Лекция 31 от 17.05.2016

Самосопряжённые линейные операторы (продолжение)

Пусть $\mathbb{E}$ — евклидово пространство, $\dim \mathbb{E} = n$, $\varphi \in L(\mathbb{E})$. Вспомним, что по определению сопряжённый линейный оператор φ^* это такой линейный оператор, для которого выполняется следующее:

$$(x, \varphi(y)) = (\varphi^*(x), y).$$

Вспомним также, что самосопряженным называется такой оператор φ, для которого $\varphi^* = \varphi$.

Предложение. *Пусть φ — самосопряженный линейный оператор в $\mathbb{E}$. Если $U \subseteq \mathbb{E}$ — φ-инвариантное подпространство в $\mathbb{E}$, то $U^\perp$ тоже φ-инвариантно.*

Поясним, что означает этот факт.

Пусть $\dim U = m$ и $U = \langle e_1, \ldots, e_m \rangle$. Так как $\mathbb{E} = U \oplus U^\perp$, то $\dim U^\perp = n - m$ и $U^\perp = \langle e_{m+1}, \ldots, e_n \rangle$, где $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ — базис $\mathbb{E}$.

Тогда матрица φ в базисе $\mathbb{e}$ имеет следующий блочный вид:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad A \in M_m,\, D \in M_{n-m}.$$

Когда U — φ-инвариантно, то есть $\varphi(U) \subseteq U$, эта матрица принимает вид $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$, так как базисные векторы $e_1, \ldots e_m$ переходят в себя, не затрагивая векторы $e_{m+1}, \ldots, e_n$. И мы хотим доказать, что $U^\perp$ тоже является φ-инвариантным подпространством, то есть блок B также равен нулю, то есть матрица φ в базисе $\mathbb{e}$ имеет вид $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$.

Доказательство. Известно, что $\varphi = \varphi^*$ и $\varphi(U) \subseteq U$. Мы хотим, чтобы $\varphi(U^\perp) \subseteq U^\perp$. Для этого нам достаточно показать, что $(x, \varphi(y)) = 0$ для любых векторов $x \in U$ и $y \in U^\perp$.

$$(x,\varphi(y)) = (\varphi^*(x), y) = (\underbrace{\varphi(x)}_{\in U}, \underbrace{y}_{\in U^\perp}) = 0$$

$\square$

Предложение. *У самосопряжённого оператора φ есть собственный вектор над $\mathbb{R}$.*

Доказательство. Ранее в курсе мы уже доказывали, что у φ существует одномерное или двумерное φ-инвариантное подпространство. Рассмотрим соответствующие случаи.

1. Если существует одномерное φ-инвариантное подпространство, то его порождающий вектор является собственным.

2. Пусть $U \subseteq \mathbb{E}$ — двумерное φ-инвариантное подпространство и $\mathbb{e} = (e_1, e_2)$ — его ортонормированный базис. Пусть $\psi \in L(U)$ — ограничение φ на U. В прошлый раз мы уже доказывали, что матрица ψ имеет симметрический вид, то есть $A(\psi, \mathbb{e}) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$.

   Рассмотрим его характеристический многочлен:

$$\chi_\psi(t) = (-1)^2 \begin{vmatrix} a-t & b \\ b & c-t \end{vmatrix} = t^2 - (a+c)t + ac - b^2 = 0;$$
$$D = (a-c)^2 + 4b^2 \geqslant 0.$$

Так как дискриминант неотрицательный, то у $\chi_\psi(t)$ есть хотя бы один корень. Следовательно, у ψ есть собственный вектор v. Но ψ — ограничение φ, так что вектор v тоже является для него собственным.

$\square$

Теорема. *У всякого самосопряжённого линейного оператора есть ортонормированный базис из собственных векторов. В частности, φ диагонализуем над $\mathbb{R}$ и его характеристический многочлен разлагается в произведение линейных сомножителей.*

Следствие. *Всякая симметричная матрица над $\mathbb{R}$ подобна диагональной.*

Доказательство. Докажем индукцией по n.

Для $n = 1$ всё очевидно. Если $n > 1$, то у φ есть собственный вектор v. Положим $e_1 = \dfrac{v}{|v|}$ и $U = \langle e_1 \rangle^\perp$. Тогда $\dim U = n-1$, причем U — φ-инвариантное подпространство (см. предыдущее предложение). По предположеню индукции в U есть ортонормированный базис из собственных векторов $(e_2, \ldots, e_n)$. Тогда $(e_1, \ldots, e_n)$ — искомый базис. $\square$

Следствие. *Пусть φ — самосопряженный линейный оператор, и λ, μ — его собственные значения. Тогда $V_\lambda(\varphi) \perp V_\mu(\varphi)$ при $\lambda \neq \mu$.*

Доказательство.

1. Координатный способ. Пусть $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ — ортонормированный базис из собственных векторов, где $\varphi(e_i) = \lambda_i e_i$. Тогда для произвольного вектора $x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$ из V верно, что $\varphi(x) = x_1 \lambda_1 e_1 + \ldots + x_n \lambda_n e_n$.

   Несложно понять, что если $x \in V_\lambda(\varphi)$, то есть $\varphi(x) = \lambda x$, то тогда x принадлежит линейной оболочке тех базисных векторов, чье собственное значение равно λ: $x \in \langle e_i \mid \lambda_i = \lambda \rangle$. А так как базисные векторы попарно ортогональны в силу свойств выбранного базиса, то как раз получаем, что $V_\lambda(\varphi) \perp V_\mu(\varphi)$, если $\lambda \neq \mu$.

