

Лекция 23 от 29.02.2016

Сумма собственных подпространств

Вспомним, чем закончилась прошлая лекция.

Пусть V — векторное пространство, $U_1, \dots, U_k \subseteq V$ — векторные подпространства.

Сумма $U = U_1 + \dots + U_k$ является прямой, если из условия $u_1 + \dots + u_k = 0$ следует, что $u_1 = \dots = u_k = 0$, где $u_i \in U_i$. Обозначение: $U = U_1 \oplus \dots \oplus U_k$.

Эквивалентные условия:

1. $U = U_1 \oplus \dots \oplus U_k$.
2. Если e_i — базис U_i , то $e = e_1 \cup \dots \cup e_k$ — базис U .
3. $\dim U = \dim U_1 + \dots + \dim U_k$.

Пусть V — векторное пространство над полем F , $\varphi \in L(V)$, $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ — набор собственных значений φ , где $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$, и $V_{\lambda_i}(\varphi) \subseteq V$ — соответствующее собственное подпространство.

Предложение. Сумма $V_{\lambda_1}(\varphi) + \dots + V_{\lambda_k}(\varphi)$ является прямой.

Доказательство. Докажем индукцией по k .

База: $k = 1$. Тут все ясно.

Теперь пусть утверждение доказано для всех значений, меньших k . Докажем для k .

Пусть $v_i \in V_{\lambda_i}(\varphi)$ и пусть $v_1 + \dots + v_k = 0$. Тогда:

$$\varphi(v_1 + \dots + v_k) = \varphi(0) = 0$$

$$\varphi(v_1) + \dots + \varphi(v_k) = 0$$

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k = 0$$

Теперь вычтем из нижней строчки $v_1 + \dots + v_k = 0$, домноженное на λ_k . Получим:

$$(\lambda_1 - \lambda_k)v_1 + \dots + (\lambda_k - \lambda_k)v_k = 0$$

$$(\lambda_1 - \lambda_k)v_1 + \dots + (\lambda_{k-1} - \lambda_k)v_{k-1} + 0v_k = 0$$

Но из предположения индукции, а также потому что $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$, следует, что $v_1 = \dots = v_{k-1} = 0$. Но тогда и $v_k = 0$.

Следовательно, сумма прямая, что нам и требовалось. \square

Диагонализируемость

Следствие. Если характеристический многочлен имеет ровно n попарно различных корней, где $n = \dim V$, то φ диагонализируем.

Доказательство. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — корни $\chi_\varphi(t)$, $\lambda_i \neq \lambda_j$. Тогда для всех i выполняется, что $V_{\lambda_i}(\varphi) \neq \{0\}$ и, следовательно, $\dim V_{\lambda_i}(\varphi) = 1$. Но так как сумма $V_{\lambda_1}(\varphi) + \dots + V_{\lambda_k}(\varphi)$ — прямая, то $\dim(V_{\lambda_1}(\varphi) + \dots + V_{\lambda_k}(\varphi)) = \dim V_{\lambda_1}(\varphi) + \dots + \dim V_{\lambda_k}(\varphi) = n$. Иными словами, $V = V_{\lambda_1}(\varphi) \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}(\varphi)$.

Выберем произвольные $v_i \in V_{\lambda_i} \setminus \{0\}$. Тогда (v_1, \dots, v_n) будет базисом в V . И так как все v_i — собственные значения для φ , то φ диагонализируем. \square

Теорема (Критерий диагонализируемости - 2). Линейный оператор φ диагонализируем тогда и только тогда, когда

1. $\chi_\varphi(t)$ разлагается на линейные множители;
2. Если $\chi_\varphi(t) = (t - \lambda_1)^{k_1} \dots (t - \lambda_s)^{k_s}$, где $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$, то $\dim V_{\lambda_i}(\varphi) = k_i \forall i$ (то есть для любого собственного значения V равны геометрическая и алгебраическая кратности).

Доказательство.

\Rightarrow Так как φ — диагонализируем, то существует базис $\mathfrak{e} = (e_1, \dots, e_n)$ такой, что:

$$A(\varphi, \mathfrak{e}) = \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix} = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n).$$

Тогда:

$$\chi_\varphi(t) = (-1)^n \begin{vmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{vmatrix} = (-1)^n (\mu_1 - t) \dots (\mu_n - t) = (t - \mu_1) \dots (t - \mu_n).$$

Итого, первое условие выполняется.

Теперь перепишем характеристический многочлен в виде $\chi_\varphi(t) = (t - \lambda_1)^{k_1} \dots (t - \lambda_s)^{k_s}$, где $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$ и $\{\lambda_1, \dots, \lambda_s\} = \{\mu_1, \dots, \mu_n\}$. Тогда $V_{\lambda_i} \supseteq \langle e_j \mid \mu_j = \lambda_i \rangle$, следовательно, $\dim V_{\lambda_i}(\varphi) \geq k_i$. Но мы знаем, что $\dim V_{\lambda_i} \leq k_i$! Значит, $\dim V_{\lambda_i} = k_i$.

