Лекция 28 от 19.04.2016

Пусть V — векторное пространство над полем F размерности n. $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ — его базис.

$Q\colon\ V \to F$ — квадратичная форма.

$\beta\colon\ V \times V \to F$ — билинейная функция.

$B = B(\beta, \mathbb{e})$. B_i — левая верхняя $i \times i$-подматрица.

$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \vdots \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \vdots \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \vdots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ddots \end{pmatrix}$ В такой матрице $B_1 = (b_{11})$, $B_2 = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ и так далее...

Матрица B_i — это матрица ограничения билинейной функции β на подпространство, натянутое на векторы $(e_1, \ldots, e_i)$. Введём обозначения $\delta_i = \det(B_i)$. Принято также, что $\delta_0 = 1$.

Определение. *Базис $\mathbb{e}$ называется ортогональным, если $\forall i \neq j$ $\beta(e_i, e_j) = 0$. В ортогональном базисе матрица квадратичной формы имеет канонический вид.*

Теорема (Метод ортогонализации Грамма – Шмидта). *Предположим, что $\delta_i \neq 0 \forall i$. Тогда $\exists! \mathbb{e}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ в V такой, что*

1. $\mathbb{e}'$ — *ортогональный*
2. $e'_1 = e_1$,
   $e'_2 \in e_2 + \langle e'_1 \rangle$,
   $e'_3 \in e_3 + \langle e'_1, e'_2 \rangle$,
   $\ldots$
   $e'_n \in e_n + \langle e'_1, \ldots, e'_{n-1} \rangle$
3. *В новом базисе* $Q(e'_i) = \dfrac{\delta_i}{\delta_{i-1}} \forall i$

Доказательство. Индукция по n. База для $n = 1$ всё очевидно.

Теперь пусть всё доказано для всех $k < n$. Докажем для n. По предположению индукции $\exists!$ $(e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ с требуемыми свойствами. Наблюдение: $\langle e_i, \ldots, e_n \rangle = \langle e'_i, \ldots, e'_n \rangle$. Ищем e'_n в виде $e'_n = e_n + \lambda_1 e'_1 + \ldots + \lambda_{n-1} e'_{n-1}$

$$\beta(e'_n, e'_1) = \beta(e_n, e_i) + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \beta(e'_j, e'_i) \ \forall i = 1, \ldots, n-1$$

Последнее слагаемое обращается в нуль при $i \neq j$.

$$0 = \beta(e_n, e'_i) + \lambda_i \beta(e'_i, e'_j) = \beta(e_n, e'_i) + Q(e_i) = \beta(e_n, e'_i) + \underbrace{\frac{\delta_i}{\delta_{i-1}}}_{\neq 0}$$

Выбирая $\lambda_n = -\dfrac{\beta(e_n, e'_i)}{\beta(e'_i, e'_i)}$ получаем однозначность. Таким образом, условия 1 и 2 выполнены. Проверим условие 3. Пусть C — матрица перехода от $\mathbb{e}$ к $\mathbb{e}'$. Тогда легко понять, что C — верхнетреугольная с 1 на главной диагонали. Значит $B' = C^T BC$ — диагональная. Заметим также, что C_i (та самая верхняя $i \times i$ подматрица) — матрица перехода от $(e_1, \ldots, e_i)$ к $(e'_1, \ldots, e'_i)$. Тогда

$$B'_i = C_i^T B_i C_i \Rightarrow \det B'_i = 1 \cdot \det(B_i) \cdot 1 = \delta_i$$

Но поскольку $B' = \begin{pmatrix} Q(e'_1) & & \\ & \ddots & \\ & & Q(e'_n) \end{pmatrix}$, то $\delta_n = Q(e'_1) \ldots Q(e'_n)$. А значит $\dfrac{\delta_n}{\delta_{n-1}} = Q(e'_n)$. □

Если $F = \mathbb{R}$.

Теорема (Якоби)**.** *Пусть* $\delta_i \neq 0\ \forall i$. *Тогда* $\operatorname{rk} Q = n$, $i_-(Q)$ *равен числу перемен знака последовательности* $1, \delta_1, \ldots, \delta_n$.

