

Линейная Алгебра и Геометрия

Лекторий ПМИ ФКН

3-4 июня 2016

Определения

1. Алгебраическая форма комплексного числа. Сложение, умножение и деление комплексных чисел в алгебраической форме.

Запись $z = a + bi$, где $a, b \in \mathbb{R}$, называется алгебраической формой комплексного числа $z \in \mathbb{C}$.

$a = \operatorname{Re} z$ — действительная часть числа z .

$b = \operatorname{Im} z$ — мнимая часть числа z .

Сложение:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i.$$

Умножение:

$$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Деление:

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i, \quad (c + di) \neq 0.$$

В делении используется формула обратного элемента:

$$\frac{1}{a + bi} = \frac{\overline{a + bi}}{|a + bi|^2} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}.$$

2. Комплексное сопряжение и его свойства: сопряжение суммы и произведения комплексных чисел.

Отображение $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : a + bi \mapsto a - bi$ называется (комплексным) сопряжением. Само число $\bar{z} = a - bi$ называется (комплексно) сопряженным к числу $z = a + bi$.

Для любых двух комплексных чисел $z, w \in \mathbb{C}$ выполняется, что

(a) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$;

(b) $\overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}$.

3. Геометрическая модель комплексных чисел, интерпретация в ней сложения и сопряжения.

Заметим, что поле комплексных чисел $\mathbb{C} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ равно \mathbb{R}^2 . Следовательно, комплексные числа можно представить как точки на действительной плоскости \mathbb{R}^2 , или сопоставить их векторам.

В таком представлении сложение комплексных чисел интерпретируется как сложение векторов, а сопряжение — как отражение относительно оси $Ox(\operatorname{Re} z)$.

4. Модуль комплексного числа и его свойства: неотрицательность, неравенство треугольника, модуль произведения двух комплексных чисел.

Модулем комплексного числа $z = a + bi$ называется длина соответствующего вектора. Обозначение: $|z|$; $|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Свойства модуля:

- (a) $|z| \geq 0$, причем $|z| = 0$ тогда и только тогда, когда $z = 0$;
- (b) $|z + w| \leq |z| + |w|$ — неравенство треугольника;
- (c) $z \cdot \bar{z} = |z|^2$;
- (d) $|zw| = |z| \cdot |w|$;

5. Аргумент комплексного числа.

Аргументом комплексного числа $z \neq 0$ называется всякий угол φ такой что

$$\cos \varphi = \frac{a}{|z|} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \quad \sin \varphi = \frac{b}{|z|} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

6. Тригонометрическая форма комплексного числа.

Используя аргумент, можно представить комплексное число следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} a &= |z| \cos \varphi \\ b &= |z| \sin \varphi \end{aligned} \right\} \Rightarrow z = a + bi = |z| \cos \varphi + i |z| \sin \varphi = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

Запись $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ называется тригонометрической формой комплексного числа z .

7. Формула Муавра.

Пусть $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Тогда:

$$z^n = |z|^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)) \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

8. Извлечение корней из комплексных чисел.

Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $n \geq 2$.

Корнем n -й степени из числа z называется всякое $w \in \mathbb{C}$: $w^n = z$. То есть

$$\sqrt[n]{z} = \{w \in \mathbb{C} \mid w^n = z\}.$$

Представим z и w в тригонометрическом виде:

$$z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad w = |w|(\cos \psi + i \sin \psi)$$

Если $z = 0$, то $w = 0$. В противном случае, z имеет ровно n корней n -й степени:

$$\sqrt[n]{z} = \left\{ \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right) \mid k = 0, \dots, n-1 \right\}.$$

9. Решение квадратных уравнений с комплексными коэффициентами.

Пусть дано квадратное уравнение $az^2 + bz + c = 0$, где $a, b, c \in \mathbb{C}$ и $a \neq 0$. Тогда оно решается аналогично квадратным уравнениям над полем \mathbb{R} , с тем лишь отличием, что из дискриминанта всегда можно извлечь корень.

$$\{d_1, d_2\} = \sqrt[2]{b^2 - 4ac}$$
$$z_1 = \frac{-b + d_1}{2a}, \quad z_2 = \frac{-b + d_2}{2a}$$

10. Основная теорема алгебры комплексных чисел.

Всякий многочлен $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ степени n , где $n \geq 1$, $a_n \neq 0$, и $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ имеет корень.

11. Овеществление комплексного векторного пространства и его размерность.

V — векторное пространство над \mathbb{C} . Овеществление пространства V — это то же пространство V , рассматриваемое как пространство над \mathbb{R} . Обозначение: $V_{\mathbb{R}}$.

Пусть $\dim V < \infty$. Тогда $\dim V_{\mathbb{R}} = 2 \dim V$.

12. Комплексификация вещественного векторного пространства и его размерность.

Пусть W — пространство над \mathbb{R} . Комплексификация пространства W — это множество $W \times W = W^{\mathbb{C}} = \{(u, v) \mid u, v \in W\}$ с операциями $(u_1, v_1) + (u_2, v_2) = (u_1 + u_2, v_1 + v_2)$, $(a + bi)(u, v) = (au - bv, av + bu)$, где $(a + bi) \in \mathbb{C}$.

