

Лекция 29 от 27.04.2016

Пусть \mathbb{E} — евклидово пространство, $\dim \mathbb{E} = n$.

Определение. Векторы x, y называются ортогональными, если $(x, y) = 0$. Обозначение: $x \perp y$.

Определение. Пусть $S \subseteq \mathbb{E}$ — произвольное подпространство. Ортогональным дополнением к S называется множество $S^\perp = \{x \in \mathbb{E} \mid (x, y) = 0 \ \forall y \in S\}$.

Замечание.

1. S^\perp — подпространство в \mathbb{E} .
2. $S^\perp = \langle S \rangle^\perp$.

Предложение. Пусть S — подпространство в \mathbb{E} . Тогда:

1. $\dim S^\perp = n - \dim S$;
2. $\mathbb{E} = S \oplus S^\perp$;
3. $(S^\perp)^\perp = S$.

Доказательство.

1. Выделим в S базис (e_1, \dots, e_k) и дополним его векторами (e_{k+1}, \dots, e_n) до базиса \mathbb{E} . Рассмотрим вектор $x \in \mathbb{E}$ и представим его в виде $x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$. Если $x \in S^\perp$, то это то же самое, если $(x, e_i) = 0$ для $i = 1 \dots k$. Итого:

$$(x, e_i) = (e_1, e_i)x_1 + (e_2, e_i)x_2 + \dots, (e_n, e_i)x_n = 0, \quad i = 1 \dots k$$

Получим однородную СЛУ $G \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$, где $G \in Mat_{k \times n}(\mathbb{R})$ и $g_{ij} = (e_i, e_j)$. Заметим,

что $\text{rk } G = k$, так как это часть матрицы Грама, и ее левый верхний $k \times k$ минор больше нуля. Следовательно, размерность пространства решений $\dim S^\perp = n - \text{rk } G = n - \dim S$.

2. Из предыдущего пункта получаем, что $\dim S + \dim S^\perp = n$. Вместе с тем, поскольку $(x, x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$, то $S \cap S^\perp = \{0\}$. Следовательно, $\mathbb{E} = S \oplus S^\perp$.
3. $S \subset (S^\perp)^\perp$ — всегда. Вместе с тем, $\dim(S^\perp)^\perp = n - \dim S^\perp = n - (n - k) = k = \dim S$. И так как размерности совпадают, то $S = (S^\perp)^\perp$.

□

Итак, мы теперь знаем, что $\mathbb{E} = S \oplus S^\perp$. Значит, для $x \in \mathbb{E}$ существует единственное представление его в виде $x = y + z$, где $y \in S$, $z \in S^\perp$.

Определение. Вектор y называется ортогональной проекцией вектора x на подпространство S . Обозначение: $\text{pr}_S x$.

Вектор z называется ортогональной составляющей вектора x вдоль подпространства S . Обозначение: $\text{ort}_S x$.

Определение. Базис (e_1, \dots, e_n) в \mathbb{E} называется ортогональным, если $(e_i, e_j) = 0 \ \forall i \neq j$. Это равносильно тому, что $G(e_1, \dots, e_n)$ диагональна.

Базис называется ортонормированным, если дополнительно $(e_i, e_i) = 1 \ \forall i$. Это равносильно тому, что $G(e_1, \dots, e_n) = E$.

Замечание. Если (e_1, \dots, e_n) ортогональный базис, то $\left(\frac{e_1}{|e_1|}, \dots, \frac{e_n}{|e_n|} \right)$ ортонормированный.

Теорема. В любом конечномерном евклидовом пространстве существует ортонормированный базис.

Доказательство. Следует из того, что всякую положительно определенную квадратичную форму можно привести к нормальному виду. \square

Пусть (e_1, \dots, e_n) — ортонормированный базис в \mathbb{E} . Пусть также есть ещё один базис (e'_1, \dots, e'_n) , причём $(e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n)C$.

Предложение. (e'_1, \dots, e'_n) — ортонормированный тогда и только тогда, когда $C^T C = E$ или, что то же самое, $C^{-1} = C^T$.

Доказательство. Условие, что базис (e'_1, \dots, e'_n) является ортонормированным, равносильно тому, что $G(e'_1, \dots, e'_n) = E$. С другой стороны, $G(e'_1, \dots, e'_n) = C^T G(e_1, \dots, e_n) C$, причем аналогично $G(e_1, \dots, e_n) = E$. Откуда и следует, что $C^T C = E$. \square

Определение. Матрица C в таком случае называется ортогональной.

Свойства.

1. $C^T C = E$, значит, $C^T = C^{-1}$, и тогда $CC^T = E$. Итого, получаем:

$$\sum_{k=1}^n c_{ki} c_{kj} = \delta_{ij} = \sum_{k=1}^n c_{ik} c_{jk}$$

Напомним, что δ_{ij} это символ Кронекера.

2. $\det C = \pm 1$.

Пример. $C = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$ — матрица поворота на угол φ в \mathbb{R}^2 .

Пусть $S \subseteq \mathbb{E}$ — подпространство, (e_1, \dots, e_k) — его ортогональный базис, $x \in \mathbb{E}$.

