

ЛЕКЦИЯ 2

*Нормальные подгруппы. Факторгруппы и теорема о гомоморфизме. Центр группы. Прямое произведение групп. Факторизация по сомножителям. Разложение конечной циклической группы.*

**Определение 1.** Подгруппа  $H$  группы  $G$  называется *нормальной*, если  $gH = Hg$  для любого  $g \in G$ .

**Предложение 1.** Для подгруппы  $H \subseteq G$  следующие условия эквивалентны:

- (1)  $H$  нормальна;
- (2)  $gHg^{-1} \subseteq H$  для любого  $g \in G$ ;
- (3)  $gHg^{-1} = H$  для любого  $g \in G$ .

*Доказательство.* (1) $\Rightarrow$ (2) Пусть  $h \in H$  и  $g \in G$ . Поскольку  $gH = Hg$ , имеем  $gh = h'g$  для некоторого  $h' \in H$ . Тогда  $ghg^{-1} = h'gg^{-1} = h' \in H$ .

(2) $\Rightarrow$ (3) Так как  $gHg^{-1} \subseteq H$ , остаётся проверить обратное включение. Для  $h \in H$  имеем  $h = gg^{-1}hgg^{-1} = g(g^{-1}hg)g^{-1} \subseteq gHg^{-1}$ , поскольку  $g^{-1}hg \in H$  в силу пункта (2), где вместо  $g$  взято  $g^{-1}$ .

(3) $\Rightarrow$ (1) Для произвольного  $g \in G$  в силу (3) имеем  $gH = gHg^{-1}g \subseteq Hg$ , так что  $gH \subseteq Hg$ . Аналогично проверяется обратное включение.  $\square$

Условие (2) в этом предложении кажется излишним, но именно его удобно проверять при доказательстве нормальности подгруппы  $H$ .

Обозначим через  $G/H$  множество (левых) смежных классов группы  $G$  по нормальной подгруппе  $H$ . На  $G/H$  можно определить бинарную операцию следующим образом:

$$(g_1H)(g_2H) := g_1g_2H.$$

Зачем здесь нужна нормальность подгруппы  $H$ ? Для проверки корректности: заменим  $g_1$  и  $g_2$  другими представителями  $g_1h_1$  и  $g_2h_2$  тех же смежных классов. Нужно проверить, что  $g_1g_2H = g_1h_1g_2h_2H$ . Это следует из того, что  $g_1h_1g_2h_2 = g_1g_2(g_2^{-1}h_1g_2)h_2$  и  $g_2^{-1}h_1g_2$  лежит в  $H$ .

Ясно, что указанная операция на множестве  $G/H$  ассоциативна, обладает нейтральным элементом  $eH$  и для каждого элемента  $gH$  есть обратный элемент  $g^{-1}H$ .

**Определение 2.** Множество  $G/H$  с указанной операцией называется *факторгруппой* группы  $G$  по нормальной подгруппе  $H$ .

*Пример 1.* Если  $G = (\mathbb{Z}, +)$  и  $H = n\mathbb{Z}$ , то  $G/H$  — это в точности группа вычетов  $(\mathbb{Z}_n, +)$ .

Как представлять себе факторгруппу? В этом помогает теорема о гомоморфизме. Но прежде чем её сформулировать, обсудим ещё несколько понятий.

**Определение 3.** Пусть  $G$  и  $F$  — группы. Отображение  $\varphi: G \rightarrow F$  называется *гомоморфизмом*, если  $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$  для любых  $a, b \in G$ .

*Замечание 1.* Подчеркнём, что в этом определении произведение  $ab$  берётся в группе  $G$ , в то время как произведение  $\varphi(a)\varphi(b)$  — в группе  $F$ .

**Лемма 1.** Пусть  $\varphi: G \rightarrow F$  — гомоморфизм групп, и пусть  $e_G$  и  $e_F$  — нейтральные элементы групп  $G$  и  $F$  соответственно. Тогда:

- (а)  $\varphi(e_G) = e_F$ ;
- (б)  $\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}$  для любого  $a \in G$ .

