Линейная алгебра и геометрия, 3 модуль, лекция 17

25.01.2016

Пусть V - векторное пространство над $\mathbb{C}$.

Определение. *Овеществление пространства V - это то же пространство V, рассматриваемое как пространство над $\mathbb{R}$.*

Операция умножения на элементы $\mathbb{R}$ в V уже есть, так как $\mathbb{R}$ - подполе в $\mathbb{C}$. Обозначение $V_{\mathbb{R}}$

Пример. $\mathbb{C}_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^2$

Предложение. *V - векторное пространство над $\mathbb{C}$, $\dim V < \infty$. Тогда $\dim V_{\mathbb{R}} = 2\dim V$.*

Доказательство. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ - базис в V. Тогда $V = \{z_1 e_1 + \ldots + z_n e_n \mid z_k \in \mathbb{C}\}$, причём такая запись единственная в силу определения базиса. Пусть $z_k = a_k + ib_k$, причём такая запись тоже единственная. Тогда будем иметь

$$\begin{aligned} V &= \{(a_1 + ib_1)\, e_1 + \ldots + (a_n + ib_n)\, e_n \mid a_k, b_k \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{a_1 e_1 + \ldots + a_n e_n + b_1 ie_1 + \ldots + b_n ie_n \mid a_k, b_k \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

И причём такая запись тоже единственная. Выходит, что $e_1, e_2, \ldots, e_n, ie_1, ie_2, \ldots, ie_n$ - базис в $V_{\mathbb{R}}$, в котором $2n = 2\dim V$ элементов. □

Определение. *Комплексификация пространства W - это множество $W \times W = W^{\mathbb{C}} = \{(u, v) \mid u,v \in W\}$ с операциями $(u_1, v_1) + (u_2, v_2) = (u_1 + u_2, v_1 + v_2)$, $(a + ib)\,(u, v) = (au - bv, av - bu)$.*

Пример. $\mathbb{R}^{\mathbb{C}} = \mathbb{R}$

Утверждение. *В нём выполняются все 8 аксиом векторного пространства над $\mathbb{C}$.*

W отождествляется подмножеством $\{(u, 0) \mid u \in W\}$. Действительно

$$w \in W \leftrightarrow (w,0) \in W^{\mathbb{C}};\ i\,(w,0) = (0, w) \in W^{\mathbb{C}}$$

В итоге $\forall\,(u, v) \in W^{\mathbb{C}}$ представим в виде

$$(u,v) = (u,0) + (0,v) = (u,0) + i\,(v,0) = u + iv$$

То есть $W^{\mathbb{C}} = \{u + iv \mid u,v \in W\}$.

Предложение. $\dim W^{\mathbb{C}} = \dim W$

Замечание. *Здесь $W^{\mathbb{C}}$ - пространство над $\mathbb{C}$, а W - над $\mathbb{R}$.*

Доказательство. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ - базис в W. Тогда

$$\begin{aligned} W^{\mathbb{C}} = \{(u,v) \mid u,v \in W\} &= \{(a_1 e_1 + a_2 e_2 + \ldots + a_n e_n, b_1 e_1 + b_2 e_2 + \ldots + b_n e_n) \mid a_k, b_k \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{(a_1 e_1, b_1 e_1) + \ldots + (a_n e_n, b_n e_n)\} = \{(a_1 + ib_1)\, e_1 + \ldots + (a_n + ib_n) e_n)\} = \\ &= \{z_1 e_1 + \ldots + z_n e_n \mid z_k \in \mathbb{C}\} \end{aligned}$$

То есть выходит, что $e_1, \ldots, e_n$ - базис в $W^{\mathbb{C}}$. □

Пусть V - конечномерное векторное пространство, а U, W — подпространства (в качестве упражнения лектор предлагает доказать, что их пересечение — тоже подпространство)

Определение. *Сумма подпространств* U, W *— это множество*

$$U + W = \{u + w \mid u \in U, W \in W\}$$

Замечание. $\dim(U \cap W) \leqslant \dim U \leqslant \dim(U + W)$

Пример. *Двумерные плоскости в пространстве* $\mathbb{R}^3$ *содержат общую прямую.*

Теорема. $\dim(U \cap W) = \dim U + \dim V - \dim(U + V)$

Доказательство. Положим $p = \dim(U \cap V)$, $k = \dim U$, $m = \dim V$. Выберем базис $a = \{a_1, \ldots, a_k\}$ в пересечении. Его можно дополнить до базиса W и до базиса U. Значит $\exists b = \{b_1, \ldots, b_{k-p}\}$ такой, что $a \cup b$ - базис в U и $\exists c = \{c_1, \ldots, c_{m-p}\}$ - такой, что $a \cup c$ - базис в W. Докажем, что $a \cup b \cup c$ - базис в $U + V$. Во-первых, докажем, что $U + V$ порождается множеством $a \cup b \cup c$.

