Лекция 21 от 15.02.2016

Инвариантность и обратимость

Пусть $\varphi\colon V \to V$ — линейный оператор, и $\mathbb{e}$ — базис в V.

Обозначение. $A(\varphi, \mathbb{e})$ — *матрица линейного оператора φ в базисе $\mathbb{e}$.*

Если $\mathbb{e}' = (e_1', \ldots, e_n')$ — ещё один базис, причём $(e_1', \ldots, e_n') = (e_1, \ldots, e_n)C$, где C — матрица перехода, $A = A(\varphi, \mathbb{e})$ и $A' = A(\varphi, \mathbb{e}')$. В прошлый раз мы доказали, что $A' = C^{-1}AC$.

Следствие. *Величина* $\det A$ *не зависит от выбора базиса. Обозначение:* $\det\varphi$.

Доказательство. Пусть A' — матрица φ в другом базисе. Тогда получается, что:

$$\det A' = \det\left(C^{-1}AC\right) = \det C^{-1}\det A\det C = \det A\det C\frac{1}{\det C} = \det A.$$

□

Заметим, что $\det A$ — инвариант самого φ.

Определение. *Две матрицы $A', A \in M_n(F)$ называются подобными, если существует такая матрица $C \in M_n(F), \det C \neq 0$, что $A' = C^{-1}AC$.*

Замечание. *Отношение подобия на M_n является отношением эквивалентности.*

Предложение. *Пусть $\varphi \in L(V)$. Тогда эти условия эквивалентны:*

1. $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$;
2. $\operatorname{Im}\varphi = V$;
3. *φ обратим (то есть это биекция, изоморфизм);*
4. $\det\varphi \neq 0$.

Доказательство.

1. $\Leftrightarrow 2$ — следует из формулы $\dim V = \dim\operatorname{Ker}\varphi + \dim\operatorname{Im}\varphi$.
2. $\Leftrightarrow 3$ — уже было.
3. $\Leftrightarrow 4$ — уже было.

□

Определение. *Линейный оператор φ называется вырожденным, если $\det\varphi = 0$, и невырожденным, если $\det\varphi \neq 0$.*

Определение. *Подпространство $U \subset V$ называется инвариантным относительно φ (или φ-инвариантным), если $\varphi(U) \subset U$. То есть $\forall u \in U\colon \varphi(u) \in U$.*

Пример.

1. *$\{0\}, V$ — они инвариантны для любого φ.*
2. *$\operatorname{Ker}\varphi$ φ-инвариантно, $\varphi(\operatorname{Ker}\varphi) = \{0\} \subset \operatorname{Ker}\varphi$*
3. *$\operatorname{Im}\varphi$ тоже φ-инвариантно, $\varphi(\operatorname{Im}\varphi) \subset \varphi(V) = \operatorname{Im}\varphi$.*

Пусть $U \subset V$ — φ-инвариантное подпространство. Также пусть $(e_1, \ldots, e_n)$ — базис в U. Дополним его до базиса V: $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$.

$$\underbrace{A(\varphi, \mathbb{e})}_{\text{Матрица с углом нулей}} = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}, \quad \text{где } B \in M_k$$

Это нетрудно понять, если учесть, что $\varphi(e_i) \in \langle e_1, \ldots, e_k \rangle$, $i = 1, \ldots, k$. Если $U = \operatorname{Ker} \varphi$, то $B = 0$. Если $U = \operatorname{Im} \varphi$, то $D = 0$.

Обратно, если матрица A имеет в базисе $\mathbb{e}$ такой вид, то $U = \langle e_1, \ldots e_k \rangle$ — инвариантное подпространство.

