Лекция 30 от 11.05.2016

N-мерные параллелепипеды в евклидовых пространствах

Пусть $\mathbb{E}$ — евклидово пространство. Вспомним, что такое расстояния в нем.

Для векторов x, $y \in E$ расстояние это $\rho(x, y) := |x - y|$.

Для подмножеств $P, Q \subseteq \mathbb{E}$ расстояние это $\rho(P, Q) := \inf\limits_{x \in P,\ y \in Q} \rho(x, y)$.

Для подпространства $U \subseteq \mathbb{E}$ и вектора $x \in \mathbb{E}$ известны следующие вещи:

1. $\rho(x, U) = |\mathrm{ort}_U x|$
2. $\rho(x, U)^2 = \frac{\det G(e_1, \ldots, e_k, x)}{\det G(e_1, \ldots, e_k)}$, где $e_1, \ldots, e_k$ — базис в U.

Рассмотрим теперь векторы $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{E}$, причем n — необязательно размерность $\mathbb{E}$.

Определение. *N-мерным параллелепипедом, натянутым на векторы $a_1, \ldots, a_n$ называется подмножество*

$$P(a_1, \ldots, a_n) := \left\{ x = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i \mid 0 \leqslant x_i \leqslant 1 \right\}.$$

Пример.

1. *При $n = 2$ это обычный двухмерный параллелограмм.*
2. *При $n = 3$ это трехмерный параллелепипед.*

Определение. *Для параллелепипеда $P(a_1, \ldots, a_n)$ основание это $P(a_1, \ldots, a_{n-1})$, а высота — $h = \mathrm{ort}_{\langle a_1, \ldots, a_{n-1} \rangle} a_n$.*

Определение. *Объем n-мерного параллелепипеда $P(a_1, \ldots, a_n)$ — это число $\mathrm{vol}\, P(a_1, \ldots, a_n)$, определяемое рекурсивно следующим образом:*

$$\begin{aligned} &n = 1 \quad \mathrm{vol}\, P(a_1) = |a_1| \\ &n > 1 \quad \mathrm{vol}\, P(a_1, \ldots, a_n) = \mathrm{vol}\, P(a_1, \ldots, a_{n-1}) \cdot |h| \end{aligned}$$

Теорема. $\mathrm{vol}\, P(a_1, \ldots, a_n)^2 = \det G(a_1, \ldots, a_n)$.

Доказательство. Докажем это утверждение по индукции.

База: при $n = 1$ имеем $\mathrm{vol}\, P(a_1)^2 = |a_1|^2 = (a_1, a_1) = \det G(a_1)$.

Теперь пусть утверждение доказано для всех меньших значений. Докажем для n.

$$\mathrm{vol}\, P(a_1, \ldots, a_n)^2 = \mathrm{vol}\, P(a_1, \ldots, a_{n-1})^2 \cdot |h|^2 = \det G(a_1, \ldots, a_{n-1}) \cdot |\mathrm{ort}_{\langle a_1, \ldots, a_{n-1} \rangle} a_n|^2 =$$
$$= \begin{cases} 0 = \det G(a_1, \ldots, a_n), & \text{если } a_1, \ldots a_{n-1} \text{ линейно зависимы} \\ \det G(a_1, \ldots, a_n) \frac{\det G(a_1, \ldots, a_n)}{\det G(a_1, \ldots, a_{n-1})} = \det G(a_1, \ldots, a_n), & \text{если } a_1, \ldots, a_{n-1} \text{ линейно независимы} \end{cases}$$

$\square$

Следствие. *Объем параллелепипеда не зависит от выбора основания.*

Теорема. *Пусть $(e_1, \ldots, e_n)$ — ортогональный базис в $\mathbb{E}$, и $(a_1, \ldots, a_n) = (e_1, \ldots, e_n)A$ для некоторой матрицы $A \in M_n(\mathbb{R})$. Тогда $\mathrm{vol}\, P(a_1, \ldots, a_n) = |\det A|$.*

