

Лекция 27 от 13.04.2016

Привидение к каноническому и нормальному виду

Пусть V — векторное пространство, $\dim V = n$, $e = (e_1, \dots, e_n)$ — базис V , $Q: V \rightarrow F$ — квадратичная функция на V .

Теорема. Для любой квадратичной функции Q существует такой базис, в котором Q имеет канонический вид.

Доказательство. Метод Лагранжа.

Докажем индукцией по n .

При $n = 1$ имеем, что $Q(x) = ax^2$, то есть уже имеем канонический вид.

Предположим, что для всех значений меньших n доказано. Докажем тогда для n .

Пусть $A = (a_{ij})$ — матрица квадратичной функции Q в исходном базисе. Тогда:

$$Q(x) = Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_{ii}x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij}x_i x_j$$

Случай 0: пусть $a_{ij} = 0$ для всех пар (i, j) . Тогда $Q(x) = 0x_1^2 + \dots + 0x_n^2$ — уже канонический вид.

Случай 1: пусть существует такое i , что $a_{ii} \neq 0$. Перенумеровав переменные, считаем, что $a_{11} \neq 0$. Тогда:

$$\begin{aligned} Q(x_1, \dots, x_n) &= (a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n) + Q_1(x_2, \dots, x_n) = \\ &= \frac{1}{a_{11}} \left((a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n)^2 - (a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n)^2 \right) + Q_1(x_2, \dots, x_n) = \\ &= \frac{1}{a_{11}} (a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n)^2 + Q_2(x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Теперь сделаем следующую замену переменных:

$$\begin{aligned} x'_1 &= a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ x'_2 &= x_2, \dots, x'_n = x_n \end{aligned}$$

Получаем:

$$Q(x'_1, \dots, x'_n) = \frac{1}{a_{11}}x_1'^2 + Q_2(x'_2, \dots, x'_n)$$

Дальше пользуемся предположением индукции для Q_2 , окончательно получая канонический вид для исходной Q .

Случай 2: пусть $a_{ii} = 0$ для всех i , но существует такая пара (i, j) , где $i < j$, что $a_{ij} \neq 0$. Переименовываем переменные так, чтобы $a_{12} \neq 0$ и делаем замену:

$$\begin{aligned} x_1 &= x'_1 - x'_2 \\ x_2 &= x'_1 + x'_2 \\ x_3 &= x'_3, \dots, x_n = x'_n \end{aligned}$$

Тогда $2a_{12}x_1x_2 = 2a_{12}x_1'^2 - 2a_{12}x_2'^2$. Следовательно:

$$Q(x'_1, \dots, x'_n) = 2a_{12}x_1'^2 - 2a_{12}x_2'^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij}x_i'x_j'$$

Таким образом, мы пришли к случаю 1, который уже умеем решать. □

Следствие. Всякую квадратичную функцию над полем \mathbb{R} можно заменой базиса привести к нормальному виду.

Доказательство. Существует такой базис, в котором $Q(x_1, \dots, x_n) = a_1x_1^2 + \dots + a_nx_n^2$. Сделаем замену:

$$x'_i = \begin{cases} \sqrt{|a_i|}x_i, & \text{если } a_i \neq 0 \\ x_i, & \text{если } a_i = 0 \end{cases}$$

Второе условие нужно для того, чтобы можно было выразить старые переменные через новые, не деля при этом на ноль.

Получаем, что $Q(x'_1, \dots, x'_n) = \varepsilon_1x_1'^2 + \dots + \varepsilon_nx_n'^2$, где $\varepsilon_i = \operatorname{sgn} a_i \in \{-1, 0, 1\}$. Что нам и было надо. \square

Замечание. Если $F = \mathbb{C}$, то любую квадратичную функцию Q можно привести к виду $Q(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_k^2$, где $k \leq n$ ($k = \operatorname{rk} Q$), то есть $B(Q, e) = \operatorname{diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$.

