

# Лекция 20 от 08.02.2016

## Линейные отображения (продолжение)

Пусть  $\varphi: V \rightarrow W$  — линейное отображение.

**Предложение.**

1.  $\text{Ker } \varphi$  — подпространство в  $V$ .
2.  $\text{Im } \varphi$  — подпространство в  $W$ .

*Доказательство.* Проверим по определению.

1.
  - $\varphi(0_v) = 0_w$  — этот факт мы уже доказали.
  - $v_1, v_2 \in \text{Ker } \varphi \Rightarrow \varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) = 0_w + 0_w = 0_w \Rightarrow v_1 + v_2 \in \text{Ker } \varphi$ .
  - $v \in \text{Ker } \varphi, \alpha \in F \Rightarrow \varphi(\alpha v) = \alpha \varphi(v) = \alpha 0 = 0$ , то есть  $\alpha v$  тоже лежит в ядре.
2.
  - $0_w = \varphi(0_v) \Rightarrow 0_w \in \text{Im } (\varphi)$ .
  - $w_1, w_2 \in \text{Im } \varphi \Rightarrow \exists v_1, v_2 \in V: w_1 = \varphi(v_1), w_2 = \varphi(v_2) \Rightarrow w_1 + w_2 = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) = \varphi(v_1 + v_2) \Rightarrow w_1 + w_2 \in \text{Im } \varphi$ .
  - $w \in \text{Im } \varphi, \alpha \in F \Rightarrow \exists v \in V: \varphi(v) = w \Rightarrow \alpha w = \alpha \varphi(v) = \varphi(\alpha v) \Rightarrow \alpha w \in \text{Im } \varphi$ .

То есть все условия подпространства по определению выполнены и предложение доказано.  $\square$

**Предложение.**

1. Отображение  $\varphi$  инъективно тогда и только тогда, когда  $\text{Ker } \varphi = \{0\}$ .
2. Отображение  $\varphi$  сюръективно тогда и только тогда, когда  $\text{Im } \varphi = W$ .

*Доказательство.*

1.
  - $[\Rightarrow]$  Очевидно.
  - $[\Leftarrow]$   $v_1, v_2 \in V: \varphi(v_1) = \varphi(v_2) \Rightarrow \varphi(v_1 - v_2) = 0 \Rightarrow v_1 - v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = v_2$ .
2. Очевидно из определения образа.

$\square$

**Следствие.** Отображение  $\varphi$  является изоморфизмом тогда и только тогда, когда  $\text{Ker } \varphi = \{0\}$  и  $\text{Im } \varphi = W$ .

**Предложение.** Пусть  $U \subset V$  — подпространство и  $e_1, \dots, e_k$  — его базис. Тогда:

1.  $\varphi(U)$  — подпространство,  $\varphi(U) = \langle \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_k) \rangle$ ;
2.  $\dim \varphi(U) \leq \dim U$ .

*Доказательство.*

1.  $\varphi(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_k e_k) = x_1 \varphi(e_1) + \dots + x_k \varphi(e_k) \in \langle \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_k) \rangle$ .
2.  $\varphi(U) = \langle \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_k) \rangle \Rightarrow \dim \varphi(U) \leq \dim U$  по основной лемме о линейной зависимости.

$\square$

Пусть  $V, W$  — векторные пространства,  $\mathfrak{e} = (e_1, \dots, e_n)$  — базис  $V$ ,  $\mathfrak{f} = (f_1, \dots, f_m)$  — базис  $W$ ,  $A$  — матрица  $\varphi$  по отношению к  $\mathfrak{e}, \mathfrak{f}$ .

**Предложение.**  $\dim \operatorname{Im} \varphi = \operatorname{rk} A$ .

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} v \in V, v &= x_1 e_1 + \dots x_n e_n \\ \varphi(v) &= y_1 f_1 + \dots y_m f_m \end{aligned}$$

Тогда:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

$A^{(j)}$  — столбец координат в базисе  $\mathfrak{f}$ ,  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$ .

$$\alpha_1 \varphi(e_1) + \dots \alpha_n \varphi(e_n) = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 A^{(1)} + \dots + \alpha_n A^{(n)} = 0$$

Отсюда следует, что:

$$\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} \{\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)\} = \dim \underbrace{\langle \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n) \rangle}_{\operatorname{Im} \varphi} = \dim \operatorname{Im} \varphi.$$

□

**Следствие.** Величина  $\operatorname{rk} A$  не зависит от выбора базисов  $\mathfrak{e}$  и  $\mathfrak{f}$ .

**Определение.** Величина  $\operatorname{rk} A$  называется рангом линейного отображения  $\varphi$ . Обозначение:  $\operatorname{rk} \varphi$ .