Рутинная проверка показывает, что $W^{\mathbb{C}}$ является векторным пространством над полем \mathbb{C} , причем $\dim W^{\mathbb{C}} = \dim W$.

13. Сумма двух подпространств векторного пространства.

Пусть V — конечномерное векторное пространство, а U и W — его подпространства.

Сумма подпространств U и W — это множество

$$U + W = \{u + w \mid u \in U, w \in W\},$$

которое является подпространством векторного пространства V .

14. Теорема о связи размерности суммы двух подпространств с размерностью их пересечения.

Пусть V — конечномерное векторное пространство, а U и W — его подпространства.

$$\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U + W)$$

15. Прямая сумма двух подпространств векторного пространства. Пусть V — конечномерное векторное пространство, а U и W — подпространства.

Если $U \cap W = \{0\}$, то $U + W$ называется прямой суммой.

16. Матрица перехода от одного базиса векторного пространства к другому.

Пусть V — векторное пространство, $\dim V = n$, $e = (e_1, \dots, e_n)$ и $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$ — базисы в V .

Матрицей перехода от базисе e к базису e' называется матрица, по столбцам которой стоят координаты базиса e' в базисе e .

$$e'_j = \sum_{i=1}^n c_{ij} e_i, \quad c_{ij} \in F$$
$$(e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n) \cdot C, \quad C = (c_{ij}) \text{ — матрица перехода}$$

17. Формула преобразования координат вектора при замене базиса векторного пространства.

Пусть V — векторное пространство. Формула преобразования координат вектора $v \in V$ при переходе от базиса e к e' :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad x_i = \sum_{j=1}^n c_{ij} x'_j,$$

где (x_1, \dots, x_n) — координаты вектора v в базисе e , (x'_1, \dots, x'_n) — координаты вектора v в базисе e' и C — матрица перехода от базиса e к базису e' .

18. Линейное отображение.

Пусть V и W — два векторных пространства над полем F .

Отображение $f : V \rightarrow W$ называется линейным, если:

- (a) $f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2), \quad \forall u_1, u_2 \in V;$
- (b) $f(\alpha u) = \alpha f(u), \quad \forall u \in V, \forall \alpha \in F.$

19. Изоморфизм векторных пространств. Изоморфные векторные пространства.

Пусть V и W — два векторных пространства над полем F .

Отображение $\varphi : V \rightarrow W$ называется изоморфизмом, если φ линейно и биективно. Обозначение: $\varphi : V \xrightarrow{\sim} W$.

Два векторных пространства V и W называются изоморфными, если существует изоморфизм $\varphi : V \xrightarrow{\sim} W$ (и тогда существует изоморфизм $V \xleftarrow{\sim} W$). Обозначение: $V \simeq W$ или $V \cong W$.

20. Критерий изоморфности двух конечномерных векторных пространств.

Два конечномерных векторных пространства V и W изоморфны тогда и только тогда, когда $\dim V = \dim W$.

21. Матрица линейного отображения.

Пусть V и W — векторные пространства, $e = (e_1, \dots, e_n)$ — базис V , $f = (f_1, \dots, f_m)$ — базис W , $\varphi : V \rightarrow W$ — линейное отображение.

Матрицей линейного отображения φ в базисах e и f (или по отношению к базисам e и f) называется такая матрица, у которой в j -ом столбце выписаны координаты вектора $\varphi(e_j)$ в базисе f .

$$\varphi(e_j) = a_{1j}f_1 + \dots + a_{mj}f_m = \sum_{i=1}^m a_{ij}f_i, \quad A = (a_{ij}) \in \text{Mat}_{m \times n} \text{ — матрица } \varphi$$

22. Сумма двух линейных отображений и её матрица.

Пусть $\varphi, \psi \in \text{Hom}(V, W)$.

Отображение $\varphi + \psi \in \text{Hom}(V, W)$ — это $(\varphi + \psi)(v) := \varphi(v) + \psi(v)$ — сумма отображений.

Пусть $e = (e_1, \dots, e_n)$ — базис V , $f = (f_1, \dots, f_m)$ — базис W , $\varphi, \psi \in \text{Hom}(V, W)$. При этом A_φ — матрица линейного отображения φ , A_ψ — матрица для ψ , $A_{\varphi+\psi}$ — для $\varphi + \psi$.

Тогда $A_{\varphi+\psi} = A_\varphi + A_\psi$.

23. Произведение линейного отображения на скаляр и его матрица.

Пусть $\varphi, \psi \in \text{Hom}(V, W)$.

Отображение $\alpha \in F, \alpha\varphi \in \text{Hom}(V, W)$ — это $(\alpha\varphi)(v) := \alpha(\varphi(v))$ — произведение линейного отображения на скаляр.

Пусть $e = (e_1, \dots, e_n)$ — базис V , $f = (f_1, \dots, f_m)$ — базис W , $\varphi, \psi \in \text{Hom}(V, W)$. При этом A_φ — матрица линейного отображения φ , A_ψ — матрица для ψ , $A_{\alpha\varphi}$ — для $\alpha\varphi$.

Тогда $A_{\alpha\varphi} = \alpha A_\varphi$.

24. Композиция линейных отображений и её матрица.

