

Лекция 21 от 15.02.2016

Инвариантность и обратимость

Пусть $\varphi: V \rightarrow V$ — линейный оператор, и e — базис в V .

Обозначение. $A(\varphi, e)$ — матрица линейного оператора φ в базисе e .

Если $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$ — ещё один базис, причём $(e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n)C$, где C — матрица перехода, $A = A(\varphi, e)$ и $A' = A(\varphi, e')$. В прошлый раз мы доказали, что $A' = C^{-1}AC$.

Следствие. Величина $\det A$ не зависит от выбора базиса. Обозначение: $\det \varphi$.

Доказательство. Пусть A' — матрица φ в другом базисе. Тогда получается, что:

$$\det A' = \det (C^{-1}AC) = \det C^{-1} \det A \det C = \det A \det C \frac{1}{\det C} = \det A.$$

□

Заметим, что $\det A$ — инвариант самого φ .

Определение. Две матрицы $A', A \in M_n(F)$ называются подобными, если существует такая матрица $C \in M_n(F)$, $\det C \neq 0$, что $A' = C^{-1}AC$.

Замечание. Отношение подобия на M_n является отношением эквивалентности.

Предложение. Пусть $\varphi \in L(V)$. Тогда эти условия эквивалентны:

1. $\text{Ker } \varphi = \{0\}$;
2. $\text{Im } \varphi = V$;
3. φ обратим (то есть это биекция, изоморфизм);
4. $\det \varphi \neq 0$.

Доказательство.

1. \Leftrightarrow 2 — следует из формулы $\dim V = \dim \text{Ker } \varphi + \dim \text{Im } \varphi$.
2. \Leftrightarrow 3 — уже было.
3. \Leftrightarrow 4 — уже было.

□

Определение. Линейный оператор φ называется вырожденным, если $\det \varphi = 0$, и невырожденным, если $\det \varphi \neq 0$.

Определение. Подпространство $U \subseteq V$ называется инвариантным относительно φ (или φ -инвариантным), если $\varphi(U) \subseteq U$. То есть $\forall u \in U: \varphi(u) \in U$.

Пример.

1. $\{0\}, V$ — они инвариантны для любого φ .

2. $\text{Ker } \varphi$ φ -инвариантно, $\varphi(\text{Ker } \varphi) = \{0\} \subset \text{Ker } \varphi$

3. $\text{Im } \varphi$ тоже φ -инвариантно, $\varphi(\text{Im } \varphi) \subset \varphi(V) = \text{Im } \varphi$.

Пусть $U \subset V$ — φ -инвариантное подпространство. Также пусть (e_1, \dots, e_k) — базис в U . Дополним его до базиса V : $e = (e_1, \dots, e_n)$.

$$\underbrace{A(\varphi, e)}_{\text{Матрица с углом нулей}} = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}, \quad \text{где } B \in M_k$$

Это нетрудно понять, если учесть, что $\varphi(e_i) \in \langle e_1, \dots, e_k \rangle$, $i = 1, \dots, k$. Если $U = \text{Ker } \varphi$, то $B = 0$. Если $U = \text{Im } \varphi$, то $D = 0$.

Обратно, если матрица A имеет в базисе e такой вид, то $U = \langle e_1, \dots, e_k \rangle$ — инвариантное подпространство.

Обобщение. Пусть $V = U \oplus W$, где U, W — инвариантные подпространства, и (e_1, \dots, e_k) — базис U . Тогда $e = (e_1, \dots, e_n)$ — базис V .

$$A(\varphi, e) = \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

Обобщение.

$$A(\varphi, e) = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & * & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & * & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & * \end{pmatrix} \begin{matrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ \vdots \\ k_s \end{matrix}$$

Здесь k_1, \dots, k_s — размеры квадратных блоков блочно-диагональной матрицы. Матрица $A(\varphi, e)$ имеет такой вид тогда и только тогда, когда:

$$\begin{aligned} U_1 &= \langle e_1, \dots, e_{k_1} \rangle \\ U_2 &= \langle e_{k_1+1}, \dots, e_{k_1+k_2} \rangle \\ &\vdots \\ U_{k_s} &= \langle e_{n-k_s+1}, \dots, e_n \rangle \end{aligned}$$

Предел мечтаний. Найти такой базис, в котором матрица линейного оператора была бы диагональной. Но такое возможно не всегда.

Собственные векторы и собственные значения

Пусть $\varphi \in L(V)$.

Определение. Ненулевой вектор $v \in V$ называется собственным для V , если $\varphi(v) = \lambda v$ для некоторого $\lambda \in F$. При этом число λ называется собственным значением линейного оператора φ , отвечающим собственному вектору v .

