Лекции по предмету

Линейная алгебра и геометрия

Группа лектория ФКН ПМИ 2015-2016
Анастасия Иовлева
Ксюша Закирова
Руслан Хайдуров

2016 год

Содержание

Лекция 15 от 11.01.2016

Скаляры. Поля

Для начала вспомним, что такое *векторное пространство* — это множество, на котором введены операции сложения, умножения на скаляр и в котором будут выполнятся восемь аксиом (см. 1 семестр). Но что такое скаляр?

Определение. *Скаляры — это элементы некоторого фиксированного поля.*

Определение. *Полем называется множество F, на котором заданы две операции — «сложение» $(+)$ и «умножение» $(\cdot)$,*

$$F \times F \to F \Rightarrow \begin{array}{c} +\colon (a, b) \mapsto a + b \\ \cdot\colon (a, b) \mapsto a \cdot b \end{array}$$

удовлетворяющие следующим свойствам («аксиомам поля»): $\forall a, b, c \in F$

1. $a + b = b + a$ *(коммутативность по сложению);*
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$ *(ассоциативность по сложению);*
3. $\exists\, 0 \in F\colon 0 + a = a + 0 = a$ *(существование нулевого элемента);*
4. $\exists -a \in F\colon a + (-a) = (-a) + a = 0$ *(существование противоположного элемента);*
5. $a(b + c) = ab + ac$ *(дистрибутивность; связь между сложением и умножением);*
6. $ab = ba$ *(коммутативность по умножению);*
7. $(ab)c = a(bc)$ *(ассоциативность по умножению);*
8. $\exists\, 1 \in F \setminus \{0\} : 1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ *(существование единицы);*
9. $a \neq 0 \Rightarrow \exists a^{-1} \in F : a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$ *(существование обратного элемента).*

Пример.

- $\mathbb{Q}$ *— рациональные числа;*
- $\mathbb{R}$ *— вещественные числа;*
- $\mathbb{C}$ *— комплексные числа;*
- $F_2 = \{0, 1\}$, *при сложении и умножении по модулю 2.*

Поле комплексных чисел

Поле действительных чисел $\mathbb{R}$ плохо тем, что в нем уравнение $x^2 + 1 = 0$ не имеет решения. Отсюда возникает идея определить поле, удовлетворяющее следующим требованиям:

(T1) новое поле содержит $\mathbb{R}$;

(T2) уравнение $x^2 + 1 = 0$ имеет решение.

Давайте формально построим такое поле.

Определение. *Полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел называется множество $\{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$, на котором заданы операции сложения: $(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$ и умножения: $(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + b_1a_2)$.*

Предложение. *$\mathbb{C}$ и впрямь является полем.*

Доказательство. Операции сложения и умножения введены, осталось только проверить выполнение всех аксиом.

1. очевидно, так как сложение идет поэлементно;
2. также очевидно;
3. $0 = (0, 0)$;
4. $-(a, b) = (-a, -b)$;
5. почти очевидно (т.е. прямая проверка);
6. ясно (тоже прямая проверка);
7. проверим:

$$\begin{gathered}((a_1, b_1)(a_2, b_2))(a_3, b_3) = (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + b_1a_2)(a_3, b_3) = \\ = (a_1a_2a_3 - b_1b_2a_3 - a_1b_2b_3 - b_1a_2b_3, a_1a_2b_3 - b_1b_2b_3 + a_1b_2a_3 + b_1a_2a_3) = \\ = (a_1, b_1)(a_2a_3 - b_2b_3, a_2b_3 + b_2a_3) = (a_1, b_1)((a_2, b_2)(a_3, b_3));\end{gathered}$$

8. $1 = (1, 0)$;
9. $(a, b) \neq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \neq 0 \to (a, b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$.

□

Осталось только проверить, правда ли введенное поле $\mathbb{C}$ удовлетворяет нашим требованиям:

(T1) Заметим, что в подмножестве $\mathbb{C}$, состоящим из элементов вида $(a, 0)$ операции сложения и умножения будут работать как в поле вещественных чисел.

$$\begin{gathered}(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0) \\ (a, 0) \cdot (b, 0) = (ab, 0)\end{gathered}$$

Следовательно, отображение $a \mapsto (a, 0)$ отождествляет $\mathbb{R}$ с этим подмножеством, то есть $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Что нам и требуется.

(T2) Примем $i = (0, 1)$. Тогда $i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$. Итого, требование выполнено.

Однако запись комплексных чисел в виде упорядоченной пары (a, b) не очень удобна и громоздка. Поэтому преобразуем запись следующим образом:

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1) = a + bi.$$

Тем самым мы получили реализацию поля $\mathbb{C}$ комплексных чисел как множества $\{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R},\ i^2 = -1\}$, с обычным сложением и умножением.

Определение. *Запись $z = a + bi$ называется алгебраической формой комплексного числа $z \in \mathbb{C}$.*

$a = \operatorname{Re} z$ — *действительная часть числа z.*

$b = \operatorname{Im} z$ — *мнимая часть числа z.*

Определение. *Числа вида $z = bi$ (т.е. $\operatorname{Re} z = 0$) называются чисто мнимыми.*

Определение. *Отображение $\mathbb{C} \to \mathbb{C} : a + bi \mapsto a - bi$ называется (комплексным) сопряжением. Само число $\overline{z} = a - bi$ называется (комплексно) сопряженным к числу $z = a + bi$.*

Лемма. *Для любых двух комплексных числе $z, w \in \mathbb{C}$ выполняется, что*

1. $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$;
2. $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.

Доказательство. Пусть $z = a + bi$, а $w = c + di$.

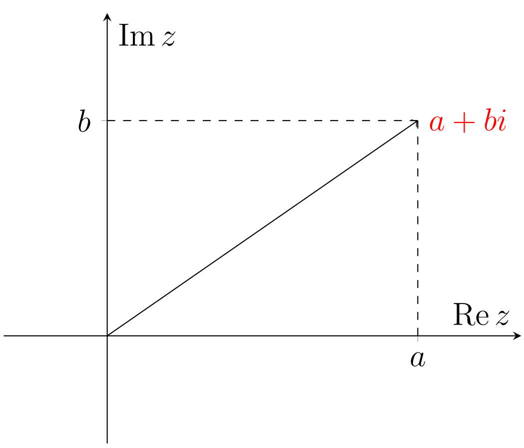
1. $\overline{z} + \overline{w} = a - bi + c - di = (a + c) - (b + d)i = \overline{z + w}$
2. $\overline{z} \cdot \overline{w} = (a - bi)(c - di) = ac - adi - bci + bdi^2 = (ac - bd) - (ad + bc)i = \overline{zw}$

$\square$

Замечание. *Равенство $z = \overline{z}$ равносильно равенству $\operatorname{Im} z = 0$, то есть $z \in \mathbb{R}$.*

Геометрическая модель поля $\mathbb{C}$

Заметим, что поле комплексных числе $\mathbb{C} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ равно $\mathbb{R}^2$. Следовательно, комплексные числа можно представить как точки на действительной плоскости $\mathbb{R}^2$, или сопоставить их векторам.



В таком представлении сложение комплексных чисел сопоставляется со сложением векторов, а сопряжение — с отражением относительно оси $Ox(\operatorname{Re} z)$.

Определение. *Модулем комплексного числа $z = a+bi$ называется длина соответствующего вектора. Обозначение: $|z|; |a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$.*

Свойства модуля:

1. $|z| \geqslant 0$, причем $|z| = 0$ тогда и только тогда, когда $z = 0$;
2. $|z+w| \leqslant |z| + |w|$ — неравенство треугольника;
3. $z \cdot \overline{z} = |z|^2$;

   Доказательство. $(a+bi)(a-bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$. □

4. $|zw| = |z| \cdot |w|$;

   Доказательство. Возведем в квадрат.

$$|z|^2 \cdot |w|^2 = z\overline{z}w\overline{w} = (zw)\overline{z}\overline{w} = zw\overline{zw} = |zw|^2$$

□

Замечание. *Из свойства 3 следует, что при $z \neq 0$ выполняется:*

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

$$(a+bi)^{-1} = \frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}.$$

Определение. *Аргументом комплексного числа $z \neq 0$ называется всякий угол φ такой что*

$$\cos\varphi = \frac{a}{|z|} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}; \quad \sin\varphi = \frac{b}{|z|} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Неформально говоря, аргумент z — это угол между осью Ox и соответствующим вектором.

Замечание.

1. *Аргумент определен с точностью до 2π.*
2. *Аргумент $z = 0$ не определен.*

Для $z \neq 0$ введем множество $\operatorname{Arg} z = \{$множество всех аргументов $z\}$ — *большой аргумент*. Также введем *малый аргумент* $\arg z$ — это такой $\varphi \in \operatorname{Arg} z$, который удовлетворяет условию $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ и, следовательно, определен однозначно.

Используя аргумент, можно представить комплексное число следующим образом:

$$\left.\begin{matrix} a = |z|\cos\varphi \\ b = |z|\sin\varphi \end{matrix}\right| \Rightarrow z = a + bi = |z|\cos\varphi + i|z\sin\varphi = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Определение. *Запись $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ называется тригонометрической формой комплексного числа z.*

Замечание.

$$r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = r_2 \\ \varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Лекция 16 от 18.01.2016

Вспомним предыдущую лекцию и кое-что дополним

Замечание.

1. *Элемент* 0 *— единственный.*
2. *И элемент* $-a$ *единственный.*
3. *Даже элемент* 1 *единственный.*
4. *Как это ни удивительно, но* a^{-1} *тоже единственный.*

Легко увидеть, что пункты 2 и 4 доказываются одинаково с точностью до замены операции, как и пункты 1 и 3.

Доказательство. Докажем пункт 3. Если существует $1'$ — еще одна единица, тогда по аксиомам $1' = 1' \cdot 1 = 1$.

Докажем теперь пункт 4. Пусть b и c таковы, что $b \neq c$ и $ba = ab = ac = ca = 1$. Тогда

$$bac = (ba)\,c = b\,(ac) = 1 \cdot c = c = 1 \cdot b = b$$

То есть $b = c$. □

Комплексные числа (продолжение)

Предложение. *Пусть* $z_1 = |z_1|\,(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = |z_2|\,(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. *Тогда*

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2|\,(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$$

Иными словами, при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.

Доказательство. Просто раскроем скобки и приведём подобные.

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2|\,(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i\,(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \cos\varphi_2\sin\varphi_1)) = \\ = |z_1||z_2|\,(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$$

□

Следствие. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2))$

Следствие (Формула Муавра). *Пусть* $z = |z|\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. *Тогда:*

$$z^n = |z|^n\,(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)) \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Замечание. *В комплексном анализе функция* $\exp x\colon\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *доопределяется до* $\exp z\colon\ \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ *следующим образом:*

$$\exp z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\,.$$

И тогда оказывается, что $\exp z$ *обладает теми же свойствами, кроме того:*

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \quad \forall\varphi\in\mathbb{C}.$$

Всякое $z \in \mathbb{C}$ можно представить в виде $z = |z|e^{i\varphi}$, где $\varphi \in \text{Arg }(z)$. Тогда формула Муавра приобретает совсем очевидный вид:

$$|z_1|e^{i\varphi_2} \cdot |z_2|e^{i\varphi_2} = |z_1||z_2|e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}.$$

Замечание. *Отображение* $R_\varphi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \to ze^{i\varphi}$, $\varphi \in \mathbb{R}$ *определяет поворот на угол* φ *вокруг* 0.

Корни из комплексного числа

Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $n \geqslant 2$.

Определение. *Корнем n-й степени из числа z называется всякое $w \in \mathbb{C}$: $w^n = z$. То есть*

$$\sqrt[n]{z} = \{w \in \mathbb{C} \mid w^n = z\}.$$

Если $z = 0$, то $|z| = 0$, а значит $|w| = 0$, $w = 0$. Получается, 0 — единственное комплексное число, у которого корень определён однозначно.

Далее рассмотрим случай $z \neq 0$.

$$z = |z|\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$
$$w = |w|\,(\cos\psi + i\sin\psi)$$

$$z = w^n \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = |w|^n \\ n\psi \in \text{Arg }(z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |w| = \sqrt[n]{|z|} \\ n\psi = \varphi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |w| = \sqrt[n]{|z|} \\ \psi = \dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

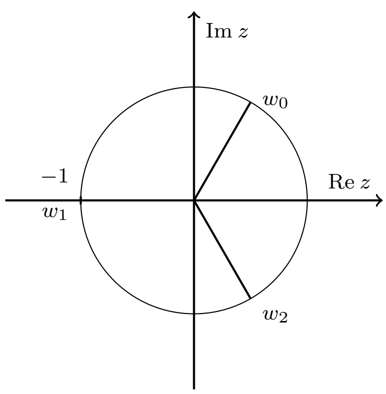
С точностью до кратного 2π различные значения в формуле $\psi = \dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}$ получаются при $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Значит z имеет ровно n корней n-й степени.

$$\sqrt[n]{z} = \left\{ |z| \left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right) \;\middle|\; k = 0, \ldots, n-1 \right\}$$

Замечание. *Точки из множества* $\sqrt[n]{z}$ *при* $z \neq 0$ *лежат в вершинах правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса* $\sqrt[n]{|z|}$.

Пример. $z = -1 = \cos\pi + i\sin\pi$

$$\sqrt[3]{z} = \left\{ \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3};\; \cos\pi + i\sin\pi;\; \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} \right\}$$



Решение квадратных уравнений с комплексными коэффициентами

Пусть дано квадратное уравнение $az^2 + bz + c = 0$, где a, b, $c \in \mathbb{C}$ и $a \neq 0$. Тогда имеем:

$$z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} = 0$$

$$z^2 + 2\frac{b}{2a}z + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = 0$$

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$z + \frac{b}{2a} \in \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

То есть все решения — это $z_1 = \dfrac{-b + d_1}{2a}$, $z_2 = \dfrac{-b + d_2}{2a}$, где $\{d_1, d_2\} = \sqrt[2]{b^2 - 4ac}$. В частности, квадратное уравнение всегда имеет комплексный корень, а при $b^2 - 4ac \neq 0$ два корня.

Теорема (Основная теорема алгебры)**.** *Всякий многочлен $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ степени n, где $n \geqslant 1$, $a_n \neq 0$, и $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ имеет корень.*

Векторные пространства над произвольным полем

И снова вспомним, что такое векторное пространство:

- некоторое множество V;
- есть операция сложения $V \times V \to V$;
- есть операция умножения на скаляр $F \times V \to V$;
- выполняются 8 аксиом.

Все основные понятия и результаты теории векторных пространств из прошлого полугодия можно перенести на случай пространства над произвольным полем F без изменений.

Пример. *Пусть V — векторное пространство над полем из двух элементов, $\dim V = n$. Тогда $|V| = 2^n$. Действительно, каждое конечномерное пространство обладает базисом (в данном случае $e_1, \ldots, e_n$). Тогда $V = \{k_1 e_1 + k_2 e_2 + \ldots + k_n e_n \mid k_i \in F\}$. Но очень легко заметить, что всего таких линейных комбинаций 2^n*

Лекция 17 от 25.01.2016

Овеществление и комплексификация

Пусть V — векторное пространство над $\mathbb{C}$.

Определение. *Овеществление пространства V — это то же пространство V, рассматриваемое как пространство над $\mathbb{R}$. Обозначение: $V_{\mathbb{R}}$.*

Операция умножения на элементы $\mathbb{R}$ в V уже есть, так как $\mathbb{R}$ — подполе в $\mathbb{C}$.

Пример. $\mathbb{C}_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^2$.

Предложение. *V — векторное пространство над $\mathbb{C}$, $\dim V < \infty$. Тогда $\dim V_{\mathbb{R}} = 2\dim V$.*

Доказательство. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — базис в V. Тогда $V = \{z_1 e_1 + \ldots + z_n e_n \mid z_k \in \mathbb{C}\}$, причём такая запись единственная в силу определения базиса. Пусть $z_k = a_k + ib_k$, причём такая запись тоже единственная. Тогда будем иметь

$$\begin{gathered} V = \{(a_1 + ib_1)\, e_1 + \ldots + (a_n + ib_n)\, e_n \mid a_k, b_k \in \mathbb{R}\} = \\ = \{a_1 e_1 + \ldots + a_n e_n + b_1 ie_1 + \ldots + b_n ie_n \mid a_k, b_k \in \mathbb{R}\} \end{gathered}$$

И причём такая запись тоже единственная. Выходит, что $e_1, e_2, \ldots, e_n, ie_1, ie_2, \ldots, ie_n$ — базис в $V_{\mathbb{R}}$, в котором $2n = 2\dim V$ элементов. □

Определение. *Комплексификация пространства W — это множество $W \times W = W^{\mathbb{C}} = \{(u, v) \mid u,v \in W\}$ с операциями $(u_1, v_1) + (u_2, v_2) = (u_1 + u_2, v_1 + v_2)$, $(a + ib)\,(u, v) = (au - bv, av - bu)$.*

Пример. $\mathbb{R}^{\mathbb{C}} = \mathbb{R}$.

Утверждение. *В нём выполняются все 8 аксиом векторного пространства над $\mathbb{C}$.*

W отождествляется подмножеством $\{(u, 0) \mid u \in W\}$. Действительно

$$w \in W \Leftrightarrow (w,0) \in W^{\mathbb{C}};\ i\,(w,0) = (0, w) \in W^{\mathbb{C}}$$

В итоге $\forall\,(u, v) \in W^{\mathbb{C}}$ представим в виде

$$(u,v) = (u,0) + (0,v) = (u,0) + i\,(v,0) = u + iv$$

То есть $W^{\mathbb{C}} = \{u + iv \mid u,v \in W\}$.

Предложение. $\dim W^{\mathbb{C}} = \dim W$

Замечание. *Здесь $W^{\mathbb{C}}$ — пространство над $\mathbb{C}$, а W — над $\mathbb{R}$.*

Доказательство. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — базис в W. Тогда

$$\begin{gathered} W^{\mathbb{C}} = \{(u,v) \mid u,v \in W\} = \{(a_1 e_1 + a_2 e_2 + \ldots + a_n e_n, b_1 e_1 + b_2 e_2 + \ldots + b_n e_n) \mid a_k,b_k \in \mathbb{R}\} = \\ = \{(a_1 e_1,b_1 e_1) + \ldots + (a_n e_n, b_n e_n)\} = \{(a_1 + ib_1)\, e_1 + \ldots + (a_n + ib_n) e_n)\} = \\ = \{z_1 e_1 + \ldots + z_n e_n \mid z_k \in \mathbb{C}\} \end{gathered}$$

То есть выходит, что $e_1, \ldots, e_n$ — базис в $W^{\mathbb{C}}$. □

Сумма подпространств

Пусть V — конечномерное векторное пространство, а U и W — подпространства (в качестве упражнения лектор предлагает доказать, что их пересечение — тоже подпространство).

