Лекция 28 от 19.04.2016

Пусть V — векторное пространство над полем F размерности n, и $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ — его базис. Пусть также $Q\colon V \to F$ — квадратичная форма, $\beta\colon V \times V \to F$ — соответствующая билинейная функция и $B = B(\beta, \mathbb{e})$ — ее матрица.

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \vdots \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \vdots \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Рассмотрим B_i — левые верхние $i \times i$-подматрицы. Например, $B_1 = (b_{11})$, $B_2 = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ и так далее.

Матрица B_i — это матрица ограничения билинейной функции β на подпространство, натянутое на векторы $(e_1, \ldots, e_i)$. Назовем *верхним угловым минором* число $\delta_i = \det(B_i)$. Также будем считать, что $\delta_0 = 1$.

Определение. *Базис $\mathbb{e}$ называется ортогональным (по отношению к β), если $\beta(e_i, e_j) = 0$ для любых $i \neq j$. В ортогональном базисе матрица квадратичной формы имеет канонический вид.*

Теорема (Метод ортогонализации Грама – Шмидта)**.** *Предположим, что $\delta_i \neq 0$ для всех i. Тогда существует единственный базис $\mathbb{e}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ в V такой, что*

1. *$\mathbb{e}'$ — ортогональный*
2. $e'_1 = e_1$,
   $e'_2 \in e_2 + \langle e'_1 \rangle$,
   $e'_3 \in e_3 + \langle e'_1, e'_2 \rangle$,
   $\ldots$
   $e'_n \in e_n + \langle e'_1, \ldots, e'_{n-1} \rangle$
3. $Q(e'_i) = \dfrac{\delta_i}{\delta_{i-1}}$ *для всех i.*

Доказательство. Индукция по n. База для $n = 1$ очевидна.

Теперь пусть всё доказано для всех $k < n$. Докажем для n. По предположению индукции, существует единственный базис $(e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ с требуемыми свойствами.

Наблюдение: $\langle e_i, \ldots, e_n \rangle = \langle e'_i, \ldots, e'_n \rangle$.

Ищем e'_n в виде $e'_n = e_n + \lambda_1 e'_1 + \ldots + \lambda_{n-1} e'_{n-1}$. Тогда для всех i:

$$\beta(e'_n, e'_i) = \beta(e_n, e'_i) + \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j \beta(e'_j, e'_i)$$

Чтобы выполнялись требуемые условия, необходимо, чтобы эта сумма равнялась нулю.

Заметим,что последнее слагаемое обращается в нуль при $i \neq j$ по свойству выбранного базиса. Тогда остается только следующее:

$$0 = \beta(e_n, e'_i) + \lambda_i \beta(e'_i, e'_i) = \beta(e_n, e'_i) + \lambda_i Q(e'_i) = \beta(e_n, e'_i) + \lambda_i \underbrace{\frac{\delta_i}{\delta_{i-1}}}_{\neq 0}.$$

Выбирая $\lambda_i = -\dfrac{\beta(e_n, e_i')}{\beta(e_i', e_i')}$, получаем нужное равенство и однозначность разложения. Таким образом, условия 1 и 2 выполнены.

Проверим условие 3. Пусть C — матрица перехода от $\mathbb{e}$ к $\mathbb{e}'$. Тогда легко понять, что C — верхнетреугольная с единицами на главной диагонали. Значит, матрица $B' = C^T BC$ тоже диагональна. Заметим также, что C_i (та самая верхняя $i \times i$-подматрица) является матрицей перехода от $(e_1, \ldots, e_i)$ к $(e_1', \ldots, e_i')$. Тогда:

$$B_i' = C_i^T B_i C_i \Rightarrow \det B_i' = 1 \cdot \det(B_i) \cdot 1 = \delta_i.$$

Но поскольку $B' = \begin{pmatrix} Q(e_1') & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & Q(e_n') \end{pmatrix}$, то $\delta_n = Q(e_1') \cdot \ldots \cdot Q(e_n')$. Отсюда и получаем, что $\dfrac{\delta_n}{\delta_{n-1}} = Q(e_n')$. □

Пример. *Пусть $V = \mathbb{R}^2$. Тогда $e_1' = e_1$, а e_2' получается, если спроецировать вектор e_2 на прямую, ортогональную e_1. Если $V = \mathbb{R}^3$, то e_3' является проекцией на прямую, ортогональную плоскости (e_1', e_2').*

Рассмотрим следствия данной теоремы для случая, когда $F = \mathbb{R}$.

Теорема (Якоби)**.** *Пусть $\delta_i \neq 0$ для всех i. Тогда $\operatorname{rk} Q = n$ и $i_-(Q)$ равен числу перемен знака последовательности $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_n$ (напомним, что $\delta_0 = 1$).*

Доказательство. Применим процесс ортогонализации. Получим базис $(e_1', \ldots, e_n')$, в котором $Q(y_1, \ldots, y_n) = \dfrac{\delta_1}{\delta_0} y_1^2 + \ldots + \dfrac{\delta_n}{\delta_{n-1}} y_n^2$, где $y_1, \ldots, y_n$ — координаты некоторого вектора в данном базисе. Если для некоторого i выполняется, что $\dfrac{\delta_i}{\delta_{i-1}} < 0$, то значит, $\operatorname{sgn} \delta_i \neq \operatorname{sgn} \delta_{i-1}$. Что и означает, что отрицательный индекс равен количеству перемен знака в последовательности $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_n$.

