Линейная Алгебра и Геометрия
Определения

Лекторий ПМИ ФКН

3-4 июня 2016

Относитесь к данному материалу критически! Никто не гарантирует, что это абсолютно правильные билеты: в них могут быть недочеты, ошибки, опечатки, что угодно, ведь эти билеты писали студенты, а не преподаватели. Старайтесь вникать в то, что читаете, а не просто зазубривать.

1. **Алгебраическая форма комплексного числа. Сложение, умножение и деление комплексных чисел в алгебраической форме.**

   Запись $z = a + bi$, где $a, b \in \mathbb{R}$, называется алгебраической формой комплексного числа $z \in \mathbb{C}$.

   $a = \operatorname{Re} z$ — действительная часть числа z.

   $b = \operatorname{Im} z$ — мнимая часть числа z.

   Сложение:
   $$(a+bi)+(c+di) = (a+c)+(b+d)i.$$

   Умножение:
   $$(a+bi)(c+di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac-bd)+(ad+bc)i.$$

   Деление:
   $$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i, \quad (c+di) \neq 0.$$

   В делении используется формула обратного элемента:
   $$\frac{1}{a+bi} = \frac{\overline{a+bi}}{|a+bi|^2} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}.$$

2. **Комплексное сопряжение и его свойства: сопряжение суммы и произведения комплексных чисел.**

   Отображение $\mathbb{C} \to \mathbb{C} : a + bi \mapsto a - bi$ называется (комплексным) сопряжением. Само число $\overline{z} = a - bi$ называется (комплексно) сопряженным к числу $z = a + bi$.

   Для любых двух комплексных чисел $z, w \in \mathbb{C}$ выполняется, что

   (a) $\overline{\overline{z}} = z$ сопряжённое к сопряжённому есть само это число

   (b) $z \cdot \overline{z} = |z^2|$

   (c) $z + \overline{z} = 2Re(z)$ Re(z) — действительная часть числа z

   (d) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$;

   (e) $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.

3. **Геометрическая модель комплексных чисел, интерпретация в ней сложения и сопряжения.**

   Заметим, что поле комплексных чисел $\mathbb{C} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ равно $\mathbb{R}^2$. Следовательно, комплексные числа можно представить как точки на действительной плоскости $\mathbb{R}^2$, или сопоставить их векторам.

   В таком представлении сложение комплексных чисел интерпретируется как сложение векторов, а сопряжение — как отражение относительно оси $Ox(\operatorname{Re} z)$.

4. **Модуль комплексного числа и его свойства: неотрицательность, неравенство треугольника, модуль произведения двух комплексных чисел.**

   Модулем комплексного числа $z = a + bi$ называется длина соответствующего вектора. Обозначение: $|z|; |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

   Свойства модуля:

   (a) $|z| \geqslant 0$, причем $|z| = 0$ тогда и только тогда, когда $z = 0$;

   (b) $|z + w| \leqslant |z| + |w|$ — неравенство треугольника;

   (c) $z \cdot \overline{z} = |z|^2$;

   (d) $|zw| = |z| \cdot |w|$;

5. **Аргумент комплексного числа.**

   Аргументом комплексного числа $z \neq 0$ называется всякий угол φ такой что

   $$\cos\varphi = \frac{a}{|z|} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \quad \sin\varphi = \frac{b}{|z|} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

6. **Тригонометрическая форма комплексного числа.**

   Используя аргумент, можно представить комплексное число следующим образом:

   $$\left.\begin{matrix} a = |z|\cos\varphi \\ b = |z|\sin\varphi \end{matrix}\right| \Rightarrow z = a + bi = |z|\cos\varphi + i|z|\sin\varphi = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

   Запись $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ называется тригонометрической формой комплексного числа z.

7. **Формула Муавра.**

   Пусть $z = |z|\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Тогда:

   $$z^n = |z|^n\,(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)) \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

8. **Извлечение корней из комплексных чисел.**

   Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $n \geqslant 2$.

   Корнем n-й степени из числа z называется всякое $w \in \mathbb{C}$: $w^n = z$. То есть

$$\sqrt[n]{z} = \{w \in \mathbb{C} \mid w^n = z\}.$$

   Представим z и w в тригонометрическом виде:

$$z = |z|\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right), \quad w = |w|\left(\cos\psi + i\sin\psi\right)$$

   Если $z = 0$, то $w = 0$. В противном случае, z имеет ровно n корней n-й степени:

$$\sqrt[n]{z} = \left\{ \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) \;\middle|\; k = 0, \ldots, n-1\right\}.$$

9. **Решение квадратных уравнений с комплексными коэффициентами.**

   Пусть дано квадратное уравнение $az^2 + bz + c = 0$, где a, b, $c \in \mathbb{C}$ и $a \neq 0$. Тогда оно решается аналогично квадратным уравнениям над полем $\mathbb{R}$, с тем лишь отличием, что из дискриминанта всегда можно извлечь корень.

$$\{d_1, d_2\} = \sqrt[2]{b^2 - 4ac}$$
$$z_1 = \frac{-b + d_1}{2a},\ z_2 = \frac{-b + d_2}{2a}$$

10. **Основная теорема алгебры комплексных чисел.**

    Всякий многочлен $P(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ степени n, где $n \geqslant 1$, $a_n \neq 0$, и $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ имеет корень.

11. **Овеществление комплексного векторного пространства и его размерность.**

    V — векторное пространство над $\mathbb{C}$. Овеществление пространства V — это то же пространство V, рассматриваемое как пространство над $\mathbb{R}$. Обозначение: $V_{\mathbb{R}}$.

