

Лекция 25 от 21.03.2016

Жорданова нормальная форма

Пусть V — векторное пространство, φ — линейный оператор.

Теорема (Жорданова нормальная форма линейного оператора). Пусть $\chi_\varphi(t)$ разлагается на линейные множители. Тогда существует базис e в V такой, что

$$A(\varphi, e) = \begin{pmatrix} J_{\mu_1}^{n_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{\mu_2}^{n_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_{\mu_p}^{n_p} \end{pmatrix} \quad (*)$$

Кроме того, матрица $(*)$ определена однозначно с точностью до перестановок жордановых клеток.

Определение. Матрица $(*)$ называется жордановой нормальной формой линейного оператора.

Следствие. В векторном пространстве над полем комплексных чисел для любого линейного оператора существует жорданова нормальная форма.

Схема построения:

Шаг 1 Разложим характеристический многочлен: $\chi_\varphi(t) = (t - \lambda_1)^{k_1} \dots (t - \lambda_s)^{k_s}$, где $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$. Тогда, по доказанной на прошлой лекции теореме, $V = \bigoplus_{i=1}^s V^{\lambda_i}(\varphi)$, причем $\dim V^{\lambda_i}(\varphi) = k_i$.

Введем отображение $\psi_i = \varphi|_{V^{\lambda_i}(\varphi)} \in L(V^{\lambda_i}(\varphi))$. Тогда $\chi_{\psi_i}(t) = (t - \lambda_i)^{k_i}$. Также введем e_i — базис $V^{\lambda_i}(\varphi)$. Пусть $e = e_1 \cup \dots \cup e_s$.

Тогда:

$$A(\varphi, e) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_s \end{pmatrix}, \quad \text{где } A_i = A(\psi_i, e_i) \in M_{k_i}.$$

Шаг 2 Для любого i можно выбрать базис e_i так, чтобы

$$A_i = \begin{pmatrix} J_{\lambda_i}^{m_{i1}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{\lambda_i}^{m_{i2}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_{\lambda_i}^{m_{iq}} \end{pmatrix}, \quad m_{i1} + \dots + m_{iq} = k_i$$

Обратите внимание, что здесь все жордановы клетки отвечают одному значению λ_i , но при этом матрица A_i целиком жорданову клетку не образует, так как линия единиц над диагональю из λ разрывна там, где состыковываются две клетки:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} \lambda_i & 1 & & & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & & & \\ & & \lambda_i & 1 & & & & \\ & & & \lambda_i & 0 & & & \\ \hline & & & & \lambda_i & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & & \lambda_i & 1 \\ & & & & & & & \lambda_i \end{array} \right)$$

Тогда жорданова нормальная форма матрицы $A(\varphi, \mathfrak{e})$ составляется из таких матриц A_i :

$$A(\varphi, \mathfrak{e}) = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1}^{m_{11}} & & & & \\ & J_{\lambda_1}^{m_{12}} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & J_{\lambda_2}^{m_{21}} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & J_{\lambda_s}^{m_{s1}} \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & J_{\lambda_s}^{m_{sk_i}} \end{pmatrix}$$

Шаг 3 Осталось только заметить, что для каждого λ_i число и порядок жордановых клеток однозначно определено из последовательности чисел:

$$\begin{aligned} & \dim \ker(\psi_1 - \lambda_1 \text{id}) \\ & \dim \ker(\psi_2 - \lambda_2 \text{id})^2 \\ & \dots \\ & \dim \ker(\psi_i - \lambda_i \text{id})^i \end{aligned}$$

Откуда и следует однозначность представления в виде жордановой нормальной формы (с точностью до перестановки жордановых клеток).

