

# Лекция 15 от 11.01.2016

## Скаляры. Поля

Для начала вспомним, что такое *векторное пространство* — это множество, на котором введены операции сложения, умножения на скаляр и в котором будут выполняться восемь аксиом (см. 1 семестр). Но что такое скаляр?

**Определение.** Скаляры — это элементы некоторого фиксированного поля.

**Определение.** Полем называется множество  $F$ , на котором заданы две операции — «сложение»  $(+)$  и «умножение»  $(\cdot)$ ,

$$F \times F \rightarrow F \Rightarrow \begin{aligned} + : (a, b) &\mapsto a + b \\ \cdot : (a, b) &\mapsto a \cdot b \end{aligned}$$

удовлетворяющие следующим свойствам («аксиомам поля»):  $\forall a, b, c \in F$

1.  $a + b = b + a$  (коммутативность по сложению);
2.  $(a + b) + c = a + (b + c)$  (ассоциативность по сложению);
3.  $\exists 0 \in F : 0 + a = a + 0 = a$  (существование нулевого элемента);
4.  $\exists -a \in F : a + (-a) = (-a) + a = 0$  (существование противоположного элемента);
5.  $a(b + c) = ab + ac$  (дистрибутивность; связь между сложением и умножением);
6.  $ab = ba$  (коммутативность по умножению);
7.  $(ab)c = a(bc)$  (ассоциативность по умножению);
8.  $\exists 1 \in F \setminus \{0\} : 1 \cdot a = a \cdot 1 = a$  (существование единицы);
9.  $a \neq 0 \Rightarrow \exists a^{-1} \in F : a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$  (существование обратного элемента).

**Пример.**

- $\mathbb{Q}$  — рациональные числа;
- $\mathbb{R}$  — вещественные числа;
- $\mathbb{C}$  — комплексные числа;
- $F_2 = \{0, 1\}$ , при сложении и умножении по модулю 2.

## Поле комплексных чисел

Поле действительных чисел  $\mathbb{R}$  плохо тем, что в нем уравнение  $x^2 + 1 = 0$  не имеет решения. Отсюда возникает идея определить поле, удовлетворяющее следующим требованиям:

(T1) новое поле содержит  $\mathbb{R}$ ;

(T2) уравнение  $x^2 + 1 = 0$  имеет решение.

Давайте формально построим такое поле.

**Определение.** Полем  $\mathbb{C}$  комплексных чисел называется множество  $\{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ , на котором заданы операции сложения:  $(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$  и умножения:  $(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + b_1 a_2)$ .

**Предложение.**  $\mathbb{C}$  и впрямь является полем.

*Доказательство.* Операции сложения и умножения введены, осталось только проверить выполнение всех аксиом.

1. очевидно, так как сложение идет поэлементно;
2. также очевидно;
3.  $0 = (0, 0)$ ;
4.  $-(a, b) = (-a, -b)$ ;
5. почти очевидно (т.е. прямая проверка);
6. ясно (тоже прямая проверка);
7. проверим:

$$\begin{aligned} ((a_1, b_1)(a_2, b_2))(a_3, b_3) &= (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + b_1 a_2)(a_3, b_3) = \\ &= (a_1 a_2 a_3 - b_1 b_2 b_3 - a_1 b_2 b_3 - b_1 a_2 b_3, a_1 a_2 b_3 - b_1 b_2 b_3 + a_1 b_2 a_3 + b_1 a_2 a_3) = \\ &= (a_1, b_1)(a_2 a_3 - b_2 b_3, a_2 b_3 + b_2 a_3) = (a_1, b_1)((a_2, b_2)(a_3, b_3)); \end{aligned}$$

8.  $1 = (1, 0)$ ;
9.  $(a, b) \neq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \neq 0 \rightarrow (a, b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$ .

□

Осталось только проверить, правда ли введенное поле  $\mathbb{C}$  удовлетворяет нашим требованиям:

(Т1) Заметим, что в подмножестве  $\mathbb{C}$ , состоящим из элементов вида  $(a, 0)$  операции сложения и умножения будут работать как в поле вещественных чисел.

$$\begin{aligned} (a, 0) + (b, 0) &= (a + b, 0) \\ (a, 0) \cdot (b, 0) &= (ab, 0) \end{aligned}$$

Следовательно, отображение  $a \mapsto (a, 0)$  отождествляет  $\mathbb{R}$  с этим подмножеством, то есть  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ . Что нам и требуется.

(Т2) Примем  $i = (0, 1)$ . Тогда  $i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$ . Итого, требование выполнено.

Однако запись комплексных чисел в виде упорядоченной пары  $(a, b)$  не очень удобна и громоздка. Поэтому преобразуем запись следующим образом:

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1) = a + bi.$$

Тем самым мы получили реализацию поля  $\mathbb{C}$  комплексных чисел как множества  $\{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$ , с обычным сложением и умножением.