    Пусть $\dim V < \infty$. Тогда $\dim V_{\mathbb{R}} = 2\dim V$.

12. **Комплексификация вещественного векторного пространства и его размерность.**

    Пусть W — пространство над $\mathbb{R}$. Комплексификация пространства W — это множество $W \times W = W^{\mathbb{C}} = \{(u, v) \mid u, v \in W\}$ с операциями $(u_1, v_1) + (u_2, v_2) = (u_1 + u_2, v_1 + v_2)$, $(a + bi)(u, v) = (au - bv, av + bu)$, где $(a + bi) \in \mathbb{C}$.

    Рутинная проверка показывает, что $W^{\mathbb{C}}$ является векторным пространством над полем $\mathbb{C}$, причем $\dim W^{\mathbb{C}} = \dim W$.

13. **Сумма двух подпространств векторного пространства.**

    Пусть V — конечномерное векторное пространство, а U и W — его подпространства.

    Сумма подпространств U и W — это множество

$$U + W = \{u + w \mid u \in U, w \in W\},$$

    которое является подпространством векторного пространства V.

14. **Теорема о связи размерности суммы двух подпространств с размерностью их пересечения.**

    Пусть V — конечномерное векторное пространство, а U и W — его подпространства.

    $\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U + W)$

15. **Прямая сумма двух подпространств векторного пространства.** Пусть V — конечномерное векторное пространство, а U и W — подпространства.

    Если $U \cap W = \{0\}$, то $U + W$ называется прямой суммой.

16. **Матрица перехода от одного базиса векторного пространства к другому.**

    Пусть V — векторное пространство, $\dim V = n$, $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ и $\mathbb{e}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ — базисы в V.

    Матрицей перехода от базисе $\mathbb{e}$ к базису $\mathbb{e}'$ называется матрица, по столбцам которой стоят координаты базиса $\mathbb{e}'$ в базисе $\mathbb{e}$.

$$e'_j = \sum_{i=1}^{n} c_{ij} e_i, \quad c_{ij} \in F$$

$$(e'_1, \ldots, e'_n) = (e_1, \ldots, e_n) \cdot C, \quad C = (c_{ij}) \text{— матрица перехода}$$

17. **Формула преобразования координат вектора при замене базиса векторного пространства.**

    Пусть V — векторное пространство. Формула преобразования координат вектора $v \in V$ при переходе от базиса $\mathbb{e}$ к $\mathbb{e}'$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \qquad \text{или} \qquad x_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x'_j,$$

    где $(x_1, \ldots, x_n)$ — координаты вектора v в базисе $\mathbb{e}$, $(x'_1, \ldots, x'_n)$ — координаты вектора v в базисе $\mathbb{e}'$ и C — матрица перехода от базиса $\mathbb{e}$ к базису $\mathbb{e}'$.

18. **Линейное отображение.**

    Пусть V и W — два векторных пространства над полем F.

    Отображение $f : V \to W$ называется линейным, если:

    (a) $f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2), \quad \forall u_1, u_2 \in V$;

    (b) $f(\alpha u) = \alpha f(u), \quad \forall u \in V, \forall \alpha \in F$.

19. **Изоморфизм векторных пространств. Изоморфные векторные пространства.**

    Пусть V и W — два векторных пространства над полем F.

    Отображение $\varphi : V \to W$ называется изоморфизмом, если φ линейно и биективно. Обозначение: $\varphi : V \xrightarrow{\sim} W$.

    Два векторных пространства V и W называются изоморфными, если существует изоморфизм $\varphi : V \xrightarrow{\sim} W$ (и тогда существует изоморфизм $V \xleftarrow{\sim} W$). Обозначение: $V \simeq W$ или $V \cong W$.

20. **Критерий изоморфности двух конечномерных векторных пространств.**

    Два конечномерных векторных пространства V и W изоморфны тогда и только тогда, когда $\dim V = \dim W$.

21. **Матрица линейного отображения.**

    Пусть V и W — векторные пространства, $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ — базис V, $\mathbb{f} = (f_1, \ldots, f_m)$ — базис W, $\varphi : V \to W$ — линейное отображение.

    Матрицей линейного отображения φ в базисах $\mathbb{e}$ и $\mathbb{f}$ (или по отношению к базисам $\mathbb{e}$ и $\mathbb{f}$) называется такая матрица, у которой в j-ом столбце выписаны координаты вектора $\varphi(e_j)$ в базисе $\mathbb{f}$.

    $$\varphi(e_j) = a_{1j}f_1 + \ldots + a_{mj}f_m = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}f_i, \quad A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{m\times n} \text{ — матрица } \varphi$$

22. **Сумма двух линейных отображений и её матрица.**

    Пусть $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}(V, W)$.

    Отображение $\varphi + \psi \in \mathrm{Hom}(V, W)$ — это $(\varphi + \psi)(v) := \varphi(v) + \psi(v)$ – сумма отображений.

    Пусть $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ — базис V, $\mathbb{f} = (f_1, \ldots, f_m)$ — базис W, $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}(V, W)$. При этом A_φ — матрица линейного отображения φ, A_ψ — матрица для ψ, $A_{\varphi+\psi}$ — для $\varphi + \psi$.

    Тогда $A_{\varphi+\psi} = A_\varphi + A_\psi$.

23. **Произведение линейного отображения на скаляр и его матрица.**

    Пусть $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}(V, W)$.

    Отображение $\alpha \in F, \alpha\varphi \in \mathrm{Hom}(V, W)$ — это $(\alpha\varphi)(v) := \alpha(\varphi(v))$ – произведение линейного отображения на скаляр.

