

# Линейная алгебра и геометрия, 3 модуль, лекция 16

18.01.2016

Вспомним предыдущую лекцию и кое-что дополним

## Замечание.

1. Элемент  $0$  — единственный.
2. И элемент  $-a$  единственный.
3. Даже элемент  $1$  единственный.
4. Как это ни удивительно, но  $a^{-1}$  тоже единственный.

Легко увидеть, что пункты 2 и 4 доказываются одинаково с точностью до замены операции, как и пункты 1 и 3.

*Доказательство.* Докажем пункт 3. Если существует  $1'$  — еще одна единица, тогда по аксиомам  $1' = 1' \cdot 1 = 1$ .

Докажем теперь пункт 4. Пусть  $b$  и  $c$  таковы, что  $b \neq c$  и  $ba = ab = ac = ca = 1$ . Тогда

$$bac = (ba)c = b(ac) = 1 \cdot c = c = 1 \cdot b = b$$

То есть  $b = c$ . □

## Комплексные числа (продолжение)

**Предложение.** Пусть  $z_1 = |z_1|(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ ,  $z_2 = |z_2|(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ . Тогда

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2|(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

Иными словами, при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.

*Доказательство.* Просто раскроем скобки и приведем подобные.

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= |z_1||z_2|(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + i(\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_2 \sin \varphi_1)) = \\ &= |z_1||z_2|(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \end{aligned}$$
□

**Следствие.**  $\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$

**Следствие (Формула Муавра).** Пусть  $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ . Тогда:

$$z^n = |z|^n(\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)) \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

**Замечание.** В комплексном анализе функция  $\exp x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  доопределяется до  $\exp z: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  следующим образом:

$$\exp z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

И тогда оказывается, что  $\exp z$  обладает теми же свойствами, кроме того:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi \quad \forall \varphi \in \mathbb{C}.$$

Всякое  $z \in \mathbb{C}$  можно представить в виде  $z = |z|e^{i\varphi}$ , где  $\varphi \in \text{Arg}(z)$ . Тогда формула Муавра приобретает совсем очевидный вид:

$$|z_1|e^{i\varphi_1} \cdot |z_2|e^{i\varphi_2} = |z_1||z_2|e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}.$$

**Замечание.** Отображение  $R_\varphi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \rightarrow ze^{i\varphi}$ ,  $\varphi \in \mathbb{R}$  определяет поворот на угол  $\varphi$  вокруг 0.

## Корни из комплексного числа

Пусть  $n \in \mathbb{N}$  и  $n \geq 2$ .

**Определение.** Корнем  $n$ -й степени из числа  $z$  называется всякое  $w \in \mathbb{C}$ :  $w^n = z$ . То есть

$$\sqrt[n]{z} = \{w \in \mathbb{C} \mid w^n = z\}.$$

Если  $z = 0$ , то  $|z| = 0$ , а значит  $|w| = 0$ ,  $w = 0$ . Получается, 0 — единственное комплексное число, у которого корень определён однозначно.

Далее рассмотрим случай  $z \neq 0$ .

$$\begin{aligned} z &= |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi) \\ w &= |w|(\cos \psi + i \sin \psi) \end{aligned}$$

$$z = w^n \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = |w|^n \\ n\psi \in \text{Arg}(z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |w| = \sqrt[n]{|z|} \\ n\psi = \varphi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |w| = \sqrt[n]{|z|} \\ \psi = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

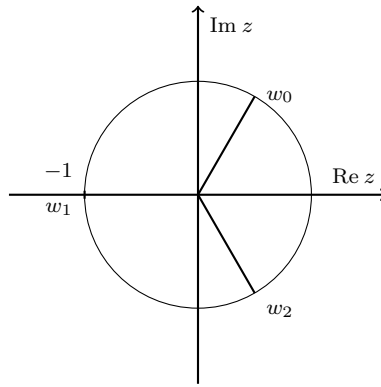
С точностью до кратного  $2\pi$  различные значения в формуле  $\psi = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}$  получаются при  $k = 0, 1, \dots, n-1$ . Значит  $z$  имеет ровно  $n$  корней  $n$ -й степени.

$$\sqrt[n]{z} = \left\{ |z| \left( \cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right) \mid k = 0, \dots, n-1 \right\}$$

**Замечание.** Точки из множества  $\sqrt[n]{z}$  при  $z \neq 0$  лежат в вершинах правильного  $n$ -угольника, вписанного в окружность радиуса  $\sqrt[n]{|z|}$ .

**Пример.**  $z = -1 = \cos \pi + i \sin \pi$

$$\sqrt[3]{z} = \left\{ \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}; \cos \pi + i \sin \pi; \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right\}$$



## Решение квадратных уравнений с комплексными коэффициентами

Пусть дано квадратное уравнение  $az^2 + bz + c = 0$ , где  $a, b, c \in \mathbb{C}$  и  $a \neq 0$ . Тогда имеем:

$$\begin{aligned} z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} &= 0 \\ z^2 + 2\frac{b}{2a}z + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} &= 0 \\ \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\ z + \frac{b}{2a} &\in \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{aligned}$$

То есть все решения — это  $z_1 = \frac{-b + d_1}{2a}$ ,  $z_2 = \frac{-b + d_2}{2a}$ , где  $\{d_1, d_2\} = \sqrt[2]{b^2 - 4ac}$ . В частности, квадратное уравнение всегда имеет комплексный корень, а при  $b^2 - 4ac \neq 0$  два корня.

**Теорема** (Основная теорема алгебры). *Всякий многочлен  $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$  степени  $n$ , где  $n \geq 1$ ,  $a_n \neq 0$ , и  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$  имеет корень.*

## 1 Векторные пространства над произвольным полем

И снова вспомним, что такое векторное пространство:

- некоторое множество  $V$ ;
- есть операция сложения  $V \times V \rightarrow V$ ;
- есть операция умножения на скаляр  $F \times V \rightarrow V$ ;
- выполняются 8 аксиом.

Все основные понятия и результаты теории векторных пространств из прошлого полугодия можно перенести на случай пространства над произвольным полем  $F$  без изменений.

**Пример.** Пусть  $V$  — векторное пространство над полем из двух элементов,  $\dim V = n$ . Тогда  $|V| = 2^n$ . Действительно, каждое конечномерное пространство обладает базисом (в данном случае  $e_1, \dots, e_n$ ). Тогда  $V = \{k_1 e_1 + k_2 e_2 + \dots + k_n e_n \mid k_i \in F\}$ . Но очень легко заметить, что всего таких линейных комбинаций  $2^n$