

Лекция 24 от 14.03.2016

Вспомним конец прошлой лекции.

Пусть V — векторное пространство над полем \mathbb{F} , $\varphi \in L(V)$ — линейный оператор.

Вектор $v \in V$ — корневой для φ , отвечающий собственному значению $\lambda \in \mathbb{F}$ тогда и только тогда, когда существует $m \leq 0$ такое, что $(\varphi - \lambda \text{id})^m(v) = 0$. Высотой корневого вектора называется наименьшее такое m .

Корневым подпространством называется пространство из корневых векторов и нулевого вектора. Другими словами, $V^\lambda(\varphi) = \{v \in V \mid \exists m \geq 0 : (\varphi - \lambda \text{id})^m(v) = 0\}$. Поскольку собственный вектор является корневым вектором высоты 1, то собственное подпространство включено в корневое подпространство: $V_\lambda(\varphi) \subset V^\lambda(\varphi)$.

Предложение. Корневое подпространство нетривиально тогда и только тогда, когда λ является собственным значением. Другими словами, $V^\lambda \neq \{0\} \Leftrightarrow \chi_\varphi(\lambda) = 0$.

Доказательство.

$$\Leftarrow \chi_\varphi(\lambda) = 0 \Rightarrow V_\lambda(\varphi) \neq \{0\} \Rightarrow V^\lambda(\varphi) \neq \{0\}, \text{ так как } V^\lambda(\varphi) \supset V_\lambda(\varphi).$$

$$\Rightarrow \text{Пусть } V^\lambda(\varphi) \neq \{0\} \Rightarrow \exists v \neq 0 \in V^\lambda(\varphi) \Rightarrow \exists m \geq 1 : (\varphi - \lambda \text{id})^m(v) = 0.$$

Рассмотрим $u = (\varphi - \lambda \text{id})^{m-1}(v) \neq 0$, тогда:

$$(\varphi - \lambda \text{id})(u) = (\varphi - \lambda \text{id})(\varphi - \lambda \text{id})^{m-1}(v) = (\varphi - \lambda \text{id})^m(v) = 0.$$

То есть вектор u — это вектор, для которого $(\varphi - \lambda \text{id})(u) = 0$, то есть собственный вектор. Следовательно λ — собственное значение.

□

Предложение. Для любого собственного значения $\lambda \in \mathbb{F}$ подпространство $V^\lambda(\varphi)$ инвариантно относительно φ .

Доказательство. Пусть v — корневой вектор высоты m . Докажем, что $\varphi(v)$ — также корневой вектор.

Заметим, что если $u = (\varphi - \lambda \text{id})(v)$, то u — корневой вектор высоты $m-1$, и, соответственно, лежит в корневом пространстве:

$$u = (\varphi - \lambda \text{id})(v) = \varphi(v) - \lambda v \in V^\lambda(\varphi).$$

Мы получили, что $\varphi(v) \in \lambda v + V^\lambda(\varphi)$. Но $\lambda v \in V^\lambda(\varphi)$, то есть $\lambda v + V^\lambda(\varphi) = V^\lambda(\varphi)$ и $\varphi(v) \in V^\lambda(\varphi)$. Что и означает, что пространство инвариантно относительно оператора φ . □

Положим для краткости, что $\varphi - \lambda \text{id} = \varphi_\lambda$.

Заметим, что ядра степеней линейного оператора «вкладываются» друг в друга — те векторы, которые стали нулевыми при применении линейного оператора φ_λ^k , при применении линейного оператора φ_λ ещё раз так и остаются нулевыми, а также «добиваются» (переводятся в нулевые) некоторые ранее ненулевые векторы. Итого, получаем следующее:

$$V_\lambda(\varphi) = \ker \varphi_\lambda \subset \ker \varphi_\lambda^2 \subset \dots \subset \ker \varphi_\lambda^m \subset \dots$$

Причём существует такое m , что $\ker \varphi_\lambda^m = \ker \varphi_\lambda^{m+1}$, так как V — конечномерно и размерность его не может уменьшаться бесконечно. Выберем наименьшее такое m .

Упражнение. Доказать, что для любого $s \geq 0$ выполняется равенство $\ker \varphi_\lambda^m = \ker \varphi_\lambda^{m+s}$.

Заметим также, что $V^\lambda(\varphi) = \ker \varphi_\lambda^m$. Пусть $k_i = \dim \ker \varphi_\lambda^i$. Тогда:

$$\dim V_\lambda(\varphi) = k_1 < k_2 < \dots < k_m = \dim V^\lambda(\varphi).$$

Будем обозначать как $\varphi|_V$ отображение, ограниченное на пространстве V .

Предложение.

1. Характеристический многочлен линейного отображения $\varphi|_{V^\lambda(\varphi)}$ равен $(t - \lambda)^{k_m}$.
2. Если $\mu \neq \lambda$, то линейный оператор $\varphi - \mu \text{id}$ невырожден на $V^\lambda(\varphi)$.

Доказательство. Выберем базис $\mathfrak{e} = (e_1, \dots, e_{k_m})$ в $V^\lambda(\varphi)$ так, чтобы (e_1, \dots, e_{k_i}) также был базисом в $\ker \varphi_\lambda^i$. Тогда:

$$A(\varphi|_{V^\lambda(\varphi)}, \mathfrak{e}) = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 - k_1 & \dots & k_m - k_{m-1} \\ k_1 & 0 & * & \dots & * \\ k_2 - k_1 & 0 & 0 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ k_m - k_{m-1} & 0 & 0 & \dots & * \end{pmatrix} \quad (*)$$

Но тогда:

$$A(\varphi|_{V^\lambda(\varphi)}, \mathfrak{e}) = A(\varphi_\lambda|_{V^\lambda(\varphi)}, \mathfrak{e}) = \begin{pmatrix} A_1 & * & * & \dots & * \\ 0 & A_1 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & A_3 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_n \end{pmatrix},$$

где $A_i = \lambda E$. Следовательно, характеристический многочлен линейного отображения $\varphi|_{V^\lambda(\varphi)}$ равен $(t - \lambda)^{k_m}$.