Замечание. *Это — геометрический смысл определителя!*

Доказательство. Вспомним, что матрица Грама ортогонального базиса равна единичной матрице:

$$G(a_1, \dots, a_n) = A^T G(e_1, \dots, e_n) A = A^T A.$$

Тогда для определителя справедливо следующее:

$$\det G(a_1, \dots, a_n) = \det(A^T A) = (\det A)^2.$$

Осталось воспользоваться предыдущей теоремой:

$$\operatorname{vol} P(a_1, \dots, a_n) = \sqrt{\det G(a_1, \dots, a_n)} = |\det A|.$$

□

Изоморфизм евклидовых пространств

Теперь рассмотрим два евклидовых пространства, $\mathbb{E}$ и $\mathbb{E}'$.

Определение. *Изоморфизм евклидовых пространств $\mathbb{E}$ и $\mathbb{E}'$ — это биективное отображение $\varphi : \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ такое, что*

1. *φ — изоморфизм векторных пространств.*
2. *$(\varphi(x), \varphi(y))' = (x, y)$ для любых $x \in \mathbb{E}$ и $y \in \mathbb{E}'$. Здесь через $()'$ обозначается скалярное произведение в $\mathbb{E}'$.*

Определение. *Евклидовы пространства $\mathbb{E}$ и $\mathbb{E}'$ называются изоморфными, если между ними существует изоморфизм. Обозначение: $\mathbb{E} \simeq \mathbb{E}'$.*

Теорема. *Два конечномерных евклидовых пространства $\mathbb{E}$ и $\mathbb{E}'$ изоморфны тогда и только тогда, когда их размерности совпадают.*

Доказательство.
[$\Rightarrow$] Очевидно из первого пункта определения изоморфизма евклидовых пространств.

[$\Leftarrow$] Зафиксируем ортонормированные базисы $\mathbb{e} = (e_1, \dots, e_n)$ в $\mathbb{E}$ и $\mathbb{e}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ в $\mathbb{E}'$, где $n = \dim \mathbb{E} = \dim \mathbb{E}'$. Зададим изоморфизм $\varphi : \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ *векторных пространств* по формуле

$$\varphi(e_i) = e'_i \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Тогда имеем следующее (напомним, что δ_{ij} это символ Кронекера):

$$(\varphi(e_i), \varphi(e_j))' = (e'_i, e'_j)' = \delta_{ij} = (e_i, e_j).$$

Теперь рассмотрим векторы $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ и $y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$ и проверим второй пункт определения изоморфизма евклидовых пространств. Будем пользоваться билинейностью скалярного произведения.

$$(\varphi(x), \varphi(y))' = \left(\varphi\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right), \varphi\left(\sum_{j=1}^{j=n} y_j e_j\right)\right)' = \left(\sum_{i=1}^n x_i \varphi(e_i), \sum_{j=1}^n y_j \varphi(e_j)\right)' =$$
$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \varphi(e_i, e_j)' = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j (e_i, e_j) = (x, y)$$

□

Линейные операторы в евклидовых пространствах

Пусть $\mathbb{E}$ — евклидово пространство, φ — его линейный оператор. Тогда ему можно сопоставить две билинейные функции на $\mathbb{E}$:

$$\beta_\varphi(x, y) = (x, \varphi(y))$$
$$\beta_\varphi^T(x, y) = (\varphi(x), y)$$

Введем базис $\mathbb{e} = (e_1, \dots, e_n)$ в $\mathbb{E}$, матрицу Грама $G = G(e_1, \dots, e_n)$, матрицу оператора $A_\varphi = A(\varphi, \mathbb{e})$, а также два вектора $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ и $y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$. Тогда имеем следующее:

$$\varphi(x) = A_\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \varphi(y) = A_\varphi \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$
$$\beta_\varphi(x, y) = (x_1, \dots, x_n) G A_\varphi \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \qquad \beta_\varphi^T(x, y) = (x_1, \dots, x_n) A_\varphi^T G \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Отсюда мы можем вывести матрицы данных билинейных форм:

$$B(\beta_\varphi, \mathbb{e}) = G A_\varphi$$
$$B(\beta_\varphi^T, \mathbb{e}) = A_\varphi^T G$$