*Доказательство.* (а) Имеем  $\varphi(e_G) = \varphi(e_G e_G) = \varphi(e_G)\varphi(e_G)$ . Теперь умножая крайние части этого равенства на  $\varphi(e_G)^{-1}$  (например, слева), получим  $e_F = \varphi(e_G)$ .

(б) Имеем  $\varphi(a^{-1})\varphi(a) = \varphi(a^{-1}a) = \varphi(e_G) = e_F$ , откуда  $\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}$ .  $\square$

**Определение 4.** Гомоморфизм групп  $\varphi: G \rightarrow F$  называется *изоморфизмом*, если отображение  $\varphi$  биективно.

*Упражнение 1.* Пусть  $\varphi: G \rightarrow F$  — изоморфизм групп. Проверьте, что обратное отображение  $\varphi^{-1}: F \rightarrow G$  также является изоморфизмом.

**Определение 5.** Группы  $G$  и  $F$  называют *изоморфными*, если между ними существует изоморфизм.

Обозначение:  $G \cong F$  (или  $G \simeq F$ ).

В алгебре группы рассматривают с точностью до изоморфизма: изоморфные группы считаются «одинаковыми».

**Определение 6.** С каждым гомоморфизмом групп  $\varphi: G \rightarrow F$  связаны его *ядро*

$$\text{Ker}(\varphi) = \{g \in G \mid \varphi(g) = e_F\}$$

и *образ*

$$\text{Im}(\varphi) = \{a \in F \mid \exists g \in G : \varphi(g) = a\}.$$

Ясно, что  $\text{Ker}(\varphi) \subseteq G$  и  $\text{Im}(\varphi) \subseteq F$  — подгруппы.

**Лемма 2.** Гомоморфизм групп  $\varphi: G \rightarrow F$  инъективен тогда и только тогда, когда  $\text{Ker}(\varphi) = \{e_G\}$ .

*Доказательство.* Ясно, что если  $\varphi$  инъективен, то  $\text{Ker}(\varphi) = \{e_G\}$ . Обратно, пусть  $g_1, g_2 \in G$  и  $\varphi(g_1) = \varphi(g_2)$ . Тогда  $g_1^{-1}g_2 \in \text{Ker}(\varphi)$ , поскольку  $\varphi(g_1^{-1}g_2) = \varphi(g_1^{-1})\varphi(g_2) = \varphi(g_1)^{-1}\varphi(g_2) = e_F$ . Отсюда  $g_1^{-1}g_2 = e_G$  и  $g_1 = g_2$ .  $\square$

**Следствие 1.** Гомоморфизм групп  $\varphi: G \rightarrow F$  является изоморфизмом тогда и только тогда, когда  $\text{Ker}(\varphi) = \{e_G\}$  и  $\text{Im}(\varphi) = F$ .

**Предложение 2.** Пусть  $\varphi: G \rightarrow F$  — гомоморфизм групп. Тогда подгруппа  $\text{Ker}(\varphi)$  нормальна в  $G$ .

*Доказательство.* Достаточно проверить, что  $g^{-1}hg \in \text{Ker}(\varphi)$  для любых  $g \in G$  и  $h \in \text{Ker}(\varphi)$ . Это следует из цепочки равенств

$$\varphi(g^{-1}hg) = \varphi(g^{-1})\varphi(h)\varphi(g) = \varphi(g^{-1})e_F\varphi(g) = \varphi(g^{-1})\varphi(g) = \varphi(g)^{-1}\varphi(g) = e_F.$$

$\square$

**Теорема о гомоморфизме.** Пусть  $\varphi: G \rightarrow F$  — гомоморфизм групп. Тогда группа  $\text{Im}(\varphi)$  изоморфна факторгруппе  $G/\text{Ker}(\varphi)$ .

