Лекция 29 от 27.04.2016

Пусть $\mathbb{E}$ — векторное пространство.

Определение. *Векторы x,y называются ортогональными,если $(x,y) = 0$. Обозначение $x \perp y$.*

Определение.
Пусть $S \subset \mathbb{E}$ — произвольное подпространство. Множество $S^{\perp} = \{x \in \mathbb{E} \mid (x,y) = 0 \ \forall y \in S\}$ называется ортогональным дополнением к S

Замечание.

1. *$S^{\perp}$ — подпространство*
2. *$S^{\perp} = \langle S \rangle^{\perp}$*

Предложение.

1. *$\dim S^{\perp} = n - \dim S$*
2. *$\mathbb{E} = S \oplus S^{\perp}$*
3. *$(S^{\perp})^{\perp}$*

Доказательство.

1. Выделим в S базис $(e_1, \ldots, e_k)$ и дополним его векторами $(e_{k+1}, \ldots, e_n)$ до базиса $\mathbb{E}$.

$$x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n \in \mathbb{E}$$
$$x \in S^{\perp} \Leftrightarrow (x,e_i) = 0 \ \forall i = 1, \ldots, k$$
$$(x,e_i) = (e_1, e_i)x_1 + (e_2, e_i)x_2 + \ldots, (e_n, e_i)x_n = 0$$

Получим однорудную СЛУ $G \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$, причём $G \in Mat_{k \times n}(\mathbb{R})$. $\operatorname{rk} G = k$, поскольку левый верхний минор (совпадает с таковым в матрице Грама) $k \times k$ больше нуля. Размерность пространства решений $\dim S^{\perp} = n - \operatorname{rk} G = n - \dim S$.

2. Поскольку $(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, то $S \cap S^{\perp} = \{0\}$, а значит $\mathbb{E} = S \oplus S^{\perp}$
3. $S \subset (S^{\perp})^{\perp}$ — всегда.

$$\dim (S^{\perp})^{\perp} = n - \dim S^{\perp} = k \Rightarrow S = (S^{\perp})^{\perp}$$

$\square$

Пусть $x \in \mathbb{E}$. Значит существует единственное представление его в виде $x = y + z$, где $y \in S$, $z \in S^{\perp}$.

Определение. *y называется ортогональной проекцией вектора x на подпространство S, обозначается $y = \mathrm{Pr}_S x$. z называется ортогональной составляющей вектора x вдоль S, обозначается $\mathrm{ort}_S x$*

Определение. *Базис $(e_1, \ldots, e_n)$ в $\mathbb{E}$ называется ортогональным, если $(e_i, e_j) = 0\ \forall i \neq j$. (Что то же самое, $G(e_1, \ldots, e_n)$ диагональна). Базис называется ортонормированным, если дополнительно $(e_i, e_i) = 1\ \forall i$. (Что то же самое, $G(e_1, \ldots, e_n) = E$).*

Замечание. *Если $(e_1, \ldots, e_n)$ ортогональный базис, то $\left(\dfrac{e_1}{|e_1|}, \ldots, \dfrac{e_n}{|e_n|}\right)$ ортонормированный.*

Теорема. *В любом конечномерном евклидовом пространстве существует ортонормированный базис.*

Доказательство. Следует из того, что всякую квадратичную форму можно привести к нормальному виду. □

Пусть $(e_1, \ldots, e_n)$ — ортонормированный базис. Пусть также есть ещё один базис $(e'_1, \ldots, e'_n)$, причём $(e'_1, \ldots, e'_n) = (e_1, \ldots, e_n)C$.

Предложение. *$(e'_1, \ldots, e'_n)$ — ортонормированный тогда и только тогда, когда $C^{-1} = C^T$*

Доказательство. $(e'_1, \ldots, e'_n)$ ортонормированный, следовательно, $G(e'_1, \ldots, e'_n) = E$.

$$G(e'_1, \ldots, e'_n) = C^T G(e_1, \ldots, e_n) C = C^T C = E$$

Отсюда и получаем требуемое. □

Определение. *Матрица C в таком случае называется ортогональной.*

Свойства.

$$\sum_{k=1}^{n} c_{ki} c_{kj} = \delta_{ij}$$

$$\Updownarrow$$

$$C^T C = E \Leftrightarrow C^T = C^{-1} \Leftrightarrow C C^T = E$$

$$\Updownarrow$$

$$\sum_{k=1}^{n} c_{ik} c_{jk} = \delta_{ij}$$

Пример. $C = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ *— матрица поворота на угол φ в $\mathbb{R}^2$.*

Ещё свойство: $\det C = \pm 1$.