**Определение.** Запись  $z = a + bi$  называется алгебраической формой комплексного числа  $z \in \mathbb{C}$ .

$a = \operatorname{Re} z$  — действительная часть числа  $z$ .

$b = \operatorname{Im} z$  — мнимая часть числа  $z$ .

**Определение.** Числа вида  $z = bi$  (т.е.  $\operatorname{Re} z = 0$ ) называются чисто мнимыми.

**Определение.** Отображение  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : a + bi \mapsto a - bi$  называется (комплексным) сопряжением. Само число  $\bar{z} = a - bi$  называется (комплексно) сопряженным к числу  $z = a + bi$ .

**Лемма.** Для любых двух комплексных чисел  $z, w \in \mathbb{C}$  выполняется, что

$$1. \overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w};$$

$$2. \overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}.$$

*Доказательство.* Пусть  $z = a + bi$ , а  $w = c + di$ .

$$1. \bar{z} + \bar{w} = a - bi + c - di = (a + c) - (b + d)i = \overline{z + w}$$

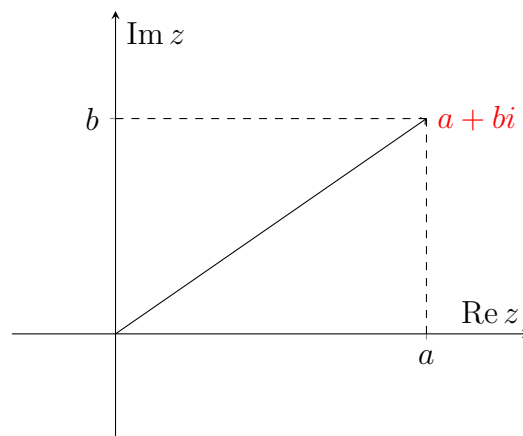
$$2. \bar{z} \cdot \bar{w} = (a - bi)(c - di) = ac - adi - bci + bdi^2 = (ac - bd) - (ad + bc)i = \overline{zw}$$

□

**Замечание.** Равенство  $z = \bar{z}$  равносильно равенству  $\operatorname{Im} z = 0$ , то есть  $z \in \mathbb{R}$ .

## Геометрическая модель поля $\mathbb{C}$

Заметим, что поле комплексных чисел  $\mathbb{C} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$  равно  $\mathbb{R}^2$ . Следовательно, комплексные числа можно представить как точки на действительной плоскости  $\mathbb{R}^2$ , или сопоставить их векторам.



В таком представлении сложение комплексных чисел сопоставляется со сложением векторов, а сопряжение — с отражением относительно оси  $Ox(\operatorname{Re} z)$ .

**Определение.** Модулем комплексного числа  $z = a + bi$  называется длина соответствующего вектора. Обозначение:  $|z|; |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$ .

Свойства модуля:

1.  $|z| \geq 0$ , причем  $|z| = 0$  тогда и только тогда, когда  $z = 0$ ;
2.  $|z + w| \leq |z| + |w|$  — неравенство треугольника;
3.  $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ ;

*Доказательство.*  $(a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$ . □

4.  $|zw| = |z| \cdot |w|$ ;

*Доказательство.* Возведем в квадрат.

$$|z|^2 \cdot |w|^2 = z\bar{z}w\bar{w} = (zw)\overline{zw} = zw\overline{zw} = |zw|^2$$

□

**Замечание.** Из свойства 3 следует, что при  $z \neq 0$  выполняется:

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

$$(a + bi)^{-1} = \frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}.$$

**Определение.** Аргументом комплексного числа  $z \neq 0$  называется всякий угол  $\varphi$  такой что

$$\cos \varphi = \frac{a}{|z|} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \quad \sin \varphi = \frac{b}{|z|} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Неформально говоря, аргумент  $z$  — это угол между осью  $Ox$  и соответствующим вектором.

**Замечание.**

1. Аргумент определен с точностью до  $2\pi$ .
2. Аргумент  $z = 0$  не определен.

Для  $z \neq 0$  введем множество  $\text{Arg } z = \{\text{множество всех аргументов } z\}$  — *большой аргумент*. Также введем *малый аргумент*  $\arg z$  — это такой  $\varphi \in \text{Arg } z$ , который удовлетворяет условию  $0 \leq \varphi < 2\pi$  и, следовательно, определен однозначно.

Используя аргумент, можно представить комплексное число следующим образом:

$$\left. \begin{array}{l} a = |z| \cos \varphi \\ b = |z| \sin \varphi \end{array} \right\} \Rightarrow z = a + bi = |z| \cos \varphi + i|z| \sin \varphi = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

**Определение.** Запись  $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  называется *тригонометрической формой комплексного числа*  $z$ .

**Замечание.**

$$r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = r_2 \\ \varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$