

# Лекция 19 от 01.02.2016

## Изоморфизм (продолжение)

На прошлой лекции мы ввели теорему и доказали одну лемму. Напомним их.

**Теорема.** Если два конечномерных векторных пространства  $V$  и  $W$  изоморфны, то  $\dim V = \dim W$ .

**Лемма (1).** Если  $\dim V = n$ , то  $V \simeq F^n$ .

**Замечание.** Говорят, что функция  $\varphi$  отождествляет пространство  $V$  с пространством  $F^n$ , если  $\varphi : V \xrightarrow{\sim} F^n$ .

Но перед тем, как доказывать эту теорему, докажем лучше еще одну лемму.

**Лемма (2).** Пусть  $\varphi : V \xrightarrow{\sim} W$  — изоморфизм векторных пространств, а  $e_1, \dots, e_n$  — базис  $V$ . Тогда  $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$  — базис  $W$ .

*Доказательство.* Пусть  $w \in W$  — произвольный вектор. Положим  $v \in V$  таковым, что  $v = \varphi^{-1}(w)$ .

$$\begin{aligned} v &= x_1 e_1 + \dots + x_n e_n, \quad x_i \in F \\ w &= \varphi(v) = \varphi(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1 \varphi(e_1) + \dots + x_n \varphi(e_n) \Rightarrow W = \langle \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n) \rangle \end{aligned}$$

Покажем, что  $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$  — линейно независимые вектора.

Пусть  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$  таковы, что  $\alpha_1 \varphi(e_1) + \dots + \alpha_n \varphi(e_n) = 0$ . Это то же самое, что  $\varphi(\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n) = 0$ . Применяя  $\varphi^{-1}$ , получаем  $\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n = \varphi^{-1}(0) = 0$ . Но так как  $e_1, \dots, e_n$  — базис в  $V$ , то  $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ , и потому вектора  $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$  линейно независимы. Следовательно, этот набор векторов — базис в  $W$ .  $\square$

Теперь приступим наконец к доказательству теоремы.

*Доказательство.*

$\Rightarrow V \simeq W \Rightarrow \exists \varphi : V \xrightarrow{\sim} W$ . Тогда по лемме 2, если  $e_1, \dots, e_n$  — базис  $V$ , то  $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$  — базис  $W$ , и тогда  $\dim V = \dim W$ .

$\Leftarrow$  Пусть  $\dim V = \dim W = n$ . Тогда по лемме 1 существуют изоморфизмы  $\varphi : V \xrightarrow{\sim} F^n$  и  $\psi : W \xrightarrow{\sim} F^n$ . Следовательно,  $\psi^{-1} \circ \varphi : V \rightarrow W$  — изоморфизм.  $\square$

То есть получается, что с точностью до изоморфизма существует только одно векторное пространство размерности  $n$ . Однако не стоит заканчивать на этом курс линейной алгебры. Теперь главная наша проблема — это как из бесконечного множества базисов в каждом векторном пространстве выбрать тот, который будет наиболее простым и удобным для каждой конкретной задачи.

Например, рассмотрим вектор  $v \in F^n$  с координатами  $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ . Пусть  $v \neq 0$ . Тогда существует такой базис  $e_1, \dots, e_n$ , что  $v = e_1$ , то есть в этом базисе вектор имеет координаты  $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Пусть  $V, W$  — векторные пространства над  $F$ , и  $e_1, \dots, e_n$  — базис  $V$ .

### Предложение.

1. Всякое линейное отображение  $\varphi : V \rightarrow W$  однозначно определяется векторами  $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ .
2. Для всякого набора векторов  $f_1, \dots, f_n \in W$  существует единственное линейное отображение  $\varphi : V \rightarrow W$  такое, что  $\varphi(e_1) = f_1, \varphi(e_2) = f_2, \dots, \varphi(e_n) = f_n$ .