*Доказательство.* Рассмотрим отображение  $\psi: G/\text{Ker}(\varphi) \rightarrow F$ , заданное формулой  $\psi(g\text{Ker}(\varphi)) = \varphi(g)$ . Проверка корректности: равенство  $\varphi(gh_1) = \varphi(gh_2)$  для любых  $h_1, h_2 \in \text{Ker}(\varphi)$  следует из цепочки

$$\varphi(gh_1) = \varphi(g)\varphi(h_1) = \varphi(g) = \varphi(g)\varphi(h_2) = \varphi(gh_2).$$

Отображение  $\psi$  сюръективно по построению и инъективно в силу того, что  $\varphi(g) = e_F$  тогда и только тогда, когда  $g \in \text{Ker}(\varphi)$  (т.е.  $g\text{Ker}(\varphi) = \text{Ker}(\varphi)$ ). Остаётся проверить, что  $\psi$  — гомоморфизм:

$$\psi((g\text{Ker}(\varphi))(g'\text{Ker}(\varphi))) = \psi(gg'\text{Ker}(\varphi)) = \varphi(gg') = \varphi(g)\varphi(g') = \psi(g\text{Ker}(\varphi))\psi(g'\text{Ker}(\varphi)).$$

$\square$

Тем самым, чтобы удобно реализовать факторгруппу  $G/H$ , можно найти такой гомоморфизм  $\varphi: G \rightarrow F$  в некоторую группу  $F$ , что  $H = \text{Ker}(\varphi)$ , и тогда  $G/H \cong \text{Im}(\varphi)$ .

*Пример 2.* Пусть  $G = (\mathbb{R}, +)$  и  $H = (\mathbb{Z}, +)$ . Рассмотрим группу  $F = (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \times)$  и гомоморфизм

$$\varphi: G \rightarrow F, \quad a \mapsto e^{2\pi i a} = \cos(2\pi a) + i \sin(2\pi a).$$

Тогда  $\text{Ker}(\varphi) = H$  и факторгруппа  $G/H$  изоморфна окружности  $S^1$ , рассматриваемой как подгруппа в  $F$ , состоящая из комплексных чисел с модулем 1.

Определим ещё одну важную конструкцию, позволяющую строить новые группы из имеющихся.

**Определение 7.** *Прямым произведением* групп  $G_1, \dots, G_m$  называется множество

$$G_1 \times \dots \times G_m = \{(g_1, \dots, g_m) \mid g_1 \in G_1, \dots, g_m \in G_m\}$$

с операцией  $(g_1, \dots, g_m)(g'_1, \dots, g'_m) = (g_1g'_1, \dots, g_mg'_m)$ .

Ясно, что эта операция ассоциативна, обладает нейтральным элементом  $(e_{G_1}, \dots, e_{G_m})$  и для каждого элемента  $(g_1, \dots, g_m)$  есть обратный элемент  $(g_1^{-1}, \dots, g_m^{-1})$ .

*Замечание 2.* Группа  $G_1 \times \dots \times G_m$  коммутативна в точности тогда, когда коммутативна каждая из групп  $G_1, \dots, G_m$ .

*Замечание 3.* Если все группы  $G_1, \dots, G_m$  конечны, то  $|G_1 \times \dots \times G_m| = |G_1| \cdot \dots \cdot |G_m|$ .

**Определение 8.** Группа  $G$  *раскладывается в прямое произведение* своих подгрупп  $H_1, \dots, H_m$ , если отображение  $H_1 \times \dots \times H_m \rightarrow G, (h_1, \dots, h_m) \mapsto h_1 \cdot \dots \cdot h_m$  является изоморфизмом.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Э.Б. Винберг. Курс алгебры. М.: Факториал Пресс, 2002 (глава 4, § 6 и глава 10, § 1)
- [2] А.И. Кострикин. Введение в алгебру. Основы алгебры. М.: Наука. Физматлит, 1994 (глава 4, § 2)
- [3] А.И. Кострикин. Введение в алгебру. Основные структуры алгебры. М.: Наука. Физматлит, 2000 (глава 1, § 4)
- [4] Сборник задач по алгебре под редакцией А.И. Кострикина. Новое издание. М.: МЦНМО, 2009 (глава 13, § 58, 60)