

Лекция 26 от 06.04.2016

Матрицы билинейных функций

Пусть V — векторное пространство, $\dim V < \infty$, $\beta: V \times V \rightarrow F$ — билинейная функция.

Определение. Матрицей билинейной функции в базисе e называется матрица $B = (b_{ij})$, где $b_{ij} = \beta(e_i, e_j)$. Обозначение: $B(\beta, e)$.

Пусть $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \in V$ и $y = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n \in V$. Тогда:

$$\begin{aligned}\beta(x, y) &= \beta\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j\right) = \sum_{i=1}^n x_i \beta\left(e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j\right) = \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n y_j \beta(e_i, e_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i b_{ij} y_j = \\ &= (x_1, \dots, x_n) B \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad (*)\end{aligned}$$

Предложение.

1. Всякая билинейная функция однозначно определяется своей матрицей в базисе e (и, следовательно, в любом другом базисе).
2. Для любой матрицы $B \in M_n(F)$ существует единственная билинейная функция β такая, что $B = B(\beta, e)$.

Доказательство.

1. Уже доказано, это следует из формулы (*).
2. Определим β по формуле (*). Тогда β — это билинейная функция на V и ее матрица есть в точности B . Единственность следует из все той же формулы.

□

Замечание. Эта биекция не имеет никакого отношения к биекции линейных операторов с квадратными матрицами.

Пусть $e = (e_1, \dots, e_n)$ и $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$ — два базиса V , β — билинейная функция на V . Пусть также $e' = eC$, где C — матрица перехода, также $B(\beta, e) = B$ и $B(\beta, e') = B'$.

Предложение. $B' = C^T B C$.

Доказательство. Рассмотрим представление вектора $x \in V$ в обоих базисах.

$$\begin{aligned}x &= x_1 e_1 + \dots + x_n e_n = (e_1, \dots, e_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ x &= x'_1 e'_1 + \dots + x'_n e'_n = (e'_1, \dots, e'_n) \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Аналогично для $y \in V$:

$$\begin{aligned} y &= (e_1, \dots, e_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\ y &= (e'_1, \dots, e'_n) \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix} \end{aligned} \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix}.$$

Тогда, если мы транспонируем формулу для x , получаем:

$$\beta(x, y) = (x_1, \dots, x_n) B \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (x'_1, \dots, x'_n) C^T B C \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix}.$$

Одновременно с этим:

$$\beta(x, y) = (x'_1, \dots, x'_n) B' \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix}.$$

Сравнивая эти две формулы, получаем, что $B' = C^T B C$. □

Следствие. Число $\text{rk } B$ не зависит от выбора базиса.

Определение. Число $\text{rk } B$ называется рангом билинейной функции β . Обозначение: $\text{rk } \beta$.

Симметричные билинейные функции

Как и для линейных операторов, неплохо было бы научиться находить такой базис, в котором матрица B была бы проще. Но мы это сделаем только для некоторого класса билинейных функций.

Определение. Билинейная функция называется симметричной, если $\beta(x, y) = \beta(y, x)$ для любых $x, y \in V$.

Предложение. Билинейная функция β симметрична тогда и только тогда, когда матрица $B(\beta, e)$ — симметрическая (т.е. она равна своей транспонированной).

Доказательство. Пусть $B = B(\beta, e)$.

$$\Rightarrow \beta(e_i, e_j) = b_{ij} = b_{ji} = \beta(e_j, e_i) \Rightarrow B \text{ симметрична.}$$

\Leftarrow Пусть $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ и $y = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n$. Также воспользуемся тем, что данная нам матрица симметрична, то есть равна своей транспонированной.

$$\begin{aligned} \beta(y, x) &= (y_1, \dots, y_n) B \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \left[(y_1, \dots, y_n) B \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right]^T = \\ &= (x_1, \dots, x_n) B^T \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (x_1, \dots, x_n) B \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \beta(x, y) \end{aligned}$$

То есть $\beta(y, x) = \beta(x, y)$, что и означает, что β симметрична. □

Квадратичные функции

Определение. Пусть $\beta: V \times V \rightarrow F$ — билинейная функция. Тогда $Q_\beta: V \rightarrow F$, заданная формулой $Q_\beta(x) = \beta(x, x)$, называется квадратичной функцией (формой), ассоциированной с билинейной функцией β .