Обобщение. *Пусть $V = U \oplus W$, где U, W — инвариантные подпространства, и $(e_1, \ldots, e_k)$ — базис W. Тогда $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ — базис V.*

$$A(\varphi, \mathbb{e}) = \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

Обобщение.

$$A(\varphi, \mathbb{e}) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} * \, 0 \, 0 \ldots 0 \\ 0 \, * \, 0 \ldots 0 \\ 0 \, 0 \, * \ldots 0 \\ \vdots \, \vdots \, \vdots \, \ddots \, \vdots \\ 0 \, 0 \, 0 \ldots * \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ \vdots \\ k_s \end{array}$$

Здесь $k_1, \ldots, k_s$ — размеры квадратных блоков блочно-диагональной матрицы. Матрица $A(\varphi, \mathbb{e})$ имеет такой вид тогда и только тогда, когда:

$$\begin{gathered} U_1 = \langle e_1, \ldots, e_{k_1} \rangle \\ U_2 = \langle e_{k_1+1}, \ldots, e_{k_2} \rangle \\ \vdots \\ U_{k_s} = \langle e_{n-k_s+1}, \ldots, e_n \rangle \end{gathered}$$

Предел мечтаний. *Найти такой базис, в котором матрица линейного оператора была бы диагональной. Но такое возможно не всегда.*

Собственные векторы и собственные значения

Пусть $\varphi \in L(V)$.

Определение. *Ненулевой вектор $v \in V$ называется собственным для V, если $\varphi(v) = \lambda v$ для некоторго $\lambda \in F$. При этом число λ называется собственным значением линейного оператора φ, отвечающим собственному вектору v.*

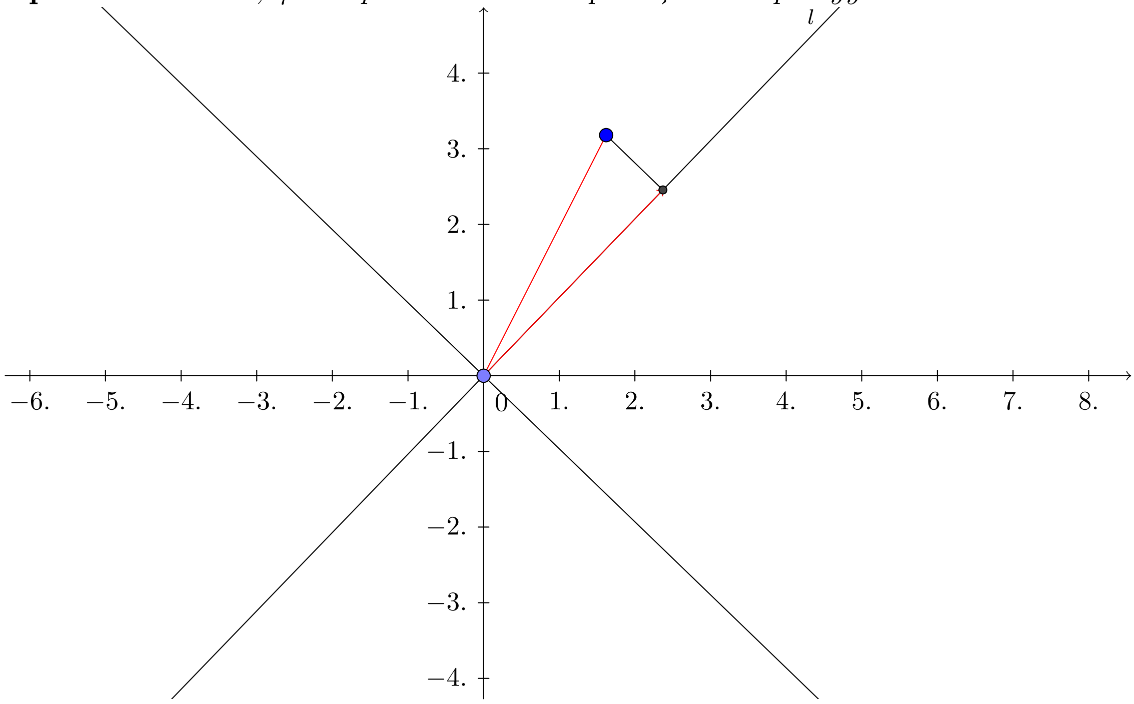
Предложение. *Вектор $v \in V$, $v \neq 0$ — собственный вектор в V тогда и только тогда, когда линейная оболочка $\langle v \rangle$ является φ-инвариантным подпространством*

Доказательство.