Возьмем три векторных пространства — U, V и W размерности n, m и k соответственно, и их базисы e, f и g . Также рассмотрим цепочку линейных отображений $U \xrightarrow{\psi} V \xrightarrow{\varphi} W$.

Отображение $\varphi \circ \psi \in \text{Hom}(U, W)$ — это $(\varphi \circ \psi)(v) := \varphi(\psi(v))$ — композиция линейных отображений.

Пусть A — матрица φ в базисах f и g , B — матрица ψ в базисах e и f , C — матрица $\varphi \circ \psi$ в базисах e и g .

Тогда $C = AB$.

25. Ядро и образ линейного отображения.

Пусть V и W — векторные пространства, $\varphi : V \rightarrow W$ — линейное отображение.

Ядро φ — это множество $\text{Ker } \varphi := \{v \in V \mid \varphi(v) = 0\}$.

Образ φ — это множество $\text{Im } \varphi := \{w \in W \mid \exists v \in V : \varphi(v) = w\}$.

26. Критерий инъективности линейного отображения в терминах его ядра.

Пусть $\varphi : V \rightarrow W$ — линейное отображение.

Отображение φ инъективно тогда и только тогда, когда $\text{Ker } \varphi = \{0\}$.

27. Связь между рангом матрицы линейного отображения и размерностью его образа.

Пусть V, W — векторные пространства, $e = (e_1, \dots, e_n)$ — базис V , $f = (f_1, \dots, f_m)$ — базис W , A — матрица φ по отношению к e, f .

Тогда $\dim \text{Im } \varphi = \text{rk } A$.

28. Критерий изоморфности линейного отображения в терминах его матрицы.

Пусть V и W — векторные пространства, $\varphi : V \rightarrow W$ — линейное отображение.

Отображение φ является изоморфизмом тогда и только тогда, когда его матрица является квадратной и невырожденной.

29. Ранг произведения двух матриц.

Пусть $A \in \text{Mat}_{k \times m}$, $B \in \text{Mat}_{m \times n}$. Тогда $\text{rk } AB \leq \min\{\text{rk } A, \text{rk } B\}$.

30. Теорема о связи размерностей ядра и образа линейного отображения.

Пусть $\varphi : V \rightarrow W$ — линейное отображение.

Тогда $\dim \text{Im } \varphi = \dim V - \dim \text{Ker } \varphi$.

31. Линейный оператор.

Пусть V — конечномерное векторное пространство.

Линейным оператором (или линейным преобразованием) называется всякое линейное отображение $\varphi : V \rightarrow V$, то есть из V в себя.

32. Матрица линейного оператора.

Пусть V — векторное пространство, $e = (e_1, \dots, e_n)$ — его базис и φ — его линейный оператор.

Матрицей линейного оператора φ называется такая матрица, в j -ом столбце которой стоят координаты вектора $\varphi(e_j)$ в базисе e .

$$(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) = (e_1, \dots, e_n) A, \quad A — матрица \varphi$$

33. Формула изменения матрицы линейного оператора при переходе к другому базису.

Пусть φ — линейный оператор векторного пространства V , A — матрица φ в базисе $e = (e_1, \dots, e_n)$. Пусть $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$ — другой базис, причём $(e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n)C$, где C — матрица перехода, и A' — матрица φ в базисе e' .

Тогда $A' = C^{-1}AC$.

34. Подобные матрицы.

Две матрицы $A', A \in M_n(F)$ называются подобными, если существует такая матрица $C \in M_n(F)$, $\det C \neq 0$, что $A' = C^{-1}AC$.

35. Подпространство, инвариантное относительно линейного оператора.

Пусть $\varphi: V \rightarrow V$ — линейный оператор.

Подпространство $U \subseteq V$ называется инвариантным относительно φ (или φ -инвариантным), если $\varphi(U) \subseteq U$. То есть $\forall u \in U: \varphi(u) \in U$.

36. Матрица линейного оператора в базисе, дополняющем базис инвариантного подпространства.

Пусть $\varphi: V \rightarrow V$ — линейный оператор.

Пусть $U \subset V$ — φ -инвариантное подпространство. Также пусть (e_1, \dots, e_k) — базис в U . Дополним его до базиса V : $e = (e_1, \dots, e_n)$. Тогда

$$\underbrace{A(\varphi, e)}_{\text{Матрица с углом нулей}} = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}, \quad \text{где } B \in M_k$$

37. Собственный вектор линейного оператора.

Пусть $\varphi: V \rightarrow V$ — линейный оператор.

Ненулевой вектор $v \in V$ называется *собственным* для V , если $\varphi(v) = \lambda v$ для некоторого $\lambda \in F$.

38. Собственное значение линейного оператора.

Элемент $\lambda \in F$ называется собственным значением линейного оператора φ векторного пространства V , если существует такой ненулевой вектор $v \in V$, что $\varphi(v) = \lambda v$.

39. Собственное подпространство линейного оператора.

Пусть $\varphi: V \rightarrow V$ — линейный оператор.

Множество $V_\lambda(\varphi) = \{v \in V \mid \varphi(v) = \lambda v\}$ называется собственным подпространством линейного оператора, отвечающим собственному значению λ .

40. Диагонализуемый линейный оператор.