    Пусть $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ — базис V, $\mathbb{f} = (f_1, \ldots, f_m)$ — базис W, $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}(V, W)$. При этом A_φ — матрица линейного отображения φ, A_ψ — матрица для ψ, $A_{\alpha\varphi}$ — для $\alpha\varphi$.

    Тогда $A_{\alpha\varphi} = \alpha A_\varphi$.

24. **Композиция линейных отображений и её матрица.**

    Возьмем три векторных пространства — U, V и W размерности n, m и k соответственно, и их базисы $\mathbb{e}, \mathbb{f}$ и $\mathbb{g}$. Также рассмотрим цепочку линейных отображений $U \xrightarrow{\psi} V \xrightarrow{\varphi} W$.

    Отображение $\varphi \circ \psi \in \mathrm{Hom}(U, W)$ – это $(\varphi \circ \psi)(v) := \varphi(\psi(v))$ – композиция линейных отображений.

    Пусть A — матрица φ в базисах $\mathbb{f}$ и $\mathbb{g}$, B — матрица ψ в базисах $\mathbb{e}$ и $\mathbb{f}$, C — матрица $\varphi \circ \psi$ в базисах $\mathbb{e}$ и $\mathbb{g}$.

    Тогда $C = AB$.

25. **Ядро и образ линейного отображения.**

    Пусть V и W — векторные пространства, $\varphi : V \to W$ — линейное отображение.

    Ядро φ — это множество $\mathrm{Ker}\,\varphi := \{v \in V \mid \varphi(v) = 0\}$.

    Образ φ — это множество $\mathrm{Im}\,\varphi := \{w \in W \mid \exists v \in V : \varphi(v) = w\}$.

26. **Критерий инъективности линейного отображения в терминах его ядра.**

    Пусть $\varphi\colon V \to W$ — линейное отображение.

    Отображение φ инъективно тогда и только тогда, когда $\mathrm{Ker}\,\varphi = \{0\}$.

27. **Связь между рангом матрицы линейного отображения и размерностью его образа.**

    Пусть V, W — векторные пространства, $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ — базис V, $\mathbb{f} = (f_1, \ldots, f_m)$ — базис W, A — матрица φ по отношению к $\mathbb{e}$, $\mathbb{f}$.

    Тогда $\dim \mathrm{Im}\,\varphi = \mathrm{rk}\,A$.

28. **Критерий изоморфности линейного отображения в терминах его матрицы.**

    Пусть V и W — векторные пространства, $\varphi : V \to W$ — линейное отображение.

    Отображение φ является изоморфизмом тогда и только тогда, когда его матрица является квадратной и невырожденной.

29. **Ранг произведения двух матриц.**

    Пусть $A \in \mathrm{Mat}_{k\times m}$, $B \in \mathrm{Mat}_{m\times n}$. Тогда $\mathrm{rk}\, AB \leqslant \min\{\mathrm{rk}\, A, \mathrm{rk}\, B\}$.

30. **Теорема о связи размерностей ядра и образа линейного отображения.**

    Пусть $\varphi\colon V \to W$ — линейное отображение.

    Тогда $\dim \mathrm{Im}\, \varphi = \dim V - \dim \mathrm{Ker}\, \varphi$.

31. **Линейный оператор.**

    Пусть V — конечномерное векторное пространство.

    Линейным оператором (или линейным преобразованием) называется всякое линейное отображение $\varphi\colon V \to V$, то есть из V в себя.

32. **Матрица линейного оператора.**

    Пусть V — векторное пространство, $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ — его базис и φ — его линейный оператор.

    Матрицей линейного оператора φ называется такая матрица, в j-ом столбце которой стоят координаты вектора $\varphi(e_j)$ в базисе $\mathbb{e}$.

    $$(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)) = (e_1, \ldots, e_n)\, A, \quad A \text{ — матрица } \varphi$$

33. **Формула изменения матрицы линейного оператора при переходе к другому базису.**

    Пусть φ — линейный оператор векторного пространства V, A — матрица φ в базисе $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$. Пусть $\mathbb{e}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ — другой базис, причём $(e'_1, \ldots, e'_n) = (e_1, \ldots, e_n)C$, где C — матрица перехода, и A' — матрица φ в базисе $\mathbb{e}'$.

    Тогда $A' = C^{-1}AC$.

34. **Подобные матрицы.**

    Две матрицы $A', A \in M_n(F)$ называются подобными, если существует такая матрица $C \in M_n(F), \det C \neq 0$, что $A' = C^{-1}AC$.

35. **Подпространство, инвариантное относительно линейного оператора.**

    Пусть $\varphi\colon V \to V$ — линейный оператор.

    Подпространство $U \subseteq V$ называется инвариантным относительно φ (или φ-инвариантным), если $\varphi(U) \subseteq U$. То есть $\forall u \in U : \varphi(u) \in U$.

36. **Матрица линейного оператора в базисе, дополняющем базис инвариантного подпространства.**

    Пусть $\varphi\colon V \to V$ — линейный оператор.

    Пусть $U \subset V$ — φ-инвариантное подпространство. Также пусть $(e_1, \ldots, e_k)$ — базис в U. Дополним его до базиса V: $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$. Тогда

    $$\underbrace{A(\varphi, \mathbb{e})}_{\text{Матрица с углом нулей}} = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}, \quad \text{где } B \in M_k$$

37. **Собственный вектор линейного оператора.**

Пусть $\varphi\colon V \to V$ — линейный оператор.

Ненулевой вектор $v \in V$ называется *собственным* для V, если $\varphi(v) = \lambda v$ для некоторго $\lambda \in F$.