Пусть $S \subset \mathbb{E}$ — подпространство. $(e_1, \ldots, e_k)$ его ортогональный базис. $x \in \mathbb{E}$.

Предложение. $\mathrm{Pr}_S x = \sum\limits_{i=1}^{k} \dfrac{(x,e_i)}{(e_i, e_i)} e_i$. *В частности, если базис ортонормированный,* $\mathrm{Pr}_S x = \sum\limits_{i=1}^{k} (x,e_i) e_i$

Доказательство.

$$\mathrm{Pr}_S x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i$$

$$x = \mathrm{Pr}_S x + \mathrm{ort}_S x \Leftrightarrow (x, e_i) = (\mathrm{Pr}_S x, e_i) + \underbrace{(\mathrm{ort}_S x, e_i)}_{=0}$$

$$\Rightarrow (x, e_i) = \lambda(e_i, e_i)$$

$$\lambda_i = \frac{(x_1, e_i)}{(e_i, e_i)}$$

□

Пусть есть базис $(e_1, \ldots, e_n)$ в $\mathbb{E}$. Процесс ортогонализации даёт ортогональный базис $(f_1, \ldots, f_n)$

$$f_1 = e_1$$

$$f_2 \in e_2 + \langle e_1 \rangle$$

$$\ldots$$

$$f_n \in e_n + \langle e_1, \ldots, e_{n-1} \rangle$$

$$\langle f_1, \ldots, f_i \rangle = \langle e_1, \ldots, e_i \rangle \ \forall i = 2, \ldots, n$$

Предложение. $f_i = \mathrm{ort}_{\langle e_1, \ldots, e_{i-1} \rangle} e_i \ \forall i = 1, \ldots, n$

Доказательство.

$$e_i = f_i + \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_{i-1} f_{i-1}$$

$$f_i \perp \langle e_1, \ldots, e_{i-1} \rangle = \langle f_1, \ldots, f_{i-1} = f_i = \mathrm{ort}_{\langle e_1, \ldots, e_{i-1} \rangle} e_i$$

□

Теорема (Пифагор)**.** $|x + y| = |x|^2 + |y|^2$, *если* $x \perp y$

Доказательство. $|x + y|^2 = (x + y, x + y) = (x,x) + (y,y) + (x,y) + (y,x) = (x,x) + (y,y) = |x|^2 + |y|^2$ □

Определение. *Расстоянием между* x,y *называется число* $\rho(x,y) = |x - y|$

Предложение (Неравенство треугольника)**.** $\rho(a,b) + \rho(b,c) \geqslant \rho(a,c)$.

Доказательство. Пусть $x = a - b$, $y = b - c$. Тогда $a - c = x - y$. Достаточно доказать, что $|x| + |y| \geqslant |x + y|$

$$|x + y|^2 = |x| + |y| \geqslant |x + y|$$

□

Пусть P и Q — два произвольных подмножества $\mathbb{E}$.

Определение. *Расстояние между* P *и* Q *определяется как* $\rho(P,Q) = \inf\{\rho(x,y) \mid x \in P,\ y \in Q\}$.

Пусть $x \in \mathbb{E}$, а $U \subset \mathbb{E}$ — подпространство.

Теорема. $\rho(x,U) = |\mathrm{ort}_U x|$, *причём* $\mathrm{Pr}_U x$ *— единственный ближайший к* x *вектор из* U.

Доказательство. Пусть $y = \mathrm{Pr}_U x$, $z = \mathrm{ort}_U x$. Тогда, если $y' \in U \backslash \{0\}$, то

$$\rho(x+y, y') = |x+y-y'| = |z-y'| = \sqrt{|z|^2 + |y'|^2} > |z| = \rho(x,y)$$

$\square$

Пусть $U' \subset \mathbb{E}$ — подпространство. $x \in \mathbb{E}$, $(e_1, \ldots, e_k)$ — базис U.

Теорема. $(\rho(x,U))^2 = \dfrac{\det G(e_1, \ldots, e_k, x)}{\det G(e_1, \ldots, e_k)}$

Доказательство. Если $x \in U$, то $\rho(x,U) = 0$, но с другой стороны, $\det G(e_1, \ldots, e_k, x) = 0$, поскольку эти векторы линейно зависимы. Если же $x \notin U$, то $\rho(x,U) = |\mathrm{ort}_U x|$. Ортогонализация даёт нам $(f_1, \ldots, f_k, z)$, причём $|z|^2 = (z,z) = \dfrac{\delta_{k+1}}{\delta_k}$ $\square$