Линейный оператор $\varphi: V \rightarrow V$ называется диагонализуемым, если существует базис e в V такой, что $A(\varphi, e)$ диагональна.

41. Критерий диагонализуемости линейного оператора в терминах собственных векторов.

Линейный оператор $\varphi: V \rightarrow V$ диагонализуем тогда и только тогда, когда в V существует базис из собственных векторов.

42. Характеристический многочлен линейного оператора.

Пусть $\varphi: V \rightarrow V$ — линейный оператор.

Многочлен $\chi_\varphi(t) = (-1)^n \det(\varphi - t \operatorname{id})$ называется характеристическим для линейного оператора φ .

43. Связь собственных значений линейного оператора с его характеристическим многочленом.

λ — собственное значение линейного оператора φ тогда и только тогда, когда $\chi_\varphi(\lambda) = 0$.

44. Алгебраическая кратность собственного значения линейного оператора.

Алгебраической кратностью собственного значения λ линейного оператора $\varphi: V \rightarrow V$ называется число k , которое равно кратности λ как корня характеристического многочлена φ .

45. Геометрическая кратность собственного значения линейного оператора.

Пусть $\varphi: V \rightarrow V$ — линейный оператор, λ — его собственное значение и $V_\lambda(\varphi)$ — соответствующее собственное подпространство.

Геометрической кратностью собственного значения λ называется число $\dim V_\lambda(\varphi)$.

46. Связь между алгебраической и геометрической кратностями собственного значения линейного оператора.

Геометрическая кратность не больше алгебраической кратности.

47. Сумма нескольких подпространств векторных пространств.

Пусть U_1, \dots, U_k — подпространства векторного пространства V . Суммой нескольких пространств называется $U_1 + \dots + U_k = \{u_1 + \dots + u_k \mid u_i \in U_i\}$.

48. Прямая сумма нескольких подпространств векторных пространств.

Пусть U_1, \dots, U_k — подпространства векторного пространства V .

Сумма нескольких подпространств $U_1 + \dots + U_k$ называется прямой, если из условия $u_1 + \dots + u_k = 0$, где $u_i \in U_i$, следует, что $u_1 = \dots = u_k = 0$.

49. Эквивалентные условия, определяющие прямую сумму нескольких подпространств векторного пространства.

Пусть U_1, \dots, U_k — подпространства векторного пространства V .

Следующие условия эквивалентны:

- (a) Сумма $U_1 + \dots + U_k$ — прямая;
- (b) Если e_i — базис U_i , то $e = e_1 \cup \dots \cup e_k$ — базис $U_1 + \dots + U_k$;
- (c) $\dim(U_1 + \dots + U_k) = \dim U_1 + \dots + \dim U_k$.

50. Сумма собственных подпространств линейного оператора, отвечающих попарно различным собственным значениям.

Пусть V — векторное пространство над полем F , φ его линейный оператор, $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ — набор собственных значений φ , где $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$, и $V_{\lambda_i}(\varphi) \subseteq V$ — соответствующее собственное подпространство.

Тогда сумма $V_{\lambda_1}(\varphi) + \dots + V_{\lambda_k}(\varphi)$ является прямой.

51. Критерий диагонализуемости линейного оператора в терминах его характеристического многочлена и кратностей собственных значений.

Пусть $\varphi: V \rightarrow V$ — линейный оператор.

Линейный оператор φ диагонализуем тогда и только тогда, когда

- (a) $\chi_\varphi(t)$ разлагается на линейные множители;
- (b) Если $\chi_\varphi(t) = (t - \lambda_1)^{k_1} \dots (t - \lambda_s)^{k_s}$, где $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$, то $\dim V_{\lambda_i}(\varphi) = k_i \ \forall i$ (то есть для любого собственного значения φ равны геометрическая и алгебраическая кратности).

52. Корневой вектор линейного оператора.

Пусть $\varphi: V \rightarrow V$ — линейный оператор.

Вектор $v \in V$ называется корневым вектором линейного оператора φ , отвечающим значению $\lambda \in F$, если существует $m \geq 0$ такое, что $(\varphi - \lambda \text{id})^m(v) = 0$.

Наименьшее такое m называют высотой корневого вектора v .

53. Корневое подпространство линейного оператора.

Пусть $\varphi: V \rightarrow V$ — линейный оператор.

Множество $V^\lambda(\varphi) = \{v \in V \mid \exists m \geq 0 : (\varphi - \lambda \text{id})^m(v) = 0\}$ называется корневым пространством для $\lambda \in F$.

54. Характеристический многочлен ограничения линейного оператора на корневое подпространство.

Пусть $\varphi: V \rightarrow V$ — линейный оператор.

Будем обозначать как $\varphi|_W$ ограничение линейного оператора на пространство W .

Характеристический многочлен линейного отображения $\varphi|_{V^\lambda(\varphi)}$ равен $(t - \lambda)^k$, где $k = \dim V^\lambda(\varphi)$.

55. Размерность корневого подпространства линейного оператора.

Пусть $\varphi: V \rightarrow V$ — линейный оператор.

Если λ — собственное значение φ , то $\dim V^\lambda(\varphi)$ равна алгебраической кратности λ .