Закон инерции, индексы инерции

Пусть Q — квадратичная функция над \mathbb{R} , которая в базисе e имеет нормальный вид:

$$Q(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \dots - x_{s+t}^2,$$

где s — это количество положительных слагаемых, а t — отрицательных.

Теорема (Закон инерции). Числа s, t не зависят от выбора базиса, в котором Q имеет нормальный вид.

Доказательство. Пусть $e = (e_1, \dots, e_n)$ — базис такой, что $v = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$ и Q имеет в нем нормальный вид: $Q(v) = x_1^2 + \dots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \dots - x_{s+t}^2$.

Пусть также $f = (f_1, \dots, f_n)$ — другой базис такой, что $v = y_1e_1 + \dots + y_ne_n$ и Q также имеет в нем нормальный вид: $Q(v) = y_1^2 + \dots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \dots - y_{p+q}^2$.

Заметим, что $s + t = p + q$, так как обе эти суммы равны $\operatorname{rk} Q$. В допущении, что $s \neq p$, не умоляя общности будем считать, что $s > p$.

Положим $L_1 = \langle e_1, \dots, e_s \rangle$, $\dim L_1 = s$ и $L_2 = \langle f_{p+1}, \dots, f_n \rangle$, $\dim L_2 = n - p$. Видно, что $L_1 + L_2 \subset V$, а значит, $\dim(L_1 + L_2) \leq n$. Тогда:

$$\dim(L_1 \cap L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 + L_2) \geq s + n - p - n = s - p > 0.$$

Следовательно, существует ненулевой вектор $v \in L_1 \cap L_2$. Разложим тогда этот вектор в базисах данных линейных оболочек:

$$\begin{aligned} v &= x_1e_1 + \dots + x_se_s, \exists x_i \neq 0 \Rightarrow Q(v) = x_1^2 + \dots + x_s^2 > 0 \\ v &= y_{p+1}f_{p+1} + \dots + y_nf_n \Rightarrow Q(v) = -y_{p+1}^2 - \dots - y_{p+q}^2 \leq 0 \end{aligned}$$

Получили противоречие. Значит, исходное предположение неверно и $s = p$. Откуда в свою очередь следует, что $t = q$. \square

Определение. Эти числа имеют свои названия:

1. $i_+ := s$ — положительный индекс инерции;
2. $i_- := t$ — отрицательный индекс инерции;

3. $i_0 := n - s - t$ — нулевой индекс инерции.

Определение. Квадратичная функция Q над полем \mathbb{R} называется

Термин	Обозначение	Условие
положительно определенной	$Q > 0$	$Q(x) > 0 \ \forall x \neq 0$
отрицательно определенной	$Q < 0$	$Q(x) < 0 \ \forall x \neq 0$
неотрицательно определенной	$Q \geq 0$	$Q(x) \geq 0 \ \forall x$
неположительно определенной	$Q \leq 0$	$Q(x) \leq 0 \ \forall x$
неопределенной	—	$\exists x, y: Q(x) > 0, Q(y) < 0$

Термин	Нормальный вид	Индексы инерции
положительно определенной	$x_1^2 + \dots + x_n^2$	$i_+ = n, i_- = 0$
отрицательно определенной	$-x_1^2 - \dots - x_n^2$	$i_+ = 0, i_- = n$
неотрицательно определенной	$x_1^2 + \dots + x_k^2, k \leq n$	$i_+ = k, i_- = 0$
неположительно определенной	$-x_1^2 - \dots - x_k^2, k \leq n$	$i_+ = 0, i_- = k$
неопределенной	$x_1^2 + \dots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \dots - x_{s+t}^2, s, t \geq 1$	$i_+ = s, i_- = t$

Пример. $V = \mathbb{R}^2$.

1. $Q(x, y) = x^2 + y^2, Q > 0$;
2. $Q(x, y) = -x^2 - y^2, Q < 0$;
3. $Q(x, y) = x^2 - y^2$;
4. $Q(x, y) = x^2, Q \geq 0$;
5. $Q(x, y) = -x^2, Q \leq 0$.