

Лекция 31 от 17.05.2016

Самосопряжённые линейные операторы (продолжение)

Пусть \mathbb{E} — евклидово пространство, $\dim \mathbb{E} = n$, $\varphi \in L(\mathbb{E})$. Вспомним, что по определению сопряжённый линейный оператор φ^* это такой линейный оператор, для которого выполняется следующее:

$$(x, \varphi(y)) = (\varphi^*(x), y).$$

Вспомним также, что самосопряженным называется такой оператор φ , для которого $\varphi^* = \varphi$.

Предложение. Пусть φ — самосопряженный линейный оператор в \mathbb{E} . Если $U \subseteq \mathbb{E}$ — φ -инвариантное подпространство в \mathbb{E} , то U^\perp тоже φ -инвариантно.

Поясним, что означает этот факт.

Пусть $\dim U = m$ и $U = \langle e_1, \dots, e_m \rangle$. Так как $\mathbb{E} = U \oplus U^\perp$, то $\dim U^\perp = n - m$ и $U^\perp = \langle e_{m+1}, \dots, e_n \rangle$, где $e = (e_1, \dots, e_n)$ — базис \mathbb{E} .

Тогда матрица φ в базисе e имеет следующий блочный вид:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad A \in M_m, D \in M_{n-m}.$$

Когда U — φ -инвариантно, то есть $\varphi(U) \subseteq U$, эта матрица принимает вид $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$, так как базисные векторы e_1, \dots, e_m переходят в себя, не затрагивая векторы e_{m+1}, \dots, e_n . И мы хотим доказать, что U^\perp тоже является φ -инвариантным подпространством, то есть блок B также равен нулю, то есть матрица φ в базисе e имеет вид $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$.

Доказательство. Известно, что $\varphi = \varphi^*$ и $\varphi(U) \subseteq U$. Мы хотим, чтобы $\varphi(U^\perp) \subseteq U^\perp$. Для этого нам достаточно показать, что $(x, \varphi(y)) = 0$ для любых векторов $x \in U$ и $y \in U^\perp$.

$$(x, \varphi(y)) = (\varphi^*(x), y) = \underbrace{(\varphi(x))}_{\in U}, \underbrace{y}_{\in U^\perp} = 0$$

□

Предложение. У самосопряжённого оператора φ есть собственный вектор над \mathbb{R} .

Доказательство. Ранее в курсе мы уже доказывали, что у φ существует одномерное или двумерное φ -инвариантное подпространство. Рассмотрим соответствующие случаи.

1. Если существует одномерное φ -инвариантное подпространство, то его порождающий вектор является собственным.
2. Пусть $U \subseteq \mathbb{E}$ — двумерное φ -инвариантное подпространство и $e = (e_1, e_2)$ — его ортонормированный базис. Пусть $\psi \in L(U)$ — ограничение φ на U . В прошлый раз мы уже доказывали, что матрица ψ имеет симметрический вид, то есть $A(\psi, e) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$.

Рассмотрим его характеристический многочлен:

$$\chi_\psi(t) = (-1)^2 \begin{vmatrix} a - t & b \\ b & c - t \end{vmatrix} = t^2 - (a + c)t + ac - b^2 = 0;$$
$$D = (a - c)^2 + 4b^2 \geq 0.$$

Так как дискриминант неотрицательный, то у $\chi_\psi(t)$ есть хотя бы один корень. Следовательно, у ψ есть собственный вектор v . Но ψ — ограничение φ , так что вектор v тоже является для него собственным.

□

Теорема. У всякого самосопряжённого линейного оператора есть ортонормированный базис из собственных векторов. В частности, φ диагонализуем над \mathbb{R} и его характеристический многочлен разлагается в произведение линейных сомножителей.

Следствие. Всякая симметричная матрица над \mathbb{R} подобна диагональной.

Доказательство. Докажем индукцией по n .

Для $n = 1$ всё очевидно. Если $n > 1$, то у φ есть собственный вектор v . Положим $e_1 = \frac{v}{|v|}$ и $U = \langle e_1 \rangle^\perp$. Тогда $\dim U = n - 1$, причем U — φ -инвариантное подпространство (см. предыдущее предложение). По предположению индукции в U есть ортонормированный базис из собственных векторов (e_2, \dots, e_n) . Тогда (e_1, \dots, e_n) — искомый базис. □

Следствие. Пусть φ — самосопряжённый линейный оператор, и λ, μ — его собственные значения. Тогда $V_\lambda(\varphi) \perp V_\mu(\varphi)$ при $\lambda \neq \mu$.

Доказательство.

1. Координатный способ. Пусть $e = (e_1, \dots, e_n)$ — ортонормированный базис из собственных векторов, где $\varphi(e_i) = \lambda_i e_i$. Тогда для произвольного вектора $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ из V верно, что $\varphi(x) = x_1 \lambda_1 e_1 + \dots + x_n \lambda_n e_n$.

Несложно понять, что если $x \in V_\lambda(\varphi)$, то есть $\varphi(x) = \lambda x$, то тогда x принадлежит линейной оболочке тех базисных векторов, чье собственное значение равно λ : $x \in \langle e_i \mid \lambda_i = \lambda \rangle$. А так как базисные векторы попарно ортогональны в силу свойств выбранного базиса, то как раз получаем, что $V_\lambda(\varphi) \perp V_\mu(\varphi)$, если $\lambda \neq \mu$.

2. Бескоординатный способ. Возьмем произвольные векторы $x \in V_\lambda(\varphi)$ и $y \in V_\mu(\varphi)$. Тогда:

$$\lambda(x, y) = (\lambda x, y) = (\varphi(x), y) = (x, \varphi(y)) = (x, \mu y) = \mu(x, y).$$

А поскольку $\lambda \neq \mu$, то $(x, y) = 0$.