**Следствие.** Если  $\dim V = \dim W = n$ , то  $\varphi$  — изоморфизм тогда и только тогда, когда  $\det A \neq 0$ . Тогда  $A$  — квадратная.

*Доказательство.*

$[\Rightarrow]$   $\varphi$  — изоморфизм, следовательно:

$$\operatorname{Im} \varphi = W \Rightarrow \dim \operatorname{Im} \varphi = n \Rightarrow \operatorname{rk} A = n \Rightarrow \det A \neq 0.$$

$$[\Leftarrow] \det A \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}.$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

Таким образом, линейное отображение  $\varphi$  является биекцией, а значит, и изоморфизмом. □

**Следствие.** Пусть  $A \in \operatorname{Mat}_{k \times m}$ ,  $B \in \operatorname{Mat}_{m \times n}$ . Тогда  $\operatorname{rk} AB \leq \min\{\operatorname{rk} A, \operatorname{rk} B\}$ .

*Доказательство.* Реализуем  $A$  и  $B$  как матрицы линейных отображений, то есть  $\varphi_A: F^m \rightarrow F^k$ ,  $\varphi_B: F^n \rightarrow F^m$ . Тогда  $AB$  будет матрицей отображения  $\varphi_A \circ \varphi_B$ .

$$\operatorname{rk}(AB) = \operatorname{rk}(\varphi_A \circ \varphi_B) \begin{cases} \leq \dim \operatorname{Im} \varphi_A = \operatorname{rk} A \\ \leq \dim \operatorname{Im} \varphi_B = \operatorname{rk} B \end{cases}$$

Первое неравенство следует из того, что  $\operatorname{Im}(\varphi_A \circ \varphi_B) \subset \operatorname{Im} \varphi_A$ , откуда в свою очередь следует, что  $\dim \operatorname{Im}(\varphi_A \circ \varphi_B) \leq \dim \operatorname{Im} \varphi_A$ . Рассматривая второе неравенство, получаем:

$$\operatorname{Im}(\varphi_A \circ \varphi_B) = \varphi_A(\operatorname{Im} \varphi_B) \Rightarrow \dim \operatorname{Im}(\varphi_A \circ \varphi_B) = \dim(\varphi_A(\operatorname{Im} \varphi_B)) \leq \dim \operatorname{Im} \varphi_B.$$

□

### Упражнение.

- Если  $A$  квадрата и  $\det A \neq 0$ , то  $\operatorname{rk} AB = \operatorname{rk} B$ .
- Если  $B \in M_n$  и  $\det B \neq 0$ , то  $\operatorname{rk} AB = \operatorname{rk} A$ .

**Теорема.**  $\dim \operatorname{Im} \varphi = \dim V - \dim \operatorname{Ker} \varphi$ .

Существует 2 способа доказательства. Рассмотрим оба.

*Бескоординатный способ.* Пусть  $\dim \operatorname{Ker} \varphi = k$  и  $e_1, \dots, e_k$  — базис в  $\operatorname{Ker} \varphi$ . Дополним его до базиса  $V$  векторами  $e_{k+1}, \dots, e_n$ . Тогда:

$$\operatorname{Im} \varphi = \langle \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_k), \dots, \varphi(e_n) \rangle = \langle 0, 0, \dots, 0, \varphi(e_{k+1}), \dots, \varphi(e_n) \rangle = \langle \varphi(e_{k+1}), \dots, \varphi(e_n) \rangle$$

Пусть  $\alpha_{k+1}\varphi(e_{k+1}) + \dots + \alpha_n\varphi(e_n) = 0$  для некоторых  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$ . Тогда:

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha_{k+1}e_{k+1} + \dots + \alpha_n e_n) &= 0 \\ \alpha_{k+1}e_{k+1} + \dots + \alpha_n e_n &\in \operatorname{Ker} \varphi \\ \alpha_{k+1}e_{k+1} + \dots + \alpha_n e_n &= \beta_1 e_1 + \dots + \beta_k e_k,\end{aligned}$$

для некоторых  $\beta_1, \dots, \beta_k \in F$ .

