Лекция 18 от 29.01.2016

Матрица перехода и переход к новому базису

Пусть V — векторное пространство, $\dim V = n$, вектора $e_1, \ldots, e_n$ — базис, а $e'_1, \ldots, e'_n$ — некий набор из n векторов. Тогда каждый вектор из этого набора линейно выражается через базис.

$$e'_j = \sum_{i=1}^{n} c_{ij} e_i, \quad c_{ij} \in F$$
$$(e'_1, \ldots, e'_n) = (e_1, \ldots, e_n) \cdot C, \quad C = (c_{ij})$$

То есть мы получили матрицу, где в j-ом столбце стоят коэффициенты линейного разложения вектора e'_j в базисе $(e_1, \ldots, e_n)$.

Теперь пусть $e'_1, \ldots, e'_n$ — тоже базис в V. Вспомним, что на прошлой лекции уже было сказано, что в этом случае $\det C \neq 0$.

Определение. *Матрица C называется матрицей перехода от базиса $(e_1, \ldots, e_n)$ к базису $(e'_1, \ldots, e'_n)$.*

Замечание. *Матрица перехода от $(e'_1, \ldots, e'_n)$ к $(e_1, \ldots, e_n)$ есть C^{-1}.*

И небольшое замечание касательно записи: когда базис записан в скобках, то есть $(e_1, \ldots, e_n)$, то нам важен порядок векторов в нем, в противном случае, при записи $e_1, \ldots, e_n$, порядок не важен.

Итого, имеем два базиса пространства V, $(e_1, \ldots, e_n)$ и $(e'_1, \ldots, e'_n)$, и матрицу перехода C такую, что $(e'_1, \ldots, e'_n) = (e_1, \ldots, e_n) \cdot C$. Возьмем некий вектор v и разложим его по обоим базисам.

$$v \in V \Rightarrow \begin{array}{ll} v = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n, & \quad x_i \in F \\ v = x'_1 e'_1 + \ldots + x'_n e'_n, & \quad x'_i \in F \end{array}$$

Предложение. *Формула преобразования координат при переходе к другому базису:*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \qquad \text{или} \qquad x_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x'_j$$

Доказательство. С одной стороны:

$$v = x'_1 e'_1 + \ldots + x'_n e'_n = \begin{pmatrix} e'_1 & \ldots & e'_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & \ldots & e_n \end{pmatrix} C \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

Однако с другой стороны:

$$v = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n = \begin{pmatrix} e_1 & \ldots & e_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Сравнивая одно с другим, получаем, что:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

□

Линейные отображения

Пусть V и W — два векторных пространства над полем F.

Определение. *Отображение $f : V \to W$ называется линейным, если:*

1. $f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2), \quad \forall u_1, u_2 \in V$;
2. $f(\alpha u) = \alpha f(u), \quad \forall u \in V, \forall \alpha \in F$.

Замечание. *Свойства 1–2 эквивалентны тому, что*

$$f(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 f(u_1) + \alpha_2 f(u_2), \quad \forall u_1, u_2 \in V, \forall \alpha_1, \alpha_2 \in F.$$

Здесь важно понимать, что сначала сложение векторов и умножение на скаляр происходит в пространстве V, а потом в пространстве W.

Простейшие свойства.

1. $f(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$

   Доказательство. $f(\vec{0}_V) = f(0 \cdot \vec{0}_V) = 0 f(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$ □

2. $\varphi(-u) = -\varphi(u)$, где $(-u)$ — обратный элемент к u.

   Доказательство. $\varphi(-u) + \varphi(u) = \varphi(-u + u) = \varphi(\vec{0}_V) = \vec{0}_W \Rightarrow \varphi(-u) = -\varphi(u)$ □

Примеры

(0) $V \to V : v \mapsto v$ — тождественное отображение.

(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ линейно $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : f(x) = kx, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Доказательство.

$\Rightarrow$ $f(x) = f(x \cdot 1) = x f(1) = kx$, где $k = f(1)$

$\Leftarrow$ Проверим необходимые условия линейности.

1. $f(x) = kx \Rightarrow f(x_1 + x_2) = k(x_1 + x_2) = kx_1 + kx_2 = f(x_1) + f(x_2)$
2. $f(\alpha x) = k\alpha x = \alpha k x = \alpha f(x)$

□

(2) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ — декартова система координат.

2.1 Поворот вокруг 0 на угол α линеен.

2.2 Проекция на прямую, проходящую через 0, линейна.

(3) $P_n = R[x]_{\leqslant n}$ — пространство всех многочленов от x степени не больше n.

$$\Delta : f \mapsto f' \text{ (производная)}$$

$$\left.\begin{array}{c} (f+g)' = f' + g' \\ (\alpha f)' = \alpha f' \end{array}\right| \Rightarrow \Delta \text{ — линейное отображение из } P_n \text{ в } P_{n-1}$$

(4) Векторное пространство V, $\dim V = n$, $e_1, \ldots, e_n$ — базис.

$$V \mapsto \mathbb{R}^n$$

$$x_1e_1 + \ldots + x_ne_n \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ — тоже линейное отображение.}$$

(5) $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}$, $k \geqslant 1$ — любое, $\varphi : \mathrm{Mat}_{n\times k} \to \mathrm{Mat}_{m\times k}$.

$$\varphi(X) = A \cdot X$$
$$A(X_1 + X_2) = AX_1 + AX_2$$
$$A(\alpha X) = \alpha(AX)$$

Частный случай, при $k = 1$ — $\varphi : F^n \to F^m$.

