Лекция 20 от 08.02.2016

Линейные отображения (продолжение)

Пусть $\varphi\colon V \to W$ — линейное отображение.

Предложение.

1. *$\operatorname{Ker}\varphi$ — подпространство в V.*

2. *$\operatorname{Im}\varphi$ — подпространство в W.*

Доказательство. Проверим по определению.

1.
   - $\varphi(0_v) = 0_w$ — этот факт мы уже доказали.
   - $v_1, v_2 \in \operatorname{Ker}\varphi \Rightarrow \varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) = 0_w + 0_w = 0_w \Rightarrow v_1 + v_2 \in \operatorname{Ker}\varphi$.
   - $v \in \operatorname{Ker}\varphi, \alpha \in F \Rightarrow \varphi(\alpha v) = \alpha\varphi(v) = \alpha 0 = 0$, то есть αv тоже лежит в ядре.

2.
   - $0_w = \varphi(0_v) \Rightarrow 0_w \in \operatorname{Im}(\varphi)$.
   - $w_1, w_2 \in \operatorname{Im}\varphi \Rightarrow \exists v_1, v_2 \in V\colon w_1 = \varphi(v_1), w_2 = \varphi(v_2) \Rightarrow w_1 + w_2 = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) = \varphi(v_1 + v_2) \Rightarrow w_1 + w_2 \in \operatorname{Im}\varphi$.
   - $w \in \operatorname{Im}\varphi, \alpha \in F \Rightarrow \exists v \in V\colon \varphi(v) = w \Rightarrow \alpha w = \alpha\varphi(v) = \varphi(\alpha v) \Rightarrow \alpha w \in \operatorname{Im}\varphi$.

То есть все условия подпространства по определению выполнены и предложение доказано. □

Предложение.

1. *Отображение φ инъективно тогда и только тогда, когда $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$.*

2. *Отображение φ сюръективно тогда и только тогда, когда $\operatorname{Im}\varphi = W$.*

Доказательство.

1.
   - [$\Rightarrow$] Очевидно.
   - [$\Leftarrow$] $v_1, v_2 \in V:\ \varphi(v_1) = \varphi(v_2) \Rightarrow \varphi(v_1 - v_2) = 0 \Rightarrow v_1 - v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = v_2$.

2. Очевидно из определения образа.

□

Следствие. *Отображение φ является изоморфизмом тогда и только тогда, когда $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$ и $\operatorname{Im}\varphi = W$.*

Предложение. *Пусть $U \subset V$ — подпространство и $e_1, \ldots, e_k$ — его базис. Тогда:*

1. *$\varphi(U)$ — подпространство, $\varphi(U) = \langle\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_k)\rangle$;*

2. *$\dim\varphi(U) \leqslant \dim U$.*

Доказательство.

1. $\varphi(x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ke_k) = x_1\varphi(e_1) + \ldots + x_k\varphi(e_k) \in \langle\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_k)\rangle$.

2. $\varphi(U) = \langle \varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_k) \rangle \Rightarrow \dim \varphi(U) \leqslant \dim U$ по основной лемме о линейной зависимости.

$\square$

Пусть V, W — векторные пространства, $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ — базис V, $\mathbb{f} = (f_1, \ldots, f_m)$ — базис W, A — матрица φ по отношению к $\mathbb{e}$, $\mathbb{f}$.

Предложение. $\dim \operatorname{Im} \varphi = \operatorname{rk} A$.

Доказательство.

$$v \in V,\ v = x_1 e_1 + \ldots x_n e_n$$
$$\varphi(v) = y_1 f_1 + \ldots y_m e_m$$

Тогда:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

$A^{(j)}$ — столбец координат в базисе $\mathbb{f}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$.

$$\alpha_1 \varphi(e_1) + \ldots \alpha_n \varphi(e_n) = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 A^{(1)} + \ldots + \alpha_n A^{(n)} = 0$$

Отсюда следует, что:

$$\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} \{\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)\} = \dim \underbrace{\langle \varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n) \rangle}_{\operatorname{Im} \varphi} = \dim \operatorname{Im} \varphi.$$

$\square$

Следствие. *Величина* $\operatorname{rk} A$ *не зависит от выбора базисов* $\mathbb{e}$ *и* $\mathbb{f}$.