Но так как  $e_1, \dots, e_n$  — базис в  $V$ , то  $\alpha_{k+1} = \dots = \alpha_n = \beta_1 = \dots = \beta_k = 0$ . То есть векторы  $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$  линейно независимы, а значит, образуют базис  $\operatorname{Im} \varphi$ . Что и означает, что  $\dim \operatorname{Im} \varphi = n - k = \dim V - \dim \operatorname{Ker} \varphi$ .  $\square$

*Координатный способ.* Зафиксируем базис  $\mathfrak{e} = (e_1, \dots, e_n)$  в  $V$  и базис  $\mathfrak{f} = (f_1, \dots, f_m)$  в  $W$ . Пусть  $A$  — матрица  $\varphi$  в базисе  $\mathfrak{f}$ . Тогда  $v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ ,  $\varphi(v) = y_1 f_1 + \dots + y_m f_m$ . Получим,

что 
$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

$\operatorname{Ker} \varphi$  состоит из векторов, координаты которых удовлетворяют СЛУ  $A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$ . Ранее

в курсе мы уже доказали, что размерность пространства решений равна  $n - \operatorname{rk} A$ , то есть  $\dim \operatorname{Im} \varphi = n - \operatorname{rk} A = \dim V - \dim \operatorname{Ker} \varphi$ .  $\square$

## Линейные операторы

Пусть  $V$  — конечномерное векторное пространство.

**Определение.** *Линейным оператором (или линейным преобразованием) называется всякое линейное отображение  $\varphi: V \rightarrow V$ , то есть из  $V$  в себя. Обозначение:  $L(V) = \operatorname{Hom}(V, V)$ .*

Пусть  $\mathfrak{e} = (e_1, \dots, e_n)$  — базис в  $V$  и  $\varphi \in L(V)$ . Тогда:

$$(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) = (e_1, \dots, e_n) A,$$

где  $A$  — матрица линейного оператора в базисе  $\mathfrak{e}$ . В столбце  $A^{(j)}$  стоят координаты  $\varphi(e_j)$  в базисе  $\mathfrak{e}$ . Матрица  $A$  — квадратная.

### Пример.

1.  $\forall v \in V : \varphi(v) = 0$  — нулевая матрица.
2. Тожественный оператор:  $\forall v \in V : \operatorname{id}(v) = v$  — единичная матрица.

3. Скалярный оператор  $\lambda \text{id}(v) = \lambda V$  — матрица  $\lambda E$  в любом базисе.

**Следствие** (Следствия из общих фактов о линейных отображениях).

1. Всякий линейный оператор однозначно определяется своей матрицей в любом фиксированном базисе.
2. Для всякой квадратной матрицы существует, причем единственный, линейный оператор  $\varphi$  такой, что матрица  $\varphi$  есть  $A$ .
3. Пусть  $\varphi \in L(V)$ ,  $A$  — матрица  $\varphi$  в базисе  $\mathfrak{e}$ . Тогда:

$$\begin{aligned} v &= x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \\ \varphi(v) &= y_1 e_1 + \dots + y_n e_n \\ \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} &= A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Пусть  $\varphi \in L(V)$ ,  $A$  — матрица  $\varphi$  в базисе  $\mathfrak{e} = (e_1, \dots, e_n)$ . Пусть  $\mathfrak{e}' = (e'_1, \dots, e'_n)$  — другой базис, причём  $(e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n)C$ , где  $C$  — матрица перехода, и  $A'$  — матрица  $\varphi$  в базисе  $\mathfrak{e}'$ .

**Предложение.**  $A' = C^{-1}AC$ .

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} (e'_1, \dots, e'_n) &= (e_1, \dots, e_n)C \\ e'_j &= \sum_{i=1}^n c_{ij} e_i \\ \varphi(e'_j) &= \varphi\left(\sum_{i=1}^n c_{ij} e_i\right) = \sum_{i=1}^n c_{ij} \varphi(e_i) \\ (\varphi(e'_1), \dots, \varphi(e'_n)) &= (\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))C = (e_1, \dots, e_n)AC = (e'_1, \dots, e'_n) \underbrace{C^{-1}AC}_{A'} \end{aligned}$$

□