56. Сумма корневых подпространств линейного оператора, отвечающих попарно различным собственным значениям.

Пусть $\varphi: V \rightarrow V$ — линейный оператор.

Если $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, где $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$ — собственные значения φ , то сумма $V^{\lambda_1}(\varphi) + \dots + V^{\lambda_k}(\varphi)$ — прямая.

57. Признак разложимости пространства в прямую сумму корневых подпространств линейного оператора.

Пусть $\varphi: V \rightarrow V$ — линейный оператор.

Если характеристический многочлен $\chi_\varphi(t)$ разлагается на линейные множители, причём $\chi_\varphi(t) = (t - \lambda_1)^{k_1} \dots (t - \lambda_s)^{k_s}$, то $V = \bigoplus_{i=1}^s V^{\lambda_i}(\varphi)$.

58. **Жорданова клетка.**

Пусть $\lambda \in F$. **Жорданова клетка** порядка n , отвечающая значению λ (с собственным значением λ) — это матрица следующего вида:

$$J_{\lambda}^n = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in M_n(F).$$

59. **Теорема о Жордановой нормальной форме линейного оператора.**

Пусть V — векторное пространство, φ — линейный оператор.

Пусть $\chi_{\varphi}(t)$ разлагается на линейные множители. Тогда существует базис e в V такой, что

$$A(\varphi, e) = \begin{pmatrix} J_{\mu_1}^{n_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{\mu_2}^{n_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_{\mu_p}^{n_p} \end{pmatrix} \quad (*)$$

Кроме того, матрица $(*)$ определена однозначно с точностью до перестановки жордановых клеток.

Матрица $(*)$ называется жордановой нормальной формой линейного оператора.

60. **Линейная функция.**

Линейной функцией (формой, функционалом) на векторном пространстве V называется всякое линейное отображение $\sigma: V \rightarrow F$.

61. **Двойственный (сопряжённый) базис пространства линейных функций.**

Пусть $e = (e_1, \dots, e_n)$ — базис V . Рассмотрим линейные формы $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ такие, что

$$\varepsilon_i(e_j) = \delta_{ij}, \text{ где } \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \text{ — символ Кронекера.}$$

То есть $\varepsilon_i = (\delta_{i1}, \dots, \delta_{in}) = (0, \dots, 1, \dots, 0)$.

Тогда $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ — базис в V^* , называющийся двойственным (сопряжённым) к базису e .

62. **Билинейная функция.**

Билинейной функцией (формой) на векторном пространстве V называется всякое билинейное отображение $\beta: V \times V \rightarrow F$. То есть это отображение, линейное по каждому аргументу:

- (a) $\beta(x_1 + x_2, y) = \beta(x_1, y) + \beta(x_2, y);$
- (b) $\beta(\lambda x, y) = \lambda \beta(x, y);$
- (c) $\beta(x, y_1 + y_2) = \beta(x, y_1) + \beta(x, y_2);$
- (d) $\beta(x, \lambda y) = \lambda \beta(x, y).$

63. **Матрица билинейной функции.**

Пусть V — векторное пространство, $\dim V < \infty$, $\beta: V \times V \rightarrow F$ — билинейная функция.

Матрицей билинейной функции в базисе $e = (e_1, \dots, e_n)$ называется матрица $B = (b_{ij})$, где $b_{ij} = \beta(e_i, e_j)$.

64. Формула для вычисления значений билинейной функции в координатах.

Пусть (e_1, \dots, e_n) — базис V , $\beta: V \times V \rightarrow F$ — билинейная функция, B — ее матрица в базисе e . Тогда для некоторых векторов $x = x_1e_1 + \dots + x_ne_n \in V$ и $y = y_1e_1 + \dots + y_ne_n \in V$ верно, что:

$$\beta(x, y) = (x_1, \dots, x_n)B \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

65. Формула изменения матрицы билинейной функции при переходе к другому базису.

Пусть $e = (e_1, \dots, e_n)$ и $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$ — два базиса V , β — билинейная функция на V . Пусть также $e' = eC$, где C — матрица перехода, также $B(\beta, e) = B$ и $B(\beta, e') = B'$.

Тогда $B' = C^T B C$.

66. Ранг билинейной функции.

Пусть $B(\beta, e)$ — матрица билинейной функции β в базисе e .

Число $\text{rk } B$ называется рангом билинейной функции β . Обозначение: $\text{rk } \beta$.

67. Симметричная билинейная функция.

Билинейная функция β называется симметричной, если $\beta(x, y) = \beta(y, x)$ для любых $x, y \in V$.

68. Квадратичная форма.

Пусть $\beta: V \times V \rightarrow F$ — билинейная функция. Тогда функция $Q_\beta: V \rightarrow F$, заданная формулой $Q_\beta(x) = \beta(x, x)$, называется квадратичной формой (функцией), ассоциированной с билинейной функцией β .

69. Соответствие между симметричными билинейными функциями и квадратичными формами.

Пусть $\beta: V \times V \rightarrow F$ — симметричная билинейная функция, где F — поле, в котором $0 \neq 2$ (то есть можно делить на два).

Отображение $\beta(x, y) \mapsto Q_\beta(x) = \beta(x, x)$ является биекцией между симметричными билинейными функциями на V и квадратичными функциями на V .

