_1{,}v_2 \in \operatorname{Ker}\varphi \Rightarrow \varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) = 0_w + 0_w = 0_w \Rightarrow v_1 + v_2 \in \operatorname{Ker}\varphi$.
   - $v \in \operatorname{Ker}\varphi, \alpha \in F \Rightarrow \varphi(\alpha v) = \alpha\varphi(v) = \alpha 0 = 0$, то есть αv тоже лежит в ядре.

2. - $0_w = \varphi(0_v) \Rightarrow 0_w \in \operatorname{Im}(\varphi)$.
   - $w_1{,}w_2 \in \operatorname{Im}\varphi \Rightarrow \exists v_1, v_2 \in V\colon w_1 = \varphi(v_1), w_2 = \varphi(v_2) \Rightarrow w_1 + w_2 = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) = \varphi(v_1 + v_2) \Rightarrow w_1 + w_2 \in \operatorname{Im}\varphi$.
   - $w \in \operatorname{Im}\varphi, \alpha \in F \Rightarrow \exists v \in V\colon \varphi(v) = w \Rightarrow \alpha w = \alpha\varphi(v) = \varphi(\alpha v) \Rightarrow \alpha w \in \operatorname{Im}\varphi$.

То есть все условия подпространства по определению выполнены и предложение доказано. □

Предложение.

1. *φ инъективно тогда и только тогда, когда $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$.*

2. *φ сюръективно тогда и только тогда, когда $\operatorname{Im}\varphi = W$.*

Доказательство.

1. - [$\Rightarrow$] Очевидно.
   - [$\Leftarrow$] Пусть v_1, v_2 таковы, что $\varphi(v_1) = \varphi(v_2) \Rightarrow \varphi(v_1 - v_2) = 0 \Rightarrow v_1 - v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = v_2$.

2. Очевидно из определения образа.

□

Следствие. *φ — изоморфизм тогда, и только тогда, когда $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$ и $\operatorname{Im}\varphi = W$.*

Предложение. *$U \subset V$ — подпространство и $e_1, \ldots, e_k$ — базис. Тогда*

1. *$\varphi(U)$ — подпространство, $\varphi(U) = \langle\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_k)\rangle$.*

2. *$\dim\varphi(U) \leqslant \dim U$.*

Доказательство.

1. $\varphi(x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ke_k) = x_1\varphi(e_1) + \ldots + x_k\varphi(e_k) \in \langle\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_k)\rangle$.

2. $\varphi(U) = \langle\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_k)\rangle \Rightarrow \dim\varphi(U) \leqslant \dim U$ по основной лемме о линейной зависимости.

□

V, W — векторные пространства, $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ — базис V, $\mathbb{f} = (f_1, \ldots, f_m)$ — базис W. A — матрица φ по отношению к $\mathbb{e}, \mathbb{f}$.

Предложение. $\dim \operatorname{Im} \varphi = \operatorname{rk} A$.

Доказательство.

$$v \in V, v = x_1 e_1 + \ldots x_n e_n$$
$$\varphi(v) = y_1 f_1 + \ldots y_m e_m$$

Тогда $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

$A^{(j)}$ — столбец координат в базисе $\mathbb{f}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$.

$$\alpha_1 \varphi(e_1) + \ldots \alpha_n \varphi(e_n) = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 A^{(1)} + \ldots + \alpha_n A^{(n)} = 0$$

Отсюда следует, что

$$\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} \{\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)\} = \dim \underbrace{\langle \varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n) \rangle}_{\operatorname{Im} \varphi} = \dim \operatorname{Im} \varphi$$

$\square$

Следствие. *Величина* $\operatorname{rk} A$ *не зависит от выбора базисов* $\mathbb{e}, \mathbb{f}$.

Определение. $\operatorname{rk} A$ *называется рангом линейного отображения* φ*, обозначается* $\operatorname{rk} \varphi$.

Следствие. *Если* $\dim V = \dim W = n$*, то* φ *— изоморфизм тогда и только тогда, когда* $\det A \neq 0$. *Тогда* A *— квадратная.*

Доказательство.

[$\Rightarrow$] φ — изоморфизм, следовательно

$$\operatorname{Im} \varphi = W \Rightarrow \dim \operatorname{Im} \varphi = n \Rightarrow \operatorname{rk} A = n \Rightarrow \det A \neq 0$$

[$\Leftarrow$] $\det A \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$.

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

Таким образом, φ — биекция, а значит изоморфизм. $\square$

Следствие. $A \in \operatorname{Mat}_{k \times m}, B \in \operatorname{Mat}_{m \times n}$. *Тогда* $\operatorname{rk} AB \leqslant \min\{\operatorname{rk} A, \operatorname{rk} B\}$

Доказательство. Реализуем A, B как матрицы линейных отображений, то есть $\varphi_A \colon F^m \to F^k, \varphi_B \colon F^n \to F^m$. Тогда матрица AB — матрциа отображения $\varphi_A \circ \varphi_B$.

$$\operatorname{rk}(AB) = \operatorname{rk}(\varphi_A \circ \varphi_B) \begin{cases} \leqslant \dim \operatorname{Im} \varphi_A = \operatorname{rk} A \\ \leqslant \dim \operatorname{Im} \varphi_B = \operatorname{rk} B \end{cases}$$

Первое неравенство верно так как $\operatorname{Im}(\varphi_A \circ \varphi_B) \subset \operatorname{Im} \varphi_A \Rightarrow \dim \operatorname{Im}(\varphi_A \circ \varphi_B) \leqslant \dim \operatorname{Im} \varphi_A$. Рассматривая второе неравенство, получаем, что

$$\operatorname{Im}(\varphi_A \circ \varphi_B) = \varphi_A(\operatorname{Im} \varphi_B) \Rightarrow \dim \operatorname{Im}(\varphi_A \circ \varphi_B) = \dim(\varphi_A(\operatorname{Im} \varphi_B)) \leqslant \dim \operatorname{Im} \varphi_B$$

$\square$

Упражнение.