Доказательство. Применим процесс ортогонализации $\exists(e'_1, \ldots, e'_n)$, в котором $\dfrac{\delta_1}{\delta_0} y_1^2 + \ldots + \dfrac{\delta_n}{\delta_{n-1}} < 0$. А это верно тогда и только тогда, когда $\forall i\ \delta_i, \delta_{i-1}$ имеют разные знаки. □

Теорема (Критерий Сильвестра)**.** $Q > 0 \Leftrightarrow \delta_i > 0 \forall i = 1, \ldots, n$.

Доказательство. $[\Leftarrow]$ — следует из предыдущей теоремы.
$[\Rightarrow]$. Докажем, что $\delta_i = \det(B_i) > 0$. Действительно, B_i — это матрица ограничения $Q\big|_{\langle e_1, \ldots, e_i \rangle} > 0$. $\exists_i \in M_n(\mathbb{R}), \det(C_i) \neq 0$, такая, что $C_i^T B C_i = E$.

$\det C_i^T \det B_i \det C_i = 1 \Rightarrow \det B_i = \dfrac{1}{(\det C_i)^2}$ □

Теорема. $Q > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \delta_i < 0,\ i = 2k+1,\ k \in \mathbb{Z} \\ \delta_i > 0,\ i = 2k,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Доказательство. Применяя критерий Сильвестра для $B(Q, \mathbb{e}) = -B(-Q, \mathbb{e})$, получаем требуемое □

Евклидовы пространства

Определение. $\mathbb{E}$ — *векторное пространство над* $\mathbb{R}$, *на котором задана положительно определённая симметрическая билинейная функция* $(\cdot, \cdot)$, *(которую в дальнейшем будем называть скалярным произведением)*

Пример. $\mathbb{R}^n, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$$(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Замечание. *Важно отметить, что евклидово пространство можно определить только над полем* $\mathbb{R}$.

Определение. $x \in \mathbb{E}$. *Тогда длиной вектора называют величину* $|x| = \sqrt{(x,x)}$.

Предложение (Неравенство Коши-Буняковского)**.** $|(x,y)| \leqslant |x||y|$, *причём знак равенства возможен тогда и только тогда, когда* x *и* y *пропорциональны.*

Доказательство.

1. x,y пропорциональны, т.е. $x = \lambda y$ для некоторого λ. Тогда
$$|(x,y)| = |(x,\lambda x)| = \lambda|(x,x)| = |x|\lambda|x| = |x||y|$$

2. x,y линейно независимы. Тогда они будут базисом своей линейной оболочки. Тогда матрица билинейной функции $(\cdot,\cdot)$ равна
$$B = \begin{pmatrix} (x,x) & (x,y) \\ (y,x) & (y,y) \end{pmatrix}$$
$$\det B > 0 \Rightarrow (x,x)(y,y) - (x,y)^2 > 0$$
$$|(x,y)| < |x|^2|y|^2$$
$$|(x,y)| < |x||y|$$

□

Определение. *Углом между векторами* x,y *называют* $\arccos \dfrac{(x,y)}{|x||y|}$

Пусть есть система векторов $(v_1, \dots, v_k)$.

Определение (Матрица Грама). $G(v_1, \dots, v_k) = (g_{ij}), g_{ij} = (v_i,v_j)$

Предложение. *1.* $\det G(v_1, \dots, v_k) \geqslant 0$

2. $\det G(v_1, \dots, v_k) = 0$ *тогда и только тогда, когда* $v_1, \dots, v_k$ *линейно зависимы.*

Доказательство.

1. $v_1, \dots, v_k$ линейно независимы. Следовательно матрица $G(v_1, \dots, v_k)$ является матрицей ограничения $(\cdot,\cdot)$ на $\langle v_1, \dots, v_k \rangle$, в котором базисом является $(v_1, \dots, v_k)$. А значит $\det G(v_1, \dots, v_k) > 0$.

2. $v_1, \dots, v_k$ линейно зависимы. Значит
$$\lambda_1 G_{(1)} + \lambda_2 G_{(2)} + \dots + \lambda_k G_{(k)} =$$
$$= ((\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k, v_1),(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k, v_2), \dots ,(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k, v_k) =$$
$$= (0, 0, \dots 0)$$

   То есть строки линейно зависимы и $\det G = 0$.

□