Покажем, что такая квадратичная функция на самом деле является однородным многочленом степени 2 от n переменных. Пусть $e = (e_1, \dots, e_n)$ — базис V , $B = B(\beta, e)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$. Тогда:

$$Q_\beta(x) = (x_1, \dots, x_n) V \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} x_i x_j$$

Квадратичную функцию удобно так представлять, но не определять.

Пример. Здесь e — стандартный базис.

1. $V = \mathbb{R}^n$, $\beta(x, y) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n \Rightarrow Q_\beta(x) = x_1^2 + \dots + x_n^2$, $B(\beta, e) = E$.

2. $V = \mathbb{R}^2$, $\beta(x, y) = 2x_1 y_2 \Rightarrow Q_\beta(x) = 2x_1 x_2$, $B(\beta, e) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. $V = \mathbb{R}^2$, $\beta(x, y) = x_1 y_2 + x_2 y_1 \Rightarrow Q_\beta(x) = 2x_1 x_2$, $B(\beta, e) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Замечание. Квадратичная функция задает билинейную функцию не однозначно (примеры 2 и 3).

В дальнейшем нам понадобится делить на два. Поэтому далее предположим, что в нашем поле F можно делить на два. Что это означает? Заметим, что $2 = 1 + 1$, и, строго говоря, нельзя делить на ноль. Следовательно, наше условие можно переформулировать: рассматриваем такие поля F , в которых $1 + 1 \neq 0$. В терминах поля, это уже гораздо более осмысленное и понятное условие.

Теорема. Отображение $\beta \mapsto Q_\beta$ является биекцией между симметричными билинейными функциями на V и квадратичными функциями на V .

Доказательство.

Суръективность. Пусть β — билинейная функция. Рассмотрим тогда ассоциированную с ней квадратичную функцию $Q_\beta(x) = \beta(x, x)$. Пусть $\sigma(x, y) = \frac{1}{2}(\beta(x, y) + \beta(y, x))$ — симметричная билинейная функция на V . Тогда:

$$Q_\sigma(x) = \sigma(x, x) = \frac{1}{2}(\beta(x, x) + \beta(x, x)) = \beta(x, x) = Q_\beta(x)$$

Итого, $Q_\sigma = Q_\beta$. Следовательно, отображение суръективно.

Инъективность. Пусть $\beta(x, y)$ — симметричная билинейная функция. Аналогично, рассмотрим $Q_\beta(x) = \beta(x, x)$. Посмотрим на $Q_\beta(x + y)$:

$$Q_\beta(x + y) = \beta(x + y, x + y) = \beta(x, x) + \beta(x, y) + \beta(y, x) + \beta(y, y) = Q_\beta(x) + Q_\beta(y) + 2\beta(x, y)$$

\Downarrow

$$\beta(x, y) = \frac{1}{2} (Q_\beta(x + y) - Q_\beta(x) - Q_\beta(y))$$

Полученная выше формула как раз и означает, что значения билинейной функции однозначно задаются соответствующей квадратичной функцией. \square

Замечание.

1. Билинейная функция $\sigma(x, y) = \frac{1}{2}(\beta(x, y) + \beta(y, x))$ называется симметризацией билинейной функции β . Причем если $B = B(\beta, \mathfrak{e})$ и $S = B(\sigma, \mathfrak{e})$, то $S = \frac{1}{2}(B + B^T)$.
2. Симметричная билинейная функция $\beta(x, y) = \frac{1}{2}(Q_\beta(x+1) - Q_\beta(x) - Q_\beta(y))$ называется поляризацией квадратичной функции Q .

Пример. Для предыдущих двух примеров:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^T \right)$$

Далее вся терминология для билинейных функций переносится на квадратичные функции.

Теперь вспоминаем, что перед нами стоит задача научиться приводить к хорошему виду.

Определение. Квадратичная функция Q имеет в базисе \mathfrak{e} канонический вид, если для любого вектора $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ верно, что $Q_\beta(x) = a_1 x_1^2 + \dots + a_n x_n^2$, где $a_i \in F$. Иными словами, $B(\beta, \mathfrak{e}) = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$.

Определение. Квадратичная функция Q имеет нормальный вид в базисе \mathfrak{e} , если для любого вектора $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ верно, что $Q_\beta(x) = a_1 x_1^2 + \dots + a_n x_n^2$, причем $a_i \in \{-1, 0, 1\}$.