Лекция 27 от 13.04.2016

Привидение к каноническому и нормальному виду

Пусть V — векторное пространство, $\dim V = n$, $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ — базис V, $Q\colon V \to F$ — квадратичная функция на V.

Теорема. *Для любой квадратичной функции Q существует такой базис, в котором Q имеет канонический вид.*

Доказательство. Метод Лагранжа.

Докажем индукцией по n.

При $n = 1$ имеем, что $Q(x) = ax^2$, то есть уже имеем канонический вид.

Предположим, что для всех значений меньших n доказано. Докажем тогда для n.

Пусть $A = (a_{ij})$ — матрица квадратичной функции Q в исходном базисе. Тогда:

$$Q(x) = Q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_{ij}x_ix_j$$

Случай 0: пусть $a_{ij} = 0$ для всех пар (i, j). Тогда $Q(x) = 0x_1^2 + \ldots + 0x_n^2$ — уже канонический вид.

Случай 1: пусть существует такое i, что $a_{ii} \neq 0$. Перенумеровав переменные, считаем, что $a_{11} \neq 0$. Тогда:

$$\begin{gathered}Q(x_1, \ldots, x_n) = (a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \ldots + 2a_{1n}x_1x_n) + Q_1(x_2, \ldots, x_n) = \\ = \frac{1}{a_{11}}\left((a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n)^2 - (a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n)^2\right) + Q_1(x_2, \ldots, x_n) = \\ = \frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n)^2 + Q_2(x_2, \ldots, x_n)\end{gathered}$$

Теперь сделаем следующую замену переменных:

$$\begin{gathered}x'_1 = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ x'_2 = x_2, \ldots, x'_n = x_n\end{gathered}$$

Получаем:

$$Q(x'_1, \ldots, x'_n) = \frac{1}{a_{11}}x'_1 + Q_2(x'_2, \ldots, x'_n)$$

Дальше пользуемся предположением индукции для Q_2, окончательно получая канонический вид для исходной Q.

Случай 2: пусть $a_{ii} = 0$ для всех i, но существует такая пара (i, j), где $i < j$, что $a_{ij} \neq 0$. Переименовываем переменные так, чтобы $a_{12} \neq 0$ и делаем замену:

$$\begin{gathered}x_1 = x'_1 - x'_2 \\ x_2 = x'_1 + x'_2 \\ x_3 = x'_3, \ldots, x_n = x'_n\end{gathered}$$

Тогда $2a_{12}x_1x_2 = 2a_{12}x_1'^2 - 2a_{12}x_2'^2$. Следовательно:

$$Q(x'_1, \ldots, x'_n) = 2a_{12}x_1'^2 - 2a_{12}x_2'^2 + 2\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_{ij}x'_ix'_j$$

Таким образом, мы пришли к случаю 1, который уже умеем решать. $\square$

Следствие. *Всякую квадратичную функцию над полем $\mathbb{R}$ можно заменой базиса привести к нормальному виду.*

Доказательство. Существует такой базис, в котором $Q(x_1, \ldots, x_n) = a_1x_1^2 + \ldots + a_nx_n^2$. Сделаем замену:

$$x_i' = \begin{cases} \sqrt{|a_i|}x_i, & \text{если } a_i \neq 0 \\ x_i, & \text{если } a_i = 0 \end{cases}$$

Второе условие нужно для того, чтобы можно было выразить старые переменные через новые, не деля при этом на ноль.

Получаем, что $Q(x_1', \ldots, x_n') = \varepsilon_1 x_1'^2 + \ldots + \varepsilon_n x_n'^2$, где $\varepsilon_i = \operatorname{sgn} a_i \in \{-1, 0, 1\}$. Что нам и было надо. $\square$

Замечание. *Если $F = \mathbb{C}$, то любую квадратичную функцию Q можно привести к виду $Q(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \ldots + x_k^2$, где $k \leqslant n$ ($k = \operatorname{rk} Q$), то есть $B(Q, \mathbb{e}) = \operatorname{diag}(1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$.*

Закон инерции, индексы инерции

Пусть Q — квадратичная функция над $\mathbb{R}$, которая в базисе $\mathbb{e}$ имеет нормальный вид:

$$Q(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \ldots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \ldots - x_{s+t}^2,$$

где s — это количество положительных слагаемых, а t — отрицательных.