38. **Собственное значение линейного оператора.**

Элемент $\lambda \in F$ называется собственным значением линейного оператора φ векторно пространства V, если существует такой ненулевой вектор $v \in V$, что $\varphi(v) = \lambda v$.

39. **Собственное подпространство линейного оператора.**

Пусть $\varphi\colon V \to V$ — линейный оператор.

Множество $V_\lambda(\varphi) = \{v \in V \mid \varphi(v) = \lambda v\}$ называется собственным подпространством линейного оператора, отвечающим собственному значению λ.

40. **Диагонализуемый линейный оператор.**

Линейный оператор $\varphi\colon V \to V$ называется диагонализуемым, если существует базис $\mathbb{e}$ в V такой, что $A(\varphi, \mathbb{e})$ диагональна.

41. **Критерий диагонализуемости линейного оператора в терминах собственных векторов.**

Линейный оператор $\varphi\colon V \to V$ диагонализуем тогда и только тогда, когда в V существует базис из собственных векторов.

42. **Характеристический многочлен линейного оператора.**

Пусть $\varphi\colon V \to V$ — линейный оператор.

Многочлен $\chi_\varphi(t) = (-1)^n \det(\varphi - t\mathrm{id})$ называется характеристическим для линейного оператора φ.

43. **Связь собственных значений линейного оператора с его характеристическим многочленом.**

λ — собственное значение линейного оператора φ тогда и только тогда, когда $\chi_\varphi(\lambda) = 0$.

44. **Алгебраическая кратность собственного значения линейного оператора.**

Алгебраической кратностью собственного значения λ линейного оператора $\varphi\colon V \to V$ называется число k, которое равно кратности λ как корня характеристического многочлена φ.

45. **Геометрическая кратность собственного значения линейного оператора.**

Пусть $\varphi\colon V \to V$ — линейный оператор, λ — его собственное значение и $V_\lambda(\varphi)$ — соответствующее собственное подпространство.

Геометрической кратностью собственного значения λ называется число $\dim V_\lambda(\varphi)$.

46. **Связь между алгебраической и геометрической кратностями собственного значения линейного оператора.**

Геометрическая кратность не больше алгебраической кратности.

47. **Сумма нескольких подпространств векторных пространств.**

Пусть $U_1, \ldots, U_k$ — подпространства векторного пространства V. Суммой нескольких пространств называется $U_1 + \ldots + U_k = \{u_1 + \ldots + u_k \mid u_i \in U_i\}$.

48. **Прямая сумма нескольких подпространств векторных пространств.**

Пусть $U_1, \ldots, U_k$ — подпространства векторного пространства V.

Сумма нескольких подпространств $U_1 + \ldots + U_k$ называется прямой, если из условия $u_1 + \ldots + u_k = 0$, где $u_i \in U_i$, следует, что $u_1 = \ldots = u_k = 0$.

49. **Эквивалентные условия, определяющие прямую сумму нескольких подпространств векторного пространства.**

Пусть $U_1, \ldots, U_k$ — подпространства векторного пространства V.

Следующие условия эквивалентны:

(a) Сумма $U_1 + \ldots + U_k$ — прямая;

(b) Если $\mathbb{e}_i$ — базис U_i, то $\mathbb{e} = \mathbb{e}_1 \cup \ldots \cup \mathbb{e}_k$ — базис $U_1 + \ldots + U_k$;

(c) $\dim(U_1 + \ldots + U_k) = \dim U_1 + \ldots + \dim U_k$.

50. **Сумма собственных подпространств линейного оператора, отвечающих попарно различным собственным значениям.**

Пусть V — векторное пространство над полем F, φ его линейный оператор, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ — набор собственных значений φ, где $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$, и $V_{\lambda_i}(\varphi) \subseteq V$ — соответствующее собственное подпространство.

Тогда сумма $V_{\lambda_1}(\varphi) + \ldots + V_{\lambda_k}(\varphi)$ является прямой.

51. **Критерий диагонализуемости линейного оператора в терминах его характеристического многочлена и кратностей собственных значений.**

Пусть $\varphi\colon V \to V$ — линейный оператор.

Линейный оператор φ диагонализируем тогда и только тогда, когда

(a) $\chi_\varphi(t)$ разлагается на линейные множители;

(b) Если $\chi_\varphi(t) = (t - \lambda_1)^{k_1} \ldots (t - \lambda_s)^{k_s}$, где $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$, то $\dim V_{\lambda_i}(\varphi) = k_i \ \forall i$ (то есть для любого собственного значения φ равны геометрическая и алгебраическая кратности).

52. **Корневой вектор линейного оператора.**

Пусть $\varphi\colon V \to V$ — линейный оператор.

Вектор $v \in V$ называется корневым вектором линейного оператора φ, отвечающим значению $\lambda \in F$, если существует целочисленное $m \geqslant 0$ такое, что $(\varphi - \lambda \mathrm{id})^m(v) = 0$.

Наименьшее такое m называют высотой корневого вектора v.

53. **Корневое подпространство линейного оператора.**

Пусть $\varphi\colon V \to V$ — линейный оператор.

Множество $V^\lambda(\varphi) = \{v \in V \mid \exists m \geqslant 0 : (\varphi - \lambda \mathrm{id})^m(v) = 0, m \in \mathbb{Z}\}$ называется корневым пространством для $\lambda \in F$.

54. **Характеристический многочлен ограничения линейного оператора на корневое подпространство.**

Пусть $\varphi\colon V \to V$ — линейный оператор.

Будем обозначать как $\varphi\,|_V$ ограничение линейного оператора на пространство V.