2. Бескоординатный способ. Возьмем произвольные векторы $x \in V_\lambda(\varphi)$ и $y \in V_\mu(\varphi)$. Тогда:

$$\lambda(x,y) = (\lambda x, y) = (\varphi(x), y) = (x, \varphi(y)) = (x, \mu y) = \mu(x, y).$$

   А поскольку $\lambda \neq \mu$, то $(x,y) = 0$.

$\square$

Следствие (Приведение квадратичной формы к главным осям)**.** *Для любой квадратичной формы Q над $\mathbb{E}$ существует ортонормированный базис, в котором Q имеет канонический вид.*

$$Q(x_1, \ldots, x_n) = \lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2.$$

Причем числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ определены однозначно с точностью до перестановки.

Это более сильное утверждение, чем мы доказывали ранее, так как теперь мы говорим именно про ортонормированный базис.

Доказательство. Существует единственный самосопряжённый линейный оператор φ в $\mathbb{E}$ такой, что $Q(v) = (v, \varphi(v))$. Если $\mathbb{e}$ — ортонормированный базис, то матрица Q в базисе $\mathbb{e}$ будет равна матрице φ в базисе $\mathbb{e}$. Числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ являются собственными значениями φ. $\square$

Следствие. *Пусть $A \in M_n(\mathbb{R}), A = A^T$. Тогда существует ортогональная матрица C такая, что*

$$C^T A C = C^{-1} A C = D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

Ортогональные линейные операторы

Определение. *Линейный оператор $\varphi \in L(\mathbb{E})$ называется ортогональным, если*

$$(\varphi(x), \varphi(y)) = (x,y), \quad \forall x, y \in \mathbb{E}.$$

Другими словами, φ сохраняет скалярное произведение, осуществляет изоморфизм $\mathbb{E}$ на себя.

Предложение. *Пусть φ — линейный оператор в $\mathbb{E}$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1. *φ — ортогональный линейный оператор;*
2. *$|\varphi(x)| = |x|$ для всех $x \in \mathbb{E}$, то есть φ сохраняет длины;*
3. *существует φ^{-1}, причем $\varphi^{-1} = \varphi^*$, то есть $\varphi \cdot \varphi^* = \varphi^8 \cdot \varphi = \mathrm{id}$;*
4. *если $\mathbb{e}$ — ортонормированный базис, то $A(\varphi, \mathbb{e})$ — ортогональная матрица;*
5. *если $(\mathbb{e}_1, \dots, e_n)$ — ортонормированный базис, то $(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$ — тоже ортонормированный базис.*

Доказательство. Везде здесь $x, y \in \mathbb{E}$.

(1) $\Rightarrow$ (2)

$$|\varphi(x)| = \sqrt{(\varphi(x), \varphi(x))} = \sqrt{(x, x)} = |x|$$

(2) $\Rightarrow$ (1) Используем поляризацию (см. лекция 26).

$$(\varphi(x), \varphi(y) = \frac{1}{2}(|\varphi(x+y)|^2 - |\varphi(x)|^2 - |\varphi(y)|^2) = \frac{1}{2}(|x+y|^2 - |x|^2 - |y|^2) = (x, y)$$

(1)&(2) $\Rightarrow$ (3) Найдем ядро φ:

$$\varphi(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad |\varphi(x)| = 0 \quad \Rightarrow \quad |x| = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

Итого, $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$. Значит, существует φ^{-1}. Теперь докажем, что $\varphi^{-1} = \varphi^*$:

$$(\varphi^{-1}(x), y) = (\varphi(\varphi^{-1}(x)), \varphi(y)) = (x, \varphi(y))$$

Получили, что φ^{-1} является сопряженным к φ по определению.

(3) $\Rightarrow$ (1)

$$(\varphi(x), \varphi(y)) = (\varphi^*(\varphi(x)), y) = (x, y)$$

(4) $\Leftrightarrow$ (5) Пусть $\mathbb{e} = (e_1, \dots, e_n)$ — ортонормированный базис. Тогда верно, что

$$(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) = (e_1, \dots, e_n) \cdot C, \quad C = A(\varphi, \mathbb{e})$$

Матрица C является ортогональной тогда и только тогда, когда $(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$ — ортонормированный базис.

(3) $\Leftrightarrow$ (4) Пусть $\mathbb{e}$ — ортонормированный базис, $C = A(\varphi, \mathbb{e})$. Тогда $A(\varphi^*, \mathbb{e}) = C^T$ и условие, что $\varphi \cdot \varphi^* = id$ равносильно тому, что $C \cdot C^T = E$, то есть C — ортогональная матрица.

$\square$

Пример. *Тут надо придумать, как записывать.*

Предложение. *Пусть φ — ортогональный линейный оператор в $\mathbb{E}$. Если $U \subseteq \mathbb{E}$ — φ-инвариантное подпространство в $\mathbb{E}$, то $U^\perp$ тоже φ-инвариантно.*

Доказательство. Рассмотрим ψ — ограничение φ на U. Оно, очевидно, тоже сохраняет длины, то есть также является ортогональным оператором. Следовательно, существует ψ^{-1}.

Достаточно показать, что $(x, \varphi(y)) = 0$ для любых векторов $x \in U$ и $y \in U^\perp$.

$$(x, \varphi(y)) = (\psi(\psi^{-1}(x)), \varphi(y)) = (\varphi(\psi^{-1}(x)), \varphi(y)) = (\underbrace{\psi^{-1}(x)}_{\in U}, \underbrace{y}_{\in U^\perp}) = 0$$

□

Пусть $\Pi(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

Теорема. *Пусть φ — ортогональный линейный оператор в $\mathbb{E}$. Тогда существует ортонормированный базис $\mathbb{e}$ такой, что матрица $A(\varphi, \mathbb{e})$ имеет следующий блочно-диагональный вид:*

$$A(\varphi, \mathbb{e}) := \begin{pmatrix} \Pi(\alpha) & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \Pi(\alpha) & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$