Лекция 25 от 21.03.2016

Жорданова нормальная форма

Пусть V — векторное пространство, φ — линейный оператор.

Теорема (Жорданова нормальная форма линейного оператора)**.** *Пусть $\chi_\varphi(t)$ разлагается на линейные множители. Тогда существует базис $\mathbb{e}$ в V такой, что*

$$A(\varphi, \mathbb{e}) = \begin{pmatrix} J_{\mu_1}^{n_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{\mu_2}^{n_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_{\mu_p}^{n_p} \end{pmatrix} \qquad (*)$$

Кроме того, матрица $(*)$ определена однозначно с точностью до перестановок жордановых клеток.

Определение. *Матрица $(*)$ называется жордановой нормальной формой линейного оператора.*

Следствие. *В векторном пространстве над полем комплексных чисел для любого линейного оператора существует жорданова нормальная форма.*

Схема построения:

Шаг 1: Разложим характеристический многочлен: $\chi_\varphi(t) = (t-\lambda_1)^{k_1}\dots(t-\lambda_s)^{k_s}$, где $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$. Тогда, по доказанной на прошлой лекции теореме, $V = \bigoplus_{i=1}^{s} V^{\lambda_i}(\varphi)$, причем $\dim V^{\lambda_i}(\varphi) = k_i$.

Введем отображение $\psi_i = \varphi|_{V^{\lambda_i}(\varphi)} \in L(V^{\lambda_i}(\varphi))$. Тогда $\chi_{\psi_i}(t) = (t-\lambda_i)^{k_i}$. Также введем $\mathbb{e}_i$ — базис $V^{\lambda_i}(\varphi)$. Пусть $\mathbb{e} = \mathbb{e}_1 \cup \ldots \cup \mathbb{e}_s$.

Тогда:

$$A(\varphi, \mathbb{e}) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_s \end{pmatrix}, \quad \text{где } A_i = A(\psi_i, \mathbb{e}_i) \in M_{k_i}.$$

Шаг 2: Для любого i можно выбрать базис $\mathbb{e}_i$ так, чтобы

$$A_i = \begin{pmatrix} J_{\lambda_i}^{m_{i1}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{\lambda_i}^{m_{i2}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_{\lambda_i}^{m_{iq}} \end{pmatrix}, \quad m_{i1} + \ldots + m_{iq} = k_i$$

Обратите внимание, что здесь все жордановы клетки отвечают одному значению λ_i, но при этом матрица A_i целиком жорданову клетку не образует, так как линия единиц над диагональю из λ разрывна там, где состыковываются две клетки:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}
\lambda_i & 1 & & & & & & \\
 & \ddots & \ddots & & & & & \\
 & & \lambda_i & 1 & & & & \\
 & & & \lambda_i & 0 & & & \\
\hline
 & & & & \lambda_i & 1 & & \\
 & & & & & \ddots & \ddots & \\
 & & & & & & \lambda_i & 1 \\
 & & & & & & & \lambda_i
\end{array}\right)$$

Тогда жорданова нормальная форма матрицы $A(\varphi, \mathbb{e})$ составляется из таких матриц A_i:

$$A(\varphi, \mathbb{e}) = \begin{pmatrix}
J_{\lambda_1}^{m_{11}} & & & & & & & \\
 & J_{\lambda_1}^{m_{12}} & & & & & & \\
 & & \ddots & & & & & \\
 & & & J_{\lambda_2}^{m_{21}} & & & & \\
 & & & & \ddots & & & \\
 & & & & & J_{\lambda_s}^{m_{s1}} & & \\
 & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & J_{\lambda_s}^{m_{sk_i}}
\end{pmatrix}$$

Шаг 3: Осталось только заметить, что для любого $i = 1, \dots, s$ число и порядок жордановых клеток однозначно определены из последовательности чисел:

$$\begin{aligned}
&\dim\ker(\psi_i - \lambda_i \mathrm{id}) \\
&\dim\ker(\psi_i - \lambda_i \mathrm{id})^2 \\
&\dots \\
&\dim\ker(\psi_i - \lambda_i \mathrm{id})^{k_i}
\end{aligned}$$

Откуда и следует однозначность представления в виде жордановой нормальной формы (с точностью до перестановки жордановых клеток).