Определение. *Сумма подпространств U и W — это множество.*

$$U + W = \{u + w \mid u \in U, w \in W\}$$

Замечание. $\dim (U \cap W) \leqslant \dim U \leqslant \dim (U + W)$

Пример. *Двумерные плоскости в пространстве $\mathbb{R}^3$ содержат общую прямую.*

Теорема. $\dim (U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim (U + W)$

Доказательство. Положим $p = \dim (U \cap W)$, $k = \dim U$, $m = \dim W$. Выберем базис $a = \{a_1, \ldots, a_p\}$ в пересечении. Его можно дополнить до базиса W и до базиса U. Значит $\exists b = \{b_1, \ldots, b_{k-p}\}$ такой, что $a \cup b$ — базис в U и $\exists c = \{c_1, \ldots, c_{m-p}\}$ такой, что $a \cup c$ — базис в W.

Докажем, что $a \cup b \cup c$ — базис в $U + W$.

Во-первых, докажем, что $U + W$ порождается множеством $a \cup b \cup c$.

$$\left.\begin{array}{l} v \in U + W \Rightarrow \exists u \in U, w \in W\colon\ v = u + w \\ u \in U = \langle a \cup b \rangle \subset \langle a \cup b \cup c \rangle \\ w \in W = \langle a \cup c \rangle \subset \langle a \cup b \cup c \rangle \end{array}\right| \Rightarrow v = u + w \in \langle a \cup b \cup c \rangle \Rightarrow U + W = \langle a \cup b \cup c \rangle$$

Во-вторых, докажем линейную независимость векторов из $a \cup b \cup c$.

Пусть скаляры $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$, $\beta_1, \ldots, \beta_{k-p}$, $\gamma_1, \ldots, \gamma_{m-p}$ таковы, что:

$$\underbrace{\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_p a_p}_{x} + \underbrace{\beta_1 b_1 + \ldots + \beta_{k-p} b_{k-p}}_{y} + \underbrace{\gamma_1 c_1 + \ldots + \gamma_{m-p} c_{m-p}}_{z} = 0$$

$$x + y + z = 0$$

$$z = -x - y$$

$$z \in W$$

$$-x - y \in U \cap W$$

$$\Rightarrow \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_p \in F\colon z = \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_p a_p$$

Тогда $\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_p a_p - \gamma_1 c_1 - \ldots - \gamma_{m-p} c_{m-p} = 0$. Но $a \cup c$ — базис W. Следовательно, $\lambda_1 = \ldots = \lambda_p = \gamma_1 = \ldots = \gamma_{m-p} = 0$. Но тогда $0 = x + y = \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_p a_p + \beta_1 b_1 + \ldots + \beta_{k-p} b_{k-p}$. Но $a \cup b$ — базис $U + W \Rightarrow \alpha_1 = \ldots = \alpha_p = \beta_1 = \ldots = \beta_{k-p} = 0$. Итого, все коэффициенты равны нулю и линейная независимость тем самым доказана. То есть $a \cup b \cup c$ — базис $U + W$.

$$\dim (U + W) = |a \cup b \cup c| = |a| + |b| + |c| = p + k - p + m - p = k + m - p = \\ = \dim U + \dim W - \dim (U \cap W)$$

□

Определение. *Если $U \cap W = \{0\}$, то $U + W$ называется прямой суммой.*

Следствие. *В таком случае* $\dim (U + W) = \dim U + \dim W$.

Пример. *U — плоскость, W — прямая в $\mathbb{R}^3$.*

Переход к новому базису

Пусть V — векторное пространство, $\dim V = n$, $e_1, \ldots, e_n$ — базис. То есть

$$\forall v \in V \quad \exists!\, v = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n,$$

где $x_1, \ldots, x_n \in F$ — координаты вектора v в базисе $(e_1, \ldots, e_n)$. Пусть также есть базис $e'_1, \ldots, e'_n$:

$$\begin{aligned}
e'_1 &= c_{11}e_1 + c_{21}e_2 + \ldots + c_{n1}e_n \\
e'_2 &= c_{12}e_2 + c_{22}e_2 + \ldots + c_{n2}e_n \\
&\vdots \\
e'_n &= c_{1n}e_1 + c_{2n}e_2 + \ldots + c_{nn}e_n
\end{aligned}$$

Обозначим матрицу $C = (c_{ij})$. Тогда можно переписать $(e'_1, \ldots, e'_n)$ как $(e_1, \ldots, e_n) \cdot C$.

Предложение. $e'_1, \ldots, e'_n$ *образуют базис тогда и только тогда, когда* $\det C \neq 0$.

Доказательство.

[$\Rightarrow$] $e'_1, \ldots, e'_n$ — базис, а значит $\exists C' \in M_n$:

$$\begin{gathered}
(e_1, \ldots, e_n) = (e'_1, \ldots, e'_n)\, C' = (e_1, \ldots, e_n)\, C'C \\
E = CC' \\
C' = C^{-1} \Leftrightarrow \exists C^{-1} \Leftrightarrow \det C \neq 0
\end{gathered}$$

[$\Leftarrow$] $\det C \neq 0 \Rightarrow \exists C^{-1}$. Покажем, что $e'_1, \ldots, e'_n$ в таком случае линейно независимы. Пусть $x_1 e'_1 + x_2 e'_2 + \ldots + x_n e'_n = 0$. Тогда можно записать

$$(e'_1, e'_2, \ldots, e'_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

$$(e_1, \ldots, e_n)\, C \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

Поскольку $(e_1, \ldots, e_n)$ — базис, то $C \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$. Умножая слева на обратную матрицу, получаем, что $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$

$\square$

Лекция 18 от 29.01.2016

Матрица перехода и переход к новому базису

Пусть V — векторное пространство, $\dim V = n$, вектора $e_1, \ldots, e_n$ — базис, а $e'_1, \ldots, e'_n$ — некий набор из n векторов. Тогда каждый вектор из этого набора линейно выражается через базис.

$$e'_j = \sum_{i=1}^{n} c_{ij} e_i, \quad c_{ij} \in F$$
$$(e'_1, \ldots, e'_n) = (e_1, \ldots, e_n) \cdot C, \quad C = (c_{ij})$$

То есть мы получили матрицу, где в j-ом столбце стоят коэффициенты линейного разложения вектора e'_j в базисе $(e_1, \ldots, e_n)$.

Теперь пусть $e'_1, \ldots, e'_n$ — тоже базис в V. Вспомним, что на прошлой лекции уже было сказано, что в этом случае $\det C \neq 0$.

Определение. *Матрица C называется матрицей перехода от базиса $(e_1, \ldots, e_n)$ к базису $(e'_1, \ldots, e'_n)$.*

Замечание. *Матрица перехода от $(e'_1, \ldots, e'_n)$ к $(e_1, \ldots, e_n)$ есть C^{-1}.*

И небольшое замечание касательно записи: когда базис записан в скобках, то есть $(e_1, \ldots, e_n)$, то нам важен порядок векторов в нем, в противном случае, при записи $e_1, \ldots, e_n$, порядок не важен.

Итого, имеем два базиса пространства V, $(e_1, \ldots, e_n)$ и $(e'_1, \ldots, e'_n)$, и матрицу перехода C такую, что $(e'_1, \ldots, e'_n) = (e_1, \ldots, e_n) \cdot C$. Возьмем некий вектор v и разложим его по обоим базисам.

$$v \in V \Rightarrow \begin{array}{ll} v = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n, & x_i \in F \\ v = x'_1 e'_1 + \ldots + x'_n e'_n, & x'_i \in F \end{array}$$

Предложение. *Формула преобразования координат при переходе к другому базису:*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \qquad \textit{или} \qquad x_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x'_j$$

Доказательство. С одной стороны:

$$v = x'_1 e'_1 + \ldots + x'_n e'_n = \begin{pmatrix} e'_1 & \ldots & e'_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & \ldots & e_n \end{pmatrix} C \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

Однако с другой стороны:

$$v = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n = \begin{pmatrix} e_1 & \ldots & e_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Сравнивая одно с другим, получаем, что:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

□

Линейные отображения

Пусть V и W — два векторных пространства над полем F.

Определение. *Отображение $f : V \to W$ называется линейным, если:*

1. $f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2), \quad \forall u_1, u_2 \in V$;
2. $f(\alpha u) = \alpha f(u), \quad \forall u \in V, \forall \alpha \in F$.

Замечание. *Свойства 1–2 эквивалентны тому, что*

$$f(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 f(u_1) + \alpha_2 f(u_2), \quad \forall u_1, u_2 \in V, \forall \alpha_1, \alpha_2 \in F.$$

Здесь важно понимать, что сначала сложение векторов и умножение на скаляр происходит в пространстве V, а потом в пространстве W.

Простейшие свойства.

1. $f(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$

   Доказательство. $f(\vec{0}_V) = f(0 \cdot \vec{0}_V) = 0 f(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$ □

2. $\varphi(-u) = -\varphi(u)$, где $(-u)$ — обратный элемент к u.

   Доказательство. $\varphi(-u) + \varphi(u) = \varphi(-u + u) = \varphi(\vec{0}_V) = \vec{0}_W \Rightarrow \varphi(-u) = -\varphi(u)$ □

Примеры

(0) $V \to V : v \mapsto v$ — тождественное отображение.

(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ линейно $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : f(x) = kx, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Доказательство.

$\Rightarrow$ $f(x) = f(x \cdot 1) = x f(1) = kx$, где $k = f(1)$

$\Leftarrow$ Проверим необходимые условия линейности.

1. $f(x) = kx \Rightarrow f(x_1 + x_2) = k(x_1 + x_2) = kx_1 + kx_2 = kf(x_1) + kf(x_2)$
2. $f(\alpha x) = k\alpha x = \alpha k x = \alpha f(x)$

□

(2) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ — декартова система координат.

2.1 Поворот вокруг 0 на угол α линеен.

2.2 Проекция на прямую, проходящую через 0, линейна.

(3) $P_n = R[x]_{\leqslant n}$ — пространство всех многочленов от x степени не больше n.

$$\Delta : f \mapsto f' \text{ (производная)}$$

$$\left.\begin{array}{c}(f+g)' = f' + g' \\ (\alpha f)' = \alpha f'\end{array}\right| \Rightarrow \Delta \text{ — линейное отображение из } P_n \text{ в } P_{n-1}$$

(4) Векторное пространство V, $\dim V = n$, $e_1, \ldots, e_n$ — базис.

$$V \mapsto \mathbb{R}^n$$
$$x_1e_1 + \ldots + x_ne_n \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ — тоже линейное отображение.}$$

(5) $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}$, $k \geqslant 1$ — любое, $\varphi : \mathrm{Mat}_{n\times k} \to \mathrm{Mat}_{m\times k}$.

$$\varphi(X) = A \cdot X$$
$$A(X_1 + X_2) = AX_1 + AX_2$$
$$A(\alpha X) = \alpha(AX)$$

Частный случай, при $k = 1$ — $\varphi : F^n \to F^m$.

Изоморфизм

Определение. *Отображение $\varphi : V \to W$ называется изоморфизмом, если φ линейно и биективно. Обозначение: $\varphi : V \xrightarrow{\sim} W$.*

Рассмотрим те же примеры:

(0) Изоморфизм.

(1) Изоморфизм, при $k \neq 0$.

(2) 2.1 Изоморфизм.
2.2 Не изоморфизм.

(3) Не изоморфизм.

(4) Изоморфизм.

(5) Задача: доказать, что φ — изоморфизм тогда и только тогда, когда $n = m$ и $\det A \neq 0$.

Предложение. *Пусть $\varphi : V \to W$ — изоморфизм. Тогда $\varphi^{-1} : W \to V$ — тоже изоморфизм.*

Доказательство. Так как φ — биекция, то φ^{-1} — тоже биекция.

$$w_1, w_2 \in W \Rightarrow \exists v_1, v_2 \in V : \begin{array}{ll} \varphi(v_1) = w_1 & v_1 = \varphi^{-1}(w_1) \\ \varphi(v_2) = w_2 & v_2 = \varphi^{-1}(w_2) \end{array}$$

Тогда осталось только доказать линейность обратного отображения. Для этого проверим выполнение необходимых условий линейности.

1. $\varphi^{-1}(w_1 + w_2) = \varphi^{-1}\left(\varphi(v_1) + \varphi(v_2)\right) = \varphi^{-1}\left(\varphi(v_1 + v_2)\right) = \mathrm{id}(v_1 + v_2) = v_1 + v_2$
2. $\alpha \in F, \quad \varphi^{-1}(\alpha w_1) = \varphi^{-1}(\alpha\varphi(v_1)) = \varphi^{-1}(\varphi(\alpha v_1)) = \mathrm{id}(\alpha v_1) = \alpha v_1.$

□

Определение. *Два векторных пространства V и W называются изоморфными, если существует изоморфизм $\varphi : V \xrightarrow{\sim} W$ (и тогда существует изоморфизм $V \xleftarrow{\sim} W$ по предположению). Обозначение: $V \simeq W$ или $V \cong W$.*

Отображения можно соединять в композиции:

$$\left.\begin{array}{r}\varphi : U \to V\\ \psi : V \to W\end{array}\right| \Rightarrow \psi \circ \varphi : U \to W \quad \psi \circ \varphi(u) = \psi(\varphi(u))$$

Предложение.

1. *Если φ и ψ линейны, то $\psi \circ \varphi$ тоже линейно.*
2. *Если φ и ψ изоморфизмы, то $\psi \circ \varphi$ тоже изоморфизм.*

Доказательство.

1. Опять-таки, просто проверим необходимые условия линейности.
   (a) $(\psi \circ \varphi)(u_1 + u_2) = \psi(\varphi(u_1 + u_2)) = \psi(\varphi(u_1) + \varphi(u_2)) = \psi(\varphi(u_1)) + \psi(\varphi(u_2)) = $
   $= (\psi \circ \varphi)(u_1) + (\psi \circ \varphi)(u_2)$
   (b) $(\psi \circ \varphi)(\alpha u) = \psi(\varphi(\alpha u)) = \psi(\alpha\varphi(u)) = \alpha\psi(\varphi(u)) = \alpha(\psi \circ \varphi)(u)$
2. Следует из сохранения линейности и того, что композиция биекций тоже биекция.

□

Следствие. *Изоморфизм это отношение эквивалентности на множестве всех векторных пространств над фиксированным полем F.*

Доказательство.

Рефлексивность $V \simeq V$.

Симметричность $V \simeq W \Rightarrow W \simeq V$.

Транзитивность $(V \simeq U) \ \wedge \ (U \simeq W) \Rightarrow V \simeq W$.

□

То есть множество всех векторных пространств над фиксированным полем F разбивается на попарно непересекающиеся классы, причем внутри одного класса любые два пространства изоморфны. Такие классы называются *классами эквивалентности.*

Теорема. *Если два конечномерных векторных пространства V и W над полем F изоморфны, то $\dim V = \dim W$.*

Но для начала докажем следующую лемму.

Лемма (1). *Для векторного пространства V над полем F размерности n верно, что $V \simeq F^n$.*

Доказательство. Рассмотрим отображение $\varphi : V \to F^n$ из примера 4. Пусть $(e_1, \ldots, e_n)$ — базис пространства V. Тогда:

$$x_1e_1 + \ldots + x_ne_n \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad x_i \in F.$$

Отображение φ линейно и биективно, следовательно φ — изоморфизм. А раз существует изоморфное отображение между пространствами V и F^n, то они изоморфны. □

Лекция 19 от 01.02.2016

Изоморфизм (продолжение)

На прошлой лекции мы ввели теорему и доказали одну лемму. Напомним их.

Теорема. *Если два конечномерных векторных пространства V и W изоморфны, то* $\dim V = \dim W$.

Лемма (1). *Если* $\dim V = n$, *то* $V \simeq F^n$.

Замечание. *Говорят, что функция φ отождествляет пространство V с пространством F^n, если* $\varphi : V \xrightarrow{\sim} F^n$.

Но перед тем, как доказывать эту теорему, докажем лучше еще одну лемму.

Лемма (2). *Пусть $\varphi : V \xrightarrow{\sim} W$ — изоморфизм векторных пространств, а $e_1, \ldots, e_n$— базис V. Тогда $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)$ — базис W.*

Доказательство. Пусть $w \in W$ — произвольный вектор. Положим $v \in V$ таковым, что $v = \varphi^{-1}(w)$.

$$\left.\begin{array}{c} v = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n, \quad x_i \in F \\ w = \varphi(v) = \varphi(x_1e_1 + \ldots + x_ne_n) = x_1\varphi(e_1) + \ldots + x_n\varphi(e_n) \end{array}\right. \Rightarrow W = \langle \varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n) \rangle$$

Покажем, что $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)$ — линейно независимые вектора.

Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$ таковы, что $\alpha_1\varphi(e_1) + \ldots + \alpha_n\varphi(e_n) = 0$. Это то же самое, что $\varphi(\alpha_1e_1 + \ldots + \alpha_ne_n) = 0$. Применяя φ^{-1}, получаем $\alpha_1e_1 + \ldots \alpha_ne_n = \varphi^{-1}(0) = 0$. Но так как $e_1, \ldots, e_n$ — базис в V, то $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$, и потому вектора $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)$ линейно независимы. Следовательно, этот набор векторов — базис в W. □

Теперь приступим наконец к доказательству теоремы.

Доказательство.

$\Rightarrow$ $V \simeq W \Rightarrow \exists \varphi : V \xrightarrow{\sim} W$. Тогда по лемме 2, если $e_1, \ldots, e_n$ — базис V, то $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)$ — базис W, и тогда $\dim V = \dim W$.

$\Leftarrow$ Пусть $\dim V = \dim W = n$. Тогда по лемме 1 существуют изоморфизмы $\varphi : V \xrightarrow{\sim} F^n$ и $\psi : W \xrightarrow{\sim} F^n$. Следовательно, $\psi^{-1} \circ \varphi : V \to W$ — изоморфизм.

□

То есть получается, что с точностью до изоморфизма существует только одно векторное пространство размерности n. Однако не стоит заканчивать на этом курс линейной алгебры. Теперь главная наша проблема — это как из бесконечного множества базисов в каждом векторном пространстве выбрать тот, который будет наиболее простым и удобным для каждой конкретной задачи.

Например, рассмотрим вектор $v \in F^n$ с координатами $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Пусть $v \neq 0$. Тогда существует такой базис $e_1, \ldots, e_n$, что $v = e_1$, то есть в этом базисе вектор имеет координаты $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Пусть V, W — векторные пространства над F, и $e_1, \ldots, e_n$ — базис V.