Определение. *Величина* $\operatorname{rk} A$ *называется рангом линейного отображения* φ. *Обозначение:* $\operatorname{rk}\varphi$.

Следствие. *Если* $\dim V = \dim W = n$, *то* φ *— изоморфизм тогда и только тогда, когда* $\det A \neq 0$. *Тогда* A *— квадратная.*

Доказательство.

$[\Rightarrow]$ φ — изоморфизм, следовательно:

$$\operatorname{Im} \varphi = W \Rightarrow \dim \operatorname{Im} \varphi = n \Rightarrow \operatorname{rk} A = n \Rightarrow \det A \neq 0.$$

$[\Leftarrow]$ $\det A \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$.

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

Таким образом, линейное отображение φ является биекцией, а значит, и изоморфизмом. $\square$

Следствие. *Пусть* $A \in \operatorname{Mat}_{k \times m}$, $B \in \operatorname{Mat}_{m \times n}$. *Тогда* $\operatorname{rk} AB \leqslant \min\{\operatorname{rk} A, \operatorname{rk} B\}$.

Доказательство. Реализуем A и B как матрицы линейных отображений, то есть $\varphi_A\colon F^m \to F^k$, $\varphi_B\colon F^n \to F^m$. Тогда AB будет матрицей отображения $\varphi_A \circ \varphi_B$.

$$\mathrm{rk}\,(AB) = \mathrm{rk}\,(\varphi_A \circ \varphi_B) \begin{cases} \leqslant \dim \mathrm{Im}\,\varphi_A = \mathrm{rk}\,A \\ \leqslant \dim \mathrm{Im}\,\varphi_B = \mathrm{rk}\,B \end{cases}$$

Первое неравенство следует из того, что $\mathrm{Im}\,(\varphi_A \circ \varphi_B) \subset \mathrm{Im}\,\varphi_A$, откуда в свою очередь следует, что $\dim \mathrm{Im}\,(\varphi_A \circ \varphi_B) \leqslant \dim \mathrm{Im}\,\varphi_A$. Рассматривая второе неравенство, получаем:

$$\mathrm{Im}\,(\varphi_A \circ \varphi_B) = \varphi_A(\mathrm{Im}\,\varphi_B) \Rightarrow \dim \mathrm{Im}\,(\varphi_A \circ \varphi_B) = \dim(\varphi_A(\mathrm{Im}\,\varphi_B)) \leqslant \dim \mathrm{Im}\,\varphi_B.$$

□

Упражнение.

- *Если* A *квадртана и* $\det A \neq 0$, *то* $\mathrm{rk}\,AB = \mathrm{rk}\,B$.
- *Если* $B \in M_n$ *и* $\det B \neq 0$, *то* $\mathrm{rk}\,AB = \mathrm{rk}\,A$.

Теорема. $\dim \mathrm{Im}\,\varphi = \dim \varphi - \dim \mathrm{Ker}\,\varphi$.

Существует 2 способа доказательства. Рассмотрим оба.

Бескоординатный способ. Пусть $\dim \mathrm{Ker}\,\varphi = k$ и $e_1, \ldots, e_k$ — базис в $\mathrm{Ker}\,\varphi$. Дополним его до базиса V векторами $e_k, \ldots, e_n$. Тогда:

$$\mathrm{Im}\,\varphi = \langle \varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_k), \ldots, \varphi(e_n) \rangle = \langle 0, 0, \ldots, 0, \varphi(e_{k+1}), \ldots, \varphi(e_n) \rangle = \langle \varphi(e_{k+1}), \ldots, \varphi(e_n) \rangle$$

Пусть $\alpha_{k+1}\varphi(e_{k+1}) + \ldots + \alpha_n \varphi(e_n) = 0$ для некоторых $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$. Тогда:

$$\varphi(\alpha_{k+1}e_{k+1} + \ldots + \alpha_n e_n) = 0$$
$$\alpha_{k+1}e_{k+1} + \ldots + \alpha_n e_n \in \mathrm{Ker}\,\varphi$$
$$\alpha_{k+1}e_{k+1} + \ldots + \alpha_n e_n = \beta_1 e_1 + \ldots \beta_k e_k,$$

для некоторых $\beta_1, \ldots, \beta_k \in F$.