70. Поляризация квадратичной формы.

Симметричная билинейная функция $\beta(x, y) = \frac{1}{2}(Q(x+y) - Q(x) - Q(y))$ называется поляризацией квадратичной формы Q .

71. Матрица квадратичной формы.

Пусть V — векторное пространство, $\dim V < \infty$.

Матрицей квадратичной формы $Q: V \rightarrow F$ в базисе e называется матрица соответствующей ей симметричной билинейной функции $\beta: V \times V \rightarrow F$ в том же базисе.

72. Канонический вид квадратичной формы.

Квадратичная форма Q имеет в базисе $e = (e_1, \dots, e_n)$ канонический вид, если для любого вектора $x = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$ верно, что $Q(x) = a_1x_1^2 + \dots + a_nx_n^2$, где $a_i \in F$. Иными словами, она имеет диагональную матрицу.

73. Нормальный вид квадратичной формы.

Квадратичная форма Q имеет нормальный вид в базисе $e = (e_1, \dots, e_n)$, если для любого вектора $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ верно, что $Q(x) = a_1 x_1^2 + \dots + a_n x_n^2$, причем $a_i \in \{-1, 0, 1\}$.

74. Индексы инерции квадратичной формы.

Пусть Q — квадратичная форма над \mathbb{R} , которая в базисе $e = (e_1, \dots, e_n)$ имеет нормальный вид:

$$Q(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \dots - x_{s+t}^2,$$

где s — это количество положительных слагаемых, а t — отрицательных. Тогда:

(a) $i_+ := s$ — положительный индекс инерции;

(b) $i_- := t$ — отрицательный индекс инерции;

(c) $i_0 := n - s - t$ — нулевой индекс инерции.

75. Закон инерции для квадратичной формы.

Индексы инерции не зависят от выбора базиса, в котором квадратичная форма Q имеет нормальный вид.

76. Положительно/неотрицательно определенная квадратичная форма.

Квадратичная форма Q называется:

(a) положительно определенной, если $Q(x) > 0 \forall x \neq 0$. Обозначение: $Q > 0$;

(b) неотрицательно определенной, если $Q(x) \geq 0 \forall x$. Обозначение: $Q \geq 0$.

77. Отрицательно/неположительно определенная квадратичная форма.

Квадратичная форма Q называется:

(a) отрицательно определенной, если $Q(x) < 0 \forall x \neq 0$. Обозначение: $Q < 0$;

(b) неположительно определенной, если $Q(x) \leq 0 \forall x$. Обозначение: $Q \leq 0$.

78. Неопределенная квадратичная форма.

Квадратичная форма Q называется неопределенной, если существуют такие векторы x, y , что $Q(x) > 0$ и $Q(y) < 0$.

79. Теорема Якоби.

Пусть Q — квадратичная форма и $\delta_i \neq 0$ для всех i . Тогда $\text{rk } Q = n$ и $i_-(Q)$ равен числу перемен знака последовательности $\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_n$.

Здесь δ_i — угловой минор $i \times i$ -подматрицы матрицы соответствующей симметричной билинейной функции β в некотором базисе; $\delta_0 = 1$.

80. Критерий Сильвестра положительной определенности квадратичной формы.

Квадратичная форма Q является положительно определенной тогда и только тогда, когда $\delta_i > 0$ для всех i .

Здесь δ_i — угловой минор $i \times i$ -подматрицы матрицы соответствующей симметричной билинейной функции β в некотором базисе; $\delta_0 = 1$.

81. Критерий отрицательной определенности квадратичной формы.

Квадратичная форма Q является отрицательно определенной тогда и только тогда, когда:

$$\begin{cases} \delta_i < 0, & 2 \nmid i \\ \delta_i > 0, & 2 \mid i \end{cases}.$$

Здесь δ_i — угловой минор $i \times i$ -подматрицы матрицы соответствующей симметричной билинейной функции β в некотором базисе; $\delta_0 = 1$.

82. Евклидово пространство.

Евклидово пространство — это векторное пространство \mathbb{E} над полем \mathbb{R} , на котором задана положительно определённая симметрическая билинейная функция (\cdot, \cdot) , которую мы будем называть скалярным произведением.

83. Длина вектора в евклидовом пространстве.

Пусть \mathbb{E} — евклидово пространство, $x \in \mathbb{E}$. Тогда длиной вектора называют величину $|x| = \sqrt{(x, x)}$.

84. Неравенство Коши-Буняковского.

Пусть \mathbb{E} — евклидово пространство, $x, y \in \mathbb{E}$. Тогда $|(x, y)| \leq |x||y|$, причём знак равенства возможен тогда и только тогда, когда x и y пропорциональны.

85. Угол между векторами Евклидова пространства.

Пусть \mathbb{E} — евклидово пространство. Углом между векторами $x, y \in \mathbb{E}$ называют такой α , что $\cos \alpha = \frac{(x, y)}{|x||y|}$.

86. Матрица Грама системы векторов евклидова пространства.

Пусть \mathbb{E} — евклидово пространство.

Матрица Грама системы $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{E}$ это

$$G(v_1, \dots, v_k) := (g_{ij}), \quad g_{ij} = (v_i, v_j).$$

87. Свойства определителя матрица Грама.