Предложение.

1. *Всякое линейное отображение $\varphi : V \to W$ однозначно определяется векторами $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)$.*

2. *Для всякого набора векторов $f_1, \ldots, f_n \in W$ существует единственное линейное отображение $\varphi : V \to W$ такое, что $\varphi(e_1) = f_1, \ldots, \varphi(e_n) = f_n$.*

Доказательство.

1. Пусть $v \in V$, $v = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$, где $x_i \in F$. Тогда $\varphi(v) = x_1\varphi(e_1) + \ldots + x_n\varphi(e_n)$, то есть если мы знаем вектора $\varphi(e_i)$, то сможем задать $\varphi(v)$ для любого $v \in V$.

2. Определим отображение $\varphi : V \to W$ по формуле $\varphi(x_1e_1 + \ldots + x_ne_n) = x_1f_1 + \ldots + x_nf_n$. Прямая проверка показывает, что φ линейна, а единственность следует из пункта 1.

$\square$

Следствие. *Если $\dim V = \dim W = n$, то для всякого базиса $e_1, \ldots, e_n$ пространства V и всякого базиса $f_1, \ldots, f_n$ пространства W существует единственный изоморфизм $\varphi : V \xrightarrow{\sim} W$ такой, что $\varphi(e_1) = f_1, \ldots, \varphi(e_n) = f_n$.*

Доказательство. Из пункта 2. предложения следует, что существует единственное линейное отображение $\varphi : V \to W$ такое, что $\varphi(e_1) = f_1, \ldots, \varphi(e_n) = f_n$. Но тогда $\varphi(x_1e_1 + \ldots + x_ne_n) = x_1\varphi(e_1) + \ldots + x_n\varphi(e_n) = x_1f_1 + \ldots + x_nf_n$ для любых $x_i \in F$. Отсюда следует, что φ — биекция. $\square$

Матрицы линейных отображений

Пусть V и W — векторные пространства, $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ — базис V, $\mathbb{f} = (f_1, \ldots, f_m)$ — базис W, $\varphi : V \to W$ — линейное отображение. Тогда:

$$\varphi(e_j) = a_{1j}f_1 + \ldots + a_{mj}f_m = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}f_i.$$

Определение. *Матрица $A = (a_{ij}) \in Mat_{m\times n}(F)$ называется матрицей линейного отображения φ в базисах $\mathbb{e}$ и $\mathbb{f}$ (или по отношению к базисам $\mathbb{e}$ и $\mathbb{f}$).*

Замечание. *Существует биекция $\{$линейные отображения $V \to W\} \rightleftarrows Mat_{m\times n}$.*

Замечание. *В $A^{(j)}$ стоят координаты $\varphi(e_j)$ в базисе $\mathbb{f}$.*

$$(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)) = (f_1, \ldots, f_n) \cdot A$$

Рассмотрим пример.

Пусть $P_n = F[x]_{\leqslant n}$ — множество многочленов над полем F степени не выше n. Возьмем дифференцирование $\Delta : P_n \to P_{n-1}$.

Базис P_n — $1, x, x^2, \ldots, x^n$. Базис P_{n-1} — $1, x, \ldots, x^{n-1}$. Тогда матрица линейного отображения будет размерности $n \times (n+1)$ и иметь следующий вид.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & n \end{pmatrix}$$

Предложение. *Если* $v = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$ *и* $\varphi(v) = y_1 f_1 + \ldots + y_m f_m$, *то*

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Доказательство. С одной стороны:

$$\varphi(v) = x_1\varphi(e_1) + \ldots + x_n\varphi(e_n) = (\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (f_1, \ldots, f_m) A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Однако с другой стороны:

$$\varphi(v) = (f_1, \ldots, f_m) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

Сравнивая обе части, получаем требуемое. □

А теперь проанализируем операции над матрицами линейных отображений.

V и W — векторные пространства. **Обозначение:** $\mathrm{Hom}(V, W) :=$ множество всех линейных отображений $V \to W$.

Пусть $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}(V, W)$.

Определение.

1. $\varphi + \psi \in \mathrm{Hom}(V, W)$ — *это* $(\varphi + \psi)(v) := \varphi(v) + \psi(v)$.

2. $\alpha \in F, \alpha\varphi \in \mathrm{Hom}(V, W)$ — *это* $(\alpha\varphi)(v) := \alpha(\varphi(v))$.

Упражнение.

1. *Проверить, что* $\varphi + \psi$ *и* $\alpha\varphi$ *действительно принадлежат* $\mathrm{Hom}(V, W)$.

2. *Проверить, что* $\mathrm{Hom}(V, W)$ *является векторным пространством.*

Предложение. *Пусть* $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ — *базис* V, $\mathbb{f} = (f_1, \ldots, f_m)$ — *базис* W, $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}(V, W)$. *При этом* A_φ — *матрица линейного отображения* φ, A_ψ — *матрица для* ψ, $A_{\varphi+\psi}$ — *для* $\varphi+\psi$, *а* $A_{\alpha\varphi}$ — *для* $\alpha\varphi$.

Тогда $A_{\varphi+\psi} = A_\varphi + A_\psi$ *и* $A_{\alpha\varphi} = \alpha A_\varphi$.

Доказательство. Упражнение. □

Теперь возьмем три векторных пространства — U, V и W размерности n, m и k соответственно, и их базисы $\mathbb{e}, \mathbb{f}$ и $\mathbb{g}$. Также рассмотрим цепочку линейных отображений $U \xrightarrow{\psi} V \xrightarrow{\varphi} W$. Пусть A — матрица φ в базисах $\mathbb{f}$ и $\mathbb{g}$, B — матрица ψ в базисах $\mathbb{e}$ и $\mathbb{f}$, C — матрица $\varphi \circ \psi$ в базисах $\mathbb{e}$ и $\mathbb{g}$.

Предложение. *$C = AB$.*

Замечание. *Собственно говоря, отсюда и взялось впервые определение умножения матриц.*

Доказательство. Запишем по определению:

$$(\varphi \circ \psi)(e_r) = \sum_{p=1}^{k} c_{pr} g_p, \quad r = 1, \ldots, n$$

$$\psi(e_r) = \sum_{q=1}^{m} b_{qr} f_q, \quad r = 1, \ldots, n$$

$$\varphi(f_q) = \sum_{p=1}^{k} a_{pq} g_p, \quad q = 1, \ldots, m$$

Тогда:

$$(\psi \circ \psi)(e_r) = \varphi(\psi(e_r)) = \varphi\left(\sum_{q=1}^{m} b_{qr} f_g\right) = \sum_{q=1}^{m} b_{qr} \varphi(f_g) = \sum_{q=1}^{m} b_{qr}\left(\sum_{p=1}^{k} a_{pq} g_p\right) = \sum_{p=1}^{k}\left(\sum_{q=1}^{m} a_{pq} b_{qr}\right) g_p$$

$$\Downarrow$$

$$c_{pr} = \sum_{q=1}^{m} a_{pq} b_{qr}$$

$$\Downarrow$$

$$C = AB$$

□

И снова, пусть V и W — векторные пространства с линейным отображением $\varphi : V \to W$.

Определение. *Ядро φ — это множество* $\operatorname{Ker} \varphi := \{v \in V \mid \varphi(v) = 0\}$.

Определение. *Образ φ — это множество* $\operatorname{Im} \varphi := \{w \in W \mid \exists v \in V : \varphi(v) = w\}$.

Пример. *Все то же $\Delta : P_n \to P_{n-1}$. Для него* $\operatorname{Ker} \Delta = \{f \mid f = const\}$, $\operatorname{Im} \Delta = P_{n-1}$.

Лекция 20 от 08.02.2016

Линейные отображения (продолжение)

Пусть $\varphi \colon V \to W$ — линейное отображение.

Предложение.

1. $\operatorname{Ker}\varphi$ *— подпространство в* V*.*

2. $\operatorname{Im}\varphi$ *— подпространство в* W*.*

Доказательство. Проверим по определению.

1. - $\varphi(0_v) = 0_w$ — этот факт мы уже доказали.
   - $v_1, v_2 \in \operatorname{Ker}\varphi \Rightarrow \varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) = 0_w + 0_w = 0_w \Rightarrow v_1 + v_2 \in \operatorname{Ker}\varphi$.
   - $v \in \operatorname{Ker}\varphi, \alpha \in F \Rightarrow \varphi(\alpha v) = \alpha\varphi(v) = \alpha 0 = 0$, то есть αv тоже лежит в ядре.

2. - $0_w = \varphi(0_v) \Rightarrow 0_w \in \operatorname{Im}(\varphi)$.
   - $w_1, w_2 \in \operatorname{Im}\varphi \Rightarrow \exists v_1, v_2 \in V\colon w_1 = \varphi(v_1), w_2 = \varphi(v_2) \Rightarrow w_1 + w_2 = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) = \varphi(v_1 + v_2) \Rightarrow w_1 + w_2 \in \operatorname{Im}\varphi$.
   - $w \in \operatorname{Im}\varphi, \alpha \in F \Rightarrow \exists v \in V\colon \varphi(v) = w \Rightarrow \alpha w = \alpha\varphi(v) = \varphi(\alpha v) \Rightarrow \alpha w \in \operatorname{Im}\varphi$.

То есть все условия подпространства по определению выполнены и предложение доказано. □

Предложение.

1. *Отображение* φ *инъективно тогда и только тогда, когда* $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$*.*

2. *Отображение* φ *сюръективно тогда и только тогда, когда* $\operatorname{Im}\varphi = W$*.*

Доказательство.

1. - [$\Rightarrow$] Очевидно.
   - [$\Leftarrow$] $v_1, v_2 \in V:\ \varphi(v_1) = \varphi(v_2) \Rightarrow \varphi(v_1 - v_2) = 0 \Rightarrow v_1 - v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = v_2$.

2. Очевидно из определения образа.

□

Следствие. *Отображение* φ *является изоморфизмом тогда и только тогда, когда* $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$ *и* $\operatorname{Im}\varphi = W$*.*

Предложение. *Пусть* $U \subset V$ *— подпространство и* $e_1, \ldots, e_k$ *— его базис. Тогда:*

1. $\varphi(U)$ *— подпространство,* $\varphi(U) = \langle\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_k)\rangle$*;*

2. $\dim\varphi(U) \leqslant \dim U$*.*

Доказательство.

1. $\varphi(x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ke_k) = x_1\varphi(e_1) + \ldots + x_k\varphi(e_k) \in \langle\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_k)\rangle$.

2. $\varphi(U) = \langle\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_k)\rangle \Rightarrow \dim\varphi(U) \leqslant \dim U$ по основной лемме о линейной зависимости.

□

Пусть V, W — векторные пространства, $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ — базис V, $\mathbb{f} = (f_1, \ldots, f_m)$ — базис W, A — матрица φ по отношению к $\mathbb{e}$, $\mathbb{f}$.

Предложение. $\dim \operatorname{Im} \varphi = \operatorname{rk} A$.

Доказательство.

$$v \in V,\ v = x_1 e_1 + \ldots x_n e_n$$
$$\varphi(v) = y_1 f_1 + \ldots y_m e_m$$

Тогда:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

$A^{(j)}$ — столбец координат в базисе $\mathbb{f}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$.

$$\alpha_1 \varphi(e_1) + \ldots \alpha_n \varphi(e_n) = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 A^{(1)} + \ldots + \alpha_n A^{(n)} = 0$$

Отсюда следует, что:

$$\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} \{\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)\} = \dim \underbrace{\langle \varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n) \rangle}_{\operatorname{Im} \varphi} = \dim \operatorname{Im} \varphi.$$

□

Следствие. *Величина* $\operatorname{rk} A$ *не зависит от выбора базисов* $\mathbb{e}$ *и* $\mathbb{f}$.

Определение. *Величина* $\operatorname{rk} A$ *называется рангом линейного отображения* φ. *Обозначение:* $\operatorname{rk} \varphi$.

Следствие. *Если* $\dim V = \dim W = n$, *то* φ— *изоморфизм тогда и только тогда, когда* $\det A \neq 0$. *Тогда* A *— квадратная.*

Доказательство.

$[\Rightarrow]$ φ — изоморфизм, следовательно:

$$\operatorname{Im} \varphi = W \Rightarrow \dim \operatorname{Im} \varphi = n \Rightarrow \operatorname{rk} A = n \Rightarrow \det A \neq 0.$$

$[\Leftarrow]$ $\det A \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$.

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

Таким образом, линейное отображение φ является биекцией, а значит, и изоморфизмом. □

Следствие. *Пусть* $A \in \operatorname{Mat}_{k \times m}$, $B \in \operatorname{Mat}_{m \times n}$. *Тогда* $\operatorname{rk} AB \leqslant \min\{\operatorname{rk} A, \operatorname{rk} B\}$.

Доказательство. Реализуем A и B как матрицы линейных отображений, то есть $\varphi_A \colon F^m \to F^k$, $\varphi_B \colon F^n \to F^m$. Тогда AB будет матрицей отображения $\varphi_A \circ \varphi_B$.

$$\operatorname{rk}(AB) = \operatorname{rk}(\varphi_A \circ \varphi_B) \begin{cases} \leqslant \dim \operatorname{Im} \varphi_A = \operatorname{rk} A \\ \leqslant \dim \operatorname{Im} \varphi_B = \operatorname{rk} B \end{cases}$$

Первое неравенство следует из того, что $\operatorname{Im}(\varphi_A \circ \varphi_B) \subset \operatorname{Im} \varphi_A$, откуда в свою очередь следует, что $\dim \operatorname{Im}(\varphi_A \circ \varphi_B) \leqslant \dim \operatorname{Im} \varphi_A$. Рассматривая второе неравенство, получаем:

$$\operatorname{Im}(\varphi_A \circ \varphi_B) = \varphi_A(\operatorname{Im} \varphi_B) \Rightarrow \dim \operatorname{Im}(\varphi_A \circ \varphi_B) = \dim(\varphi_A(\operatorname{Im} \varphi_B)) \leqslant \dim \operatorname{Im} \varphi_B.$$

□

Упражнение.

- *Если A квадртана и* $\det A \neq 0$, *то* $\operatorname{rk} AB = \operatorname{rk} B$.
- *Если* $B \in M_n$ *и* $\det B \neq 0$, *то* $\operatorname{rk} AB = \operatorname{rk} A$.

Теорема. $\dim \operatorname{Im} \varphi = \dim \varphi - \dim \operatorname{Ker} \varphi$.

Существует 2 способа доказательства. Рассмотрим оба.

Бескоординатный способ. Пусть $\dim \operatorname{Ker} \varphi = k$ и $e_1, \ldots, e_k$ — базис в $\operatorname{Ker} \varphi$. Дополним его до базиса V векторами $e_k, \ldots, e_n$. Тогда:

$$\operatorname{Im} \varphi = \langle \varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_k), \ldots, \varphi(e_n) \rangle = \langle 0, 0, \ldots, 0, \varphi(e_{k+1}), \ldots, \varphi(e_n) \rangle = \langle \varphi(e_{k+1}), \ldots, \varphi(e_n) \rangle$$

Пусть $\alpha_{k+1}\varphi(e_{k+1}) + \ldots + \alpha_n \varphi(e_n) = 0$ для некоторых $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$. Тогда:

$$\varphi(\alpha_{k+1}e_{k+1} + \ldots + \alpha_n e_n) = 0$$
$$\alpha_{k+1}e_{k+1} + \ldots + \alpha_n e_n \in \operatorname{Ker} \varphi$$
$$\alpha_{k+1}e_{k+1} + \ldots + \alpha_n e_n = \beta_1 e_1 + \ldots \beta_k e_k,$$

для некоторых $\beta_1, \ldots, \beta_k \in F$.

Но так как $e_1, \ldots, e_n$ — базис в V, то $\alpha_{k+1} = \ldots = \alpha_n = \beta_1 = \ldots = \beta_k = 0$. То есть векторы $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)$ линейно независимы, а значит, образуют базис $\operatorname{Im} \varphi$. Что и означает, что $\dim \operatorname{Im} \varphi = n - k = \dim V - \dim \operatorname{Ker} \varphi$. □

Координатный способ. Зафиксируем базис $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ в V и базис $\mathbb{f} = (f_1, \ldots, f_m)$ в W. Пусть A — матрица φ в базисе $\mathbb{f}$. Тогда $v = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$, $\varphi(v) = y_1 f_1 + \ldots + y_m f_m$. Получим, что $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

$\operatorname{Ker} \varphi$ состоит из векторов, координаты которых удовлетворяют СЛУ $A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$. Ранее в курсе мы уже доказали, что размерность пространства решений равна $n - \operatorname{rk} A$, то есть $\dim \operatorname{Im} \varphi = n - \operatorname{rk} A = \dim V - \dim \operatorname{Ker} \varphi$. □

Линейные операторы

Пусть V — конечномерное векторное пространство.

Определение. *Линейным оператором (или линейным преобразованием) называется всякое линейное отображение* $\varphi \colon V \to V$, *то есть из V в себя. Обозначение:* $L(V) = \operatorname{Hom}(V, V)$.

Пусть $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ — базис в V и $\varphi \in L(V)$. Тогда:

$$(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)) = (e_1, \ldots, e_n)\, A,$$

где A — матрица линейного оператора в базисе $\mathbb{e}$. В столбце $A^{(j)}$ стоят координаты $\varphi(e_j)$ в базисе $\mathbb{e}$. Матрица A — квадратная.

Пример.

1. *$\forall v \in V : \varphi(v) = 0$ — нулевая матрица.*
2. *Тождественный оператор: $\forall v \in V : \mathrm{id}(v) = v$ — единичная матрица.*
3. *Скалярный оператор $\lambda\mathrm{id}(v) = \lambda V$ — матрица λE в любом базисе.*

Следствие (Следствия из общих фактов о линейных отображениях)**.**

1. *Всякий линейный оператор однозначно определяется своей матрицей в любом фиксированном базисе.*
2. *Для всякой квадратной матрицы существует, причем единственный, линейный оператор φ такой, что матрица φ есть A.*
3. *Пусть $\varphi \in L(V)$, A — матрица φ в базисе $\mathbb{e}$. Тогда:*

$$v = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$$
$$\varphi(v) = y_1 e_1 + \ldots + y_n e_n$$
$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Пусть $\varphi \in L(V)$, A — матрица φ в базисе $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$. Пусть $\mathbb{e}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ — другой базис, причём $(e'_1, \ldots, e'_n) = (e_1, \ldots, e_n)C$, где C — матрица перехода, и A' — матрица φ в базисе $\mathbb{e}'$.

Предложение. $A' = C^{-1}AC$.