Теорема (Закон инерции). *Числа s, t не зависят от выбора базиса, в котором Q имеет нормальный вид.*

Доказательство. Пусть $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ — базис такой, что $v = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$ и Q имеет в нем нормальный вид: $Q(v) = x_1^2 + \ldots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \ldots - x_{s+t}^2$.

Пусть также $\mathbb{f} = (f_1, \ldots, f_n)$ — другой базис такой, что $v = y_1e_1 + \ldots + y_ne_n$ и Q также имеет в нем нормальный вид: $Q(v) = y_1^2 + \ldots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \ldots - y_{p+q}^2$.

Заметим, что $s + t = p + q$, так как обе эти суммы равны $\operatorname{rk} Q$. В допущении, что $s \neq p$, не умоляя общности будем считать, что $s > p$.

Положим $L_1 = \langle e_1, \ldots, e_s \rangle$, $\dim L_1 = s$ и $L_2 = \langle f_{p+1}, \ldots, f_n \rangle$, $\dim L_2 = n - p$. Видно, что $L_1 + L_2 \subset V$, а значит, $\dim(L_1 + L_2) \leqslant n$. Тогда:

$$\dim(L_1 \cap L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 + L_2) \geqslant s + n - p - n = s - p > 0.$$

Следовательно, существует ненулевой вектор $v \in L_1 \cap L_2$. Разложим тогда этот вектор в базисах данных линейных оболочек:

$$v = x_1e_1 + \ldots + x_se_s, \exists x_i \neq 0 \Rightarrow Q(v) = x_1^2 + \ldots + x_s^2 > 0$$
$$v = y_{p+1}f_{p+1} + \ldots + y_nf_n \Rightarrow Q(v) = -y_{p+1}^2 - \ldots - y_{p+q}^2 \leqslant 0$$

Получили противоречие. Значит, исходное предположение неверно и $s = p$. Откуда в свою очередь следует, что $t = q$. $\square$

Определение. *Эти числа имеют свои названия:*

1. *$i_+ := s$ — положительный индекс инерции;*
2. *$i_- := t$ — отрицательный индекс инерции;*

3. $i_0 := n - s - t$ — *нулевой индекс инерции.*

Определение. *Квадратичная функция Q над полем $\mathbb{R}$ называется*

Термин	*Обозначение*	*Условие*
положительно определенной	$Q > 0$	$Q(x) > 0\ \forall x \neq 0$
отрицательно определенной	$Q < 0$	$Q(x) < 0\ \forall x \neq 0$
неотрицательно определенной	$Q \geqslant 0$	$Q(x) \geqslant 0\ \forall x$
неположительно определенной	$Q \leqslant 0$	$Q(x) \leqslant 0\ \forall x$
неопределенной	$-$	$\exists x, y\colon Q(x) > 0,\ Q(y) < 0$

Термин	*Нормальный вид*	*Индексы инерции*
положительно определенной	$x_1^2 + \ldots + x_n^2$	$i_+ = n,\ i_- = 0$
отрицательно определенной	$-x_1^2 - \ldots - x_n^2$	$i_+ = 0,\ i_- = n$
неотрицательно определенной	$x_1^2 + \ldots + x_k^2,\ k \leqslant n$	$i_+ = k,\ i_- = 0$
неположительно определенной	$-x_1^2 - \ldots - x_k^2,\ k \leqslant n$	$i_+ = 0, i_- = k$
неопределенной	$x_1^2 + \ldots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \ldots - x_{s+t}^2,\ s,t \geqslant 1$	$i_+ = s,\ i_- = t$

Пример. $V = \mathbb{R}^2$.

1. $Q(x, y) = x^2 + y^2$, $Q > 0$;
2. $Q(x, y) = -x^2 - y^2$, $Q < 0$;
3. $Q(x, y) = x^2 - y^2$;
4. $Q(x, y) = x^2$, $Q \geqslant 0$;
5. $Q(x, y) = -x^2$, $Q \leqslant 0$.