□

Следствие (Приведение квадратичной формы к главным осям). Для любой квадратичной формы Q над \mathbb{E} существует ортонормированный базис, в котором Q имеет канонический вид.

$$Q(x_1, \dots, x_n) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2.$$

Причем числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ определены однозначно с точностью до перестановки.

Это более сильное утверждение, чем мы доказывали ранее, так как теперь мы говорим именно про ортонормированный базис.

Доказательство. Существует единственный самосопряжённый линейный оператор φ в \mathbb{E} такой, что $Q(v) = (v, \varphi(v))$. Если e — ортонормированный базис, то матрица Q в базисе e будет равна матрице φ в базисе e . Числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ являются собственными значениями φ . □

Следствие. Пусть $A \in M_n(\mathbb{R})$, $A = A^T$. Тогда существует ортогональная матрица C такая, что

$$C^T A C = C^{-1} A C = D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Ортогональные линейные операторы

Определение. Линейный оператор $\varphi \in L(\mathbb{E})$ называется ортогональным, если

$$(\varphi(x), \varphi(y)) = (x, y), \quad \forall x, y \in \mathbb{E}.$$

Другими словами, φ сохраняет скалярное произведение, осуществляет изоморфизм \mathbb{E} на себя.

Предложение. Пусть φ — линейный оператор в \mathbb{E} . Тогда следующие условия эквивалентны:

1. φ — ортогональный линейный оператор;
2. $|\varphi(x)| = |x|$ для всех $x \in \mathbb{E}$, то есть φ сохраняет длины;
3. существует φ^{-1} , причем $\varphi^{-1} = \varphi^*$, то есть $\varphi \cdot \varphi^* = \varphi^* \cdot \varphi = \text{id}$;
4. если e — ортонормированный базис, то $A(\varphi, e)$ — ортогональная матрица;
5. если (e_1, \dots, e_n) — ортонормированный базис, то $(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$ — тоже ортонормированный базис.

Доказательство. Везде здесь $x, y \in \mathbb{E}$.

$$(1) \Rightarrow (2)$$

$$|\varphi(x)| = \sqrt{(\varphi(x), \varphi(x))} = \sqrt{(x, x)} = |x|$$

$$(2) \Rightarrow (1) \text{ Используем поляризацию (см. лекция 26).}$$

$$(\varphi(x), \varphi(y)) = \frac{1}{2}(|\varphi(x+y)|^2 - |\varphi(x)|^2 - |\varphi(y)|^2) = \frac{1}{2}(|x+y|^2 - |x|^2 - |y|^2) = (x, y)$$

$$(1) \& (2) \Rightarrow (3) \text{ Найдем ядро } \varphi:$$

$$\varphi(x) = 0 \Rightarrow |\varphi(x)| = 0 \Rightarrow |x| = 0 \Rightarrow x = 0$$

Итого, $\text{Ker } \varphi = \{0\}$. Значит, существует φ^{-1} . Теперь докажем, что $\varphi^{-1} = \varphi^*$:

$$(\varphi^{-1}(x), y) = (\varphi(\varphi^{-1}(x)), \varphi(y)) = (x, \varphi(y))$$

Получили, что φ^{-1} является сопряженным к φ по определению.

$$(3) \Rightarrow (1)$$

$$(\varphi(x), \varphi(y)) = (\varphi^*(\varphi(x)), y) = (x, y)$$

$$(4) \Leftrightarrow (5) \text{ Пусть } e = (e_1, \dots, e_n) \text{ — ортонормированный базис. Тогда верно, что}$$

$$(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) = (e_1, \dots, e_n) \cdot C, \quad C = A(\varphi, e)$$

Матрица C является ортогональной тогда и только тогда, когда $(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$ — ортонормированный базис.

$$(3) \Leftrightarrow (4) \text{ Пусть } e \text{ — ортонормированный базис, } C = A(\varphi, e). \text{ Тогда } A(\varphi^*, e) = C^T \text{ и условие, что } \varphi \cdot \varphi^* = \text{id} \text{ равносильно тому, что } C \cdot C^T = E, \text{ то есть } C \text{ — ортогональная матрица.}$$

□

Пример. Тут надо придумать, как записывать.

Предложение. Пусть φ — ортогональный линейный оператор в \mathbb{E} . Если $U \subseteq \mathbb{E}$ — φ -инвариантное подпространство в \mathbb{E} , то U^\perp тоже φ -инвариантно.

Доказательство. Рассмотрим ψ — ограничение φ на U . Оно, очевидно, тоже сохраняет длины, то есть также является ортогональным оператором. Следовательно, существует ψ^{-1} .

Достаточно показать, что $(x, \varphi(y)) = 0$ для любых векторов $x \in U$ и $y \in U^\perp$.

$$(x, \varphi(y)) = (\psi(\psi^{-1}(x)), \varphi(y)) = (\varphi(\psi^{-1}(x)), \varphi(y)) = (\underbrace{\psi^{-1}(x)}_{\in U}, \underbrace{y}_{\in U^\perp}) = 0$$

□

Пусть $\Pi(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$.

Теорема. Пусть φ — ортогональный линейный оператор в \mathbb{E} . Тогда существует ортонормированный базис \mathfrak{e} такой, что матрица $A(\varphi, \mathfrak{e})$ имеет следующий блочно-диагональный вид:

$$A(\varphi, \mathfrak{e}) := \begin{pmatrix} \Pi(\alpha) & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \Pi(\alpha) & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & -1 & \\ & & & & & & 1 \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$