Доказательство.

$$(e'_1, \ldots, e'_n) = (e_1, \ldots, e_n)C$$
$$e'_j = \sum_{i=1}^{n} c_{ij} e_j$$
$$\varphi(e'_j) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} c_{ij} e_j\right) = \sum_{i=1}^{n} c_{ij}\varphi(e_j)$$
$$(\varphi(e'_1), \ldots, \varphi(e'_n)) = (\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n))C = (e_1, \ldots, e_n)AC = (e'_1, \ldots, e'_n)\underbrace{C^{-1}AC}_{A'}$$

□

Лекция 21 от 15.02.2016

Инвариантность и обратимость

Пусть $\varphi \colon V \to V$ — линейный оператор, и $\mathbb{e}$ — базис в V.

Обозначение. $A(\varphi, \mathbb{e})$ — *матрица линейного оператора φ в базисе $\mathbb{e}$.*

Если $\mathbb{e}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ — ещё один базис, причём $(e'_1, \ldots, e'_n) = (e_1, \ldots, e_n)C$, где C — матрица перехода, $A = A(\varphi, \mathbb{e})$ и $A' = A(\varphi, \mathbb{e}')$. В прошлый раз мы доказали, что $A' = C^{-1}AC$.

Следствие. *Величина* $\det A$ *не зависит от выбора базиса. Обозначение:* $\det \varphi$.

Доказательство. Пусть A' — матрица φ в другом базисе. Тогда получается, что:

$$\det A' = \det\left(C^{-1}AC\right) = \det C^{-1} \det A \det C = \det A \det C \frac{1}{\det C} = \det A.$$

□

Заметим, что $\det A$ — инвариант самого φ.

Определение. *Две матрицы* $A', A \in M_n(F)$ *называются подобными, если существует такая матрица* $C \in M_n(F), \det C \neq 0$, *что* $A' = C^{-1}AC$.

Замечание. *Отношение подобия на* M_n *является отношением эквивалентности.*

Предложение. *Пусть* $\varphi \in L(V)$. *Тогда эти условия эквивалентны:*

1. $\operatorname{Ker} \varphi = \{0\}$;
2. $\operatorname{Im} \varphi = V$;
3. φ *обратим (то есть это биекция, изоморфизм);*
4. $\det \varphi \neq 0$.

Доказательство.

1. $\Leftrightarrow 2$ — следует из формулы $\dim V = \dim \operatorname{Ker} \varphi + \dim \operatorname{Im} \varphi$.
2. $\Leftrightarrow 3$ — уже было.
3. $\Leftrightarrow 4$ — уже было.

□

Определение. *Линейный оператор* φ *называется вырожденным, если* $\det \varphi = 0$, *и невырожденным, если* $\det \varphi \neq 0$.

Определение. *Подпространство* $U \subset V$ *называется инвариантным относительно* φ *(или* φ*-инвариантным), если* $\varphi(U) \subset U$. *То есть* $\forall u \in U \colon \varphi(u) \in U$.

Пример.

1. $\{0\}, V$ — *они инвариантны для любого* φ.
2. $\operatorname{Ker} \varphi$ φ*-инвариантно,* $\varphi(\operatorname{Ker} \varphi) = \{0\} \subset \operatorname{Ker} \varphi$
3. $\operatorname{Im} \varphi$ *тоже* φ*-инвариантно,* $\varphi(\operatorname{Im} \varphi) \subset \varphi(V) = \operatorname{Im} \varphi$.

Пусть $U \subset V$ — φ-инвариантное подпространство. Также пусть $(e_1, \ldots, e_n)$ — базис в U. Дополним его до базиса V: $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$.

$$\underbrace{A(\varphi, \mathbb{e})}_{\text{Матрица с углом нулей}} = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}, \quad \text{где } B \in M_k$$

Это нетрудно понять, если учесть, что $\varphi(e_i) \in \langle e_1, \ldots, e_k \rangle$, $i = 1, \ldots, k$. Если $U = \operatorname{Ker} \varphi$, то $B = 0$. Если $U = \operatorname{Im} \varphi$, то $D = 0$.

Обратно, если матрица A имеет в базисе $\mathbb{e}$ такой вид, то $U = \langle e_1, \ldots e_k \rangle$ — инвариантное подпространство.

Обобщение. *Пусть $V = U \oplus W$, где U, W — инвариантные подпространства, и $(e_1, \ldots, e_k)$ — базис W. Тогда $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ — базис V.*

$$A(\varphi, \mathbb{e}) = \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

Обобщение.

$$A(\varphi, \mathbb{e}) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} * \; 0 \; 0 \ldots 0 \\ 0 \; * \; 0 \ldots 0 \\ 0 \; 0 \; * \ldots 0 \\ \vdots \; \vdots \; \vdots \; \ddots \; \vdots \\ 0 \; 0 \; 0 \ldots * \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ \vdots \\ k_s \end{array}$$

Здесь $k_1, \ldots, k_s$ — размеры квадратных блоков блочно-диагональной матрицы. Матрица $A(\varphi, \mathbb{e})$ имеет такой вид тогда и только тогда, когда:

$$U_1 = \langle e_1, \ldots, e_{k_1} \rangle$$
$$U_2 = \langle e_{k_1+1}, \ldots, e_{k_2} \rangle$$
$$\vdots$$
$$U_{k_s} = \langle e_{n-k_s+1}, \ldots, e_n \rangle$$

Предел мечтаний. *Найти такой базис, в котором матрица линейного оператора была бы диагональной. Но такое возможно не всегда.*

Собственные векторы и собственные значения

Пусть $\varphi \in L(V)$.

Определение. *Ненулевой вектор $v \in V$ называется собственным для V, если $\varphi(v) = \lambda v$ для некоторго $\lambda \in F$. При этом число λ называется собственным значением линейного оператора φ, отвечающим собственному вектору v.*

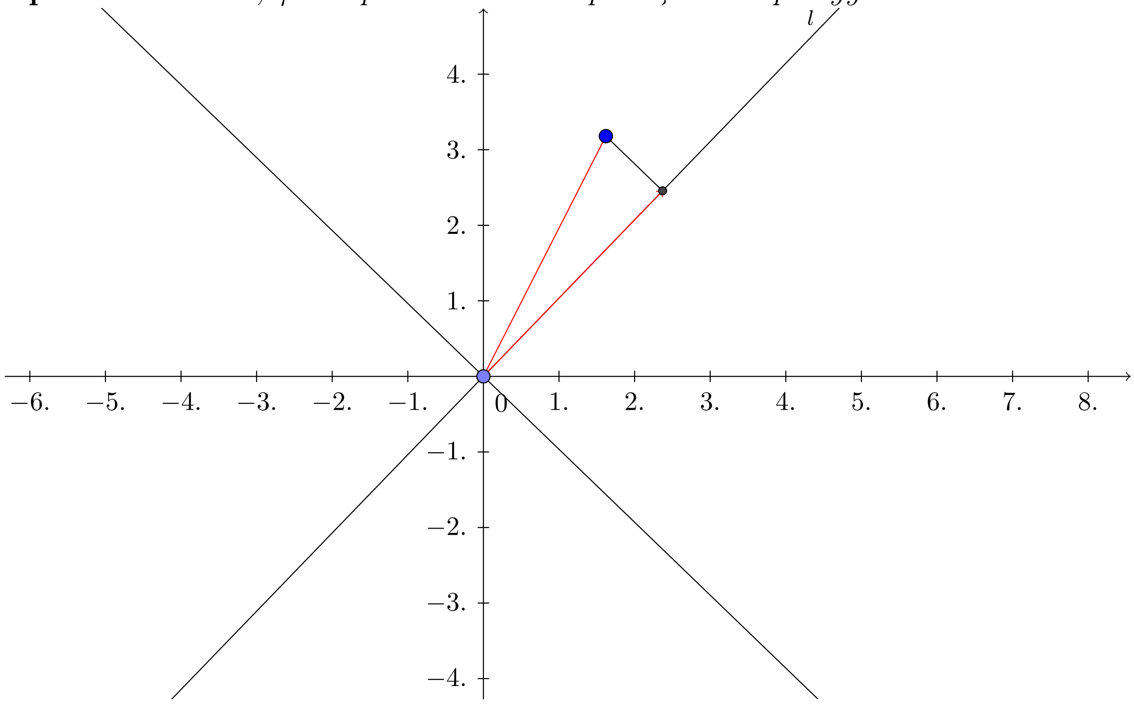
Предложение. *Вектор $v \in V$, $v \neq 0$ — собственный вектор в V тогда и только тогда, когда линейная оболочка $\langle v \rangle$ является φ-инвариантным подпространством*

Доказательство.

- $[\Rightarrow]$ $\varphi(v) = \lambda v \Rightarrow \langle v \rangle = \{kv \mid k \in F\}$. Тогда $\varphi(kv) = \lambda kv \in \langle v \rangle$.
- $[\Leftarrow]$ $\varphi(V) \in \langle v \rangle \Rightarrow \exists \lambda \in F \colon \varphi(v) = \lambda v$.

$\square$

Пример. *1. $V = \mathbb{R}^2$, φ — ортогональная проекция на прямую l.*



$0 \neq v \in l \Rightarrow \varphi(v) = 1 \cdot v,\ \lambda = 1$
$0 \neq v \perp l \Rightarrow \varphi(v) = 0 = 0 \cdot v,\ \lambda = 1$

2. *Поворот на угол φ вокруг нуля на угол α.*
    - *$\alpha = 0 + 2\pi k$. Любой ненулевой вектор собственный. $\lambda = 1$.*
    - *$\alpha = \pi + 2\pi k$. Любой ненулевой вектор собственный. $\lambda = -1$.*
    - *$\alpha \neq \pi k$. Собственных векторов нет.*
3. *$V = P_n(F)$ — многочлены степени n, $\varphi = \Delta\colon f \to f'$. Тогда $0 \neq f$ — собственный вектор тогда, и только тогда, когда $f = const$.*

Диагонализуемость

Определение. *Линейный оператор φ называется диагонализуемым, если существует базис $\mathbb{e}$ в V такой, что $A(\varphi, \mathbb{e})$ диагональна.*

Предложение (Критерий диагонализуемости)**.** *Отображение φ диагонализуемо тогда и только тогда, когда в V существует базис из собственных векторов.*

Доказательство. Пусть $\mathbb{e}$ — базис V. Тогда $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, что равносильно $\varphi(e_i) = \lambda_i e_i$. Это и означает, что все векторы собственные. $\square$

В примерах выше:

1. φ диагонализуем. $e_1 \in l$, $e_2 \perp l$. Тогда матрица примет вид $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
2. Если $\alpha = \pi k$, то φ диагонализуем ($\varphi = \mathrm{id}$ или $\varphi = -\mathrm{id}$). Не диагонализуем в других случаях.
3. φ диагонализуем тогда и только тогда, когда $n = 0$. При $n > 0$ собственных векторов **МАЛО**.

Собственное подпространство

Пусть $\varphi \in L(V)$, $\lambda \in F$.

Определение. *Множество* $V_\lambda(\varphi) = \{v \in V \mid \varphi(v) = \lambda V\}$ *называется собственным подпространством линейного оператора, отвечающим собственному значению* λ.

Упражнение. *Доказать, что* $V_\lambda(\varphi)$ *— действительно подпространство.*

Предложение. $V_\lambda(\varphi) = \mathrm{Ker}\,(\varphi - \lambda \mathrm{id})$.

Доказательство.

$$v \in V_\lambda(\varphi) \Leftrightarrow \varphi(v) = \lambda v \Leftrightarrow \varphi(v) - \lambda v = 0 \Leftrightarrow (\varphi - \lambda \mathrm{id})(v) = 0 \Leftrightarrow v \in \mathrm{Ker}\,(\varphi - \lambda \mathrm{id})$$

□

Следствие. *Собственное подпространство* $V_\lambda(\varphi) \neq \{0\}$ *тогда и только тогда, когда* $\det(\varphi - \lambda \mathrm{id}) = 0$.

Определение. *Многочлен* $\chi_\varphi(t) = (-1)^n \det(\varphi - t\mathrm{id})$ *называется характеристическим.*

Лекция 22 от 22.02.2016

Деление многочленов с остатком

Пусть F — поле, $\mathbb{F}[x]$ — множество всех многочленов от переменной x с коэффициентами из $\mathbb{F}$.

Теорема. *Пусть* $G(x)$, $H(x) \in \mathbb{F}[x]$ *— ненулевые многочлены, тогда существует единственная пара* $Q(x)$, $R(x) \in \mathbb{F}(x)$ *такая, что:*

1. $G(x) = Q(x) \cdot H(x) + R(x)$;
2. $\deg R(x) < \deg H(x)$ *или* $R(x) = 0$.

Доказательство. Аналогично делению рациональных чисел с остатком. □

Рассмотрим важный частный случай: $H(x) = x - a$.

Теорема (Безу)**.** *Если* $G(x)$, $Q(x) \in \mathbb{F}[x]$ *— ненулевые многочлены,* $a \in \mathbb{F}$, *то* $R = G(a)$ *и* $G(x) = Q(x)(x - a) + R$.

Доказательство.

$$G(x) = Q(x) \cdot H(x) + R(x)$$
$$H(x) = (x - a) \Rightarrow \deg R < \deg(x - a) \Rightarrow \deg R = 0$$

Подставим $x = a$:
$$G(a) = Q(a)(a - a) + R = 0 + R = R \Rightarrow G(a) = R.$$

□

Теорема. *Многочлен степени n в поле комплексных чисел имеет n комплексных корней.*

Доказательство. По основной теореме алгебры каждый многочлен $G(x) \in \mathbb{C}[x]$ степени больше 1 имеет корень. Тогда $G(x) = (x - a_1)G_1(x)$, где a_1 — корень многочлена $G(x)$. В свою очередь, многочлен $G_1(x)$ также имеет корень, и тогда $G(x) = (x-a_1)G_1(x) = (x-a_1)(x-a_2)G_2(x)$. Продолжая по индукции, получаем, что $G(x) = (x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n)b_n$, где b_n — коэффициент при старшем члене. □

Также мы получаем следующее представление:

$$b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_0 = b_n(x - a_1)^{k_1}\ldots(x - a_s)^{k_s}$$

Определение. *Кратностью корня a_i называется число k_i такое, что в многочлене $b_n(x - a_1)^{k_1}\ldots(x - a_s)^{k_s}$ множитель $(x - a_i)$ имеет степень k_i.*

Собственные значения и характеристический многочлен

Определение. *Пусть V — конечномерное векторное пространство над полем $\mathbb{F}$. Рассмотрим линейный оператор $\varphi : V \to V$. Тогда характеристический многочлен φ имеет вид:*

$$\chi_\varphi(t) = (-1)^n \det(\varphi - tE) = (-1)^n \begin{vmatrix} a_{11} - t & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - t & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - t \end{vmatrix} =$$
$$= (-1)^n(t^n(-1)^n + \ldots) = t^n + c_{n-1}t^{n-1} + \ldots + c_0$$

Упражнение. *Доказать, что:*

$$c_{n-1} = -tr\varphi;$$
$$c_0 = (-1)^n \det\varphi.$$

Утверждение. *λ — собственное значение линейного оператора φ тогда и только тогда, когда $\chi_\varphi(\lambda) = 0$.*

Доказательство. λ — собственное значение $\Leftrightarrow \exists v \neq 0 : \varphi(v) = \lambda v \Leftrightarrow (\varphi - \lambda E)v = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Ker}(\varphi - \lambda E) \neq \{0\} \Leftrightarrow \det(\varphi - \lambda E) = 0 \Leftrightarrow \chi_\varphi(\lambda) = 0$. □

Утверждение. *Если $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ и $\dim V > 0$, то любой линейный оператор имеет собственный вектор.*

Доказательство. Пусть $\varphi : V \to V$ — линейный оператор. У него существует характеристический многочлен $\chi_\varphi(x)$. Тогда по основной теореме алгебры у $\chi_\varphi(x)$ есть корень t_0 — собственное значение φ, следовательно существует и собственный вектор v_0 с собственным значением t_0. □

Пример. *Для линейного оператора $\varphi = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (поворот на $90°$ градусов против часовой стрелки относительно начала координат) характеристический многочлен имеет вид $\chi_\varphi(x) = t^2 + 1$.*
При $\mathbb{F} = \mathbb{R} \Rightarrow$ собственных значений нет.
При $\mathbb{F} = \mathbb{C} \Rightarrow$ собственные значения $\pm i$.

Геометрическая и алгебраическая кратности

Определение. *Пусть λ — собственное значение φ, тогда $V_\lambda = \{v \in V \mid \varphi(v) = \lambda v\}$ — собственное подпространство, то есть пространство, состоящее из собственных векторов с собственным значением λ и нуля.*

Определение. $\dim V_\lambda$ *— геометрическая кратность собственного значения λ.*

Определение. *Если k — кратность корня характеристического многочлена, то k — алгебраическая кратность собственного значения.*

Утверждение. *Геометрическая кратность не больше алгебраической кратности.*

Доказательство. Зафиксируем базис $u_1, \ldots, u_p$ в пространстве V_λ, где $p = \dim V_\lambda$. Дополним базис $u_1, \ldots, u_p$ до базиса $u_1, \ldots, u_p, u_{p+1}, \ldots, u_n$ пространства V. Матрица линейного оператора φ будет выглядеть следующим образом:

$$A_\varphi = \left(\begin{array}{c|c} \lambda E & A \\ \hline 0 & B \end{array}\right), \quad \lambda E \in M_p,\ A \in M_{n-p}$$

Тогда характеристический многочлен будет следующим:

$$\chi_\varphi(t) = (-1)^n \det(A_\varphi - t) = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda - t & & 0 & \\ & \ddots & & A \\ 0 & & \lambda - t & \\ \hline & 0 & & b - tE \end{array}\right) = (-1)^n (\lambda - t)^p \dim(B - tE)$$

Как видим, $\chi_\varphi(t)$ имеет корень кратности хотя бы p, следовательно, геометрическая кратность, которая равна p по условию, точно не превосходит алгебраическую. $\square$

Пример. *Рассмотрим линейный оператор* $\varphi = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

$V_2 = \langle e_1 \rangle \Rightarrow$ *геометрическая кратность равна 1.*

$\chi_\varphi(t) = (t-2)^2 \Rightarrow$ *алгебраическая кратность равна 2.*

Сумма и прямая сумма нескольких подпространств

Определение. *Пусть $U_1, \ldots, U_k \subseteq V$ — векторные пространства. Суммой нескольких пространств называется $U_1 + \ldots + U_k = \{u_1 + \ldots + u_k \mid u_i \in U_i\}$.*

Упражнение. $U_1 + \ldots + U_k$ *— подпространство.*

Определение. *Сумма пространств называется прямой, если $u_1 + \ldots + u_k = 0$ тогда и только тогда, когда $u_1 = \ldots = u_k = 0$. Обозначение: $U_1 \oplus \ldots \oplus U_k$.*

Упражнение. *Если $v \in U_1 \oplus \ldots \oplus U_k$, то существует единственный такой набор $u_1 \in U_1, \ldots, u_k \in U_k$, что $v = u_1 + \ldots + u_k$.*

Теорема. *Следующие условия эквивалентны:*

1. *Сумма $U_1 + \ldots + U_k$ — прямая;*
2. *Если $\mathbb{e}_i$ — базис U_i, то $\mathbb{e} = \mathbb{e}_1 \cup \ldots \cup \mathbb{e}_k$ — базис $U_1 + \ldots + U_k$;*

3. $\dim(U_1 + \ldots + U_k) = \dim U_1 + \ldots + \dim U_k$.