Характеристический многочлен линейного отображения $\varphi\,\big|_{V^\lambda(\varphi)}$ равен $(t - \lambda)^k$, где $k = \dim V^\lambda(\varphi)$.

55. **Размерность корневого подпространства линейного оператора.**

    Пусть $\varphi\colon V \to V$ — линейный оператор.

    Если λ — собственное значение φ, то $\dim V^{\lambda}(\varphi)$ равна алгебраической кратности λ.

56. **Сумма корневых подпространств линейного оператора, отвечающих попарно различным собственным значениям.**

    Пусть $\varphi\colon V \to V$ — линейный оператор.

    Если $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, где $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$ — собственные значения φ, то сумма $V^{\lambda_1}(\varphi) + \ldots + V^{\lambda_k}(\varphi)$ — прямая.

57. **Признак разложимости пространства в прямую сумму корневых подпространств линейного оператора.**

    Пусть $\varphi\colon V \to V$ — линейный оператор.

    Если характеристический многочлен $\chi_{\varphi}(t)$ разлагается на линейные множители, причём $\chi_{\varphi}(t) = (t - \lambda_1)^{k_1} \ldots (t - \lambda_s)^{k_s}$, то $V = \bigoplus_{i=1}^{s} V^{\lambda_i}(\varphi)$.

58. **Жорданова клетка.**

    Пусть $\lambda \in F$. **Жорданова клетка** порядка n, отвечающая значению λ (с собственным значением λ) — это матрица следующего вида:

$$J_{\lambda}^{n} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in M_n(F).$$

59. **Теорема о Жордановой нормальной форме линейного оператора.**

    Пусть V — векторное пространство, φ — линейный оператор.

    Пусть $\chi_{\varphi}(t)$ разлагается на линейные множители. Тогда существует базис $\mathbb{e}$ в V такой, что

$$A(\varphi, \mathbb{e}) = \begin{pmatrix} J_{\mu_1}^{n_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & J_{\mu_2}^{n_2} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & J_{\mu_p}^{n_p} \end{pmatrix} \qquad (*)$$

    Кроме того, матрица $(*)$ определена однозначно с точностью до перестановки жордановых клеток.

    Матрица $(*)$ называется жордановой нормальной формой линейного оператора.

60. **Линейная функция.**

    Линейной функцией (формой, функционалом) на векторном пространстве V называется всякое линейное отображение $\sigma\colon V \to F$.

61. **Двойственный (сопряжённый) базис пространства линейных функций.**

    Пусть $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ — базис V. Рассмотрим линейные формы $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ такие, что $\varepsilon_i(e_j) = \delta_{ij}$, где $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ — символ Кронекера.
    То есть $\varepsilon_i = (\delta_{i1}, \ldots, \delta_{ii}, \ldots, \delta_{in}) = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$.

    Тогда $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ — базис в V^*, называющийся двойственным (сопряжённым) к базису $\mathbb{e}$.

62. **Билинейная функция.**

Билинейной функцией (формой) на векторном пространстве V называется всякое билинейное отображение $\beta\colon V \times V \to F$. То есть это отображение, линейное по каждому аргументу:

(a) $\beta(x_1 + x_2, y) = \beta(x_1, y) + \beta(x_2, y)$;

(b) $\beta(\lambda x, y) = \lambda\beta(x, y)$;

(c) $\beta(x, y_1 + y_2) = \beta(x, y_1) + \beta(x, y_2)$;

(d) $\beta(x, \lambda y) = \lambda\beta(x, y)$.

63. **Матрица билинейной функции.**

Пусть V — векторное пространство, $\dim V < \infty$, $\beta\colon V \times V \to F$ — билинейная функция.

Матрицей билинейной функции в базисе $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ называется матрица $B = (b_{ij})$, где $b_{ij} = \beta(e_i, e_j)$.

64. **Формула для вычисления значений билинейной функции в координатах.**

Пусть $(e_1, \ldots, e_n)$ — базис V, $\beta\colon V \times V \to F$ — билинейная функция, B — ее матрица в базисе $\mathbb{e}$. Тогда для некоторых векторов $x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n \in V$ и $y = y_1e_1 + \ldots + y_ne_n \in V$ верно, что:

$$\beta(x, y) = (x_1, \ldots, x_n)B \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

65. **Формула изменения матрицы билинейной функции при переходе к другому базису.**

Пусть $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ и $\mathbb{e}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ — два базиса V, β — билинейная функция на V. Пусть также $\mathbb{e}' = \mathbb{e}C$, где C — матрица перехода, также $B(\beta, \mathbb{e}) = B$ и $B(\beta, \mathbb{e}') = B'$.

Тогда $B' = C^TBC$.

66. **Ранг билинейной функции.**

Пусть $B(\beta, \mathbb{e})$ – матрица билинейной функции β в базисе $\mathbb{e}$.

Число $\operatorname{rk} B$ называется рангом билинейной функции β. Обозначение: $\operatorname{rk}\beta$.

67. **Симметричная билинейная функция.**

Билинейная функция β называется симметричной, если $\beta(x, y) = \beta(y, x)$ для любых $x, y \in V$.

68. **Квадратичная форма.**

Пусть $\beta\colon V \times V \to F$ — билинейная функция. Тогда функция $Q_\beta\colon V \to F$, заданная формулой $Q_\beta(x) = \beta(x, x)$, называется квадратичной формой (функцией), ассоциированной с билинейной функцией β.

69. **Соответствие между симметричными билинейными функциями и квадратичными формами.**

Пусть $\beta\colon V \times V \to F$ — симметричная билинейная функция, где F — поле, в котором $0 \neq 2$ (то есть можно делить на два).