*Доказательство.*

1. Пусть  $v \in V$ ,  $v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ , где  $x_i \in F$ . Тогда  $\varphi(v) = x_1 \varphi(e_1) + \dots + x_n \varphi(e_n)$ , то есть если мы знаем вектора  $\varphi(e_i)$ , то сможем задать  $\varphi(v)$  для любого  $v \in V$ .
2. Определим отображение  $\varphi : V \rightarrow W$  по формуле  $\varphi(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1 f_1 + \dots + x_n f_n$ . Прямая проверка показывает, что  $\varphi$  линейна, а единственность следует из пункта 1.

□

**Следствие.** Если  $\dim V = \dim W = n$ , то для всякого базиса  $e_1, \dots, e_n$  пространства  $V$  и всякого базиса  $f_1, \dots, f_n$  пространства  $W$  существует единственный изоморфизм  $\varphi : V \xrightarrow{\sim} W$  такой, что  $\varphi(e_1) = f_1, \dots, \varphi(e_n) = f_n$ .

*Доказательство.* Из пункта 2. предложения следует, что существует единственное линейное отображение  $\varphi : V \rightarrow W$  такое, что  $\varphi(e_1) = f_1, \dots, \varphi(e_n) = f_n$ . Но тогда  $\varphi(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1 \varphi(e_1) + \dots + x_n \varphi(e_n) = x_1 f_1 + \dots + x_n f_n$  для любых  $x_i \in F$ . Отсюда следует, что  $\varphi$  — биекция. □

## Матрицы линейных отображений

Пусть  $V$  и  $W$  — векторные пространства,  $e = (e_1, \dots, e_n)$  — базис  $V$ ,  $f = (f_1, \dots, f_m)$  — базис  $W$ ,  $\varphi : V \rightarrow W$  — линейное отображение. Тогда:

$$\varphi(e_j) = a_{1j} f_1 + \dots + a_{mj} f_m = \sum_{i=1}^m a_{ij} f_i.$$

**Определение.** Матрица  $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}_{m \times n}(F)$  называется матрицей линейного отображения  $\varphi$  в базисах  $e$  и  $f$  (или по отношению к базисам  $e$  и  $f$ ).

**Замечание.** Существует биекция  $\{\text{линейные отображения } V \rightarrow W\} \rightleftharpoons \text{Mat}_{m \times n}$ .

**Замечание.** В  $A^{(j)}$  стоят координаты  $\varphi(e_j)$  в базисе  $f$ .

$$(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) = (f_1, \dots, f_n) \cdot A$$

Рассмотрим пример.

Пусть  $P_n = F[x]_{\leq n}$  — множество многочленов над полем  $F$  степени не выше  $n$ . Возьмем дифференцирование  $\Delta : P_n \rightarrow P_{n-1}$ .

Базис  $P_n = 1, x, x^2, \dots, x^n$ . Базис  $P_{n-1} = 1, x, \dots, x^{n-1}$ . Тогда матрица линейного отображения будет размерности  $n \times (n+1)$  и иметь следующий вид.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{pmatrix}$$

**Предложение.** Если  $v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$  и  $\varphi(v) = y_1 f_1 + \dots + y_m f_m$ , то

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

*Доказательство.* С одной стороны:

$$\varphi(v) = x_1 \varphi(e_1) + \dots + x_n \varphi(e_n) = (\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (f_1, \dots, f_m) A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Однако с другой стороны:

$$\varphi(v) = (f_1, \dots, f_m) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

Сравнивая обе части, получаем требуемое. □

А теперь проанализируем операции над матрицами линейных отображений.

$V$  и  $W$  — векторные пространства. **Обозначение:**  $\text{Hom}(V, W) :=$  множество всех линейных отображений  $V \rightarrow W$ .

Пусть  $\varphi, \psi \in \text{Hom}(V, W)$ .