Доказательство.

(1) ⇒ (2) Пусть мы имеем прямую сумму $U_1 \oplus \ldots \oplus U_k$. Покажем, что $\mathbb{e}_1 \cup \ldots \cup \mathbb{e}_k$ — базис $U_1 \oplus \ldots \oplus U_k$.

Возьмем вектор $v \in U_1 \oplus \ldots \oplus U_k$ и представим его в виде суммы $v = u_1 + \ldots + u_k$, где $u_i \in U_i$. Такое разложение единственное, так как сумма прямая. Теперь представим каждый вектор этой суммы в виде линейной комбинации базиса соответствующего пространства:

$$v = (c_1^1 e_1^1 + \ldots + c_{s_1}^1 e_{s_1}^1) + \ldots + (c_1^k e_1^k + \ldots + c_{s_k}^k e_{s_k}^k)$$

Здесь e_j^i это j-ый базисный вектор в $\mathbb{e}_i$, базисе U_i. Соответственно, c_j^i это коэффициент перед данным вектором.

Если $\mathbb{e} \neq \mathbb{e}_1 \cup \ldots \cup \mathbb{e}_k$, то существует какая-то еще линейная комбинация вектора v через эти же векторы:

$$v = (d_1^1 e_1^1 + \ldots + d_{s_1}^1 e_{s_1}^1) + \ldots + (d_1^k e_1^k + \ldots + d_{s_k}^k e_{s_k}^k)$$

Вычтем одно из другого:

$$0 = v - v = ((d_1^1 - c_1^1)e_1^1 + \ldots + (d_{s_1}^1 - c_{s_1}^1)e_{s_1}^1) + \ldots + ((d_1^k - c_1^k)e_1^k + \ldots + (d_{s_k}^k - c_{s_k}^k)e_{s_k}^k)$$

Но по определению прямой суммы, ноль представим только как сумма нулей, то есть d_j^i должно равняться c_j^i. А это значит, что не существует никакой другой линейной комбинации вектора v. Что нам и требовалось.

(2) ⇒ (1) Пусть $\mathbb{e} = \mathbb{e}_1 \cup \ldots \cup \mathbb{e}_k$ — базис $U_1 + \ldots + U_k$. Тогда представим 0 в виде суммы векторов из данных пространств: $0 = u_1 + \ldots + u_k$, где $u_i \in U_i$. Аналогично прошлому пункту, разложим векторы по базисам:

$$0 = (c_1^1 e_1^1 + \ldots + c_{s_1}^1 e_{s_1}^1) + \ldots + (c_1^k e_1^k + \ldots c_{sk}^k e_{sk}^k)$$

Но только тривиальная комбинация базисных векторов дает ноль. Следовательно, $u_1 = = \ldots = u_k = 0$, и наша сумма по определению прямая.

(2) ⇒ (3) Пусть $\mathbb{e} = \mathbb{e}_1 \cup \ldots \cup \mathbb{e}_k$ — базис $U_1 + \ldots + U_k$. Тогда:

$$\dim(U_1 + \ldots + U_k) = \dim(\mathbb{e}) = \dim(\mathbb{e}_{\mathbb{1}}) + \ldots + \dim(\mathbb{e}_{\mathbb{k}}) = \dim(U_1) + \ldots + \dim(U_k).$$

(3) ⇒ (2) Пусть $\dim(U_1 + \ldots + U_k) = \dim U_1 + \ldots + \dim U_k$.

Векторы $\mathbb{e}$ порождают сумму, следовательно, из $\mathbb{e}$ можно выделить базис суммы:

$$\dim(U_1 + \ldots + U_k) \leqslant \dim(\mathbb{e}) \leqslant \dim(\mathbb{e}_{\mathbb{1}}) + \ldots + \dim(\mathbb{e}_{\mathbb{k}}) = \dim U_1 + \ldots + \dim U_k.$$

Но по условию $\dim(U_1 + \ldots + U_k) = \dim U_1 + \ldots + \dim U_k$. Тогда $\dim(U_1 + \ldots + U_k) = \dim(\mathbb{e})$, и $\mathbb{e}$ это базис $U_1 + \ldots + U_k$.

$\square$

Лекция 23 от 29.02.2016

Сумма собственных подпространств

Вспомним, чем закончилась прошлая лекция.

Пусть V — векторное пространство, $U_1, \ldots, U_k \subseteq V$ — векторные подпространства.

Сумма $U = U_1 + \ldots + U_k$ является прямой, если из условия $u_1 + \ldots + u_k = 0$ следует, что $u_1 = \ldots = u_k = 0$, где $u_i \in U_i$. Обозначение: $U = U_1 \oplus \ldots \oplus U_k$.

Эквивалентные условия:

1. $U = U_1 \oplus \ldots \oplus U_k$.
2. Если $\mathbb{e}_i$ — базис U_i, то $\mathbb{e} = \mathbb{e}_1 \cup \ldots \cup \mathbb{e}_k$ — базис U.
3. $\dim U = \dim U_1 + \ldots + \dim U_k$.

Пусть V — векторное пространство над полем F, $\varphi \in L(V)$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ — набор собственных значений φ, где $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$, и $V_{\lambda_i}(\varphi) \subseteq V$ — соответствующее собственное подпространство.

Предложение. *Сумма $V_{\lambda_1}(\varphi) + \ldots + V_{\lambda_k}(\varphi)$ является прямой.*

Доказательство. Докажем индукцией по k.

База: $k = 1$. Тут все ясно.

Теперь пусть утверждение доказано для всех значений, меньших k. Докажем для k.

Пусть $v_i \in V_{\lambda_i}(\varphi)$ и пусть $v_1 + \ldots + v_k = 0$. Тогда:

$$\varphi(v_1 + \ldots + v_k) = \varphi(0) = 0$$
$$\varphi(v_1) + \ldots + \varphi(v_k) = 0$$
$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k = 0$$

Теперь вычтем из нижней строчки $v_1 + \ldots + v_k = 0$, домноженное на λ_k. Получим:

$$(\lambda_1 - \lambda_k)v_1 + \ldots + (\lambda_k - \lambda_k)v_k = 0$$
$$(\lambda_1 - \lambda_k)v_1 + \ldots + (\lambda_{k-1} - \lambda_k)v_{k-1} + 0v_k = 0$$

Но из предположения индукции, а также потому что $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$, следует, что $v_1 = \ldots = v_{k-1} = 0$. Но тогда и $v_k = 0$.

Следовательно, сумма прямая, что нам и требовалось. □

Диагонализируемость

Следствие. *Если характеристический многочлен имеет ровно n попарно различных корней, где $n = \dim V$, то φ диагонализируем.*

Доказательство. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — корни $\chi_\varphi(t)$, $\lambda_i \neq \lambda_j$. Тогда для всех i выполняется, что $V_{\lambda_i}(\varphi) \neq \{0\}$ и, следовательно, $\dim V_{\lambda_i}(\varphi) = 1$. Но так как сумма $V_{\lambda_1}(\varphi) + \ldots + V_{\lambda_k}(\varphi)$ — прямая, то $\dim(V_{\lambda_1}(\varphi) + \ldots + V_{\lambda_k}(\varphi)) = \dim V_{\lambda_1}(\varphi) + \ldots + \dim V_{\lambda_k}(\varphi) = n$. Иными словами, $V = V_{\lambda_1}(\varphi) \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_k}(\varphi)$.

Выберем произвольные $v_i \in V_{\lambda_i} \setminus \{0\}$. Тогда $(v_1, \ldots, v_n)$ будет базисом в V. И так как все v_i — собственные значения для φ, то φ диагонализируем. $\square$

Теорема (Критерий диагонализируемости - 2). *Линейный оператор φ диагонализируем тогда и только тогда, когда*

1. *$\chi_\varphi(t)$ разлагается на линейные множители;*
2. *Если $\chi_\varphi(t) = (t-\lambda_1)^{k_1} \ldots (t-\lambda_s)^{k_s}$, где $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$, то $\dim V_{\lambda_i}(\varphi) = k_i$ $\forall i$ (то есть для любого собственного значения V равны геометрическая и алгебраическая кратности).*

Доказательство.

$\Rightarrow$ Так как φ — диагонализируем, то существует базис $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ такой, что:

$$A(\varphi, \mathbb{e}) = \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix} = \operatorname{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n).$$

Тогда:

$$\chi_\varphi(t) = (-1)^n \begin{vmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{vmatrix} = (-1)^n(\mu_1 - t)\ldots(\mu_n - t) = (t-\mu_1)\ldots(t-\mu_n).$$

Итого, первое условие выполняется.

Теперь перепишем характеристический многочлен в виде $\chi_\varphi(t) = (t-\lambda_1)^{k_1} \ldots (t-\lambda_s)^{k_s}$, где $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$ и $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_s\} = \{\mu_1, \ldots, \mu_n\}$. Тогда $V_{\lambda_i} \supseteq \langle e_j \mid \mu_j = \lambda_i \rangle$, следовательно, $\dim V_{\lambda_i}(\varphi) \geqslant k_i$. Но мы знаем, что $\dim V_{\lambda_i} \leqslant k_i$! Значит, $\dim V_{l_i} = k_i$.

$\Leftarrow$ Так как $V_{\lambda_1}(\varphi) + \ldots + V_{\lambda_s}(\varphi)$ — прямая, то $\dim(V_{\lambda_1}(\varphi) + \ldots + V_{\lambda_s}(\varphi)) = k_1 + \ldots + k_s = n$.

Пусть $\mathbb{e}_i$ — базис в V_{λ_i}. Тогда $\mathbb{e}_1 \cup \ldots \cup \mathbb{e}_s$ — базис в V. То есть мы нашли базис из собственных векторов, следовательно, φ диагонализируем.

$\square$

Инвариантные подпространства в $\mathbb{R}^n$

Пусть V — векторное пространство над полем $\mathbb{C}$, $\varphi \in L(V)$. Тогда в V есть собственный вектор (или одномерное φ–инвариантное пространство).

Теперь пусть V — векторное пространство над полем $\mathbb{R}$, $\varphi \in L(V)$.

Теорема. *Существует одномерное или двумерное φ–инвариантное векторное подпространство.*

Доказательство. Пусть $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ — базис в V. Комплексифицируем V.

$$V^{\mathbb{C}} = \{u + iv \mid u, v \in V\}$$
$$V^{\mathbb{C}} \supset V = \{u + i \cdot 0 \mid u \in V\}$$

Рассмотрим линейный оператор $\varphi_{\mathbb{C}} \in L(V^{\mathbb{C}})$, заданный как $\varphi_{\mathbb{C}}(e_i) = \varphi(e_i), \forall i$. Значит, $e_1, \ldots, e_n$ — базис в $V^{\mathbb{C}}$. Следовательно, $\chi_{\varphi_{\mathbb{C}}}(t) = \chi_{\varphi}(t)$, так как $A(\varphi_{\mathbb{C}}, \mathbb{e}) = A(\varphi, \mathbb{e})$.

Случай 1: $\chi_\varphi(t)$ имеет хотя бы один действительный корень. Отсюда следует, что в V есть собственный вектор, что равносильно существованию одномерного φ–инвариантного подпространства (тогда $V^{\mathbb{C}}$ нам не нужен).

Случай 2: χ_φ не имеет действительных корней. Пусть $\lambda + i\mu$ — некоторый корень $\chi_\varphi(t)$, который, напомним, равен $\chi_{\varphi_{\mathbb{C}}}(t)$. Тогда существует собственный вектор $u + iv \in V^{\mathbb{C}}$ такой, что:

$$\varphi_{\mathbb{C}}(u + iv) = (\lambda + i\mu)(u + iv)$$
$$\varphi_{\mathbb{C}}(u + iv) = \varphi_{\mathbb{C}}(u) + i\varphi_{\mathbb{C}}(v) = \varphi(u) + i\varphi(v)$$
$$(\lambda + u\mu)(u + iv) = \lambda\mu - \mu v + i(\mu u + \lambda v)$$

Сравнивая два последних равенства, получаем:

$$\varphi(u) = \lambda u - \mu v$$
$$\varphi(v) = \mu u + \lambda v$$

Следовательно, $\langle u, v\rangle$ — φ–инвариантное подпространство, двумерное если u и v линейно независимы и одномерное в противном случае. □

Пример. *Поворот на α в $\mathbb{R}^2$:* $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$. *Тогда $u = e_1$, $v = e_2$, $\lambda + i\mu = \cos\alpha + i\sin\alpha$.*

Пусть V — векторное пространство над F, $\dim V = n$.

Операции над $L(V)$:

1. Сложение: $(\varphi + \psi)(v) = \varphi(v) + \psi(v)$.
2. Умножение на скаляр: $(\alpha\varphi)(v) = \alpha\varphi(v)$.
3. Умножение: $(\varphi\psi)(v) = \varphi(\psi(v))$.

В частности, для любого $P(x) \in \mathbb{F}[x]$, $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ и для любого $\varphi \in L(V)$ определен линейный оператор $P(\varphi) \in L(V)$: $P(\varphi) = a_n\varphi^n + \ldots + a_1\varphi + a_0\mathrm{id}$.

Корневые векторы и корневые подпространства

Определение. *Вектор $v \in V$ называется корневым вектором линейного оператора φ, отвечающим значению $\lambda \in F$, если существует $m \geqslant 0$ такое, что $(\varphi - \lambda\mathrm{id})^m(v) = 0$.*

Наименьшее такое m называют высотой корневого вектора v.

Замечание.

1. *Вектор $v = 0$ для любого φ имеет высоту 0.*

2. *Высоту 1 имеют все собственные векторы.*

Пример. $V = \mathbb{F}[x]_{\leqslant n}$, $\Delta : f \to f'$. *Здесь* $\lambda = 0$ *— единственное собственное значение. Все векторы — корневые, отвечающие* $\lambda = 0$.

Определение. *Множество* $V^\lambda(\varphi) = \{v \in V \mid \exists m \geqslant 0 : (\varphi - \lambda \mathrm{id})^m(v) = 0\}$ *называется корневым пространством для* $\lambda \in F$.

Упражнение. $V^\lambda(\varphi)$ *— подпространство в* V.

Замечание. $V_\lambda(\varphi) \subseteq V^\lambda(\varphi)\ \forall \lambda \in F$.

Лекция 24 от 14.03.2016

Корневые подпространства

Вспомним конец прошлой лекции.

Пусть V — векторное пространство над полем $\mathbb{F}$, $\varphi \in L(V)$ — линейный оператор.

Вектор $v \in V$ — корневой для φ, отвечающий собственному значению $\lambda \in \mathbb{F}$ тогда и только тогда, когда существует $m \leqslant 0$ такое, что $(\varphi - \lambda \mathrm{id})^m(v) = 0$. Высотой корневого вектора называется наименьшее такое m.

Корневым подпространством называется пространство из корневых векторов, соответствующих одному значению λ и нулевого вектора. Другими словами, $V^\lambda(\varphi) = \{v \in V \mid \exists m \geqslant 0 : (\varphi - \lambda \mathrm{id})^m(v) = 0\}$. Поскольку собственный вектор является корневым вектором высоты 1, то собственное подпространство включено в корневое подпространство с тем же значением: $V_\lambda(\varphi) \subseteq V^\lambda(\varphi)$.

Предложение. *Корневое подпространство нетривиально тогда и только тогда, когда* λ *является собственным значением. Другими словами,* $V^\lambda \neq \{0\} \Leftrightarrow \chi_\varphi(\lambda) = 0$.

Доказательство.

- $\Leftarrow$ $\chi_\varphi(\lambda) = 0 \Rightarrow V_\lambda(\varphi) \neq \{0\} \Rightarrow V^\lambda(\varphi) \neq \{0\}$, так как $V^\lambda(\varphi) \supset V_\lambda(\varphi)$.
- $\Rightarrow$ Пусть $V^\lambda(\varphi) \neq \{0\} \Rightarrow \exists v \neq 0 \in V^\lambda(\varphi) \Rightarrow \exists m \geqslant 1 : (\varphi - \lambda \mathrm{id})^m(v) = 0$.
  Рассмотрим $u = (\varphi - \lambda \mathrm{id})^{m-1}(v) \neq 0$, тогда:

$$(\varphi - \lambda \mathrm{id})(u) = (\varphi - \lambda \mathrm{id})(\varphi - \lambda \mathrm{id})^{m-1}(v) = (\varphi - \lambda \mathrm{id})^m(v) = 0.$$

  То есть вектор u — это вектор, для которого $(\varphi - \lambda \mathrm{id})(u) = 0$, то есть собственный вектор. Следовательно λ — собственное значение.

□

Предложение. *Для любого собственного значения* $\lambda \in \mathbb{F}$ *подпространство* $V^\lambda(\varphi)$ *инвариантно относительно* φ.

Доказательство. Пусть v — корневой вектор высоты m. Докажем, что $\varphi(v)$ — также корневой вектор.

Заметим, что если $u = (\varphi - \lambda \mathrm{id})(v)$, то u — корневой вектор высоты $m-1$, и, соответственно, лежит в корневом пространстве:

$$u = (\varphi - \lambda \mathrm{id})(v) = \varphi(v) - \lambda v \in V^\lambda(\varphi).$$

Мы получили, что $\varphi(v) \in \lambda v + V^\lambda(\varphi)$. Но $\lambda v \in V^\lambda(\varphi)$, то есть $\lambda v + V^\lambda(\varphi) = V^\lambda(\varphi)$ и $\varphi(v) \in V^\lambda(\varphi)$. Что и означает, что пространство инвариантно относительно оператора φ. □

Положим для краткости, что $\varphi - \lambda \mathrm{id} = \varphi_\lambda$.