Отображение $\beta(x, y) \mapsto Q_\beta(x) = \beta(x, x)$ является биекцией между симметричными билинейными функциями на V и квадратичными функциями на V.

70. **Поляризация квадратичной формы.**

Симметричная билинейная функция $\beta(x,y) = \frac{1}{2}\left(Q(x+y) - Q(x) - Q(y)\right)$ называется поляризацией квадратичной формы Q.

71. **Матрица квадратичной формы.**

Пусть V — векторное пространство, $\dim V < \infty$.

Матрицей квадратичной формы $Q\colon V \to F$ в базисе $\mathbb{e}$ называется матрица соответствующей ей симметричной билинейной функции $\beta\colon V \times V \to F$ в том же базисе.

72. **Канонический вид квадратичной формы.**

Квадратичная форма Q имеет в базисе $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ канонический вид, если для любого вектора $x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$ верно, что $Q(x) = a_1x_1^2 + \ldots + a_nx_n^2$, где $a_i \in F$. Иными словами, она имеет диагональную матрицу.

73. **Нормальный вид квадратичной формы.**

Квадратичная форма Q имеет нормальный вид в базисе $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$, если для любого вектора $x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$ верно, что $Q(x) = a_1x_1^2 + \ldots + a_nx_n^2$, причем $a_i \in \{-1, 0, 1\}$.

74. **Индексы инерции квадратичной формы.**

Пусть Q — квадратичная форма над $\mathbb{R}$, которая в базисе $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ имеет нормальный вид:

$$Q(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \ldots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \ldots - x_{s+t}^2,$$

где s — это количество положительных слагаемых, а t — отрицательных. Тогда:

(a) $i_+ := s$ — положительный индекс инерции;

(b) $i_- := t$ — отрицательный индекс инерции;

(c) $i_0 := n - s - t$ — нулевой индекс инерции.

75. **Закон инерции для квадратичной формы.**

Индексы инерции не зависят от выбора базиса, в котором квадратичная форма Q имеет нормальный вид.

76. **Положительно/неотрицательно определенная квадратичная форма.**

Квадратичная форма Q называется:

(a) положительно определенной, если $Q(x) > 0\ \forall x \neq 0$. Обозначение: $Q > 0$;

(b) неотрицательно определенной, если $Q(x) \geqslant 0\ \forall x$. Обозначение: $Q \geqslant 0$.

77. **Отрицательно/неположительно определенная квадратичная форма.**

Квадратичная форма Q называется:

(a) отрицательно определенной, если $Q(x) < 0\ \forall x \neq 0$. Обозначение: $Q < 0$;

(b) неположительно определенной, если $Q(x) \leqslant 0\ \forall x$. Обозначение: $Q \leqslant 0$.

78. **Неопределенная квадратичная форма.**

Квадратичная форма Q называется неопределенной, если существуют такие векторы x, y, что $Q(x) > 0$ и $Q(y) < 0$.

79. **Теорема Якоби.**

Пусть Q — квадратичная форма и $\delta_i \neq 0$ для всех i. Тогда $\operatorname{rk} Q = n$ и $i_-(Q)$ равен числу перемен знака последовательности $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_n$.

Здесь δ_i — угловой минор $i \times i$-подматрицы матрицы соответствующей симметричной билинейной функции β в некотором базисе; $\delta_0 = 1$.

80. **Критерий Сильвестра положительной определенности квадратичной формы.**

Квадратичная форма Q является положительно определенной тогда и только тогда, когда $\delta_i > 0$ для всех i.

Здесь δ_i — угловой минор $i \times i$-подматрицы матрицы соответствующей симметричной билинейной функции β в некотором базисе; $\delta_0 = 1$.

81. **Критерий отрицательной определенности квадратичной формы.**

Квадратичная форма Q является отрицательно определенной тогда и только тогда, когда:

$$\begin{cases} \delta_i < 0, & 2 \nmid i \\ \delta_i > 0, & 2 \mid i \end{cases}.$$

Здесь δ_i — угловой минор $i \times i$-подматрицы матрицы соответствующей симметричной билинейной функции β в некотором базисе; $\delta_0 = 1$.

82. **Евклидово пространство.**

Евклидово пространство — это векторное пространство $\mathbb{E}$ над полем $\mathbb{R}$, на котором задана положительно определённая симметрическая билинейная функция $(\cdot, \cdot)$, которую мы будем называть скалярным произведением.

83. **Длина вектора в евклидовом пространстве.**

Пусть $\mathbb{E}$ — евклидово пространство, $x \in \mathbb{E}$. Тогда длиной вектора называют величину $|x| = \sqrt{(x,x)}$.

84. **Неравенство Коши-Буняковского.**

Пусть $\mathbb{E}$ — евклидово пространство, $x, y \in \mathbb{E}$. Тогда $|(x,y)| \leqslant |x||y|$, причём знак равенства возможен тогда и только тогда, когда x и y пропорциональны.

85. **Угол между векторами Евклидова пространства.**

Пусть $\mathbb{E}$ — евклидово пространство. Углом между векторами $x, y \in \mathbb{E}$ называют такой α, что $\cos\alpha = \dfrac{(x,y)}{|x||y|}$.

86. **Матрица Грама системы векторов евклидова пространства.**

Пусть $\mathbb{E}$ — евклидово пространство.