Что касательно определителя, то условие $\operatorname{rk} Q = n$ равносильно условию $\det B \neq 0$. Но $\det B = \delta_n \neq 0$, а значит, все верно. □

Теорема (Критерий Сильвестра)**.** *$Q > 0$ тогда и только тогда, когда $\delta_i > 0$ для всех i.*

Доказательство.
[$\Leftarrow$] Следует из предыдущей теоремы.
[$\Rightarrow$] Докажем, что $\delta_i = \det(B_i) > 0$. Действительно, B_i — это матрица ограничения $Q\big|_{\langle e_1, \ldots, e_i \rangle}$. Оно так же будет строго положительным, следовательно, существует матрица $C_i \in M_n(\mathbb{R})$, $\det(C_i) \neq 0$, такая, что $C_i^T B C_i = E$. Но тогда $\det C_i^T \det B_i \det C_i = \det E = 1$. Следовательно, $\det B_i = \dfrac{1}{(\det C_i)^2} > 0$, что и требовалось. □

Теорема. $Q < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \delta_i < 0, & 2 \nmid i \\ \delta_i > 0, & 2 \mid i \end{cases}$

Доказательство. Применяя критерий Сильвестра для $B(Q, \mathbb{e}) = -B(-Q, \mathbb{e})$, получаем требуемое. □

Евклидовы пространства

Определение. *Евклидово пространство — это векторное пространство $\mathbb{E}$ над полем $\mathbb{R}$, на котором задана положительно определённая симметрическая билинейная функция $(\cdot,\cdot)$, которую мы будем называть скалярным произведением.*

Пример.

1. $\mathbb{R}^n$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, $(x,y) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$.

2. $\mathbb{E} = C[0,1]$, $(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$, $(f,f) = \int_0^1 f^2(x)dx > 0$.

Замечание. *Важно отметить, что евклидово пространство можно определить только над полем $\mathbb{R}$.*

Определение. *Пусть $x \in \mathbb{E}$. Тогда длиной вектора называют величину $|x| = \sqrt{(x,x)}$.*

Очевидно, что $|x| \geqslant 0$, причем $|x| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$.

Предложение (Неравенство Коши-Буняковского)**.** *Пусть $x, y \in \mathbb{E}$. Тогда $|(x,y)| \leqslant |x||y|$, причём знак равенства возможен тогда и только тогда, когда x и y пропорциональны.*

Доказательство.

1. x,y пропорциональны, т.е. $x = \lambda y$ для некоторого λ. Тогда:

$$|(x,y)| = |(x,\lambda x)| = \lambda|(x,x)| = |x|\lambda|x| = |x||y|.$$

2. x,y линейно независимы. Тогда они будут базисом своей линейной оболочки. Тогда матрица B билинейной функции $(\cdot,\cdot)\big|_{\langle x,y\rangle}$ равна:

$$B = \begin{pmatrix} (x,x) & (x,y) \\ (y,x) & (y,y) \end{pmatrix}$$

Так как $\det B > 0$, то $(x,x)(y,y) - (x,y)^2 > 0$. Следовательно:

$$|(x,y)|^2 < |x|^2|y|^2$$
$$|(x,y)| < |x||y|$$

$\square$

Определение. *Углом между векторами x и y называют такой α, что $\cos\alpha = \dfrac{(x,y)}{|x||y|}$.*

Рассмотрим систему векторов $(v_1, \ldots, v_k)$, где $v_i \in \mathbb{E}$.

Определение. *Матрица Грама системы $v_1, \ldots, v_k$ это*

$$G(v_1, \ldots, v_k) := (g_{ij}), \quad g_{ij} = (v_i,v_j).$$

Предложение.

1. $\det G(v_1, \ldots, v_k) \geqslant 0$

2. $\det G(v_1, \ldots, v_k) = 0$ *тогда и только тогда, когда* $v_1, \ldots, v_k$ *линейно зависимы.*

Доказательство.

1. $v_1, \ldots, v_k$ линейно независимы. Следовательно, матрица $G(v_1, \ldots, v_k)$ является матрицей ограничения $(\cdot, \cdot)$ на $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle$, базисом в котором является $(v_1, \ldots, v_k)$. А значит, $\det G(v_1, \ldots, v_k) > 0$.

2. $v_1, \ldots, v_k$ линейно зависимы. Значит, существуют коэффициенты $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \neq (0, \ldots, 0)$ такие, что $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k = 0$. Если обозначить матрицу Грама $G(v_1, \ldots, v_k)$ за G, то тогда

$$\lambda_1 G_{(1)} + \ldots + \lambda_k G_{(k)} =$$
$$= (\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k, v_1) + (\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k, v_2) + \ldots + (\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k, v_k) =$$
$$= 0 + 0 + \ldots + 0$$

То есть строки линейно зависимы и $\det G = 0$.

$\square$