Линейные функции на векторном пространстве

Начнем с примера. Рассмотрим функцию $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Пусть $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ — приращение, то есть $x = x_0 + y$. Если функция достаточно хорошая, то есть дважды дифференцируема в точке x, то

$$f(x) = f(x_0) + a_1 y_1 + \ldots + a_n y_n + b_{11} y_1^2 + \ldots + b_{ij} y_i y_j + \ldots + b_{nn} y_n^2 + \overline{o}(|y|^2).$$

Сумма $a_1 y_1 + \ldots + a_n y_n$ называется линейной формой, а сумма $b_{11} y_1^2 + \ldots + b_{ij} y_i y_j + \ldots + b_{nn} y_n^2$ — квадратичной формой.

Теперь дадим строгое определение:

Определение. *Линейной функцией (формой, функционалом) на векторном пространстве V называется всякое линейное отображение $\sigma\colon V \to F$.*

Обозначение: $V^* = \mathrm{Hom}(V, F)$.

В этом определении F фактически рассматривается как одномерное векторного пространство.

Замечание. *Функционалом принято называть, когда векторное пространство состоит из функций.*

Пример.

1. $\alpha\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R};\ \varphi(v) = \langle v, e\rangle$ *— скалярное произведение с некоторым фиксированным e.*
2. $\alpha\colon \mathcal{F}(X, F) \to F;\ \alpha(f) = f(x_0)$. *Здесь* $\mathcal{F}(X, F) = \{f\colon X \to F\}$.
3. $\alpha\colon C[a, b] \to \mathbb{R};\ \alpha(f) = \int_a^b f(x)dx$.
4. $\alpha\colon M_n(F) \to F;\ \alpha(X) = \mathrm{tr}A$.

Определение. *Пространство V^* называется сопряженным (двойственным) к V.*

Пусть $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ — базис V. Тогда он определяет изоморфизм $\varphi\colon V^* \to \mathrm{Mat}_{1\times n}$, $\alpha \mapsto (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, где $\alpha_i = \varphi(e_i)$ и α — линейная функция. При этом, если $x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$, то $\alpha(x) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Следствие. $\dim V^* = n$.

Пусть $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ — базис V. Рассмотрим линейные функции $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ такие, что $\varepsilon_i(e_j) = \delta_{ij}$, где $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ — символ Кронекера. То есть $\varepsilon_i = (\delta_{i1}, \ldots, \delta_{ii}, \ldots, \delta_{in}) = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$.

Предложение. $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ *— базис в V^*.*

Доказательство. Возьмем любое $\alpha \in V^*$. Положим $a_i = \alpha(e_i)$. Тогда $\alpha = a_1\varepsilon_1 + \ldots + a_n\varepsilon_n$. То есть мы получили, что через $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ действительно можно выразить любое α.

Теперь покажем, что $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ — линейно независимы. Пусть $a_1\varepsilon_1 + \ldots + a_n\varepsilon_n = 0$, $a_i \in F$. Применив эту функцию к e_i, получим, что $a_1\varepsilon_1(e_1) + \ldots + a_n\varepsilon_n(e_i) = 0$. Отсюда следует, что $a_i = 0$, а все остальные a_j, при $j \neq i$, равны нулю в силу определения ε_j. Итого, $a_1 = \ldots = a_n = 0$, что и доказывает линейную независимость. $\square$

Определение. *Базис $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ называется сопряженным к $\mathbb{e}$ базисом.*

Упражнение. *Всякий базис V^* сопряжен некоторому базису V.*

Билинейные функции на векторном пространстве

Определение. *Билинейной функцией (формой) на векторном пространстве V называется всякое билинейное отображение $\beta\colon V \times V \to F$. То есть это отображение, линейное по каждому аргументу:*

1. $\beta(x_1 + x_2, y) = \beta(x_1, y) + \beta(x_2, y)$;
2. $\beta(\lambda x, y) = \lambda\beta(x, y)$;
3. $\beta(x, y_1 + y_2) = \beta(x, y_1) + \beta(x, y_2)$;
4. $\beta(x, \lambda y) = \lambda\beta(x, y)$.

Пример.

1. $V = \mathbb{R}^n$, $\beta(x, y) = \langle x, y\rangle$ — *скалярное произведение.*
2. $V = \mathbb{R}^2$, $\beta(x, y) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$.
3. $V = C[a, b]$, $\beta(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$.