Матрица Грама системы $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{E}$ это

$$G(v_1, \ldots, v_k) := (g_{ij}), \quad g_{ij} = (v_i,v_j).$$

87. **Свойства определителя матрица Грама.**

Пусть $\mathbb{E}$ — евклидово пространство, $G(v_1, \ldots, v_k)$ — матрица Грама. Тогда:

(a) $\det G(v_1, \ldots, v_k) \geqslant 0$;

(b) $\det G(v_1, \ldots, v_k) = 0$ тогда и только тогда, когда $v_1, \ldots, v_k$ линейно зависимы.

88. **Ортогональное дополнение системы векторов евклидова пространства.**

Пусть S — произвольное подпространство евклидова пространства $\mathbb{E}$. Ортогональным дополнением к S называется множество $S^\perp = \{x \in \mathbb{E} \mid (x,y) = 0\ \forall y \in S\}$.

89. **Ортогональная проекция вектора на подпространство.**

Пусть S — подпространство евклидова пространства $\mathbb{E}$. Тогда любой вектор $x \in E$ единственным образом разбивается на сумму $x = y + z$, где $y \in S$ и $z \in S^\perp$.

Вектор y называется ортогональной проекцией вектора x на подпространство S. Обозначение: $\mathrm{pr}_S x$.

90. **Ортогональная составляющая вектора относительно подпространства.**

Пусть S — подпространство евклидова пространства $\mathbb{E}$. Тогда любой вектор $x \in E$ единственным образом разбивается на сумму $x = y + z$, где $y \in S$ и $z \in S^\perp$.

Вектор z называется ортогональной составляющей вектора x относительно (вдоль) подпространства S. Обозначение: $\mathrm{ort}_S x$.

91. **Ортогональный базис.**

Базис $(e_1, \ldots, e_n)$ в евклидовом пространстве $\mathbb{E}$ называется ортогональным, если $(e_i, e_j) = 0\ \forall i \neq j$. Это равносильно тому, что $G(e_1, \ldots, e_n)$ диагональна.

92. **Ортонормированный базис.**

Базис $(e_1, \ldots, e_n)$ в евклидовом пространстве $\mathbb{E}$ называется ортонормированным, если он является ортогональным базисом и дополнительно $(e_i, e_i) = 1\ \forall i$. Это равносильно тому, что $G(e_1, \ldots, e_n) = E$.

93. **Ортогональная матрица.**

Пусть $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ и $\mathbb{e}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ — два ортонормированных базиса в евклидовом пространстве $\mathbb{E}$, причем $(e'_1, \ldots, e'_n) = (e_1, \ldots, e_n)C$.

Тогда матрица C называется ортогональной.

94. **Формула для ортогональной проекции вектора на подпространство в терминах его ортогонального базиса.**

Пусть S — подпространство евклидова пространства $\mathbb{E}$, $(e_1, \ldots, e_k)$ — его ортогональный базис, $x \in \mathbb{E}$.

Тогда $\mathrm{pr}_S x = \sum\limits_{i=1}^{k} \dfrac{(x,e_i)}{(e_i, e_i)} e_i$. В частности, если базис ортонормированный, $\mathrm{pr}_S x = \sum\limits_{i=1}^{k} (x,e_i) e_i$

95. **Теорема Пифагора в евклидовом пространстве.**

Если векторы евклидова пространства x и y перпендикулярны, то $|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2$.

96. **Расстояние между векторами евклидова пространства.**

Расстоянием между векторами евклидова пространства x и y называется число $\rho(x,y) := |x - y|$.

97. **Связь ортогональной составляющей вектора относительно подпространства с расстоянием до этого подпространства.**

Пусть U — подпространство евклидова пространства $\mathbb{E}$.

Модуль ортогональной составляющей вектора $x \in E$ относительно подпространства U равен расстоянию от вектора x до подпространства U.

$$\rho(x,U) = |\mathrm{ort}_U x|.$$

98. **Формула для расстояния от вектора до подпространства в терминах матриц Грама.**

    Пусть U — подпространство евклидова пространства $\mathbb{E}$, $x \in \mathbb{E}$, $(e_1, \ldots, e_k)$ — базис U. Тогда $(\rho(x,U))^2 = \dfrac{\det G(e_1, \ldots, e_k, x)}{\det G(e_1, \ldots, e_k)}$.

99. **n-мерный параллелепипед и его объем.**

    N-мерным параллелепипедом, натянутым на векторы $a_1, \ldots, a_n$ евклидова пространства $\mathbb{E}$ называется множество

    $$P(a_1, \ldots, a_n) := \left\{ x = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i \mid 0 \leqslant x_i \leqslant 1 \right\}.$$

    Объем n-мерного параллелепипеда $P(a_1, \ldots, a_n)$ — это число $\operatorname{vol} P(a_1, \ldots, a_n)$, определяемое рекурсивно следующим образом:

    $$\begin{aligned} &n = 1 \quad \operatorname{vol} P(a_1) = |a_1| \\ &n > 1 \quad \operatorname{vol} P(a_1, \ldots, a_n) = \operatorname{vol} P(a_1, \ldots, a_{n-1}) \cdot |h| \end{aligned}$$

    Где $h = \operatorname{ort}_{\langle a_1, \ldots, a_{n-1} \rangle} a_n$ — высота $P(a_1, \ldots, a_n)$.

100. **Формула для объема n-мерного параллелепипеда (любая из двух).**

    Пусть $\mathbb{E}$ — векторное пространство, $(e_1, \ldots, e_n)$ — его ортогональный базис и $(a_1, \ldots, a_n) = (e_1, \ldots, e_n)A$ для некоторой матрицы $A \in M_n(\mathbb{R})$. Тогда $\operatorname{vol} P(a_1, \ldots, a_n) = |\det A|$.

    Вторая формула: $\operatorname{vol} P(a_1, \ldots, a_n)^2 = \det G(a_1, \ldots, a_n)$.