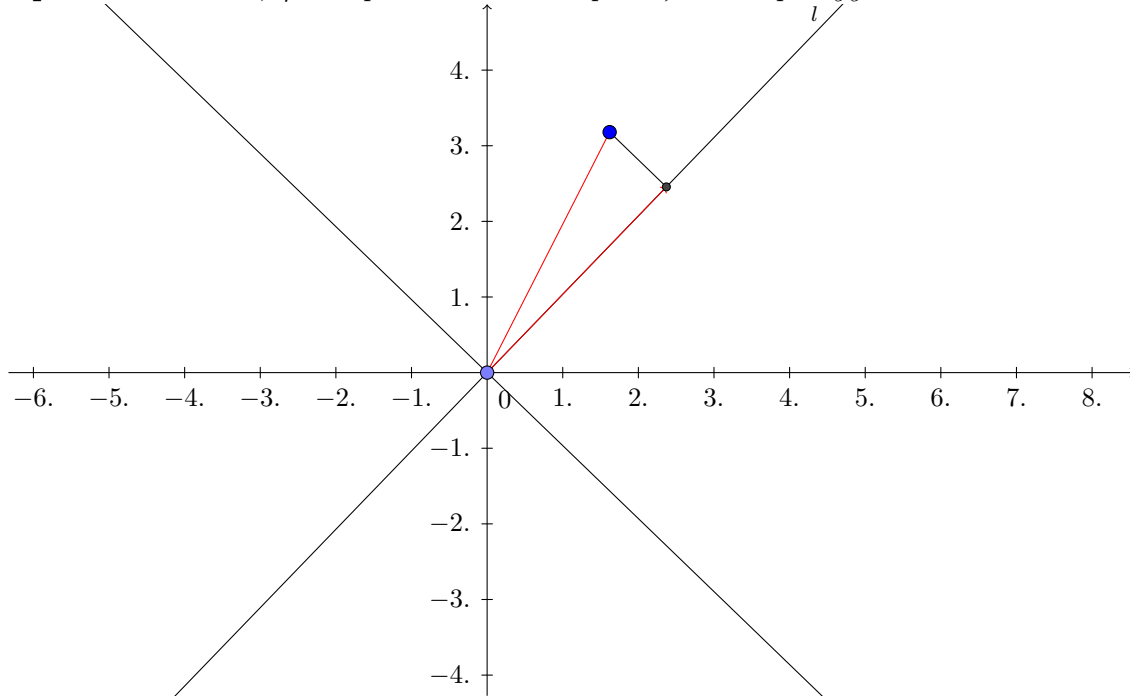
Предложение. Вектор $v \in V$, $v \neq 0$ — собственный вектор в V тогда и только тогда, когда линейная оболочка $\langle v \rangle$ является φ -инвариантным подпространством

Доказательство.

- $[\Rightarrow] \varphi(v) = \lambda v \Rightarrow \langle v \rangle = \{kv \mid k \in F\}$. Тогда $\varphi(kv) = \lambda kv \in \langle v \rangle$.
- $[\Leftarrow] \varphi(V) \in \langle v \rangle \Rightarrow \exists \lambda \in F: \varphi(v) = \lambda v$.

□

Пример. 1. $V = \mathbb{R}^2$, φ — ортогональная проекция на прямую l .



$$0 \neq v \in l \Rightarrow \varphi(v) = 1 \cdot v, \lambda = 1$$

$$0 \neq v \perp l \Rightarrow \varphi(v) = 0 = 0 \cdot v, \lambda = 0$$

2. Поворот на угол φ вокруг нуля на угол α .

- $\alpha = 0 + 2\pi k$. Любой ненулевой вектор собственный. $\lambda = 1$.
- $\alpha = \pi + 2\pi k$. Любой ненулевой вектор собственный. $\lambda = -1$.
- $\alpha \neq \pi k$. Собственных векторов нет.

3. $V = P_n(F)$ — многочлены степени n , $\varphi = \Delta: f \rightarrow f'$. Тогда $0 \neq f$ — собственный вектор тогда, и только тогда, когда $f = \text{const}$.

Диагонализуемость

Определение. Линейный оператор φ называется диагонализуемым, если существует базис e в V такой, что $A(\varphi, e)$ диагональна.

Предложение (Критерий диагонализуемости). Отображение φ диагонализуемо тогда и только тогда, когда в V существует базис из собственных векторов.

Доказательство. Пусть e — базис V . Тогда $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, что равносильно $\varphi(e_i) = \lambda_i e_i$. Это и означает, что все векторы собственные. □

В примерах выше:

1. φ диагонализуем. $e_1 \in l$, $e_2 \perp l$. Тогда матрица примет вид $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Если $\alpha = \pi k$, то φ диагонализуем ($\varphi = \text{id}$ или $\varphi = -\text{id}$). Не диагонализуем в других случаях.
3. φ диагонализуем тогда и только тогда, когда $n = 0$. При $n > 0$ собственных векторов МАЛО.

Собственное подпространство

Пусть $\varphi \in L(V)$, $\lambda \in F$.

Определение. Множество $V_\lambda(\varphi) = \{v \in V \mid \varphi(v) = \lambda v\}$ называется собственным подпространством линейного оператора, отвечающим собственному значению λ .

Упражнение. Доказать, что $V_\lambda(\varphi)$ — действительно подпространство.

Предложение. $V_\lambda(\varphi) = \text{Ker}(\varphi - \lambda \text{id})$.

Доказательство.

$$v \in V_\lambda(\varphi) \Leftrightarrow \varphi(v) = \lambda v \Leftrightarrow \varphi(v) - \lambda v = 0 \Leftrightarrow (\varphi - \lambda \text{id})(v) = 0 \Leftrightarrow v \in \text{Ker}(\varphi - \lambda \text{id})$$

□

Следствие. Собственное подпространство $V_\lambda(\varphi) \neq \{0\}$ тогда и только тогда, когда $\det(\varphi - \lambda \text{id}) = 0$.

Определение. Многочлен $\chi_\varphi(t) = (-1)^n \det(\varphi - t \text{id})$ называется характеристическим.