Замечание. *Отображения $\varphi \mapsto \beta_\varphi$ и $\varphi \mapsto \beta_\varphi^T$ являются биекциями между $L(\mathbb{E})$ и пространством всех билинейных форм на $\mathbb{E}$.*

Определение. *Линейный оператор $\psi \in L(\mathbb{E})$ называется сопряженным к φ, если для всех векторов x, $y \in \mathbb{E}$ верно, что $(\psi(x), y) = (x, \varphi(y))$. Это также равносильно тому, что $\beta_\psi^T = \beta_\varphi$. Обозначение: $\psi = \varphi^*$.*

Предложение.

1. *φ^* существует и единственен.*
2. *$A_{\varphi^*} = G^{-1} A_\varphi^T G$, где $A_{\varphi^*} = A(\varphi^*, \mathbb{e})$, а все остальные обозначения прежние. В частности, если $\mathbb{e}$ — ортонормированный базис, то $A_{\varphi^*} = A_\varphi^T$.*

Доказательство. Снова обозначим φ^* как ψ. Мы уже знаем, что $B(\beta_\psi^T, \mathbb{e}) = A_\psi^T G$ и $B(\beta_\varphi, \mathbb{e}) = G A_\varphi$. Мы хотим, чтобы эти две матрицы были равны. Транспонируем их и, воспользовавшись тем, что $G = G^T$, получаем:

$$G A_\psi = A_\varphi^T G.$$

Выразив A_ψ, получаем, что такая матрица (и, соответственно, оператор) единственная:

$$A_\psi = G^{-1} A_\varphi^T G.$$

Существование же напрямую следует из того, что линейный оператор с матрицей $G^{-1} A_\varphi^T G$ обладает нужными свойствами. □

Определение. *Линейный оператор φ называется самосопряженным (симметрическим), если $\varphi^* = \varphi$. Это равносильно тому, что $(\varphi(x), y) = (x, \varphi(y))$ для любых векторов x, $y \in \mathbb{E}$.*

Замечание. *В случае, когда $\mathbb{e}$ — ортонормированный базис в $\mathbb{E}$ и $A_\varphi = A(\varphi, \mathbb{e})$, то самосопряженность линейного оператора φ равносильно тому, что $A_\varphi = A_\varphi^T$. Отсюда и второе название таких операторов — симметрические.*

Здесь важно, что мы работаем именно над евклидовым пространством, так как мы использовали скалярное произведение для проведения биекции с билинейными формами.

Пример. *Пусть $U \subseteq \mathbb{E}$ — подпространство. Отображение $\varphi : x \mapsto \mathrm{pr}_U x$ является самосопряженным.*

Доказательство.
I способ (координатный).

Пусть $(e_1, \ldots, e_k)$ — ортонормированный базис в U, а $(e_{k+1}, \ldots, e_n)$ — ортонормированный базис в U^T. Тогда $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ — ортонормированный базис в $\mathbb{E}$. А значит, матрица φ будет иметь в таком базисе следующий вид:

$$A(\varphi, \mathbb{e}) = \mathrm{diag}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{k}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-k})$$

При транспонировании диагональная матрица не меняется, следовательно, $A(\varphi, \mathbb{e})^T = A(\varphi, \mathbb{e})$. Что и означает, что $\varphi = \varphi^*$.

II способ (бескоординатный).

Проверим условие $(x, \varphi(y)) = (\varphi(x), y)$:

$$\begin{aligned}(\varphi(x), y) =& (\mathrm{pr}_U x, \mathrm{pr}_U y + \mathrm{ort}_U y) = (\mathrm{pr}_U x, \mathrm{pr}_U y) + \underbrace{(\mathrm{pr}_U x, \mathrm{ort}_U y)}_{=0} = \\ =& (\mathrm{pr}_U x, \mathrm{pr}_U y) + \underbrace{(\mathrm{ort}_U x, \mathrm{pr}_U y)}_{=0} = (\mathrm{pr}_U x + \mathrm{ort}_U x, \mathrm{ort}_U y) = (x, \varphi(y)).\end{aligned}$$

□