

Лекция 20 от 08.02.2016

Линейные отображения (продолжение)

Пусть $\varphi: V \rightarrow W$ — линейное отображение.

Предложение.

1. $\text{Ker } \varphi$ — подпространство в V .
2. $\text{Im } \varphi$ — подпространство в W .

Доказательство. Проверим по определению.

1.
 - $\varphi(0_v) = 0_w$ — этот факт мы уже доказали.
 - $v_1, v_2 \in \text{Ker } \varphi \Rightarrow \varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) = 0_w + 0_w = 0_w \Rightarrow v_1 + v_2 \in \text{Ker } \varphi$.
 - $v \in \text{Ker } \varphi, \alpha \in F \Rightarrow \varphi(\alpha v) = \alpha \varphi(v) = \alpha 0 = 0$, то есть αv тоже лежит в ядре.
2.
 - $0_w = \varphi(0_v) \Rightarrow 0_w \in \text{Im } (\varphi)$.
 - $w_1, w_2 \in \text{Im } \varphi \Rightarrow \exists v_1, v_2 \in V: w_1 = \varphi(v_1), w_2 = \varphi(v_2) \Rightarrow w_1 + w_2 = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) = \varphi(v_1 + v_2) \Rightarrow w_1 + w_2 \in \text{Im } \varphi$.
 - $w \in \text{Im } \varphi, \alpha \in F \Rightarrow \exists v \in V: \varphi(v) = w \Rightarrow \alpha w = \alpha \varphi(v) = \varphi(\alpha v) \Rightarrow \alpha w \in \text{Im } \varphi$.

То есть все условия подпространства по определению выполнены и предложение доказано. \square

Предложение.

1. Отображение φ инъективно тогда и только тогда, когда $\text{Ker } \varphi = \{0\}$.
2. Отображение φ сюръективно тогда и только тогда, когда $\text{Im } \varphi = W$.

Доказательство.

1.
 - $[\Rightarrow]$ Очевидно.
 - $[\Leftarrow]$ $v_1, v_2 \in V: \varphi(v_1) = \varphi(v_2) \Rightarrow \varphi(v_1 - v_2) = 0 \Rightarrow v_1 - v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = v_2$.
2. Очевидно из определения образа.

\square

Следствие. Отображение φ является изоморфизмом тогда и только тогда, когда $\text{Ker } \varphi = \{0\}$ и $\text{Im } \varphi = W$.

Предложение. Пусть $U \subset V$ — подпространство и e_1, \dots, e_k — его базис. Тогда:

1. $\varphi(U)$ — подпространство, $\varphi(U) = \langle \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_k) \rangle$;
2. $\dim \varphi(U) \leq \dim U$.

Доказательство.

1. $\varphi(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_k e_k) = x_1 \varphi(e_1) + \dots + x_k \varphi(e_k) \in \langle \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_k) \rangle$.

2. $\varphi(U) = \langle \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_k) \rangle \Rightarrow \dim \varphi(U) \leq \dim U$ по основной лемме о линейной зависимости.

□

Пусть V, W — векторные пространства, $e = (e_1, \dots, e_n)$ — базис V , $f = (f_1, \dots, f_m)$ — базис W , A — матрица φ по отношению к e, f .

Предложение. $\dim \operatorname{Im} \varphi = \operatorname{rk} A$.

Доказательство.

$$\begin{aligned} v \in V, v &= x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \\ \varphi(v) &= y_1 f_1 + \dots + y_m f_m \end{aligned}$$

Тогда:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

$A^{(j)}$ — столбец координат в базисе f , $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$.

$$\alpha_1 \varphi(e_1) + \dots + \alpha_n \varphi(e_n) = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 A^{(1)} + \dots + \alpha_n A^{(n)} = 0$$

Отсюда следует, что:

$$\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} \{ \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n) \} = \dim \underbrace{\langle \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n) \rangle}_{\operatorname{Im} \varphi} = \dim \operatorname{Im} \varphi.$$

□

Следствие. Величина $\operatorname{rk} A$ не зависит от выбора базисов e и f .