- $[\Rightarrow]$ $\varphi(v) = \lambda v \Rightarrow \langle v \rangle = \{kv \mid k \in F\}$. Тогда $\varphi(kv) = \lambda kv \in \langle v \rangle$.
- $[\Leftarrow]$ $\varphi(V) \in \langle v \rangle \Rightarrow \exists \lambda \in F \colon \varphi(v) = \lambda v$.

$\square$

Пример. *1. $V = \mathbb{R}^2$, φ — ортогональная проекция на прямую l.*



$0 \neq v \in l \Rightarrow \varphi(v) = 1 \cdot v,\ \lambda = 1$
$0 \neq v \perp l \Rightarrow \varphi(v) = 0 = 0 \cdot v,\ \lambda = 1$

2. *Поворот на угол φ вокруг нуля на угол α.*

   - $\alpha = 0 + 2\pi k$. *Любой ненулевой вектор собственный.* $\lambda = 1$.
   - $\alpha = \pi + 2\pi k$. *Любой ненулевой вектор собственный.* $\lambda = -1$.
   - $\alpha \neq \pi k$. *Собственных векторов нет.*

3. *$V = P_n(F)$ — многочлены степени n, $\varphi = \Delta\colon f \to f'$. Тогда $0 \neq f$ — собственный вектор тогда, и только тогда, когда $f = const$.*

Диагонализуемость

Определение. *Линейный оператор φ называется диагонализуемым, если существует базис $\mathbb{e}$ в V такой, что $A(\varphi, \mathbb{e})$ диагональна.*

Предложение (Критерий диагонализуемости)**.** *Отображение φ диагонализуемо тогда и только тогда, когда в V существует базис из собственных векторов.*

Доказательство. Пусть $\mathbb{e}$ — базис V. Тогда $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, что равносильно $\varphi(e_i) = \lambda_i e_i$. Это и означает, что все векторы собственные. □

В примерах выше:

1. φ диагонализуем. $e_1 \in l$, $e_2 \perp l$. Тогда матрица примет вид $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Если $\alpha = \pi k$, то φ диагонализуем ($\varphi = \mathrm{id}$ или $\varphi = -\mathrm{id}$). Не диагонализуем в других случаях.

3. φ диагонализуем тогда и только тогда, когда $n = 0$. При $n > 0$ собственных векторов **МАЛО**.

Собственное подпространство

Пусть $\varphi \in L(V)$, $\lambda \in F$.

Определение. *Множество* $V_\lambda(\varphi) = \{v \in V \mid \varphi(v) = \lambda V\}$ *называется собственным подпространством линейного оператора, отвечающим собственному значению* λ.

Упражнение. *Доказать, что* $V_\lambda(\varphi)$ *— действительно подпространство.*

Предложение. $V_\lambda(\varphi) = \mathrm{Ker}\,(\varphi - \lambda \mathrm{id})$.

Доказательство.

$$v \in V_\lambda(\varphi) \Leftrightarrow \varphi(v) = \lambda v \Leftrightarrow \varphi(v) - \lambda v = 0 \Leftrightarrow (\varphi - \lambda \mathrm{id})(v) = 0 \Leftrightarrow v \in \mathrm{Ker}\,(\varphi - \lambda \mathrm{id})$$

□

Следствие. *Собственное подпространство* $V_\lambda(\varphi) \neq \{0\}$ *тогда и только тогда, когда* $\det(\varphi - \lambda \mathrm{id}) = 0$.

Определение. *Многочлен* $\chi_\varphi(t) = (-1)^n \det(\varphi - t\mathrm{id})$ *называется характеристическим.*