Изоморфизм

Определение. *Отображение $\varphi : V \to W$ называется изоморфизмом, если φ линейно и биективно. Обозначение: $\varphi : V \xrightarrow{\sim} W$.*

Рассмотрим те же примеры:

(0) Изоморфизм.

(1) Изоморфизм, при $k \neq 0$.

(2) 2.1 Изоморфизм.

2.2 Не изоморфизм.

(3) Не изоморфизм.

(4) Изоморфизм.

(5) Задача: доказать, что φ — изоморфизм тогда и только тогда, когда $n = m$ и $\det A \neq 0$.

Предложение. *Пусть $\varphi : V \to W$ — изоморфизм. Тогда $\varphi^{-1} : W \to V$ — тоже изоморфизм.*

Доказательство. Так как φ — биекция, то φ^{-1} — тоже биекция.

$$w_1, w_2 \in W \Rightarrow \exists v_1, v_2 \in V : \begin{matrix} \varphi(v_1) = w_1 & v_1 = \varphi^{-1}(w_1) \\ \varphi(v_2) = w_2 & v_2 = \varphi^{-1}(w_2) \end{matrix}$$

Тогда осталось только доказать линейность обратного отображения. Для этого проверим выполнение необходимых условий линейности.

1. $\varphi^{-1}(w_1 + w_2) = \varphi^{-1}\left(\varphi(v_1) + \varphi(v_2)\right) = \varphi^{-1}\left(\varphi(v_1 + v_2)\right) = \mathrm{id}(v_1 + v_2) = v_1 + v_2$
2. $\alpha \in F, \quad \varphi^{-1}(\alpha w_1) = \varphi^{-1}(\alpha\varphi(v_1)) = \varphi^{-1}(\varphi(\alpha v_1)) = \mathrm{id}(\alpha v_1) = \alpha v_1.$

□

Определение. *Два векторных пространства V и W называются изоморфными, если существует изоморфизм $\varphi : V \xrightarrow{\sim} W$ (и тогда существует изоморфизм $V \xleftarrow{\sim} W$ по предположению). Обозначение: $V \simeq W$ или $V \cong W$.*

Отображения можно соединять в композиции:

$$\left.\begin{array}{l}\varphi : U \to V \\ \psi : V \to W\end{array}\right| \Rightarrow \psi \circ \varphi : U \to W \quad \psi \circ \varphi(u) = \psi(\varphi(u))$$

Предложение.

1. *Если φ и ψ линейны, то $\psi \circ \varphi$ тоже линейно.*
2. *Если φ и ψ изоморфизмы, то $\psi \circ \varphi$ тоже изоморфизм.*

Доказательство.

1. Опять-таки, просто проверим необходимые условия линейности.
   (a) $(\psi \circ \varphi)(u_1 + u_2) = \psi(\varphi(u_1 + u_2)) = \psi(\varphi(u_1) + \varphi(u_2)) = \psi(\varphi(u_1)) + \psi(\varphi(u_2)) =$
   $= (\psi \circ \varphi)(u_1) + (\psi \circ \varphi)(u_2)$
   (b) $(\psi \circ \varphi)(\alpha u) = \psi(\varphi(\alpha u)) = \psi(\alpha\varphi(u)) = \alpha\psi(\varphi(u)) = \alpha(\psi \circ \varphi)(u)$
2. Следует из сохранения линейности и того, что композиция биекций тоже биекция.

□

Следствие. *Изоморфизм это отношение эквивалентности на множестве всех векторных пространств над фиксированным полем F.*

Доказательство.

Рефлексивность $V \simeq V$.

Симметричность $V \simeq W \Rightarrow W \simeq V$.

Транзитивность $(V \simeq U) \ \wedge \ (U \simeq W) \Rightarrow V \simeq W$.

□

То есть множество всех векторных пространств над фиксированным полем F разбивается на попарно непересекающиеся классы, причем внутри одного класса любые два пространства изоморфны. Такие классы называются *классами эквивалентности.*

Теорема. *Если два конечномерных векторных пространства V и W над полем F изоморфны, то $\dim V = \dim W$.*

Но для начала докажем следующую лемму.

Лемма (1)**.** *Для векторного пространства V над полем F размерности n верно, что $V \simeq F^n$.*

Доказательство. Рассмотрим отображение $\varphi : V \to F^n$ из примера 4. Пусть $(e_1, \ldots, e_n)$ — базис пространства V. Тогда:

$$x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad x_i \in F.$$

Отображение φ линейно и биективно, следовательно φ — изоморфизм. А раз существует изоморфное отображение между пространствами V и F^n, то они изоморфны. □