Определение. Величина $\operatorname{rk} A$ называется рангом линейного отображения φ . Обозначение: $\operatorname{rk} \varphi$.

Следствие. Если $\dim V = \dim W = n$, то φ — изоморфизм тогда и только тогда, когда $\det A \neq 0$. Тогда A — квадратная.

Доказательство.

$[\Rightarrow]$ φ — изоморфизм, следовательно:

$$\operatorname{Im} \varphi = W \Rightarrow \dim \operatorname{Im} \varphi = n \Rightarrow \operatorname{rk} A = n \Rightarrow \det A \neq 0.$$

$[\Leftarrow]$ $\det A \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$.

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

Таким образом, линейное отображение φ является биекцией, а значит, и изоморфизмом. □

Следствие. Пусть $A \in \operatorname{Mat}_{k \times m}$, $B \in \operatorname{Mat}_{m \times n}$. Тогда $\operatorname{rk} AB \leq \min\{\operatorname{rk} A, \operatorname{rk} B\}$.

Доказательство. Реализуем A и B как матрицы линейных отображений, то есть $\varphi_A: F^m \rightarrow F^k$, $\varphi_B: F^n \rightarrow F^m$. Тогда AB будет матрицей отображения $\varphi_A \circ \varphi_B$.

$$\operatorname{rk}(AB) = \operatorname{rk}(\varphi_A \circ \varphi_B) \begin{cases} \leq \dim \operatorname{Im} \varphi_A = \operatorname{rk} A \\ \leq \dim \operatorname{Im} \varphi_B = \operatorname{rk} B \end{cases}$$

Первое неравенство следует из того, что $\operatorname{Im}(\varphi_A \circ \varphi_B) \subset \operatorname{Im} \varphi_A$, откуда в свою очередь следует, что $\dim \operatorname{Im}(\varphi_A \circ \varphi_B) \leq \dim \operatorname{Im} \varphi_A$. Рассматривая второе неравенство, получаем:

$$\operatorname{Im}(\varphi_A \circ \varphi_B) = \varphi_A(\operatorname{Im} \varphi_B) \Rightarrow \dim \operatorname{Im}(\varphi_A \circ \varphi_B) = \dim(\varphi_A(\operatorname{Im} \varphi_B)) \leq \dim \operatorname{Im} \varphi_B.$$

□

Упражнение.

- Если A квадратна и $\det A \neq 0$, то $\operatorname{rk} AB = \operatorname{rk} B$.
- Если $B \in M_n$ и $\det B \neq 0$, то $\operatorname{rk} AB = \operatorname{rk} A$.

Теорема. $\dim \operatorname{Im} \varphi = \dim \varphi - \dim \operatorname{Ker} \varphi$.

Существует 2 способа доказательства. Рассмотрим оба.

Бескоординатный способ. Пусть $\dim \operatorname{Ker} \varphi = k$ и e_1, \dots, e_k — базис в $\operatorname{Ker} \varphi$. Дополним его до базиса V векторами e_{k+1}, \dots, e_n . Тогда:

$$\operatorname{Im} \varphi = \langle \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_k), \dots, \varphi(e_n) \rangle = \langle 0, 0, \dots, 0, \varphi(e_{k+1}), \dots, \varphi(e_n) \rangle = \langle \varphi(e_{k+1}), \dots, \varphi(e_n) \rangle$$

Пусть $\alpha_{k+1}\varphi(e_{k+1}) + \dots + \alpha_n\varphi(e_n) = 0$ для некоторых $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$. Тогда:

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha_{k+1}e_{k+1} + \dots + \alpha_n e_n) &= 0 \\ \alpha_{k+1}e_{k+1} + \dots + \alpha_n e_n &\in \operatorname{Ker} \varphi \\ \alpha_{k+1}e_{k+1} + \dots + \alpha_n e_n &= \beta_1 e_1 + \dots + \beta_k e_k, \end{aligned}$$

для некоторых $\beta_1, \dots, \beta_k \in F$.

