

# Дискретная математика. Модуль 3. Лекция 1

Лекторий ПМИ ФКН 2015-2016

Вадим Гринберг

Жижин Пётр

Пузырев Дмитрий

25 января 2016

## 1 Равномощные множества. Конечные и бесконечные. Счётные множества. Свойства счётных множеств

### Равномощные множества. Конечные множества

Определение: Равномощными множествами называются такие множества, между которыми установима биекция. Обозначение:  $A \sim B$ .

Очевидные свойства равномощных множеств:  $\forall A$  – множеств.

- $A \sim A$ .
- $A \sim B \Rightarrow B \sim A$ .
- $A \sim B, B \sim C \Rightarrow A \sim C$ .

Определение: Множество  $A$  – конечно тогда и только тогда, когда  $\exists n \in \mathbb{N}_0 : A \sim [n]$  ( $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ ).

Но ведь могло бы так получиться, что  $[n] \sim [k]$ ? Оказывается, нет.

Утверждение: Если  $n > k \Rightarrow [n] \not\sim [k]$ .

*Доказательство.* Докажем по индукции от  $n$ .

**База**

$$n = 0 \Rightarrow \forall k \Rightarrow n < k \Rightarrow \text{Нет таких множеств} \Rightarrow [n] \not\sim [k].$$

**Предположение**

$$\forall j \leq n \Rightarrow \forall k < j \Rightarrow [j] \not\sim [k].$$

**Переход**

$k < n + 1$ . Доказать:  $[n + 1] \not\sim [k]$ . Предположим это не так.

Тогда существует функция  $f : [n + 1] \rightarrow [k]$  и  $f$  – биекция. Пусть  $f(n + 1) = b$ . Но  $b$  может и не совпадать с  $k$ . Для этого введём транспозицию  $\tau : [k] \rightarrow [k], \tau(b) = k, \tau(k) = b, \forall i \neq k, i \neq b \Rightarrow \tau(i) = i$ .

Получили функцию  $g = \tau \circ f$ . Причем  $g$  – биекция как композиция двух биекций.  $g(n + 1) = \tau(b) = k$  и  $g([n]) = [k - 1]$  (так как  $g$  – биекция).

Получили биекцию  $g : [n] \rightarrow [k - 1], k - 1 < n$ , а это противоречит предположению индукции ( $k - 1 < j = n$ ).

А значит  $[n + 1] \not\sim [k]$ .

**Q.E.D.**

## Бесконечные множества. Счётные множества

Определение: Множество бесконечно тогда и только тогда, когда оно не конечно.

$A$  – бесконечно. Значит  $A$  – не пусто.  $\exists a_0 \in A$ . Пусто ли  $A \setminus a_0$ ? Нет. Иначе  $A$  – содержит один элемент и конечно. Тогда  $\exists a_1 \in A \setminus a_0$ . Множество и без этих двух элементов бесконечно. Ну и так далее.

Определение: Получившееся множество  $A' = \{a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$  назовем счётным (равномощным множеству натуральных чисел). Биекция в этом случае очевидна:  $f : i \mapsto a_i$ .

Утверждение:  $\mathbb{N}$  – бесконечно.

*Доказательство.* Пусть это не так и  $\exists f : [n] \rightarrow \mathbb{N}$  – инъекция. Тогда верно следующее:  $\mathbb{N} \ni \max\{f(0), f(1), \dots, f(n)\} + 1 \notin f([n])$ . А значит  $f$  – не биекция. А значит  $\mathbb{N}$  не равномощно никакому  $[n]$ . **Q.E.D.**

Заметим вот что:  $\mathbb{N} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N}$  путём биекции  $f : n \mapsto n - 1$ .

Утверждение: Множество бесконечно тогда и только тогда, когда оно равномощно своему подмножеству.

*Доказательство.* Докажем, что если множество бесконечно, то оно равномощно некоторому подмножеству.

Как мы уже выяснили, в любом бесконечном множестве есть счётное подмножество. Пусть  $B = \{b_0, b_1, \dots, b_n, \dots\}$  – счётное подмножество бесконечного множества  $A$ .

Установим биекцию  $f : A \setminus \{b_0\} \rightarrow A$ .

$$f(x) = \begin{cases} b_{n-1}, & x \in B \\ x, & x \notin B \end{cases}$$

Получили то, что и требовалось.

В обратную сторону доказывается на семинарах, но примерно так: пусть  $B \subset A, B \sim A$ . Пусть  $A$  – конечно. Тогда  $|B| < |A|$  **Q.E.D.**

## Свойства счётных множеств

1.  $A$  – счётное множество. Тогда  $A \subseteq A$  счётно или конечно.

*Доказательство.*  $A = \{a_0, a_1, \dots, a_n, \dots\}$ . Вычеркнем все элементы, в  $A'$  не входящие.  $A' = \{a_{j_0}, a_{j_1}, \dots, a_{j_n}, \dots\}$ .

Если последовательность  $\{a_{j_n}\}$  конечна, то и  $A'$  конечно. Если она бесконечна, то  $A'$  очевидно счётно. **Q.E.D.**

2. Если  $A, B$  – счётные, то и  $A \cup B$  счётно.

