Лекция 30 от 11.05.2016

Самосопряжённые линейные операторы (продолжение)

Пусть $\mathbb{E}$ — евклидово пространство, $\dim \mathbb{E} = n$, $\varphi \in L(\mathbb{E})$. Вспомним, что по определению сопряжённый линейный оператор это $\varphi^*\colon (x, \varphi(y)) = (\varphi^*(x), y)$.

Вспомним также, что такое самосопряжённый оператор, это такой оператор φ, что $\varphi = \varphi^*$.

Предложение. *Пусть $\varphi = \varphi^*$. Если $U \subset \mathbb{E}$ — подпространство — является φ-инвариантным, то $U^\perp$ тоже φ-инвариантно.*

Доказательство. Посмотрим на матрицу φ. Поскольку $\mathbb{E} = U \oplus U^\perp$,то легко понять, что матрица линейного оператора будет выглядеть как $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$, где A — матрица ограничения φ на U, а B — на $U^\perp$.

Пусть $\varphi(U) \subseteq U$. Хотим, чтобы $\varphi(U^\perp) \subseteq U^\perp$.

$$\forall x \in U, y \in U^\perp\colon (x, \varphi(y)) = (\varphi^*(x), y) = (\underbrace{\varphi(x)}_{\in U}, y) = 0$$

□

Предложение. *У самосопряжённого оператора φ есть собственный вектор над $\mathbb{R}$.*

Доказательство. Знаем: у φ есть одномерное(случай 1) или двумерное (случай 2) инвариантное подпространство.

1. В случае одномерного инвариантного подпространства всё уже ок, потому что его порождающий вектор уже собственный
2. Пусть $U \subseteq \mathbb{E}$ — двумерное инвариантное подпространство, а $\mathbb{e} = (e_1, e_2)$ — ортонормированный базис. Пусть $\psi \in L(U)$ — ограничение φ на U. В прошлый раз доказывали, что матрица ψ — симметричная. $A(\psi, \mathbb{e}) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$. Её характеристический многочлен

$$\chi_\psi(t) = (-1)^2 \begin{vmatrix} a - t & b \\ b & c - t \end{vmatrix} = t^2 - (a + c)t + ac - b^2 = 0$$
$$D = (a - c)^2 + 4b^2 \geqslant 0$$

Значит у $\chi_\psi(t)$ есть корни, а у ψ есть собственный вектор, а значит и у φ.

□

Теорема. *У всякого самосопряжённого линейного оператора есть ортонормированный базис из собственных векторов. В частности, φ диагонализуем над $\mathbb{R}$ и характеристический многочлен разлагается в произведение линейных сомножителей.*

Следствие. *Всякая симметричная подобна диагональной над $\mathbb{R}$.*

Доказательство. Индукцией по n. Для $n = 1$ всё очевидно.

Если $n > 1$, то у φ есть собственный вектор v. Положим $e_1 = \dfrac{v}{|v|}$. Положим $U = \langle e_1 \rangle^\perp$. Тогда $\dim U = n - 1$.

U — φ-инвариантное подпространство. По предположеню индукции в U есть ортонормированный базис из собственных векторов $(e_2, \ldots, e_n)$. Тогда $(e_1, \ldots, e_n)$ — искомый базис. □

Следствие. *Пусть $\varphi = \varphi^*$; λ, μ — собственные значения. Тогда из того, что $\lambda \neq \mu$, следует, что $V_\lambda(\varphi) \perp V_\mu(\varphi)$.*

Доказательство.

1. Координатный способ. Пусть $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ — ортонормированный базис из собственных векторов. $x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n \in V_\lambda(\varphi)$, причём $\varphi(e_i) = \lambda_i e_i$.

$$\varphi(x) = x_1 \lambda_1 e_1 + \ldots x_n \lambda_n e_n$$
$$x \in V_\lambda(\varphi) \Leftrightarrow \varphi(x) = \lambda x \Leftrightarrow x \in \langle e_i \mid \lambda_i = \lambda \rangle$$
$$\Rightarrow V_\lambda(\varphi) \perp V_\mu(\varphi), \text{ если } \lambda \neq \mu$$

2. Бескоординатный способ.

$$x \in V_\lambda(\varphi)$$
$$y \in V_\mu(\varphi)$$
$$\lambda(x,y) = (\lambda x, y) = (\varphi(x), y) = (x, \varphi(y)) = (x, \mu y) = \mu(x, y).$$

А поскольку $\lambda \neq \mu$, то $(x,y) = 0$.

□

Следствие (Приведение квадратичной формы к главным осям)**.** *Для любой квадратичной формы Q над $\mathbb{E}$ существует ортонормированный базис, в котором Q имеет канонический вид. $Q(x_1, \ldots, x_n) = \lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2$.*

Числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ определены однозначно с точностью до перестановки.

Доказательство. Существует единственный самосопряжённый линейный оператор в $\mathbb{E}$ такой, что $Q(v) = (v, \varphi(v))$. Если $\mathbb{e}$ — ортонормированный базис, то матрица Q в базисе $\mathbb{e}$ будет равна матрице φ в базисе $\mathbb{e}$.

$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — собственные значения φ. □

Следствие. *Пусть $A \in M_n(\mathbb{R}), A = A^T$. Тогда существует ортогональная матрица C такая, что $C^T A C = C^{-1} A C = D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$*

Ортогональные линейные операторы

Определение. *Линейный оператор $\varphi \in L(\mathbb{E})$ называется ортогональным, если $(\varphi(x), \varphi(y)) = (x,y)$. Другими словами, φ сохраняет скалярное произведение.*