**Определение.**

1.  $\varphi + \psi \in \text{Hom}(V, W)$  — это  $(\varphi + \psi)(v) := \varphi(v) + \psi(v)$ .
2.  $\alpha \in F, \alpha\varphi \in \text{Hom}(V, W)$  — это  $(\alpha\varphi)(v) := \alpha(\varphi(v))$ .

**Упражнение.**

1. Проверить, что  $\varphi + \psi$  и  $\alpha\varphi$  действительно принадлежат  $\text{Hom}(V, W)$ .
2. Проверить, что  $\text{Hom}(V, W)$  является векторным пространством.

**Предложение.** Пусть  $\mathfrak{e} = (e_1, \dots, e_n)$  — базис  $V$ ,  $\mathfrak{f} = (f_1, \dots, f_m)$  — базис  $W$ ,  $\varphi, \psi \in \text{Hom}(V, W)$ . При этом  $A_\varphi$  — матрица линейного отображения  $\varphi$ ,  $A_\psi$  — матрица для  $\psi$ ,  $A_{\varphi+\psi}$  — для  $\varphi+\psi$ , а  $A_{\alpha\varphi}$  — для  $\alpha\varphi$ .

Тогда  $A_{\varphi+\psi} = A_\varphi + A_\psi$  и  $A_{\alpha\varphi} = \alpha A_\varphi$ .

*Доказательство.* Упражнение. □

Теперь возьмем три векторных пространства —  $U, V$  и  $W$  размерности  $n, m$  и  $k$  соответственно, и их базисы  $e, f$  и  $g$ . Также рассмотрим цепочку линейных отображений  $U \xrightarrow{\psi} V \xrightarrow{\varphi} W$ . Пусть  $A$  — матрица  $\varphi$  в базисах  $f$  и  $g$ ,  $B$  — матрица  $\psi$  в базисах  $e$  и  $f$ ,  $C$  — матрица  $\varphi \circ \psi$  в базисах  $e$  и  $g$ .

**Предложение.**  $C = AB$ .

**Замечание.** Собственно говоря, отсюда и взялось впервые определение умножения матриц.

*Доказательство.* Запишем по определению:

$$\begin{aligned} (\varphi \circ \psi)(e_r) &= \sum_{p=1}^k c_{pr} g_p, \quad r = 1, \dots, n \\ \psi(e_r) &= \sum_{q=1}^m b_{qr} f_q, \quad r = 1, \dots, n \\ \varphi(f_q) &= \sum_{p=1}^k a_{pq} g_p, \quad q = 1, \dots, m \end{aligned}$$

Тогда:

$$\begin{aligned} (\varphi \circ \psi)(e_r) &= \varphi(\psi(e_r)) = \varphi\left(\sum_{q=1}^m b_{qr} f_q\right) = \sum_{q=1}^m b_{qr} \varphi(f_q) = \sum_{q=1}^m b_{qr} \left(\sum_{p=1}^k a_{pq} g_p\right) = \sum_{p=1}^k \left(\sum_{q=1}^m a_{pq} b_{qr}\right) g_p \\ &\Downarrow \\ c_{pr} &= \sum_{q=1}^m a_{pq} b_{qr} \\ &\Downarrow \\ C &= AB \end{aligned}$$

□

И снова, пусть  $V$  и  $W$  — векторные пространства с линейным отображением  $\varphi : V \rightarrow W$ .

**Определение.** Ядро  $\varphi$  — это множество  $\text{Ker } \varphi := \{v \in V \mid \varphi(v) = 0\}$ .

**Определение.** Образ  $\varphi$  — это множество  $\text{Im } \varphi := \{w \in W \mid \exists v \in V : \varphi(v) = w\}$ .

**Пример.** Все то же  $\Delta : P_n \rightarrow P_{n-1}$ . Для него  $\text{Ker } \Delta = \{f \mid f = \text{const}\}$ ,  $\text{Im } \Delta = P_{n-1}$ .