\Leftarrow Так как $V_{\lambda_1}(\varphi) + \dots + V_{\lambda_s}(\varphi)$ — прямая, то $\dim(V_{\lambda_1}(\varphi) + \dots + V_{\lambda_s}(\varphi)) = k_1 + \dots + k_s = n$.

Пусть \mathfrak{e}_i — базис в V_{λ_i} . Тогда $\mathfrak{e}_1 \cup \dots \cup \mathfrak{e}_s$ — базис в V . То есть мы нашли базис из собственных векторов, следовательно, φ диагонализируем.

□

Инвариантные подпространства в \mathbb{R}^n

Пусть V — векторное пространство над полем \mathbb{C} , $\varphi \in L(V)$. Тогда в V есть собственный вектор (или одномерное φ -инвариантное пространство).

Теперь пусть V — векторное пространство над полем \mathbb{R} , $\varphi \in L(V)$.

Теорема. Существует одномерное или двумерное φ -инвариантное векторное подпространство.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{e} = (e_1, \dots, e_n)$ — базис в V . Комплексифицируем V .

$$\begin{aligned} V^{\mathbb{C}} &= \{u + iv \mid u, v \in V\} \\ V^{\mathbb{C}} \supset V &= \{u + i0 \mid u \in V\} \end{aligned}$$

Рассмотрим линейный оператор $\varphi_{\mathbb{C}} \in L(V^{\mathbb{C}})$, заданный как $\varphi_{\mathbb{C}}(e_i) = \varphi(e_i)$, $\forall i$. Значит, e_1, \dots, e_n — базис в $V^{\mathbb{C}}$. Следовательно, $\chi_{\varphi_{\mathbb{C}}}(t) = \chi_\varphi(t)$, так как $A(\varphi_{\mathbb{C}}, \mathfrak{e}) = A(\varphi, \mathfrak{e})$.

Случай 1: $\chi_\varphi(t)$ имеет один действительный корень. Отсюда следует, что в V есть собственный вектор, что равносильно существованию одномерного φ -инвариантного подпространства (тогда $V^{\mathbb{C}}$ нам не нужен).

Случай 2: χ_φ не имеет действительных корней. Пусть $\lambda + i\mu$ — некоторый корень $\chi_\varphi(t)$, который, напомним, равен $\chi_{\varphi_{\mathbb{C}}}(t)$. Тогда существует собственный вектор $u + iv \in V^{\mathbb{C}}$ такой, что:

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathbb{C}}(u + iv) &= (\lambda + i\mu)(u + iv) \\ \varphi_{\mathbb{C}}(u + iv) &= \varphi_{\mathbb{C}}(u) + i\varphi_{\mathbb{C}}(v) = \varphi(u) + i\varphi(v) \\ (\lambda + i\mu)(u + iv) &= \lambda u - \mu v + i(\mu u + \lambda v)\end{aligned}$$

Сравнивая два последних равенства, получаем:

$$\begin{aligned}\varphi(u) &= \lambda u - \mu v \\ \varphi(v) &= \mu u + \lambda v\end{aligned}$$

Следовательно, $\langle u, v \rangle$ — φ -инвариантное подпространство, двумерное если u и v линейно независимы и одномерное в противном случае. \square

Пример. Поворот на α в \mathbb{R}^2 : $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$. Тогда $u = e_1$, $v = e_2$, $\lambda + i\mu = \cos \alpha + i \sin \alpha$.

Пусть V — векторное пространство над F , $\dim V = n$.

Операции над $L(V)$:

1. Сложение: $(\varphi + \psi)(v) = \varphi(v) + \psi(v)$.
2. Умножение на скаляр: $(\alpha\varphi)(v) = \alpha\varphi(v)$.
3. Умножение: $(\varphi\psi)(v) = \varphi(\psi(v))$.

В частности, для любого $P(x) \in \mathbb{F}[x]$, $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ и для любого $\varphi \in L(V)$ определен линейный оператор $P(\varphi) \in L(V)$: $P(\varphi) = a_n \varphi^n + \dots + a_1 \varphi + a_0 \text{id}$.

Корневые векторы и корневые подпространства

Определение. Вектор $v \in V$ называется *корневым вектором* линейного оператора φ , отвечающим значению $\lambda \in F$, если существует $m \geq 0$ такое, что $(\varphi - \lambda \text{id})^m(v) = 0$.

Наименьшее такое m называют *высотой* корневого вектора v .

Замечание.

1. Вектор $v = 0$ для любого φ имеет высоту 0.
2. Высоту 1 имеют все собственные векторы.

Пример. $V = \mathbb{F}[x]_{\leq n}$, $\Delta : f \rightarrow f'$. Здесь $\lambda = 0$ — единственное собственное значение. Все векторы — корневые, отвечающие $\lambda = 0$.

Определение. Множество $V^\lambda(\varphi) = \{v \in V \mid \exists m \geq 0 : (\varphi - \lambda \text{id})^m(v) = 0\}$ называется *корневым пространством* для $\lambda \in F$.

Упражнение. $V^\lambda(\varphi)$ — подпространство в V .

Замечание. $V_\lambda(\varphi) \subseteq V^\lambda(\varphi) \forall \lambda \in F$.