- *Если A квадртана и* $\det A \neq 0$*, то* $\operatorname{rk} AB = \operatorname{rk} B$.
- *Если $B \in M_n$ и* $\det B \neq 0$*, то* $\operatorname{rk} AB = \operatorname{rk} A$.

Теорема. $\dim \operatorname{Im} \varphi = \dim \varphi - \dim \operatorname{Ker} \varphi$

Существует 2 способа доказательства. Рассмотрим оба.

Бескоординатный способ. Пусть $\dim \operatorname{Ker} \varphi = k$ и $e_1, \ldots, e_k$ — базмс в $\operatorname{Ker} \varphi$. Дополним его до базиса V векторами $e_k, \ldots, e_n$. Тогда

$$\operatorname{Im} \varphi =< \varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_k), \ldots, \varphi(e_n) >=< 0, 0, \ldots, 0, \varphi(e_{k+1}), \ldots, \varphi(e_n) >=< \varphi(e_{k+1}), \ldots, \varphi(e_n) >$$

Пусть $\alpha_{k+1}\varphi(e_{k+1}) + \ldots + \alpha_n \varphi(e_n) = 0$ для некоторых $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$. Тогда

$$\begin{aligned}
&\varphi(\alpha_{k+1}e_{k+1} + \ldots + \alpha_n e_n) = 0 \\
&\Rightarrow \alpha_{k+1}e_{k+1} + \ldots + \alpha_n e_n \in \operatorname{Ker} \varphi \\
&\Rightarrow \alpha_{k+1}e_{k+1} + \ldots + \alpha_n e_n = \beta_1 e_1 + \ldots \beta_k e_k
\end{aligned}$$

для некоторых $\beta_1, \ldots, \beta_k \in F$. Но так как $e_1, \ldots, e_n$ — базис в V, то $\alpha_{k+1} = \ldots = \alpha_n = \beta_1 = \ldots = \beta_k = 0$. То есть $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)$ линейно независимы, а значит образуют базис $\operatorname{Im} \varphi$. Отсюда следует, что $\dim \operatorname{Im} \varphi = n - k = \dim V - \dim \operatorname{Ker} \varphi$ $\square$

Координатный способ. Зафиксируем базис $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ в V и $\mathbb{f} = (f_1, \ldots, f_m)$ в W. Пусть A — матрица φ в базисе $\mathbb{f}$. Тогда $v = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$, $\varphi(v) = y_1 f_1 + \ldots + y_m f_m$. Получим, что $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. $\operatorname{Ker} \varphi$ состоит из векторов, координаты которых удовлетворяют СЛУ $A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$. Ранее в курсе мы уже доказали, что размерность пространства решений равна $n - \operatorname{rk} A$, то есть $\dim \operatorname{Im} \varphi = n - \operatorname{rk} A = \dim V - \dim \operatorname{Ker} \varphi$. $\square$

Линейные операторы

Пусть V — конечномерное векторное пространство.

Определение. *Линейным оператором (или линейным преобразованиемм) называется всякое линейное отображение $\varphi \colon V \to V$, то есть из V в себя.*

Обозначается $L(V) = \operatorname{Hom}(V, V)$.

Пусть $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ — базис в V и $\varphi \in L(V)$. $(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)) = (e_1, \ldots, e_n) A$. В таком случае A — матрица линейного опреатора в базисе $\mathbb{e}$.

В столбце $A^{(j)}$ стоят координаты $\varphi(e_j)$ в базисе $\mathbb{e}$. Матрица A — квадратная.

Пример.

1. $\varphi(v) = 0 \forall v \in V$ *— нулевая матрица.*
2. *Тождественный оператор* $\operatorname{id}(v) = v \forall v \in V$ *— единичная матрциа.*
3. *Скалярный оператор* $\lambda \operatorname{id}(v) = \lambda V$*, матрица λE в любом базисе.*

Следствие (Следствия из общих фактов о линейных отображениях)**.**

1. *Всякий линейный оператор однозначно определяется своей матрицей в любом фиксированном базисе.*

2. *Для всякой квадратной матрицы* $\exists!\ \varphi \in L(V)$ *такой, что матрица* φ *есть* A.

3. $\varphi \in L(V)$, A *— матрциа* φ *в базисе* $\mathbb{e}$.

$$v = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$$
$$\varphi(v) = y_1 e_1 + \ldots + y_n e_n$$
$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Пусть $\varphi \in L(V)$. A — матрица φ в базисе $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$. $\mathbb{e}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ — другой базис, причём $(e'_1, \ldots, e'_n) = (e_1, \ldots, e_n)C$, где C — матрица перехода. A' — матрциа φ в базисе $\mathbb{e}'$.

Предложение. $A' = C^{-1}AC$.

Доказательство.

$$(e'_1, \ldots, e'_n) = (e_1, \ldots, e_n)C.$$
$$e'_j = \sum_{i=1}^{n} c_{ij} e_j$$
$$\varphi(e'_j) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} c_{ij} e_j\right) = \sum_{i=1}^{n} c_{ij} \varphi(e_j)$$
$$(\varphi(e'_1), \ldots, \varphi(e'_n)) = (\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n))C = (e_1, \ldots, e_n)AC = (e'_1, \ldots, e'_n)\underbrace{C^{-1}AC}_{A'}$$

$\square$