101. **Критерий изоморфности двух конечномерных евклидовых пространств.**

    Два конечномерных евклидовых пространства $\mathbb{E}$ и $\mathbb{E}'$ изоморфны тогда и только тогда, когда их размерности совпадают.

102. **Сопряженный линейный оператор.**

    Пусть $\mathbb{E}$ — евклидово пространство. Линейный оператор ψ в $\mathbb{E}$ называется сопряженным к φ, если для всех векторов x, $y \in \mathbb{E}$ верно, что $(\psi(x), y) = (x, \varphi(y))$. Обозначение: $\psi = \varphi^*$.

103. **Матрица сопряженного оператора в произвольном и ортонормированном базисах.**

    Пусть $\mathbb{E}$ — евклидово пространство, $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ — базис $\mathbb{E}$, $G = G(e_1, \ldots, e_n)$ — матрица Грама, φ — линейный оператор в $\mathbb{E}$, A_φ — матрица φ в базисе $\mathbb{e}$, A_{φ^*} — матрица φ^* в том же базисе. Тогда:

    $$A_{\varphi^*} = G^{-1} A_\varphi^T G.$$

    В частности, если $\mathbb{e}$ — ортонормированный базис, то $A_{\varphi^*} = A_\varphi^T$.

104. **Самосопряженный линейный оператор.**

    Линейный оператор φ евклидова пространства $\mathbb{E}$ называется самосопряженным (симметрическим), если $\varphi^* = \varphi$. Это равносильно тому, что $(\varphi(x), y) = (x, \varphi(y)))$ для любых векторов x, $y \in \mathbb{E}$.

105. **Канонический вид самосопряженного линейного оператора.**

    Самосопряженный линейный оператор φ имеет канонический вид в базисе $\mathbb{e}$, если его матрица в этом базисе имеет диагональный вид с собственными значениями на диагонали.

106. **Приведение квадратичной формы к главным осям.**

Для любой квадратичной формы Q над евклидовым пространством $\mathbb{E}$ существует ортонормированный базис, в котором Q имеет канонический вид.

$$Q(x_1, \ldots, x_n) = \lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2.$$

Причем числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ определены однозначно с точностью до перестановки.

107. **Ортогональный линейный оператор.**

Линейный оператор φ евклидова пространства $\mathbb{E}$ называется ортогональным, если

$$(\varphi(x), \varphi(y)) = (x, y), \quad \forall x, y \in \mathbb{E}.$$

Другими словами, φ сохраняет скалярное произведение, осуществляет изоморфизм $\mathbb{E}$ на себя.

Эквивалентные определения:

(a) $|\varphi(x)| = |x|$ для всех $x \in \mathbb{E}$, то есть φ сохраняет длины;

(b) существует φ^{-1}, причем $\varphi^{-1} = \varphi^*$, то есть $\varphi \cdot \varphi^* = \varphi^* \cdot \varphi = \mathrm{id}$;

(c) если $\mathbb{e}$ — ортонормированный базис, то $A(\varphi, \mathbb{e})$ — ортогональная матрица;

(d) если $(e_1, \ldots, e_n)$ — ортонормированный базис, то $(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n))$ — тоже ортонормированный базис.

108. **Классификация ортогональных линейных операторов в одномерном и двумерном евклидовых пространствах.**

Пусть $\mathbb{E}$ — евклидово пространство, $\mathbb{e}$ — его базис, φ — его ортогональный линейный оператор, A — матрица φ в базисе $\mathbb{e}$.

Если $\dim \mathbb{E} = 1$, то $\varphi = \pm\mathrm{id}$.

Если $\dim \mathbb{E} = 2$, то возможны два случая:

(a) φ это поворот пространства на угол α, $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$;

(b) φ это отражение относительно некоторой прямой, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

109. **Канонический вид ортогонального линейного оператора.**

Ортогональный линейный оператор φ евклидова пространства $\mathbb{E}$ имеет в базисе $\mathbb{e}$ канонический вид, если его матрица в этом базисе имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \Pi(\alpha_1) &&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&& \\ && \Pi(\alpha_k) &&&&&& \\ &&& -1 &&&&& \\ &&&& \ddots &&&& \\ &&&&& -1 &&& \\ &&&&&& 1 && \\ &&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&& 1 \end{pmatrix},$$

где $\Pi(\alpha_i) = \begin{pmatrix} \cos\alpha_i & \sin\alpha_i \\ -\sin\alpha_i & \cos\alpha_i \end{pmatrix}$ — матрица поворота на угол α_i.

110. **Классификация ортогональных линейных операторов в трехмерного евклидовом пространстве.**

Пусть $\mathbb{E}$ — евклидово пространство, $\dim \mathbb{E} = 3$, φ — его ортогональный линейный оператор, $A(\varphi, \mathbb{e})$ — матрица φ в некотором базисе $\mathbb{e}$.

Тогда возможны два случая:

(a) φ это поворот на угол α вокруг оси $\langle e_3 \rangle$, где $\mathbb{e} = (e_1, e_2, e_3)$ — некоторый ортонормированный базис, $A(\varphi, \mathbb{e}) = \begin{pmatrix} \Pi(\alpha) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

(b) φ это «зеркальный поворот», то есть поворот на угол α вокруг прямой e_3 и зеркальное отражение относительно $\langle e_1, e_2 \rangle = \langle e_3 \rangle^{\perp}$, где $\mathbb{e} = (e_1, e_2, e_3)$ — некоторый ортонормированный базис, $A(\varphi, \mathbb{e}) = \begin{pmatrix} \Pi(\alpha) & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.