Матрица $A((\varphi - \mu \text{id})|_{V^\lambda(\varphi)}, \mathfrak{e}) = (\varphi_\lambda|_{V^\lambda(\varphi)}, \mathfrak{e}) - \mu \text{id}$ имеет вид $(*)$, где $A_i = (\lambda - \mu) \text{id}$. Следовательно, $\det((\varphi - \mu \text{id})|_{V^\lambda(\varphi)}) = (\lambda - \mu)^{k_m} \neq 0$, то есть линейный оператор невырожден. \square

Предложение. Если λ — собственное значение φ , то $\dim V^\lambda(\varphi)$ равен кратности λ как корня многочлена $\chi_\varphi(t)$.

Доказательство. Пусть (e_1, \dots, e_k) — базис $V^\lambda(\varphi)$, $k = \dim V^\lambda(\varphi)$. Дополним (e_1, \dots, e_k) до базиса $\mathfrak{e} = (e_1, \dots, e_n)$ всего пространства V . Тогда матрица линейного оператора имеет следующий вид:

$$A_\varphi = \left(\begin{array}{c|c} B & * \\ \hline 0 & C \end{array} \right), \quad B \in M_k, C \in M_{n-k}$$

$$\chi_\varphi(t) = \det(tE - A) = \det(tE - B) \det(tE - C).$$

Заметим, что $\det(tE - B)$ — это характеристический многочлен $\varphi|_{V^\lambda(\varphi)}$, следовательно,

$$\chi_\varphi(t) = (t - \lambda)^k \det(tE - C).$$

Осталось показать, что λ — не корень $\det(tE - C)$.

Пусть $W = \langle e_{k+1}, \dots, e_n \rangle$. Тогда рассмотрим линейный оператор $\psi \in L(W)$, у которого матрица в базисе (e_{k+1}, \dots, e_n) есть C . Предположим, что $\det(\lambda E - C) = 0$. Это значит, что λ — собственное значение для ψ и существует вектор $w \in W$, $w \neq 0$ такой, что $\psi(w) = \lambda w$.

Тогда:

$$\begin{aligned} \varphi(w) &= \lambda w + u, \quad u \in V^\lambda(\varphi) \\ \varphi(w) - \lambda w &\in V^\lambda(\varphi) \\ (\varphi - \lambda \text{id})(w) &\in V^\lambda(\varphi) \Rightarrow w \in V^\lambda(\varphi) \end{aligned}$$

Получили противоречие. Значит, λ — не корень $\det(tE - C)$. \square

Следствие. $V^\lambda(\varphi) = \ker \varphi_\lambda^s$, где s — кратность λ как корня многочлена $\varphi_\lambda(t)$.

Предложение. Если $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, где $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$ — собственные значения φ , то сумма $V^{\lambda_1}(\varphi) + \dots + V^{\lambda_k}(\varphi)$ — прямая.

Доказательство. Докажем индукцией по k .

База при $k = 1$ — ясно.

Теперь пусть утверждение доказано для всех значений, меньших k . Докажем для k .

Выберем векторы $v_i \in V^{\lambda_i}(\varphi)$ такие, что $v_1 + \dots + v_k = 0$. Пусть m — высота вектора v_k . Тогда применим к нашей сумме оператор $\varphi_{\lambda_k}^m$, получив следующее:

$$\varphi_{\lambda_k}^m(v_1) + \dots + \varphi_{\lambda_k}^m(v_{k-1}) + \varphi_{\lambda_k}^m(v_k) = 0.$$

С другой стороны, $\varphi_{\lambda_k}^m(v_k) = 0$, то есть:

$$\varphi_{\lambda_k}^m(v_1) + \dots + \varphi_{\lambda_k}^m(v_{k-1}) + \varphi_{\lambda_k}^m(v_k) = \varphi_{\lambda_k}^m(v_1) + \dots + \varphi_{\lambda_k}^m(v_{k-1}) = 0.$$

Тогда по предположению индукции $\varphi_{\lambda_k}^m(v_1) = \dots = \varphi_{\lambda_k}^m(v_{k-1}) = 0$. Но $\varphi_\lambda|_{V^\lambda(\varphi)}$ не вырожден и обратим при $i \neq k$, следовательно $v_1 = \dots = v_{k-1} = 0$. Но тогда и $v_k = 0$.

Следовательно, сумма прямая, что нам и требовалось. \square

Теорема. Если характеристический многочлен $\chi_\varphi(t)$ разлагается на линейные множители, причём $\chi_\varphi(t) = (t - \lambda_1)^{k_1} \dots (t - \lambda_s)^{k_s}$, то $V = \bigoplus_{i=1}^s V^{\lambda_i}(\varphi)$.

Доказательство. Так как сумма $V^{\lambda_1}(\varphi) + \dots + V^{\lambda_s}(\varphi)$ прямая и для любого i выполняется, что $\dim(V^{\lambda_i}(\varphi)) = k_i$, то:

$$\dim(V^{\lambda_1}(\varphi) + \dots + V^{\lambda_s}(\varphi)) = k_1 + \dots + k_s = \dim V.$$

Следовательно, $V = \bigoplus_{i=1}^s V^{\lambda_i}(\varphi)$. \square

Жорданова клетка

Определение. Пусть $\lambda \in \mathbb{F}$. **Жордановой клеткой** порядка n , отвечающей значению λ , называется матрица вида:

$$J_\lambda^n = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{F}).$$