Предложение. $\text{pr}_S x = \sum_{i=1}^k \frac{(x, e_i)}{(e_i, e_i)} e_i$. В частности, если базис ортонормированный,

$$\text{pr}_S x = \sum_{i=1}^k (x, e_i) e_i$$

Доказательство. Представим вектор x в виде суммы $x = \text{pr}_S x + \text{ort}_S x$. Тогда:

$$(x, e_i) = (\text{pr}_S x, e_i) + \underbrace{(\text{ort}_S x, e_i)}_{=0} = (\text{pr}_S x, e_i) \quad i = 1, \dots, k.$$

Вместе с тем, $\text{pr}_S x = \sum_{j=1}^k \lambda_j e_j$, следовательно, $(x, e_i) = \sum_{j=1}^k \lambda_j (e_j, e_i)$. Но так как базис ортогональный, все слагаемые, кроме одного, занулятся, и останется только $(x, e_i) = \lambda_i (e_i, e_i)$. Откуда и следует, что $\lambda_i = \frac{(x, e_i)}{(e_i, e_i)}$. \square

Пусть есть базис (e_1, \dots, e_n) в \mathbb{E} . Процесс ортогонализации Грама-Шмидта даёт ортогональный базис (f_1, \dots, f_n) , причем:

$$\begin{aligned} f_1 &= e_1 \\ f_2 &\in e_2 + \langle e_1 \rangle \\ &\dots \\ f_n &\in e_n + \langle e_1, \dots, e_{n-1} \rangle \end{aligned}$$

Точно так же можно заметить, что $\langle f_1, \dots, f_i \rangle = \langle e_1, \dots, e_i \rangle$ для всех $i = 1, \dots, n$.

Предложение. $f_i = \text{ort}_{\langle e_1, \dots, e_{i-1} \rangle} e_i$ для всех $i = 1, \dots, n$.

Доказательство. Воспользовавшись равенством линейных оболочек, получаем, что $e_i \in f_i + \langle f_1, \dots, f_{i-1} \rangle$. Следовательно, данный базисный вектор можно представить в виде $e_i = f_i + \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_{i-1} f_{i-1}$. И из того, что $f_i \perp \langle e_1, \dots, e_{i-1} \rangle = \langle f_1, \dots, f_{i-1} \rangle$ как раз и получаем, что $f_i = \text{ort}_{\langle e_1, \dots, e_{i-1} \rangle} e_i$. \square

Пример. Данное рассуждение проще понять, если представить себе частный случай для $\mathbb{E} = \mathbb{R}^3$.

У нас зафиксированы векторы e_1, e_2, e_3 , и мы их ортогонализируем. Для начала, $f_1 = e_1$. Вектор f_2 получается как проекция вектора e_2 на прямую, ортогональную f_1 . А вектор f_3 — как проекция e_3 на прямую, ортогональную плоскости, образованной векторами f_1 и f_2 . Аналогично для пространств большей размерности.

Теорема (Пифагора). Если $x, y \in \mathbb{E}$ и $x \perp y$, то $|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2$.

Доказательство.

$$|x + y|^2 = (x + y, x + y) = (x, x) + (y, y) + \underbrace{(x, y)}_{=0} + \underbrace{(y, x)}_{=0} = (x, x) + (y, y) = |x|^2 + |y|^2$$

\square

Рассмотрим векторы $x, y \in \mathbb{E}$.

Определение. Расстоянием между векторами x и y называется число $\rho(x, y) := |x - y|$.

Предложение (Неравенство треугольника). $\rho(a, b) + \rho(b, c) \geq \rho(a, c)$ при $a, b, c \in \mathbb{E}$.

Доказательство. Пусть $x = a - b$, $y = b - c$. Тогда $a - c = x + y$. Теперь достаточно доказать, что $|x| + |y| \geq |x + y|$. Для этого рассмотрим $|x + y|^2$.

$$|x + y|^2 = (x, x) + 2(x, y) + (y, y) = |x|^2 + 2(x, y) + |y|^2 \leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2$$

Сравнивая начало и конец неравенства, получаем, что $|x + y| \leq |x| + |y|$. \square

Пусть P и Q — два произвольных подмножества \mathbb{E} .

Определение. Расстоянием между P и Q называют величину

$$\rho(P, Q) := \inf\{\rho(x, y) \mid x \in P, y \in Q\}.$$

Пусть $x \in \mathbb{E}$ и $U \subseteq \mathbb{E}$ — подпространство.

Теорема. $\rho(x, U) = |\text{ort}_U x|$, причём $\text{pr}_U x$ — единственный ближайший к x вектор из U .

Доказательство. Пусть $y = \text{pr}_U x$ и $z = \text{ort}_U x$. Пусть также $y' \in U \setminus \{0\}$, тогда:

$$\rho(x, y + y') = |x - y - y'| = |z - y'| = \sqrt{|z|^2 + \underbrace{|y'|^2}_{>0}} > |z| = \rho(x, y).$$

Из того, что вектор z , которым мы ограничи снизу, определяется однозначно, и следует, что существует единственный ближайший вектор к x из U . \square

Пусть $U \subseteq \mathbb{E}$ — подпространство, $x \in \mathbb{E}$, (e_1, \dots, e_k) — базис U .

Теорема. $(\rho(x, U))^2 = \frac{\det G(e_1, \dots, e_k, x)}{\det G(e_1, \dots, e_k)}$

Доказательство. Разобьем на два случая: когда x лежит в U и когда не лежит.

1. $x \in U$. Тогда $\rho(x, U) = 0$. Но с другой стороны, $\det G(e_1, \dots, e_k, x) = 0$, поскольку эти векторы линейно зависимы, и значит, равенство выполняется.

2. $x \notin U$. Тогда $\rho(x, U) = |\text{ort}_U x| = |z|$. Ортогонализация Грама-Шмидта к (e_1, \dots, e_k, x) даст нам (f_1, \dots, f_k, z) , причём $|z|^2 = (z, z) = \frac{\delta_{k+1}}{\delta_k} = \frac{\det G(e_1, \dots, e_k, x)}{\det G(e_1, \dots, e_k)}$.

\square