Пусть \mathbb{E} — евклидово пространство, $G(v_1, \dots, v_k)$ — матрица Грама. Тогда:

- (a) $\det G(v_1, \dots, v_k) \geq 0$;
- (b) $\det G(v_1, \dots, v_k) = 0$ тогда и только тогда, когда v_1, \dots, v_k линейно зависимы.

88. Ортогональное дополнение системы векторов евклидова пространства.

Пусть S — произвольное подпространство евклидова пространства \mathbb{E} . Ортогональным дополнением к S называется множество $S^\perp = \{x \in \mathbb{E} \mid (x, y) = 0 \ \forall y \in S\}$.

89. Ортогональная проекция вектора на подпространство.

Пусть S — подпространство евклидова пространства \mathbb{E} . Тогда любой вектор $x \in \mathbb{E}$ единственным образом разбивается на сумму $x = y + z$, где $y \in S$ и $z \in S^\perp$.

Вектор y называется ортогональной проекцией вектора x на подпространство S . Обозначение: $\text{pr}_S x$.

90. Ортогональная составляющая вектора относительно подпространства.

Пусть S — подпространство евклидова пространства \mathbb{E} . Тогда любой вектор $x \in E$ единственным образом разбивается на сумму $x = y + z$, где $y \in S$ и $z \in S^\perp$.

Вектор z называется ортогональной составляющей вектора x относительно (вдоль) подпространства S . Обозначение: $\text{ort}_S x$.

91. Ортогональный базис.

Базис (e_1, \dots, e_n) в евклидовом пространстве \mathbb{E} называется ортогональным, если $(e_i, e_j) = 0 \ \forall i \neq j$. Это равносильно тому, что $G(e_1, \dots, e_n)$ диагональна.

92. Ортонормированный базис.

Базис (e_1, \dots, e_n) в евклидовом пространстве \mathbb{E} называется ортонормированным, если он является ортогональным базисом и дополнительно $(e_i, e_i) = 1 \ \forall i$. Это равносильно тому, что $G(e_1, \dots, e_n) = E$.

93. Ортогональная матрица.

Пусть $e = (e_1, \dots, e_n)$ и $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$ — два ортонормированных базиса в евклидовом пространстве \mathbb{E} , причем $(e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n)C$.

Тогда матрица C называется ортогональной.

94. Формула для ортогональной проекции вектора на подпространство в терминах его ортогонального базиса.

Пусть S — подпространство евклидова пространства \mathbb{E} , (e_1, \dots, e_k) — его ортогональный базис, $x \in \mathbb{E}$.

Тогда $\text{pr}_S x = \sum_{i=1}^k \frac{(x, e_i)}{(e_i, e_i)} e_i$. В частности, если базис ортонормированный, $\text{pr}_S x = \sum_{i=1}^k (x, e_i) e_i$

95. Теорема Пифагора в евклидовом пространстве.

Если векторы евклидова пространства x и y перпендикулярны, то $|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2$.

96. Расстояние между векторами евклидова пространства.

Расстоянием между векторами евклидова пространства x и y называется число $\rho(x, y) := |x - y|$.

97. Связь ортогональной составляющей вектора относительно подпространства с расстоянием до этого подпространства.

Пусть U — подпространство евклидова пространства \mathbb{E} .

Модуль ортогональной составляющей вектора $x \in E$ относительно подпространства U равен расстоянию от вектора x до подпространства U .

$$\rho(x, U) = |\text{ort}_U x|.$$

98. Формула для расстояния от вектора до подпространства в терминах матриц Грама.

Пусть U — подпространство евклидова пространства \mathbb{E} , $x \in \mathbb{E}$, (e_1, \dots, e_k) — базис U .

Тогда $(\rho(x, U))^2 = \frac{\det G(e_1, \dots, e_k, x)}{\det G(e_1, \dots, e_k)}$.

99. n -мерный параллелепипед и его объем.

N -мерным параллелепипедом, натянутым на векторы a_1, \dots, a_n евклидова пространства \mathbb{E} называется множество

$$P(a_1, \dots, a_n) := \left\{ x = \sum_{i=1}^n x_i a_i \mid 0 \leq x_i \leq 1 \right\}.$$

Объем n -мерного параллелепипеда $P(a_1, \dots, a_n)$ — это число $\text{vol } P(a_1, \dots, a_n)$, определяемое рекурсивно следующим образом:

$$\begin{aligned} n = 1 & \quad \text{vol } P(a_1) = |a_1| \\ n > 1 & \quad \text{vol } P(a_1, \dots, a_n) = \text{vol } P(a_1, \dots, a_{n-1}) \cdot |h| \end{aligned}$$

Где $h = \text{ort}_{\langle a_1, \dots, a_{n-1} \rangle} a_n$ — высота $P(a_1, \dots, a_n)$.

100. Формула для объема n -мерного параллелепипеда (любая из двух).

Пусть \mathbb{E} — векторное пространство, (e_1, \dots, e_n) — его ортогональный базис и $(a_1, \dots, a_n) = (e_1, \dots, e_n)A$ для некоторой матрицы $A \in M_n(\mathbb{R})$. Тогда $\text{vol } P(a_1, \dots, a_n) = |\det A|$.