Заметим, что ядра степеней линейного оператора «вкладываются» друг в друга — те векторы, которые стали нулевыми при применении линейного оператора φ_λ^k, при применении линейного оператора φ_λ ещё раз так и остаются нулевыми, а также «добиваются» (переводятся в нулевые) некоторые ранее ненулевые векторы. Итого, получаем следующее:

$$V_\lambda(\varphi) = \ker \varphi_\lambda \subset \ker \varphi_\lambda^2 \subset \ldots \subset \ker \varphi_\lambda^m \subset \ldots$$

Причём существует такое m, что $\ker \varphi_\lambda^m = \ker \varphi_\lambda^{m+1}$, так как V — конечномерно и размерность его не может уменьшаться бесконечно. Выберем наименьшее такое m.

Упражнение. *Доказать, что для любого $s \geqslant 0$ выполняется равенство* $\ker \varphi_\lambda^m = \ker \varphi_\lambda^{m+s}$.

Заметим также, что $V^\lambda(\varphi) = \ker \varphi_\lambda^m$. Пусть $k_i = \dim \ker \varphi_\lambda^i$. Тогда:

$$\dim V_\lambda(\varphi) = k_1 < k_2 < \ldots < k_m = \dim V^\lambda(\varphi).$$

Будем обозначать как $\varphi|_V$ ограничение линейного оператора на пространство V.

Предложение.

1. *Характеристический многочлен линейного отображения $\varphi\big|_{V^\lambda(\varphi)}$ равен $(t-\lambda)^{k_m}$.*
2. *Если $\mu \neq \lambda$, то линейный оператор $\varphi - \mu \mathrm{id}$ невырожден на $V^\lambda(\varphi)$.*

Доказательство. Напомним, что $k_i = \dim \ker \varphi_\lambda^i$, для $i = 1, \ldots, m$. Пусть также $k_0 = 0$.

Выберем базис $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_{k_m})$ в $V^\lambda(\varphi)$ так, чтобы $(e_1, \ldots, e_{k_i})$ также был базисом в $\ker \varphi_\lambda^i$. Тогда:

$$A(\varphi_\lambda|_{V^\lambda(\varphi)}, \mathbb{e}) = \begin{pmatrix} 0 & * & * & \ldots & * & * \\ 0 & 0 & * & \ldots & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{где } a_{ij} \in \mathrm{Mat}_{(k_i - k_{i-1}) \times (k_j - k_{j-1})}$$

Но тогда:

$$A(\varphi|_{V^\lambda(\varphi)}, \mathbb{e}) = A(\varphi_\lambda|_{V^\lambda(\varphi)}, \mathbb{e}) + \lambda E = \begin{pmatrix} A_1 & * & * & \ldots & * & * \\ 0 & A_2 & * & \ldots & * & * \\ 0 & 0 & A_3 & \ldots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & A_{m-1} & * \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & A_m \end{pmatrix}, \quad \text{где } A_i = \lambda E_{k_i - k_{i-1}} \quad (*)$$

А значит, характеристический многочлен линейного отображения $\varphi|_{V^\lambda(\varphi)}$ равен $(t-\lambda)^{k_m}$.

Теперь докажем невырожденность линейного оператора $(\varphi - \mu\mathrm{id})$ при $\mu \neq \lambda$.

Рассмотрим матрицу ограничения этого оператора на корневое подпространство:

$$A((\varphi - \mu\mathrm{id})|_{V^\lambda(\varphi)}, \mathbb{e}) = A(\varphi|_{V^\lambda(\varphi)}, \mathbb{e}) - \mu E.$$

Она имеет вид $(*)$, где $A_i = (\lambda - \mu)E_{k_i}$. Следовательно,

$$\det((\varphi - \mu\mathrm{id})|_{V^\lambda(\varphi)}) = (\lambda-\mu)^{k_m} \neq 0.$$

Что и означает, что линейный оператор невырожден. □

Предложение. *Если λ – собственное значение φ, то $\dim V^\lambda(\varphi)$ равен кратности λ как корня многочлена $\chi_\varphi(t)$.*

Доказательство. Пусть $(e_1, \ldots, e_k)$ — базис $V^\lambda(\varphi)$, $k = \dim V^\lambda(\varphi)$. Дополним $(e_1, \ldots, e_k)$ до базиса $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ всего пространства V. Тогда матрица линейного оператора имеет следующий вид:

$$A_\varphi = \left(\begin{array}{c|c} B & * \\ \hline 0 & C \end{array}\right), \quad B \in M_k,\, C \in M_{n-k}$$
$$\chi_\varphi(t) = \det(tE - A) = \det(tE - B)\det(tE - C).$$

Заметим, что $\det(tE-B)$ — это характеристический многочлен $\varphi|_{V^\lambda(\varphi)}$, следовательно,

$$\chi_\varphi(t) = (t-\lambda)^k \det(tE - C).$$

Осталось показать, что λ — не корень $\det(tE - C)$.

Пусть $W = \langle e_{k+1}, \ldots, e_n\rangle$. Тогда рассмотрим линейный оператор $\psi \in L(W)$, у которого матрица в базисе $(e_{k+1}, \ldots, e_n)$ есть C. Предположим, что $\det(\lambda E - C) = 0$. Это значит, что λ — собственное значение для ψ и существует вектор $w \in W$, $w \neq 0$ такой, что $\psi(w) = \lambda w$.

Тогда:

$$\varphi(w) = \lambda w + u, \quad u \in V^\lambda(\varphi)$$
$$\varphi(w) - \lambda w \in V^\lambda(\varphi)$$
$$(\varphi - \lambda\mathrm{id})(w) \in V^\lambda(\varphi) \Rightarrow w \in V^\lambda(\varphi)$$

Получили противоречие. Значит, λ — не корень $(tE - C)$. □

Следствие. *$V^\lambda(\varphi) = \ker \varphi_\lambda^s$, где s — кратность λ как корня многочлена $\varphi_\lambda(t)$.*

Предложение. *Если $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, где $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$ — собственные значения φ, то сумма $V^{\lambda_1}(\varphi) + \ldots + V^{\lambda_k}(\varphi)$ — прямая.*

Доказательство. Докажем индукцией по k.

База при $k = 1$ — ясно.

Теперь пусть утверждение доказано для всех значений, меньших k. Докажем для k.

Выберем векторы $v_i \in V^{\lambda_i}(\varphi)$ такие, что $v_1 + \ldots + v_k = 0$. Пусть m — высота вектора v_k. Тогда применим к нашей сумме оператор $\varphi_{\lambda_k}^m$, получив следующее:

$$\varphi_{\lambda_k}^m(v_1) + \ldots + \varphi_{\lambda_k}^m(v_{k-1}) + \varphi_{\lambda_k}^m(v_k) = 0.$$

С другой стороны, $\varphi_{\lambda_k}^m(v_k) = 0$, то есть:

$$\varphi_{\lambda_k}^m(v_1) + \ldots + \varphi_{\lambda_k}^m(v_{k-1}) + \varphi_{\lambda_k}^m(v_k) = \varphi_{\lambda_k}^m(v_1) + \ldots + \varphi_{\lambda_k}^m(v_{k-1}) = 0.$$

Тогда по предположению индукции $\varphi_{\lambda_k}^m(v_1) = \ldots = \varphi_{\lambda_k}^m(v_{k-1}) = 0$. Но $\varphi_\lambda|_{V^\lambda(\varphi)}$ не вырожден и обратим при $i \neq k$, следовательно $v_1 = \ldots = v_{k-1} = 0$. Но тогда и $v_k = 0$.

Следовательно, сумма прямая, что нам и требовалось. $\square$

Теорема. *Если характеристический многочлен $\chi_\varphi(t)$ разлагается на линейные множители, причём $\chi_\varphi(t) = (t-\lambda_1)^{k_1} \ldots (t-\lambda_s)^{k_s}$, то $V = \bigoplus_{i=1}^s \varphi^{\lambda_i}(\varphi)$.*

Доказательство. Так как сумма $\varphi^{\lambda_i}(\varphi) + \ldots + \varphi^{\lambda_i}(\varphi)$ прямая и для любого i выполняется, что $\dim(\varphi^{\lambda_i}(\varphi)) = k_i$, то:

$$\dim(\varphi^{\lambda_1}(\varphi) + \ldots + \varphi^{\lambda_s}(\varphi)) = k_1 + \ldots + k_s = \dim V.$$

Следовательно, $V = \bigoplus_{i=1}^s \varphi^{\lambda_i}(\varphi)$. $\square$

Жордановы клетки

Определение. *Пусть $\lambda \in \mathbb{F}$. **Жордановой клеткой** порядка n, отвечающей значению λ, называется матрица вида:*

$$J_\lambda^n = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{F}).$$

Лекция 25 от 21.03.2016

Жорданова нормальная форма

Пусть V — векторное пространство, φ — линейный оператор.

Теорема (Жорданова нормальная форма линейного оператора)**.** *Пусть $\chi_\varphi(t)$ разлагается на линейные множители. Тогда существует базис $\mathbb{e}$ в V такой, что*

$$A(\varphi, \mathbb{e}) = \begin{pmatrix} J_{\mu_1}^{n_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & J_{\mu_2}^{n_2} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & J_{\mu_p}^{n_p} \end{pmatrix} \quad (*)$$

Кроме того, матрица $(*)$ определена однозначно с точностью до перестановок жордановых клеток.

Определение. *Матрица $(*)$ называется жордановой нормальной формой линейного оператора.*

Следствие. *В векторном пространстве над полем комплексных чисел для любого линейного оператора существует жорданова нормальная форма.*

Схема построения:

Шаг 1: Разложим характеристический многочлен: $\chi_\varphi(t) = (t-\lambda_1)^{k_1}\dots(t-\lambda_s)^{k_s}$, где $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$. Тогда, по доказанной на прошлой лекции теореме, $V = \bigoplus_{i=1}^{s} V^{\lambda_i}(\varphi)$, причем $\dim V^{\lambda_i}(\varphi) = k_i$.

Введем отображение $\psi_i = \varphi|_{V^{\lambda_i}(\varphi)} \in L(V^{\lambda_i}(\varphi))$. Тогда $\chi_{\psi_i}(t) = (t-\lambda_i)^{k_i}$. Также введем $\mathbb{e}_i$ — базис $V^{\lambda_i}(\varphi)$. Пусть $\mathbb{e} = \mathbb{e}_1 \cup \ldots \cup \mathbb{e}_s$.

Тогда:

$$A(\varphi,\mathbb{e}) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_s \end{pmatrix}, \quad \text{где } A_i = A(\psi_i,\mathbb{e}_i) \in M_{k_i}.$$

Шаг 2: Для любого i можно выбрать базис $\mathbb{e}_i$ так, чтобы

$$A_i = \begin{pmatrix} J_{\lambda_i}^{m_{i1}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{\lambda_i}^{m_{i2}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_{\lambda_i}^{m_{iq}} \end{pmatrix}, \quad m_{i1} + \ldots + m_{iq} = k_i$$

Обратите внимание, что здесь все жордановы клетки отвечают одному значению λ_i, но при этом матрица A_i целиком жорданову клетку не образует, так как линия единиц над диагональю из λ разрывна там, где состыковываются две клетки:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} \lambda_i & 1 & & & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & & & \\ & & \lambda_i & 1 & & & & \\ & & & \lambda_i & 0 & & & \\ \hline & & & & \lambda_i & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & & \lambda_i & 1 \\ & & & & & & & \lambda_i \end{array}\right)$$

Тогда жорданова нормальная форма матрицы $A(\varphi,\mathbb{e})$ составляется из таких матриц A_i:

$$A(\varphi,\mathbb{e}) = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1}^{m_{11}} & & & & & & & \\ & J_{\lambda_1}^{m_{12}} & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & J_{\lambda_2}^{m_{21}} & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & J_{\lambda_s}^{m_{s1}} & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & J_{\lambda_s}^{m_{sk_i}} \end{pmatrix}$$

Шаг 3: Осталось только заметить, что для каждого λ_i число и порядок жордановых клеток однозначно определено из последовательности чисел:

$$\begin{aligned}&\dim\ker(\psi_1-\lambda_1\mathrm{id})\\&\dim\ker(\psi_2-\lambda_2\mathrm{id})^2\\&\dots\\&\dim\ker(\psi_i-\lambda_i\mathrm{id})^i\end{aligned}$$

Откуда и следует однозначность представления в виде жордановой нормальной формы (с точностью до перестановки жордановых клеток).

Линейные функции на векторном пространстве

Рассмотрим функцию $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Пусть $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ — приращение, то есть $x = x_0 + y$. Из этого следует, что

$$f(x) = f(x_0) + a_1y_1 + \ldots + a_ny_n + b_{11}y_1^2 + \ldots + b_{ij}y_iy_j + \ldots + b_{nn}y_n^2 + \overline{o}(|y|^2).$$

Тогда сумма $a_1y_1 + \ldots + a_ny_n$ будет называться линейной формой, а сумма $b_{11}y_1^2 + \ldots + b_{ij}y_iy_j + \ldots + b_{nn}y_n^2$ — квадратичной формой.

Теперь дадим строгое определение:

Определение. *Линейной функцией (формой) на векторном пространстве V называется всякое линейное отображение $\sigma\colon V \to F$, где F — одномерное векторное пространство.*

Обозначение: $V^* = \mathrm{Hom}(V, F)$.

Замечание. *Формой принято называть, когда векторное пространство состоит из функций.*

Пример.

1. $\alpha\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R};\ \varphi(v) = \langle v, e\rangle$ — *скалярное произведение с некоторым фиксированным e.*
2. $\alpha\colon \mathcal{F}(X, F) \to F;\ \alpha(f) = f(x_0)$. *Здесь* $\mathcal{F}(X, F) = \{f\colon X \to F\}$.
3. $\alpha\colon C[a, b] \to \mathbb{R};\ \alpha(f) = \int_a^b f(x)dx$.
4. $\alpha\colon \mathrm{Mat}(F) \to F;\ \alpha(X) = \mathrm{tr}A$.

Определение. *Пространство V^* называется сопряженным (двойственным) к V.*

Пусть $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ — базис V, и существует изоморфизм $\alpha\colon V \xrightarrow{\sim} M_n$. Тогда $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, где $\alpha_i = \alpha(e_i)$. При этом, если $x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$, то $\alpha(x) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Следствие. $\dim V^* = n$.

Пусть $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ — базис V. Рассмотрим линейные формы $\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_n$ такие, что $\varepsilon_i(e_j) = \delta_{ij}$, где $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ — символ Кронекера. То есть $\varepsilon_i = (\delta_{i1}, \ldots, \delta_{ii}, \ldots, \delta_{in}) = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$.

Предложение. $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ *— базис в* V^*.

Доказательство. Возьмем любое $\alpha \in V^*$. Положим $a_i = \alpha(e_1)$. Тогда $\alpha = a_1\varepsilon_1 + \ldots + a_n\varepsilon_n$. То есть мы получили, что через $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ действительно можно выразить любое α.

Теперь покажем, что $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ — линейно независимы. Пусть $a_1\varepsilon_1 + \ldots + a_n\varepsilon_n = 0$, $a_i \in F$. Применив эту функцию к e_i, получим, что $a_1\varepsilon_1(e_1) + \ldots + a_n\varepsilon_n(e_i) = 0$. Отсюда следует, что $a_i = 0$, а все остальные a_j, при $j \neq i$, равны нулю в силу определения ε_j. Итого, $a_1 = \ldots = a_n = 0$, что и доказывает линейную независимость. □

Определение. *Базис* $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ *называется сопряженным базисом.*

Упражнение. *Всякий базис* V^* *сопряжен с некоторым базисом* V.

Билинейные функции на векторном пространстве

Определение. *Билинейной функцией (формой) на векторном пространстве* V *называется всякое билинейное отображение* $\beta\colon V \times V \to F$. *То есть это отображение, линейное по каждому аргументу:*

1. $\beta(x_1 + x_2, y) = \beta(x_1, y) + \beta(x_2, y)$;
2. $\beta(\lambda x, y) = \lambda\beta(x, y)$;
3. $\beta(x, y_1 + y_2) = \beta(x, y_1) + \beta(x, y_2)$;
4. $\beta(x, \lambda y) = \lambda\beta(x, y)$.

Пример.

1. $V = \mathbb{R}^n$, $\beta(x, y) = \langle x, y\rangle$ *— скалярное произведение.*
2. $V = \mathbb{R}^2$, $\beta(x, y) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$.
3. $V = C[a, b]$, $\beta(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$.

Лекция 26 от 06.04.2016

Матрицы билинейных функций

Пусть V — векторное пространство, $\dim V < \infty$, $\beta\colon V \times V \to F$ — билинейная функция.

Определение. *Матрицей билинейной функции в базисе* $\mathbb{e}$ *называется матрица* $B = (b_{ij})$, *где* $b_{ij} = \beta(e_i, e_j)$. *Обозначение:* $B(\beta, \mathbb{e})$.

Пусть $x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n \in V$ и $y = y_1e_1 + \ldots + y_ne_n \in V$. Тогда:

$$\beta(x, y) = \beta\left(\sum_{i=1}^n x_ie_i, \sum_{j=1}^n y_je_j\right) = \sum_{i=1}^n x_i\beta\left(e_i, \sum_{j=1}^n y_je_j\right) =$$
$$= \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n y_j\beta(e_i, e_j) = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_ib_{ij}y_j =$$
$$= (x_1, \ldots, x_n)B\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n\end{pmatrix} \quad (*)$$

Предложение.

1. *Всякая билинейная функция однозначно определяется своей матрицей в базисе $\mathbb{e}$ (и, следовательно, в любом другом базисе).*
2. *Для любой матрицы $B \in M_n(F)$ существует единственная билинейная функция β такая, что $B = B(\beta, \mathbb{e})$.*

Доказательство.

1. Уже доказано, это следует из формулы $(*)$.
2. Определим β по формуле $(*)$. Тогда β — это билинейная функция на V и ее матрица есть в точности B. Единственность следует из все той же формулы.

□

Замечание. *Эта биекция не имеет никакого отношения к биекции линейных операторов с квадратными матрицами.*

Пусть $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ и $\mathbb{e}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ — два базиса V, β — билинейная функция на V. Пусть также $\mathbb{e}' = \mathbb{e}C$, где C — матрица перехода, также $B(\beta, \mathbb{e}) = B$ и $B(\beta, \mathbb{e}') = B'$.