Линейные функции на векторном пространстве

Рассмотрим функцию $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Пусть $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ — приращение, то есть $x = x_0 + y$. Из этого следует, что

$$f(x) = f(x_0) + a_1 y_1 + \dots + a_n y_n + b_{11} y_1^2 + \dots + b_{ij} y_i y_j + \dots + b_{nn} y_n^2 + \bar{o}(|y|^2).$$

Тогда сумма $a_1 y_1 + \dots + a_n y_n$ будет называться линейной формой, а сумма $b_{11} y_1^2 + \dots + b_{ij} y_i y_j + \dots + b_{nn} y_n^2$ — квадратичной формой.

Теперь дадим строгое определение:

Определение. *Линейной функцией (формой) на векторном пространстве V называется всякое линейное отображение $\sigma: V \rightarrow F$, где F — одномерное векторное пространство.*

Обозначение: $V^* = \text{Hom}(V, F)$.

Замечание. *Формой принято называть, когда векторное пространство состоит из функций.*

Пример.

1. $\alpha: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$; $\varphi(v) = \langle v, e \rangle$ — скалярное произведение с некоторым фиксированным e .
2. $\alpha: \mathcal{F}(X, F) \rightarrow F$; $\alpha(f) = f(x_0)$. Здесь $\mathcal{F}(X, F) = \{f: X \rightarrow F\}$.
3. $\alpha: C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$; $\alpha(f) = \int_a^b f(x) dx$.
4. $\alpha: \text{Mat}(F) \rightarrow F$; $\alpha(X) = \text{tr} A$.

Определение. *Пространство V^* называется сопряженным (двойственным) к V .*

Пусть $e = (e_1, \dots, e_n)$ — базис V , и существует изоморфизм $\alpha: V \xrightarrow{\sim} M_n$. Тогда

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \text{ где } \alpha_i = \alpha(e_i). \text{ При этом, если } x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n, \text{ то } \alpha(x) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Следствие. $\dim V^* = n$.

Пусть $e = (e_1, \dots, e_n)$ — базис V . Рассмотрим линейные формы $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ такие, что $\varepsilon_i(e_j) = \delta_{ij}$, где $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ — символ Кронекера. То есть $\varepsilon_i = (\delta_{i1}, \dots, \delta_{ii}, \dots, \delta_{in}) = (0, \dots, 1, \dots, 0)$.

Предложение. $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ — базис в V^* .

Доказательство. Возьмем любое $\alpha \in V^*$. Положим $a_i = \alpha(e_i)$. Тогда $\alpha = a_1 \varepsilon_1 + \dots + a_n \varepsilon_n$. То есть мы получили, что через $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ действительно можно выразить любое α .

Теперь покажем, что $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ — линейно независимы. Пусть $a_1 \varepsilon_1 + \dots + a_n \varepsilon_n = 0$, $a_i \in F$. Применив эту функцию к e_i , получим, что $a_1 \varepsilon_1(e_i) + \dots + a_n \varepsilon_n(e_i) = 0$. Отсюда следует, что $a_i = 0$, а все остальные a_j , при $j \neq i$, равны нулю в силу определения ε_j . Итого, $a_1 = \dots = a_n = 0$, что и доказывает линейную независимость. \square

Определение. Базис $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ называется сопряженным базисом.

Упражнение. Всякий базис V^* сопряжен с некоторым базисом V .

Билинейные функции на векторном пространстве

Определение. Билинейной функцией (формой) на векторном пространстве V называется всякое билинейное отображение $\beta: V \times V \rightarrow F$. То есть это отображение, линейное по каждому аргументу:

1. $\beta(x_1 + x_2, y) = \beta(x_1, y) + \beta(x_2, y);$
2. $\beta(\lambda x, y) = \lambda \beta(x, y);$
3. $\beta(x, y_1 + y_2) = \beta(x, y_1) + \beta(x, y_2);$
4. $\beta(x, \lambda y) = \lambda \beta(x, y).$

Пример.

1. $V = \mathbb{R}^n$, $\beta(x, y) = \langle x, y \rangle$ — скалярное произведение.
2. $V = \mathbb{R}^2$, $\beta(x, y) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$
3. $V = C[a, b]$, $\beta(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx.$