$$\begin{gathered}
v \in U + V \Rightarrow \exists u \in U, w \in W\colon\ v = u + w \\
u \in U =< a \cup b > \subset < a \cup b \cup c > \\
w \in W =< a \cup c > \subset < a \cup b \cup c > \\
\Rightarrow v = u + v \in < a \cup b \cup c > \\
\Rightarrow U + V =< a \cup b \cup c >
\end{gathered}$$

Во - вторых докажем их линейную независимость. Пусть скаляры $\alpha_1, \ldots, \alpha_p, \beta_1, \ldots, \beta_{k-p}, \gamma_1, \ldots, \gamma_{m-p}$ таковы, что

$$\begin{gathered}
\underbrace{\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_p a_p}_{x} + \underbrace{\beta_1 b_1 + \ldots + \beta_{k-p} b_{k-p}}_{y} + \underbrace{\gamma_1 c_1 + \ldots + \gamma_{m-p} c_{m-p}}_{z} = 0 \\
x + y + z = 0 \\
z = -x - y \\
z \in W \\
-x - y \in U \cap W \\
\Rightarrow \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_p \in F\colon z = \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_p a_p
\end{gathered}$$

Тогда $\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_p a_p - \gamma_1 c_1 - \ldots - \gamma_{m-p} c_{m-p} = 0$. Но $a \cup c$ - базис W. $\Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_p = \gamma_1 = \ldots = \gamma_{m-p} = 0$. Но тогда $0 = x + y = \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_p a_p + \beta_1 b_1 + \ldots + \beta_{k-p} b_{k-p}$. Но $a \cup b$ - базис $U + W \Rightarrow \alpha_1 = \ldots = \alpha_p = \beta_1 = \ldots = \beta_{k-p} = 0$. Значит все коэффициенты равны нулю и линейная независимость тем самым доказана. То есть $a \cup b \cup c$ - базис $U + W$.

$$\begin{gathered}
\dim(U + W) = |a \cup b \cup c| = |a| + |b| + |c| = p + k - p + m - p = k + m - p = \\
= \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)
\end{gathered}$$

$\square$

Определение. *Если* $U \cap W = \{0\}$, *то* $U + W$ *называется прямой суммой*

Следствие. *В таком случае* $\dim(U + W) = \dim U + \dim W$

Пример. U *- плоскость,* W *- прямая в* $\mathbb{R}^3$.

Переход к новому базису

Пусть V - векторное пространство, $\dim V = n$, $e_1, \ldots, e_n$ - базис. То есть

$$\forall v \in V \exists! v = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$$

где $x_1, \ldots, x_n \in F$ - координаты v в базисе $(e_1, \ldots, e_n)$. Пусть также есть базис $e'_1, \ldots, e'_n$.

$$e'_1 = c_{11}e_1 + c_{21}e_2 + \ldots + c_{n1}e_n$$
$$e'_2 = c_{12}e_2 + c_{22}e_2 + \ldots + c_{n2}e_n$$
$$\ldots e'_n = c_{1n}e_1 + c_{2n}e_2 + \ldots + c_{nn}e_n$$

Обозначим матрицу $C = (c_{ij})$. Тогда можно переписать $(e'_1, \ldots, e'_n) = (e_1, \ldots, e_n) \cdot C$.

Предложение. $e'_1, \ldots, e'_n$ *образуют базис* $\Leftrightarrow \det C \neq 0$.

Доказательство. $(\Rightarrow)$ $e'_1, \ldots, e'_n$ - базис, а значит $\exists C' \in M_n:$

$$(e_1, \ldots, e_n) = (e'_1, \ldots, e'_n)\, C' = (e_1, \ldots, e_n)\, C'C$$
$$E = CC'$$
$$C' = C^{-1} \Leftrightarrow \exists C^{-1} \Leftrightarrow \det C \neq 0$$

$(\Leftarrow)$ $\det C \neq 0 \Rightarrow \exists C^{-1}$. Покажем, что $e'_1, \ldots, e'_n$ в таком случае линейно независимы. Пусть $x_1 e'_1 + x_2 e'_2 + \ldots + x_n e'_n = 0$. Тогда можно записать

$$(e'_1, e'_2, \ldots, e'_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

$$(e_1, \ldots, e_n)\, C \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

Поскольку $(e_1, \ldots, e_n)$ - базис, то $C \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$. Умножая слева на обратную матрицу, получаем, что $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ $\square$