Предложение. *$B' = C^TBC$.*

Доказательство. Рассмотрим представление вектора $x \in V$ в обоих базисах.

$$\begin{matrix} x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n = (e_1, \ldots, e_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} \\ x = x'_1e'_1 + \ldots + x'ne'_n = (e'_1, \ldots, e'_n)\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n\end{pmatrix}\end{matrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n\end{pmatrix}$$

Аналогично для $y \in V$:

$$\begin{matrix} y = (e_1, \ldots, e_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n\end{pmatrix} \\ y = (e'_1, \ldots, e'_n)\begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n\end{pmatrix}\end{matrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n\end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n\end{pmatrix}.$$

Тогда, если мы транспонируем формулу для x, получаем:

$$\beta(x,y) = (x_1, \ldots, x_n)B \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = ({x'}_1, \ldots, {x'}_n)C^T BC \begin{pmatrix} {y'}_1 \\ \vdots \\ {y'}_n \end{pmatrix}.$$

Одновременно с этим:

$$\beta(x,y) = ({x'}_1, \ldots, {x'}_n)B' \begin{pmatrix} {y'}_1 \\ \vdots \\ {y'}_n \end{pmatrix}.$$

Сравнивая эти две формулы, получаем, что $B' = C^T BC$. □

Следствие. *Число* $\operatorname{rk} B$ *не зависит от выбора базиса.*

Определение. *Число* $\operatorname{rk} B$ *называется рангом билинейной функции* β. *Обозначение:* $\operatorname{rk} \beta$.

Симметричные билинейные функции

Как и для линейных операторов, неплохо было бы научиться находить такой базис, в котором матрица B была бы проще. Но мы это сделаем только для некоторого класса билинейных функций.

Определение. *Билинейная функция называется симметричной, если* $\beta(x,y) = \beta(y,x)$ *для любый* $x, y \in V$.

Предложение. *Билинейная функция* β *симметрична тогда и только тогда, когда матрица* $B(\beta, \mathbb{e})$ *— симметрическая (т.е. она равна своей транспонированной).*

Доказательство. Пусть $B = B(\beta, \mathbb{e})$.

- $\Rightarrow$ $\beta(e_i, e_j) = b_{ij} = b_{ji} = \beta(e_j, e_i) \Rightarrow B$ симметрична.
- $\Leftarrow$ Пусть $x = x_1 e_1 + \ldots x_n e_n$ и $y = y_1 e_1 + \ldots + y_n e_n$. Также воспользуемся тем, что данная нам матрица симметрична, то есть равна своей транспонированной.

$$\beta(y,x) = (y_1, \ldots, y_n)B \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \left[(y_1, \ldots, y_n)B \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right]^T =$$

$$= (x_1, \ldots, x_n)B^T \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (x_1, \ldots, x_n)B \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \beta(x,y)$$

То есть $\beta(y,x) = \beta(x,y)$, что и означает, что β симметрична.

□

Квадратичные функции

Определение. *Пусть $\beta\colon V\times V\to F$ — билинейная функция. Тогда $Q_\beta\colon V\to F$, заданная формулой $Q_\beta(x)=\beta(x,x)$, называется квадратичной функцией (формой), ассоциированной с билинейной функцией β.*

Покажем, что такая квадратичная функция на самом деле является однородным многочленом степени 2 от n переменных. Пусть $\mathbb{e}=(e_1,\ldots,e_n)$ — базис V, $B=B(\beta,\mathbb{e})$, $x=(x_1,\ldots,x_n)$. Тогда:

$$Q_\beta(x)=(x_1,\ldots,x_n)V\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}x_ix_j$$

Квадратичную функцию удобно так представлять, но не определять.

Пример. *Здесь $\mathbb{e}$ — стандартный базис.*

1. $V=\mathbb{R}^n$, $\beta(x,y)=x_1y_1+\ldots+x_ny_n\ \Rightarrow\ Q_\beta(x)=x_1^2+\ldots+x_n^2$, $B(\beta,\mathbb{e})=E$.
2. $V=\mathbb{R}^2$, $\beta(x,y)=2x_1y_2\ \Rightarrow\ Q_\beta(x)=2x_1x_2$, $B(\beta,\mathbb{e})=\begin{pmatrix}0&2\\0&0\end{pmatrix}$.
3. $V=\mathbb{R}^2$, $\beta(x,y)=x_1y_2+x_2y_1\ \Rightarrow\ Q_\beta(x)=2x_1x_2$, $B(\beta,\mathbb{e})=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$.

Замечание. *Квадратичная функция задает билинейную функцию не однозначно (примеры 2 и 3).*

В дальнейшем нам понадобится делить на два. Поэтому далее предположим, что в нашем поле F можно делить на два. Что это означает? Заметим, что $2=1+1$, и, строго говоря, нельзя делить на ноль. Следовательно, наше условие можно переформулировать: рассматриваем такие поля F, в которых $1+1\neq 0$. В терминах поля, это уже гораздо более осмысленное и понятное условие.

Теорема. *Отображение $\beta\mapsto Q_\beta$ является биекцией между симметричными билинейными функциями на V и квадратичными функциями на V.*

Доказательство.
Сюръективность. Пусть β — билинейная функция. Рассмотрим тогда ассоциированную с ней квадратичную функцию $Q_\beta(x)=\beta(x,x)$. Пусть $\sigma(x,y)=\frac{1}{2}(\beta(x,y)+\beta(y,x))$ — симметричная билинейная функция на V. Тогда:

$$Q_\sigma(x)=\sigma(x,x)=\frac{1}{2}(\beta(x,x)+\beta(x,x))=\beta(x,x)=Q_\beta(x)$$

Итого, $Q_\sigma=Q_\beta$. Следовательно, отображение сюръективно.

Инъективность. Пусть $\beta(x,y)$ – симметричная билинейная функция. Аналогично, рассмотрим $Q_\beta(x)=\beta(x,x)$. Посмотрим на $Q_\beta(x+y)$:

$$Q_\beta(x+y)=\beta(x+y,x+y)=\beta(x,x)+\beta(x,y)+\beta(y,x)+\beta(y,y)=Q_\beta(x)+Q_\beta(y)+2\beta(x,y)$$
$$\Downarrow$$
$$\beta(x,y)=\frac{1}{2}\left(Q_\beta(x+1)-Q_\beta(x)-Q_\beta(y)\right)$$

Полученная выше формула как раз и означает, что значения билинейной функции однозначно задаются соответствующей квадратичной функцией. □

Замечание.

1. *Билинейная функция* $\sigma(x, y) = \frac{1}{2}(\beta(x, y) + \beta(y, x))$ *называется симметризацией билинейной функции* β*. Причем если* $B = B(\beta, \mathbb{e})$ *и* $S = B(\sigma, \mathbb{e})$*, то* $S = \frac{1}{2}(B + B^T)$*.*

2. *Симметричная билинейная функция* $\beta(x, y) = \frac{1}{2}\left(Q_\beta(x+1) - Q_\beta(x) - Q_\beta(y)\right)$ *называется поляризацией квадратичной функции* Q*.*

Пример. *Для предыдущих двух примеров:*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^T\right)$$

Далее вся терминология для билинейных функций переносится на квадратичные функции.

Теперь вспоминаем, что перед нами стоит задача научиться приводить к хорошему виду.

Определение. *Квадратичная функция* Q *имеет в базисе* $\mathbb{e}$ *канонический вид, если для любого вектора* $x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$ *верно, что* $Q_\beta(x) = a_1x_1^2 + \ldots + a_nx_n^2$*, где* $a_i \in F$*. Иными словами,* $B(\beta, \mathbb{e}) = \operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n)$*.*

Определение. *Квадратичная функция* Q *имеет нормальный вид в базисе* $\mathbb{e}$*, если для любого вектора* $x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$ *верно, что* $Q_\beta(x) = a_1x_1^2 + \ldots + a_nx_n^2$*, причем* $a_i \in \{-1, 0, 1\}$*.*

Лекция 27 от 13.04.2016

Привидение к каноническому и нормальному виду

Пусть V — векторное пространство, $\dim V = n$, $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ — базис V, $Q\colon V \to F$ — квадратичная функция на V.

Теорема. *Для любой квадратичной функции* Q *существует такой базис, в котором* Q *имеет канонический вид.*

Доказательство. Метод Лагранжа.

Докажем индукцией по n.

При $n = 1$ имеем, что $Q(x) = ax^2$, то есть уже имеем канонический вид.

Предположим, что для всех значений меньших n доказано. Докажем тогда для n.

Пусть $A = (a_{ij})$ — матрица квадратичной функции Q в исходном базисе. Тогда:

$$Q(x) = Q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_{ij}x_ix_j$$

<u>Случай 0</u>: пусть $a_{ij} = 0$ для всех пар (i, j). Тогда $Q(x) = 0x_1^2 + \ldots + 0x_n^2$ — уже канонический вид.

Случай 1: пусть существует такое i, что $a_{ii} \neq 0$. Перенумеровав переменные, считаем, что $a_{11} \neq 0$. Тогда:

$$Q(x_1, \ldots, x_n) = (a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \ldots + 2a_{1n}x_1x_n) + Q_1(x_2, \ldots, x_n) =$$
$$= \frac{1}{a_{11}}\left((a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n)^2 - (a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n)^2\right) + Q_1(x_2, \ldots, x_n) =$$
$$= \frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n)^2 + Q_2(x_2, \ldots, x_n)$$

Теперь сделаем следующую замену переменных:

$$x_1' = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n$$
$$x_2' = x_2, \ldots, x_n' = x_n$$

Получаем:

$$Q(x_1', \ldots, x_n') = \frac{1}{a_{11}}x_1' + Q_2(x_2', \ldots, x_n')$$

Дальше пользуемся предположением индукции для Q_2, окончательно получая канонический вид для исходной Q.

Случай 2: пусть $a_{ii} = 0$ для всех i, но существует такая пара (i, j), где $i < j$, что $a_{ij} \neq 0$. Переименовываем переменные так, чтобы $a_{12} \neq 0$ и делаем замену:

$$x_1 = x_1' - x_2'$$
$$x_2 = x_1' + x_2'$$
$$x_3 = x_3', \ldots, x_n = x_n'$$

Тогда $2a_{12}x_1x_2 = 2a_{12}x_1'^2 - 2a_{12}x_2'^2$. Следовательно:

$$Q(x_1', \ldots, x_n') = 2a_{12}x_1'^2 - 2a_{12}x_2'^2 + 2\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_{ij}x_i'x_j'$$

Таким образом, мы пришли к случаю 1, который уже умеем решать. $\square$

Следствие. *Всякую квадратичную функцию над полем $\mathbb{R}$ можно заменой базиса привести к нормальному виду.*

Доказательство. Существует такой базис, в котором $Q(x_1, \ldots, x_n) = a_1x_1^2 + \ldots + a_nx_n^2$. Сделаем замену:

$$x_i' = \begin{cases} \sqrt{|a_i|}x_i, & \text{если } a_i \neq 0 \\ x_i, & \text{если } a_i = 0 \end{cases}$$

Второе условие нужно для того, чтобы можно было выразить старые переменные через новые, не деля при этом на ноль.

Получаем, что $Q(x_1', \ldots, x_n') = \varepsilon_1x_1'^2 + \ldots + \varepsilon_nx_n'^2$, где $\varepsilon_i = \operatorname{sgn} a_i \in \{-1, 0, 1\}$. Что нам и было надо. $\square$

Замечание. *Если $F = \mathbb{C}$, то любую квадратичную функцию Q можно привести к виду $Q(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \ldots + x_k^2$, где $k \leqslant n$ ($k = \operatorname{rk} Q$), то есть $B(Q, \mathbb{e}) = \operatorname{diag}(1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$.*

Закон инерции, индексы инерции

Пусть Q — квадратичная функция над $\mathbb{R}$, которая в базисе $\mathbb{e}$ имеет нормальный вид:

$$Q(x1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \ldots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \ldots - x_{s+t}^2,$$

где s — это количество положительных слагаемых, а t — отрицательных.

Теорема (Закон инерции). *Числа s, t не зависят от выбора базиса, в котором Q имеет нормальный вид.*

Доказательство. Пусть $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ — базис такой, что $v = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$ и Q имеет в нем нормальный вид: $Q(v) = x_1^2 + \ldots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \ldots - x_{s+t}^2$.

Пусть также $\mathbb{f} = (f_1, \ldots, f_n)$ — другой базис такой, что $v = y_1e_1 + \ldots + y_ne_n$ и Q также имеет в нем нормальный вид: $Q(v) = y_1^2 + \ldots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \ldots - y_{p+q}^2$.

Заметим, что $s + t = p + q$, так как обе эти суммы равны $\operatorname{rk} Q$. В допущении, что $s \neq p$, не умоляя общности будем считать, что $s > p$.

Положим $L_1 = \langle e_1, \ldots, e_s\rangle$, $\dim L_1 = s$ и $L_2 = \langle f_{p+1}, \ldots, f_n\rangle$, $\dim L_2 = n - p$. Видно, что $L_1 + L_2 \subset V$, а значит, $\dim(L_1 + L_2) \leqslant n$. Тогда:

$$\dim(L_1 \cap L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 + L_2) \geqslant s + n - p - n = s - p > 0.$$

Следовательно, существует ненулевой вектор $v \in L_1 \cap L_2$. Разложим тогда этот вектор в базисах данных линейных оболочек:

$$v = x_1e_1 + \ldots + x_se_s,\, \exists x_i \neq 0 \Rightarrow Q(v) = x_1^2 + \ldots + x_s^2 > 0$$
$$v = y_{p+1}f_{p+1} + \ldots + y_nf_n \Rightarrow Q(v) = -y_{p+1}^2 - \ldots - y_{p+q}^2 \leqslant 0$$

Получили противоречие. Значит, исходное предположение неверно и $s = p$. Откуда в свою очередь следует, что $t = q$. ☐

Определение. *Эти числа имеют свои названия:*

1. *$i_+ := s$ — положительный индекс инерции;*
2. *$i_- := t$ — отрицательный индекс инерции;*
3. *$i_0 := n - s - t$ — нулевой индекс инерции.*

Определение. *Квадратичная функция Q над полем $\mathbb{R}$ называется*

Термин	*Обозначение*	*Условие*
положительно определенной	$Q > 0$	$Q(x) > 0\ \forall x \neq 0$
отрицательно определенной	$Q < 0$	$Q(x) < 0\ \forall x \neq 0$
неотрицательно определенной	$Q \geqslant 0$	$Q(x) \geqslant 0\ \forall x$
неположительно определенной	$Q \leqslant 0$	$Q(x) \leqslant 0\ \forall x$
неопределенной	$-$	$\exists x, y\colon Q(x) > 0,\, Q(y) < 0$

Термин	*Нормальный вид*	*Индексы инерции*
положительно определенной	$x_1^2 + \ldots + x_n^2$	$i_+ = n,\, i_- = 0$
отрицательно определенной	$-x_1^2 - \ldots - x_n^2$	$i_+ = 0,\, i_- = n$
неотрицательно определенной	$x_1^2 + \ldots + x_k^2,\, k \leqslant n$	$i_+ = k,\, i_- = 0$
неположительно определенной	$-x_1^2 - \ldots - x_k^2,\, k \leqslant n$	$i_+ = 0, i_- = k$
неопределенной	$x_1^2 + \ldots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \ldots - x_{s+t}^2,\ s,t \geqslant 1$	$i_+ = s,\, i_- = t$

Пример. $V = \mathbb{R}^2$.

1. $Q(x, y) = x^2 + y^2$, $Q > 0$;
2. $Q(x, y) = -x^2 - y^2$, $Q < 0$;
3. $Q(x, y) = x^2 - y^2$;
4. $Q(x, y) = x^2$, $Q \geqslant 0$;
5. $Q(x, y) = -x^2$, $Q \leqslant 0$.

Лекция 28 от 19.04.2016

Ортогонализация

Пусть V — векторное пространство над полем F размерности n, и $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ — его базис. Пусть также $Q\colon\ V \to F$ — квадратичная форма, $\beta\colon\ V \times V \to F$ — соответствующая билинейная функция и $B = B(\beta, \mathbb{e})$ — ее матрица.

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \vdots \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \vdots \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Рассмотрим B_i — левые верхние $i \times i$-подматрицы. Например, $B_1 = (b_{11})$, $B_2 = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ и так далее.

Матрица B_i — это матрица ограничения билинейной функции β на подпространство, натянутое на векторы $(e_1, \ldots, e_i)$. Назовем *верхним угловым минором* число $\delta_i = \det(B_i)$. Также будем считать, что $\delta_0 = 1$.

Определение. *Базис $\mathbb{e}$ называется ортогональным (по отношению к β), если $\beta(e_i, e_j) = 0$ для любых $i \neq j$. В ортогональном базисе матрица квадратичной формы имеет канонический вид.*

Теорема (Метод ортогонализации Грама – Шмидта)**.** *Предположим, что $\delta_i \neq 0$ для всех i. Тогда существует единственный базис $\mathbb{e}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ в V такой, что*

1. $\mathbb{e}'$ *— ортогональный*
2. $e'_1 = e_1$,
   $e'_2 \in e_2 + \langle e'_1 \rangle$,
   $e'_3 \in e_3 + \langle e'_1, e'_2 \rangle$,
   $\ldots$
   $e'_n \in e_n + \langle e'_1, \ldots, e'_{n-1} \rangle$
3. $Q(e'_i) = \dfrac{\delta_i}{\delta_{i-1}}$ *для всех i.*

Доказательство. Индукция по n. База для $n = 1$ очевидна.

Теперь пусть всё доказано для всех $k < n$. Докажем для n. По предположению индукции, существует единственный базис $(e_1', e_2', \ldots, e_n')$ с требуемыми свойствами.

Наблюдение: $\langle e_i, \ldots, e_n\rangle = \langle e_i', \ldots, e_n'\rangle$.

Ищем e_n' в виде $e_n' = e_n + \lambda_1 e_1' + \ldots + \lambda_{n-1}e_{n-1}'$. Тогда для всех i:

$$\beta(e_n', e_i') = \beta(e_n, e_i') + \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j \beta(e_j', e_i')$$

Чтобы выполнялись требуемые условия, необходимо, чтобы эта сумма равнялась нулю.

Заметим,что последнее слагаемое обращается в нуль при $i \neq j$ по свойству выбранного базиса. Тогда остается только следующее:

$$0 = \beta(e_n, e_i') + \lambda_i \beta(e_i', e_i') = \beta(e_n, e_i') + \lambda_i Q(e_i') = \beta(e_n, e_i') + \lambda_i \underbrace{\frac{\delta_i}{\delta_{i-1}}}_{\neq 0}.$$

Выбирая $\lambda_i = -\dfrac{\beta(e_n, e_i')}{\beta(e_i', e_i')}$, получаем нужное равенство и однозначность разложения. Таким образом, условия 1 и 2 выполнены.

