# Лекция 15 от 11.01.2016

## Скаляры. Поля

Для начала вспомним, что такое *векторное пространство* — это множество, на котором введены операции сложения, умножения на скаляр и в котором будут выполнятся восемь аксиом (см. 1 семестр). Но что такое скаляр?

**Определение.** *Скаляры — это элементы некоторого фиксированного поля.*

**Определение.** *Полем называется множество $F$, на котором заданы две операции — «сложение» $(+)$ и «умножение» $(\cdot)$,*

$$F \times F \to F \Rightarrow \begin{array}{c} +\colon (a,b) \mapsto a+b \\ \cdot\colon (a,b) \mapsto a \cdot b \end{array}$$

*удовлетворяющие следующим свойствам («аксиомам поля»): $\forall a, b, c \in F$*

1. *$a + b = b + a$ (коммутативность по сложению);*
2. *$(a + b) + c = a + (b + c)$ (ассоциативность по сложению);*
3. *$\exists\, 0 \in F\colon 0 + a = a + 0 = a$ (существование нулевого элемента);*
4. *$\exists -a \in F\colon a + (-a) = (-a) + a = 0$ (существование противоположного элемента);*
5. *$a(b + c) = ab + ac$ (дистрибутивность; связь между сложением и умножением);*
6. *$ab = ba$ (коммутативность по умножению);*
7. *$(ab)c = a(bc)$ (ассоциативность по умножению);*
8. *$\exists\, 1 \in F \setminus \{0\} : 1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ (существование единицы);*
9. *$a \neq 0 \Rightarrow \exists a^{-1} \in F : a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$ (существование обратного элемента).*

**Пример.**

- $\mathbb{Q}$ — *рациональные числа;*
- $\mathbb{R}$ — *вещественные числа;*
- $\mathbb{C}$ — *комплексные числа;*
- $F_2 = \{0, 1\}$, *при сложении и умножении по модулю 2.*

## Поле комплексных чисел

Поле вещественных чисел $\mathbb{R}$ плохо тем, что в нем уравнение $x^2 + 1 = 0$ не имеет решения. Отсюда возникает идея определить поле, удовлетворяющее следующим требованиям:

(Т1) новое поле содержит $\mathbb{R}$;

(Т2) уравнение $x^2 + 1 = 0$ имеет решение.

Давайте формально простроим такое поле.

**Определение.** *Полем* $\mathbb{C}$ *комплексных чисел называется множество* $\{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$, *на котором заданы операции сложения:* $(a_1,b_1)+(a_2,b_2) = (a_1+a_2, b_1+b_2)$ *и умножения:* $(a_1,b_1)\cdot(a_2,b_2) = (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + b_1a_2)$.

**Предложение.** $\mathbb{C}$ *и впрямь является полем.*

*Доказательство.* Операции сложения и умножения введены, осталось только проверить выполнение всех аксиом.

1. очевидно, так как сложение идет поэлементно;
2. также очевидно;
3. $0 = (0,0)$;
4. $-(a,b) = (-a,-b)$;
5. почти очевидно (т.е. прямая проверка);
6. ясно (тоже прямая проверка);
7. проверим:

$$\begin{gathered}((a_1,b_1)(a_2,b_2))(a_3,b_3) = (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + b_1a_2)(a_3,b_3) = \\ = (a_1a_2a_3 - b_1b_2b_3 - a_1b_2b_3 - b_1a_2b_3, a_1a_2b_3 - b_1b_2b_3 + a_1b_2a_3 + b_1a_2a_3) = \\ = (a_1,b_1)(a_2a_3 - b_2b_3, a_2b_3 + b_2a_3) = (a_1,b_1)((a_2,b_2)(a_3,b_3));\end{gathered}$$

8. $1 = (1,0)$;
9. $(a,b) \neq 0 \Leftrightarrow a^2+b^2 \neq 0 \to (a,b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$.

$\square$

Осталось только проверить, правда ли введенное поле $\mathbb{C}$ удовлетворяет нашим требованиям:

(T1) Заметим, что в подмножестве $\mathbb{C}$, состоящим из элементов вида $(a,0)$ операции сложения и умножения будут работать как в поле вещественных чисел.

$$\begin{gathered}(a,0)+(b,0) = (a+b,0) \\ (a,0)\cdot(b,0) = (ab,0)\end{gathered}$$

Следовательно, отображение $a \mapsto (a,0)$ отождествляет $\mathbb{R}$ с этим подмножеством, то есть $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Что нам и требуется.

(T2) Примем $i = (0,1)$. Тогда $i^2 = (0,1)\cdot(0,1) = (-1,0) = -1$. Итого, требование выполнено.

Однако запись комплексных чисел в виде упорядоченной пары $(a,b)$ не очень удобна и громоздка. Поэтому преобразуем запись следующим образом:

$$(a,b) = (a,0)+(0,b) = (a,0)+(b,0)\cdot(0,1) = a+bi.$$

Тем самым мы получили реализацию поля $\mathbb{C}$ комплексных чисел как множества $\{a+bi \mid a,b \in \mathbb{R},\ i^2 = -1\}$, с обычным сложением и умножением.