*Доказательство.*  $A = (a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$ .  $B = (b_1, b_2, \dots, b_n, \dots)$ .

$A \cup B = (a_0, b_0, a_1, b_1, \dots, a_n, b_n, \dots)$ .

Но может получиться так, что в новой последовательности некоторые элементы встречаются по два раза (они входят в оба множества). Вычеркнем каждый такой элемент по одному разу. И получим последовательность, задающую счётное множество. **Q.E.D.**

3.  $\mathbb{Z}$  – счётно.

*Доказательство.*  $Z = \mathbb{N} \cup (-\mathbb{N})$  – объединение счётных множеств. Счётно по свойству 2 ( $-A = \{-a \mid a \in A\}$ ). **Q.E.D.**

4. Если  $A$  – счётно, а  $B$  – конечно или счётно, то  $A \cup B$  счётно.

*Доказательство.* Доказывается аналогично свойству 2. **Q.E.D.**

5. Если  $A$  – счётно. И  $B_1, B_2, \dots, B_k$  – счётны или конечны, то  $A \cup B_1 \cup \dots \cup B_k$  – счётно.

*Доказательство.* К доказательству свойства 4 нужно добавить доказательство по индукции. **Q.E.D.**

6. Счётное объединение конечных или бесконечных множеств конечно или счётно.

$\{A_0, A_1, \dots, A_n, \dots\} = \mathfrak{F} \sim \mathbb{N}$ .  $A_i$  – множество.  $\mathfrak{F}$  называется семейством множеств.  
 $A = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$ .

Утверждение:  $A$  – счётно.

*Доказательство.*

$$A_0 = (a_{00}, a_{01}, \dots, a_{0n}, \dots)$$

$$A_1 = (a_{10}, a_{11}, \dots, a_{1n}, \dots)$$

Некоторые из множеств могут быть конечны. Дополним их до счётных пустым символом  $\lambda \notin A$ .

Построим последовательность:  $a_{00}, a_{01}, a_{10}, a_{02}, a_{11}, a_{20}, \dots$  (то есть проходим последовательно все значения сумм индексов от 0 до  $\infty$ ).

Теперь исключим из последовательности повторения и символы  $\lambda$ . Получим требуемую последовательность  $(a'_0, a'_1, \dots, a'_n, \dots)$ .

Теперь получим функцию  $f : [n] \rightarrow A$  или  $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ .  $f$  – биекция. В первом случае множество конечно, во втором счётно.

Можно было бы и не вводить  $\lambda$ , а исключать эти элементы сразу, но так проще (нет никаких условий). **Q.E.D.**

Примеры:

- Пусть  $A_i = \{i\}$ . Тогда  $A = \mathbb{N}$  (счётно).
- Пусть  $A_i = \{1\}$ . Тогда  $A = \{1\}$  (конечно).

7. Декартово произведение счётных множеств счётно. Напомним, что

$$A \times B = \{(a; b) \mid a \in A, b \in B\}$$

*Доказательство.*  $A = (a_0, \dots, a_n, \dots) \Rightarrow A \times B = \{a_0\} \times B \cup \dots \cup \{a_n\} \times B \cup \dots \Rightarrow A \times B$  – счётно (по свойству 6). **Q.E.D.**

8. Если  $A$  – счётно, то  $A^k$  – счётно.

*Доказательство.* Очевидно по индукции из свойства 7. **Q.E.D.**

9.  $\mathbb{Q}$  – счётно.

*Доказательство.* Рассмотрим множество  $\mathbb{Q}_p$  несократимых дробей. Пусть функция  $f : \mathbb{Q}_p \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_+$  – инъекция (она переводит дробь в пару чисел числитель-знаменатель). Тогда она является биекцией на  $f(\mathbb{Q}_p) \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_+$ . Причём  $f(\mathbb{Q}_p)$  тогда счётно по свойству 1 так как не является конечным, а  $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}_+$  счётно по свойству 7. **Q.E.D.**

10. Пусть  $A^*$  – конечные последовательности конечного (непустого) или счётного алфавита  $A$ .

Утверждение:  $A^*$  – счётно

*Доказательство.*  $A^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} A^n$ . При этом  $A^n$  – слова длины  $n$ .  $A^n$  – счётно по свойству 8. И тогда само  $A^*$  счётно по свойству 6. **Q.E.D.**

11. Определение:  $\alpha \in \mathbb{R}$  – алгебраическое число тогда и только тогда, когда  $\alpha$  – корень некоторого многочлена с целыми коэффициентами.

Утверждение: Множество алгебраических чисел счётно.

*Доказательство.* Приведём только план доказательства:

- (a) Докажем, что многочленов с целыми коэффициентами счётно.
- (b) Для каждого из этих многочленов есть не более  $n$  корней – алгебраических чисел.
- (c) Удаляем повторяющиеся корни.
- (d) Получим все алгебраические числа, которых, очевидно, счётно.

**Q.E.D.**