Проверим условие 3. Пусть C — матрица перехода от $\mathbb{e}$ к $\mathbb{e}'$. Тогда легко понять, что C — верхнетреугольная с единицами на главной диагонали. Значит, матрица $B' = C^T BC$ тоже диагональна. Заметим также, что C_i (та самая верхняя $i \times i$-подматрица) является матрицей перехода от $(e_1, \ldots, e_i)$ к $(e_1', \ldots, e_i')$. Тогда:

$$B_i' = C_i^T B_i C_i \Rightarrow \det B_i' = 1 \cdot \det(B_i) \cdot 1 = \delta_i.$$

Но поскольку $B' = \begin{pmatrix} Q(e_1') & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & Q(e_n') \end{pmatrix}$, то $\delta_n = Q(e_1') \cdot \ldots \cdot Q(e_n')$. Отсюда и получаем, что $\dfrac{\delta_n}{\delta_{n-1}} = Q(e_n')$. $\square$

Пример. *Пусть $V = \mathbb{R}^2$. Тогда $e_1' = e_1$, а e_2' получается, если спроецировать вектор e_2 на прямую, ортогональную e_1. Если $V = \mathbb{R}^3$, то e_3' является проекцией на прямую, ортогональную плоскости (e_1', e_2').*

Теорема Якоби и критерий Сильвестра

Рассмотрим следствия данной теоремы для случая, когда $F = \mathbb{R}$.

Теорема (Якоби)**.** *Пусть $\delta_i \neq 0$ для всех i. Тогда $\operatorname{rk} Q = n$ и $i_-(Q)$ равен числу перемен знака последовательности $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_n$ (напомним, что $\delta_0 = 1$).*

Доказательство. Применим процесс ортогонализации. Получим базис $(e_1', \ldots, e_n')$, в котором $Q(y_1, \ldots, y_n) = \dfrac{\delta_1}{\delta_0} y_1^2 + \ldots + \dfrac{\delta_n}{\delta_{n-1}} y_n^2$, где $y_1, \ldots, y_n$ — координаты некоторого вектора в данном базисе. Если для некоторого i выполняется, что $\dfrac{\delta_i}{\delta_{i-1}} < 0$, то значит, $\operatorname{sgn} \delta_i \neq \operatorname{sgn} \delta_{i-1}$. Что и означает, что отрицательный индекс равен количеству перемен знака в последовательности $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_n$.

Что касательно определителя, то условие $\operatorname{rk} Q = n$ равносильно условию $\det B \neq 0$. Но $\det B = \delta_n \neq 0$, а значит, все верно. $\square$

Теорема (Критерий Сильвестра)**.** *$Q > 0$ тогда и только тогда, когда $\delta_i > 0$ для всех i.*

Доказательство.
[$\Leftarrow$] Следует из предыдущей теоремы.
[$\Rightarrow$] Докажем, что $\delta_i = \det(B_i) > 0$. Действительно, B_i — это матрица ограничения $Q\big|_{\langle e_1, \ldots, e_i\rangle}$. Оно так же будет строго положительным, следовательно, существует матрица $C_i \in M_n(\mathbb{R})$, $\det(C_i) \neq 0$, такая, что $C_i^T B C_i = E$. Но тогда $\det C_i^T \det B_i \det C_i = \det E = 1$. Следовательно, $\det B_i = \dfrac{1}{(\det C_i)^2} > 0$, что и требовалось. $\square$

Теорема. $Q < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \delta_i < 0, & 2 \nmid i \\ \delta_i > 0, & 2 \mid i \end{cases}$

Доказательство. Применяя критерий Сильвестра для $B(Q, \mathbb{e}) = -B(-Q, \mathbb{e})$, получаем требуемое. $\square$

Евклидовы пространства. Основные понятия

Определение. *Евклидово пространство — это векторное пространство $\mathbb{E}$ над полем $\mathbb{R}$, на котором задана положительно определённая симметрическая билинейная функция $(\cdot, \cdot)$, которую мы будем называть скалярным произведением.*

Пример.

1. $\mathbb{R}^n$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, $(x,y) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$.
2. $\mathbb{E} = C[0,1]$, $(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$, $(f, f) = \int_0^1 f^2(x)dx > 0$.

Замечание. *Важно отметить, что евклидово пространство можно определить только над полем $\mathbb{R}$.*

Определение. *Пусть $x \in \mathbb{E}$. Тогда длиной вектора называют величину $|x| = \sqrt{(x,x)}$.*

Очевидно, что $|x| \geqslant 0$, причем $|x| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$.

Предложение (Неравенство Коши-Буняковского)**.** *Пусть $x, y \in \mathbb{E}$. Тогда $|(x,y)| \leqslant |x||y|$, причём знак равенства возможен тогда и только тогда, когда x и y пропорциональны.*

Доказательство.

1. x,y пропорциональны, т.е. $x = \lambda y$ для некоторого λ. Тогда:

$$|(x,y)| = |(x,\lambda x)| = \lambda|(x,x)| = |x|\lambda|x| = |x||y|.$$

2. x,y линейно независимы. Тогда они будут базисом своей линейной оболочки. Тогда матрица B билинейной функции $(\cdot,\cdot)\big|_{\langle x,y\rangle}$ равна:

$$B = \begin{pmatrix} (x,x) & (x,y) \\ (y,x) & (y,y) \end{pmatrix}$$

Так как $\det B > 0$, то $(x,x)(y,y) - (x,y)^2 > 0$. Следовательно:

$$|(x,y)|^2 < |x|^2|y|^2$$
$$|(x,y)| < |x||y|$$

□

Определение. *Углом между векторами x и y называют такой α, что* $\cos\alpha = \dfrac{(x,y)}{|x||y|}$.

Рассмотрим систему векторов $(v_1,\ldots,v_k)$, где $v_i \in \mathbb{E}$.

Определение. *Матрица Грама системы $v_1,\ldots,v_k$ это*

$$G(v_1,\ldots,v_k) := (g_{ij}), \quad g_{ij} = (v_i,v_j).$$

Предложение.

1. $\det G(v_1,\ldots,v_k) \geqslant 0$

2. $\det G(v_1,\ldots,v_k) = 0$ *тогда и только тогда, когда $v_1,\ldots,v_k$ линейно зависимы.*

Доказательство.

1. $v_1,\ldots,v_k$ линейно независимы. Следовательно, матрица $G(v_1,\ldots,v_k)$ является матрицей ограничения $(\cdot,\cdot)$ на $\langle v_1,\ldots,v_k\rangle$, базисом в котором является $(v_1,\ldots,v_k)$. А значит, $\det G(v_1,\ldots,v_k) > 0$.

2. $v_1,\ldots,v_k$ линейно зависимы. Значит, существуют коэффициенты $(\lambda_1,\ldots,\lambda_k) \neq (0,\ldots,0)$ такие, что $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k = 0$. Если обозначить матрицу Грама $G(v_1,\ldots,v_k)$ за G, то тогда

$$\lambda_1 G_{(1)} + \ldots + \lambda_k G_{(k)} =$$
$$= (\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k, v_1) + (\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k, v_2) + \ldots + (\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k, v_k) =$$
$$= 0 + 0 + \ldots + 0$$

То есть строки линейно зависимы и $\det G = 0$.

□

Лекция 29 от 27.04.2016

Ортогональные дополнения

Пусть $\mathbb{E}$ — евклидово пространство, $\dim\mathbb{E} = n$.

Определение. *Векторы x,y называются ортогональными, если $(x,y) = 0$. Обозначение:* $x \perp y$.

Определение. *Пусть $S \subseteq \mathbb{E}$ — произвольное подпространство. Ортогональным дополнением к S называется множество $S^{\perp} = \{x \in \mathbb{E} \mid (x,y) = 0 \ \forall y \in S\}$.*

Замечание.

1. *$S^{\perp}$ — подпространство в $\mathbb{E}$.*

2. *$S^{\perp} = \langle S \rangle^{\perp}$.*

Предложение. *Пусть S — подпространство в $\mathbb{E}$. Тогда:*

1. *$\dim S^{\perp} = n - \dim S$;*

2. *$\mathbb{E} = S \oplus S^{\perp}$;*

3. *$(S^{\perp})^{\perp} = S$.*

Доказательство.

1. Выделим в S базис $(e_1, \ldots, e_k)$ и дополним его векторами $(e_{k+1}, \ldots, e_n)$ до базиса $\mathbb{E}$. Рассмотрим вектор $x \in \mathbb{E}$ и представим его в виде $x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$. Если $x \in S^{\perp}$, то это то же самое, если $(x, e_i) = 0$ для $i = 1 \ldots k$. Итого:

$$(x,e_i) = (e_1, e_i)x_1 + (e_2, e_i)x_2 + \ldots, (e_n, e_i)x_n = 0, \quad i = 1 \ldots k$$

Получим однородную СЛУ $G \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$, где $G \in Mat_{k \times n}(\mathbb{R})$ и $g_{ij} = (e_i, e_j)$. Заметим, что $\operatorname{rk} G = k$, так как это часть матрицы Грама, и ее левый верхний $k \times k$ минор больше нуля. Следовательно, размерность пространства решений $\dim S^{\perp} = n - \operatorname{rk} G = n - \dim S$.

2. Из предыдущего пункта получаем, что $\dim S + \dim S^{\perp} = n$. Вместе с тем, поскольку $(x,x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$, то $S \cap S^{\perp} = \{0\}$. Следовательно, $\mathbb{E} = S \oplus S^{\perp}$.

3. $S \subset (S^{\perp})^{\perp}$ — всегда. Вместе с тем, $\dim (S^{\perp})^{\perp} = n - \dim S^{\perp} = n - (n - k) = k = \dim S$. И так как размерности совпадают, то $S = (S^{\perp})^{\perp}$.

□

Итак, мы теперь знаем, что $\mathbb{E} = S \oplus S^{\perp}$. Значит, для $x \in \mathbb{E}$ существует единственное представление его в виде $x = y + z$, где $y \in S$, $z \in S^{\perp}$.

Определение. *Вектор y называется ортогональной проекцией вектора x на подпространство S. Обозначение:* $\operatorname{pr}_S x$.
Вектор z называется ортогональной составляющей вектора x вдоль подпространства S. Обозначение: $\operatorname{ort}_S x$.

Ортогональные и ортонормированные базисы. Свойства

Определение. *Базис $(e_1, \ldots, e_n)$ в $\mathbb{E}$ называется ортогональным, если $(e_i, e_j) = 0$ $\forall i \neq j$. Это равносильно тому, что $G(e_1, \ldots, e_n)$ диагональна.*
Базис называется ортонормированным, если дополнительно $(e_i, e_i) = 1$ $\forall i$. Это равносильно тому, что $G(e_1, \ldots, e_n) = E$.

Замечание. *Если $(e_1, \ldots, e_n)$ ортогональный базис, то $\left(\dfrac{e_1}{|e_1|}, \ldots, \dfrac{e_n}{|e_n|}\right)$ ортонормированный.*

Теорема. *В любом конечномерном евклидовом пространстве существует ортонормированный базис.*

Доказательство. Следует из того, что всякую положительно определенную квадратичную форму можно привести к нормальному виду. □

Пусть $(e_1, \ldots, e_n)$ — ортонормированный базис в $\mathbb{E}$. Пусть также есть ещё один базис $(e'_1, \ldots, e'_n)$, причём $(e'_1, \ldots, e'_n) = (e_1, \ldots, e_n)C$.

Предложение. *$(e'_1, \ldots, e'_n)$ — ортонормированный тогда и только тогда, когда $C^T C = E$ или, что то же самое, $C^{-1} = C^T$.*

Доказательство. Условие, что базис $(e'_1, \ldots, e'_n)$ является ортонормированным, равносильно тому, что $G(e'_1, \ldots, e'_n) = E$. С другой стороны, $G(e'_1, \ldots, e'_n) = C^T G(e_1, \ldots, e_n) C$, причем аналогично $G(e_1, \ldots, e_n) = E$. Откуда и следует, что $C^T C = E$. □

Определение. *Матрица C в таком случае называется ортогональной.*

Свойства.

1. *$C^T C = E$, значит, $C^T = C^{-1}$, и тогда $CC^T = E$. Итого, получаем:*
$$\sum_{k=1}^{n} c_{ki} c_{kj} = \delta_{ij} = \sum_{k=1}^{n} c_{ik} c_{jk}$$
Напомним, что δ_{ij} это символ Кронекера.

2. $\det C = \pm 1$.

Пример. $C = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ *— матрица поворота на угол φ в $\mathbb{R}^2$.*

Пусть $S \subseteq \mathbb{E}$ — подпространство, $(e_1, \ldots, e_k)$ — его ортогональный базис, $x \in \mathbb{E}$.

Предложение. $\mathrm{pr}_S x = \sum\limits_{i=1}^{k} \dfrac{(x, e_i)}{(e_i, e_i)} e_i$. *В частности, если базис ортонормированный,* $\mathrm{pr}_S x = \sum\limits_{i=1}^{k} (x, e_i) e_i$

Доказательство. Представим вектор x в виде суммы $x = \mathrm{pr}_S x + \mathrm{ort}_S x$. Тогда:
$$(x, e_i) = (\mathrm{pr}_S x, e_i) + \underbrace{(\mathrm{ort}_S x, e_i)}_{=0} = (\mathrm{pr}_S x, e_i) \quad i = 1, \ldots, k.$$

Вместе с тем, $\mathrm{pr}_S x = \sum\limits_{j=1}^{k} \lambda_j e_j$, следовательно, $(x, e_i) = \sum\limits_{j=1}^{k} \lambda_j (e_j, e_i)$. Но так как базис ортогональный, все слагаемые, кроме одного, занулятся, и останется только $(x, e_i) = \lambda_i (e_i, e_i)$. Откуда и следует, что $\lambda_i = \dfrac{(x, e_i)}{(e_i, e_i)}$. □

Пусть есть базис $(e_1, \ldots, e_n)$ в $\mathbb{E}$. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта даёт ортогональный базис $(f_1, \ldots, f_n)$, причем:

$$\begin{aligned}
&f_1 = e_1 \\
&f_2 \in e_2 + \langle e_1 \rangle \\
&\ldots \\
&f_n \in e_n + \langle e_1, \ldots, e_{n-1} \rangle
\end{aligned}$$

Точно так же можно заметить, что $\langle f_1, \ldots, f_i \rangle = \langle e_1, \ldots, e_i \rangle$ для всех $i = 1, \ldots, n$.

Предложение. $f_i = \operatorname{ort}_{\langle e_1, \ldots, e_{i-1} \rangle} e_i$ *для всех* $i = 1, \ldots, n$.

Доказательство. Воспользовавшись равенством линейных оболочек, получаем, что $e_i \in f_i + \langle f_1, \ldots, f_{i-1} \rangle$. Следовательно, данный базисный вектор можно представить в виде $e_i = f_i + \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_{i-1} f_{i-1}$. И из того, что $f_i \perp \langle e_1, \ldots, e_{i-1} \rangle = \langle f_1, \ldots, f_{i-1} \rangle$ как раз и получаем, что $f_i = \operatorname{ort}_{\langle e_1, \ldots, e_{i-1} \rangle} e_i$. □

Пример. *Данное рассуждение проще понять, если представить себе частный случай для* $\mathbb{E} = \mathbb{R}^3$.

У нас зафиксированы векторы e_1, e_2, e_3, *и мы их ортогонализируем. Для начала,* $f_1 = e_1$. *Вектор* f_2 *получается как проекция вектора* e_2 *на прямую, ортогональную* f_1. *А вектор* f_3 *— как проекция* e_3 *на прямую, ортогональную плоскости, образованной векторами* f_1 *и* f_2. *Аналогично для пространств большей размерности.*

Теорема (Пифагора)**.** *Если* $x, y \in \mathbb{E}$ *и* $x \perp y$, *то* $|x + y| = |x|^2 + |y|^2$.

Доказательство.

$$|x+y|^2 = (x+y, x+y) = (x,x) + (y,y) + \underbrace{(x,y)}_{=0} + \underbrace{(y,x)}_{=0} = (x,x) + (y,y) = |x|^2 + |y|^2$$

□

Расстояния в евклидовых пространствах

Рассмотрим векторы $x, y \in \mathbb{E}$.

Определение. *Расстоянием между векторами* x *и* y *называется число* $\rho(x,y) := |x - y|$.

Предложение (Неравенство треугольника)**.** $\rho(a,b) + \rho(b,c) \geqslant \rho(a,c)$ *при* $a, b, c \in \mathbb{E}$.

Доказательство. Пусть $x = a - b$, $y = b - c$. Тогда $a - c = x + y$. Теперь достаточно доказать, что $|x| + |y| \geqslant |x + y|$. Для этого рассмотрим $|x + y|^2$.

$$|x+y|^2 = (x,x) + 2(x,y) + (y,y) = |x|^2 + 2(x,y) + |y|^2 \leqslant |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2$$

Сравнивая начало и конец неравенства, получаем, что $|x + y| \leqslant |x| + |y|$. □

Пусть P и Q — два произвольных подмножества $\mathbb{E}$.

Определение. *Расстоянием между* P *и* Q *называют величину*

$$\rho(P,Q) := \inf\{\rho(x,y) \mid x \in P,\ y \in Q\}.$$

Пусть $x \in \mathbb{E}$ и $U \subseteq \mathbb{E}$ — подпространство.

Теорема. $\rho(x,U) = |\mathrm{ort}_U x|$, *причём* $\mathrm{pr}_U x$ *— единственный ближайший к* x *вектор из* U.

Доказательство. Пусть $y = \mathrm{pr}_U x$ и $z = \mathrm{ort}_U x$. Пусть также $y' \in U \backslash \{0\}$, тогда:

$$\rho(x, y + y') = |x - y - y'| = |z - y'| = \sqrt{|z|^2 + \underbrace{|y'|^2}_{>0}} > |z| = \rho(x,y).$$

Из того, что вектор z, которым мы ограничили снизу, определяется однозначно, и следует, что существует единственный ближайший вектор к x из U. □

Пусть $U \subseteq \mathbb{E}$ — подпространство, $x \in \mathbb{E}$, $(e_1, \ldots, e_k)$ — базис U.

Теорема. $(\rho(x,U))^2 = \dfrac{\det G(e_1, \ldots, e_k, x)}{\det G(e_1, \ldots, e_k)}$

Доказательство. Разобьем на два случая: когда x лежит в U и когда не лежит.

1. $x \in U$. Тогда $\rho(x,U) = 0$. Но с другой стороны, $\det G(e_1, \ldots, e_k, x) = 0$, поскольку эти векторы линейно зависимы, и значит, равенство выполняется.
2. $x \notin U$. Тогда $\rho(x,U) = |\mathrm{ort}_U x| = |z|$. Ортогонализация Грама-Шмидта к $(e_1, \ldots, e_k, x)$ даст нам $(f_1, \ldots, f_k, z)$, причём $|z|^2 = (z,z) = \dfrac{\delta_{k+1}}{\delta_k} = \dfrac{\det G(e_1, \ldots, e_k, x)}{\det G(e_1, \ldots, e_k)}$.

□