Лекция 16 от 18.01.2016

Вспомним предыдущую лекцию и кое-что дополним

Замечание.

1. *Элемент* 0 — *единственный.*
2. *И элемент* $-a$ *единственный.*
3. *Даже элемент* 1 *единственный.*
4. *Как это ни удивительно, но* a^{-1} *тоже единственный.*

Легко увидеть, что пункты 2 и 4 доказываются одинаково с точностью до замены операции, как и пункты 1 и 3.

Доказательство. Докажем пункт 3. Если существует $1'$ — еще одна единица, тогда по аксиомам $1' = 1' \cdot 1 = 1$.

Докажем теперь пункт 4. Пусть b и c таковы, что $b \neq c$ и $ba = ab = ac = ca = 1$. Тогда

$$bac = (ba)\,c = b\,(ac) = 1 \cdot c = c = 1 \cdot b = b$$

То есть $b = c$. □

Комплексные числа (продолжение)

Предложение. *Пусть* $z_1 = |z_1|\,(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = |z_2|\,(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. *Тогда*

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2|\,(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

Иными словами, при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.

Доказательство. Просто раскроем скобки и приведём подобные.

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= |z_1||z_2|\,(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i\,(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \cos\varphi_2\sin\varphi_1)) = \\ &= |z_1||z_2|\,(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \end{aligned}$$

□

Следствие. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$

Следствие (Формула Муавра)**.** *Пусть* $z = |z|\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. *Тогда:*

$$z^n = |z|^n\,(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)) \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Замечание. *В комплексном анализе функция* $\exp x\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *доопределяется до* $\exp z\colon\ \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *следующим образом:*

$$\exp z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\,.$$

И тогда оказывается, что $\exp z$ *обладает теми же свойствами, кроме того:*

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \quad \forall\varphi \in \mathbb{C}.$$

Всякое $z \in \mathbb{C}$ можно представить в виде $z = |z|e^{i\varphi}$, где $\varphi \in \mathrm{Arg}\ (z)$. Тогда формула Муавра приобретает совсем очевидный вид:

$$|z_1|e^{i\varphi_2} \cdot |z_2|e^{i\varphi_2} = |z_1||z_2|e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}.$$

Замечание. *Отображение* $R_\varphi \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \to ze^{i\varphi}$, $\varphi \in \mathbb{R}$ *определяет поворот на угол* φ *вокруг* 0.

Корни из комплексного числа

Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $n \geqslant 2$.

Определение. *Корнем* n*-й степени из числа* z *называется всякое* $w \in \mathbb{C}$*:* $w^n = z$*. То есть*

$$\sqrt[n]{z} = \{w \in \mathbb{C} \mid w^n = z\}.$$

Если $z = 0$, то $|z| = 0$, а значит $|w| = 0$, $w = 0$. Получается, 0 — единственное комплексное число, у которого корень определён однозначно.

Далее рассмотрим случай $z \neq 0$.

$$z = |z|\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)$$
$$w = |w|\left(\cos\psi + i\sin\psi\right)$$

$$z = w^n \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = |w|^n \\ n\psi \in \mathrm{Arg}\ (z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |w| = \sqrt[n]{|z|} \\ n\psi = \varphi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |w| = \sqrt[n]{|z|} \\ \psi = \dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

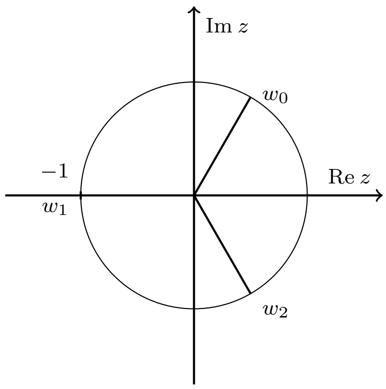
С точностью до кратного 2π различные значения в формуле $\psi = \dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}$ получаются при $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Значит z имеет ровно n корней n-й степени.

$$\sqrt[n]{z} = \left\{ \sqrt[n]{|z|} \left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right) \;\middle|\; k = 0, \ldots, n-1 \right\}$$

Замечание. *Точки из множества* $\sqrt[n]{z}$ *при* $z \neq 0$ *лежат в вершинах правильного* n*-угольника, вписанного в окружность радиуса* $\sqrt[n]{|z|}$.

Пример. $z = -1 = \cos\pi + i\sin\pi$

$$\sqrt[3]{z} = \left\{ \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3};\ \cos\pi + i\sin\pi;\ \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} \right\}$$



Решение квадратных уравнений с комплексными коэффициентами

Пусть дано квадратное уравнение $az^2 + bz + c = 0$, где a, b, $c \in \mathbb{C}$ и $a \neq 0$. Тогда имеем:

$$z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} = 0$$

$$z^2 + 2\frac{b}{2a}z + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = 0$$

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$z + \frac{b}{2a} \in \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

То есть все решения — это $z_1 = \dfrac{-b + d_1}{2a}$, $z_2 = \dfrac{-b + d_2}{2a}$, где $\{d_1, d_2\} = \sqrt[2]{b^2 - 4ac}$. В частности, квадратное уравнение всегда имеет комплексный корень, а при $b^2 - 4ac \neq 0$ два корня.

Теорема (Основная теорема алгебры)**.** *Всякий многочлен $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ степени n, где $n \geqslant 1$, $a_n \neq 0$, и $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ имеет корень.*

Векторные пространства над произвольным полем

И снова вспомним, что такое векторное пространство:

- некоторое множество V;
- есть операция сложения $V \times V \to V$;
- есть операция умножения на скаляр $F \times V \to V$;
- выполняются 8 аксиом.

Все основные понятия и результаты теории векторных пространств из прошлого полугодия можно перенести на случай пространства над произвольным полем F без изменений.

Пример. *Пусть V — векторное пространство над полем из двух элементов,* $\dim V = n$. *Тогда $|V| = 2^n$. Действительно, каждое конечномерное пространство обладает базисом (в данном случае $e_1, \ldots, e_n$). Тогда $V = \{k_1 e_1 + k_2 e_2 + \ldots + k_n e_n \mid k_i \in F\}$. Но очень легко заметить, что всего таких линейных комбинаций 2^n*