Вторая формула: $\text{vol } P(a_1, \dots, a_n)^2 = \det G(a_1, \dots, a_n)$.

101. Критерий изоморфности двух конечномерных евклидовых пространств.

Два конечномерных евклидовых пространства \mathbb{E} и \mathbb{E}' изоморфны тогда и только тогда, когда их размерности совпадают.

102. Сопряженный линейный оператор.

Пусть \mathbb{E} — евклидово пространство. Линейный оператор ψ в \mathbb{E} называется сопряженным к φ , если для всех векторов $x, y \in \mathbb{E}$ верно, что $(\psi(x), y) = (x, \varphi(y))$. Обозначение: $\psi = \varphi^*$.

103. Матрица сопряженного оператора в произвольном и ортонормированном базисах.

Пусть \mathbb{E} — евклидово пространство, $e = (e_1, \dots, e_n)$ — базис \mathbb{E} , $G = G(e_1, \dots, e_n)$ — матрица Грама, φ — линейный оператор в \mathbb{E} , A_φ — матрица φ в базисе e , A_{φ^*} — матрица φ^* в том же базисе. Тогда:

$$A_{\varphi^*} = G^{-1} A_\varphi^T G.$$

В частности, если e — ортонормированный базис, то $A_{\varphi^*} = A_\varphi^T$.

104. Самосопряженный линейный оператор.

Линейный оператор φ евклидова пространства \mathbb{E} называется самосопряженным (симметрическим), если $\varphi^* = \varphi$. Это равносильно тому, что $(\varphi(x), y) = (x, \varphi(y))$ для любых векторов $x, y \in \mathbb{E}$.

105. Канонический вид самосопряженного линейного оператора.

Самосопряженный линейный оператор φ имеет канонический вид в базисе e , если его матрица в этом базисе имеет диагональный вид с собственными значениями на диагонали.

106. Приведение квадратичной формы к главным осям.

Для любой квадратичной формы Q над евклидовым пространством \mathbb{E} существует ортонормированный базис, в котором Q имеет канонический вид.

$$Q(x_1, \dots, x_n) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2.$$

Причем числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ определены однозначно с точностью до перестановки.

107. Ортогональный линейный оператор.

Линейный оператор φ евклидова пространства \mathbb{E} называется ортогональным, если

$$(\varphi(x), \varphi(y)) = (x, y), \quad \forall x, y \in \mathbb{E}.$$

Другими словами, φ сохраняет скалярное произведение, осуществляет изоморфизм \mathbb{E} на себя.

Эквивалентные определения:

- (a) $|\varphi(x)| = |x|$ для всех $x \in \mathbb{E}$, то есть φ сохраняет длины;
- (b) существует φ^{-1} , причем $\varphi^{-1} = \varphi^*$, то есть $\varphi \cdot \varphi^* = \varphi^* \cdot \varphi = \text{id}$;
- (c) если e — ортонормированный базис, то $A(\varphi, e)$ — ортогональная матрица;
- (d) если (e_1, \dots, e_n) — ортонормированный базис, то $(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$ — тоже ортонормированный базис.

108. Классификация ортогональных линейных операторов в одномерном и двумерном евклидовых пространствах.

Пусть \mathbb{E} — евклидово пространство, e — его базис, φ — его ортогональный линейный оператор, A — матрица φ в базисе e .

Если $\dim \mathbb{E} = 1$, то $\varphi = \pm \text{id}$.

Если $\dim \mathbb{E} = 2$, то возможны два случая:

- (a) φ это поворот пространства на угол α , $A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$;
- (b) φ это отражение относительно некоторой прямой, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

109. Канонический вид ортогонального линейного оператора.

Ортогональный линейный оператор φ евклидова пространства \mathbb{E} имеет в базисе e канонический вид, если его матрица в этом базисе имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \Pi(\alpha_1) & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \Pi(\alpha_k) & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & -1 & \\ & & & & & & 1 \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix},$$

где $\Pi(\alpha_i) = \begin{pmatrix} \cos \alpha_i & \sin \alpha_i \\ \sin \alpha_i & \cos \alpha_i \end{pmatrix}$ — матрица поворота на угол α_i .

110. Классификация ортогональных линейных операторов в трехмерном евклидовом пространстве.

Пусть \mathbb{E} — евклидово пространство, $\dim \mathbb{E} = 3$, φ — его ортогональный линейный оператор, $A(\varphi, e)$ — матрица φ в некотором базисе e .

Тогда возможны два случая:

- (a) φ это поворот на угол α вокруг оси $\langle e_3 \rangle$, где $e = (e_1, e_2, e_3)$ — некоторый ортонормированный базис, $A(\varphi, e) = \begin{pmatrix} \Pi(\alpha) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;
- (b) φ это «зеркальный поворот», то есть поворот на угол α вокруг прямой e_3 и зеркальное отражение относительно $\langle e_1, e_2 \rangle = \langle e_3 \rangle^\perp$, где $e = (e_1, e_2, e_3)$ — некоторый ортонормированный базис, $A(\varphi, e) = \begin{pmatrix} \Pi(\alpha) & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.