**Определение.** *Запись* $z = a+bi$ *называется алгебраической формой комплексного числа* $z \in \mathbb{C}$.

$a = \operatorname{Re} z$ — *действительная часть числа* $z$.

$b = \operatorname{Im} z$ — *мнимая часть числа* $z$.

**Определение.** *Числа вида $z = bi$ (т.е. $\operatorname{Re} z = 0$) называются чисто мнимыми.*

**Определение.** *Отображение $\mathbb{C} \to \mathbb{C} : a + bi \mapsto a - bi$ называется (комплексным) сопряжением. Само число $\overline{z} = a - bi$ называется (комплексно) сопряженным к числу $z = a + bi$.*

**Лемма.** *Для любых двух комплексных числе $z, w \in \mathbb{C}$ выполняется, что*

*1.* $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$;

*2.* $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.

*Доказательство.* Пусть $z = a + bi$, а $w = c + di$.

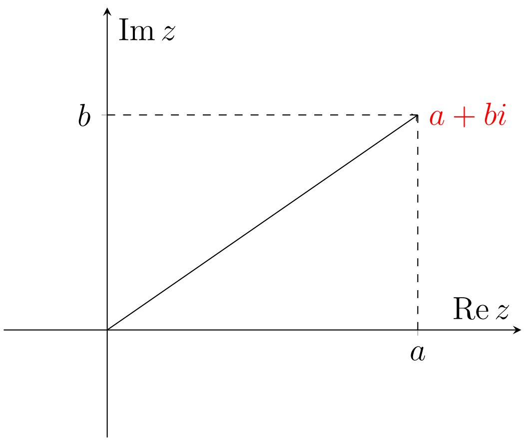
1. $\overline{z} + \overline{w} = a - bi + c - di = (a + c) - (b + d)i = \overline{z + w}$
2. $\overline{z} \cdot \overline{w} = (a - bi)(c - di) = ac - adi - bci + bdi^2 = (ac - bd) - (ad + bc)i = \overline{zw}$

□

**Замечание.** *Равенство $z = \overline{z}$ равносильно равенству $\operatorname{Im} z = 0$, то есть $z \in \mathbb{R}$.*

# Геометрическая модель поля $\mathbb{C}$

Заметим, что поле комплексных числе $\mathbb{C} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ равно $\mathbb{R}^2$. Следовательно, комплексные числа можно представить как точки на действительной плоскости $\mathbb{R}^2$, или сопоставить их векторам.




В таком представлении сложение комплексных чисел сопоставляется со сложением векторов, а сопряжение — с отражением относительно оси $Ox(\operatorname{Re} z)$.

**Определение.** *Модулем комплексного числа $z = a + bi$ называется длина соответствующего вектора. Обозначение: $|z|$; $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.*

Свойства модуля:

1. $|z| \geqslant 0$, причем $|z| = 0$ тогда и только тогда, когда $z = 0$;
2. $|z + w| \leqslant |z| + |w|$ — неравенство треугольника;
3. $z \cdot \overline{z} = |z|^2$;

   *Доказательство.* $(a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$. □

4. $|zw| = |z| \cdot |w|$;

*Доказательство.* Возведем в квадрат.

$$|z|^2 \cdot |w|^2 = z\overline{z}w\overline{w} = (zw)\overline{zw} = zw\overline{z}\overline{w} = |zw|^2$$

□

**Замечание.** *Из свойства 3 следует, что при $z \neq 0$ выполняется:*

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$
$$(a+bi)^{-1} = \frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}.$$

**Определение.** *Аргументом комплексного числа $z \neq 0$ называется всякий угол $\varphi$ такой что*

$$\cos\varphi = \frac{a}{|z|} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}; \quad \sin\varphi = \frac{b}{|z|} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Неформально говоря, аргумент $z$ — это угол между осью $Ox$ и соответствующим вектором.

**Замечание.**

1. *Аргумент определен с точностью до $2\pi$.*
2. *Аргумент $z = 0$ не определен.*

Для $z \neq 0$ введем множество $\operatorname{Arg} z = \{$множество всех аргументов $z\}$ — *большой аргумент*. Также введем *малый аргумент* $\arg z$ — это такой $\varphi \in \operatorname{Arg} z$, который удовлетворяет условию $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ и, следовательно, определен однозначно.

Используя аргумент, можно представить комплексное число следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} a &= |z|\cos\varphi \\ b &= |z|\sin\varphi \end{aligned}\right| \Rightarrow z = a + bi = |z|\cos\varphi + i|z\sin\varphi = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

**Определение.** *Запись $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ называется тригонометрической формой комплексного числа $z$.*

**Замечание.**

$$r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = r_2 \\ \varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$