Но так как e_1, \dots, e_n — базис в V , то $\alpha_{k+1} = \dots = \alpha_n = \beta_1 = \dots = \beta_k = 0$. То есть векторы $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ линейно независимы, а значит, образуют базис $\operatorname{Im} \varphi$. Что и означает, что $\dim \operatorname{Im} \varphi = n - k = \dim V - \dim \operatorname{Ker} \varphi$. □

Координатный способ. Зафиксируем базис $\mathfrak{e} = (e_1, \dots, e_n)$ в V и базис $\mathfrak{f} = (f_1, \dots, f_m)$ в W . Пусть A — матрица φ в базисе \mathfrak{f} . Тогда $v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$, $\varphi(v) = y_1 f_1 + \dots + y_m f_m$. Получим,

$$\text{что } \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

$\operatorname{Ker} \varphi$ состоит из векторов, координаты которых удовлетворяют СЛУ $A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$. Ранее

в курсе мы уже доказали, что размерность пространства решений равна $n - \operatorname{rk} A$, то есть $\dim \operatorname{Im} \varphi = n - \operatorname{rk} A = \dim V - \dim \operatorname{Ker} \varphi$. □

Линейные операторы

Пусть V — конечномерное векторное пространство.

Определение. *Линейным оператором (или линейным преобразованием) называется всякое линейное отображение $\varphi: V \rightarrow V$, то есть из V в себя. Обозначение: $L(V) = \text{Hom}(V, V)$.*

Пусть $\mathfrak{e} = (e_1, \dots, e_n)$ — базис в V и $\varphi \in L(V)$. Тогда:

$$(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) = (e_1, \dots, e_n) A,$$

где A — матрица линейного оператора в базисе \mathfrak{e} . В столбце $A^{(j)}$ стоят координаты $\varphi(e_j)$ в базисе \mathfrak{e} . Матрица A — квадратная.

Пример.

1. $\forall v \in V : \varphi(v) = 0$ — нулевая матрица.
2. Тождественный оператор: $\forall v \in V : \text{id}(v) = v$ — единичная матрица.
3. Скалярный оператор $\lambda \text{id}(v) = \lambda V$ — матрица λE в любом базисе.

Следствие (Следствия из общих фактов о линейных отображениях).

1. Всякий линейный оператор однозначно определяется своей матрицей в любом фиксированном базисе.
2. Для всякой квадратной матрицы существует, причем единственный, линейный оператор φ такой, что матрица φ есть A .
3. Пусть $\varphi \in L(V)$, A — матрица φ в базисе \mathfrak{e} . Тогда:

$$\begin{aligned} v &= x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \\ \varphi(v) &= y_1 e_1 + \dots + y_n e_n \\ \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} &= A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Пусть $\varphi \in L(V)$, A — матрица φ в базисе $\mathfrak{e} = (e_1, \dots, e_n)$. Пусть $\mathfrak{e}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ — другой базис, причём $(e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n)C$, где C — матрица перехода, и A' — матрица φ в базисе \mathfrak{e}' .

Предложение. $A' = C^{-1}AC$.

Доказательство.

$$\begin{aligned} (e'_1, \dots, e'_n) &= (e_1, \dots, e_n)C \\ e'_j &= \sum_{i=1}^n c_{ij} e_i \\ \varphi(e'_j) &= \varphi\left(\sum_{i=1}^n c_{ij} e_i\right) = \sum_{i=1}^n c_{ij} \varphi(e_i) \\ (\varphi(e'_1), \dots, \varphi(e'_n)) &= (\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))C = (e_1, \dots, e_n)AC = (e'_1, \dots, e'_n) \underbrace{C^{-1}AC}_{A'} \end{aligned}$$

□