Но так как $e_1, \ldots, e_n$ — базис в V, то $\alpha_{k+1} = \ldots = \alpha_n = \beta_1 = \ldots = \beta_k = 0$. То есть векторы $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)$ линейно независимы, а значит, образуют базис $\mathrm{Im}\,\varphi$. Что и означает, что $\dim \mathrm{Im}\,\varphi = n - k = \dim V - \dim \mathrm{Ker}\,\varphi$. □

Координатный способ. Зафиксируем базис $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ в V и базис $\mathbb{f} = (f_1, \ldots, f_m)$ в W. Пусть A — матрица φ в базисе $\mathbb{f}$. Тогда $v = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$, $\varphi(v) = y_1f_1 + \ldots + y_mf_m$. Получим, что $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

$\mathrm{Ker}\,\varphi$ состоит из векторов, координаты которых удовлетворяют СЛУ $A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$. Ранее в курсе мы уже доказали, что размерность пространства решений равна $n - \mathrm{rk}\,A$, то есть $\dim \mathrm{Im}\,\varphi = n - \mathrm{rk}\,A = \dim V - \dim \mathrm{Ker}\,\varphi$. □

Линейные операторы

Пусть V — конечномерное векторное пространство.

Определение. *Линейным оператором (или линейным преобразованием) называется всякое линейное отображение $\varphi\colon V \to V$, то есть из V в себя. Обозначение: $L(V) = \mathrm{Hom}(V, V)$.*

Пусть $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ — базис в V и $\varphi \in L(V)$. Тогда:

$$(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)) = (e_1, \ldots, e_n)\, A,$$

где A — матрица линейного оператора в базисе $\mathbb{e}$. В столбце $A^{(j)}$ стоят координаты $\varphi(e_j)$ в базисе $\mathbb{e}$. Матрица A — квадратная.

Пример.

1. *$\forall v \in V : \varphi(v) = 0$ — нулевая матрица.*
2. *Тождественный оператор: $\forall v \in V : \mathrm{id}(v) = v$ — единичная матрица.*
3. *Скалярный оператор $\lambda\mathrm{id}(v) = \lambda V$ — матрица λE в любом базисе.*

Следствие (Следствия из общих фактов о линейных отображениях)**.**

1. *Всякий линейный оператор однозначно определяется своей матрицей в любом фиксированном базисе.*
2. *Для всякой квадратной матрицы существует, причем единственный, линейный оператор φ такой, что матрица φ есть A.*
3. *Пусть $\varphi \in L(V)$, A — матрица φ в базисе $\mathbb{e}$. Тогда:*

$$v = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$$
$$\varphi(v) = y_1 e_1 + \ldots + y_n e_n$$
$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Пусть $\varphi \in L(V)$, A — матрица φ в базисе $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$. Пусть $\mathbb{e}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ — другой базис, причём $(e'_1, \ldots, e'_n) = (e_1, \ldots, e_n)C$, где C — матрица перехода, и A' — матрица φ в базисе $\mathbb{e}'$.

Предложение. *$A' = C^{-1}AC$.*

Доказательство.

$$(e'_1, \ldots, e'_n) = (e_1, \ldots, e_n)C$$
$$e'_j = \sum_{i=1}^{n} c_{ij} e_j$$
$$\varphi(e'_j) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} c_{ij} e_j\right) = \sum_{i=1}^{n} c_{ij}\varphi(e_j)$$
$$(\varphi(e'_1), \ldots, \varphi(e'_n)) = (\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n))C = (e_1, \ldots, e_n)AC = (e'_1, \ldots, e'_n)\underbrace{C^{-1}AC}_{A'}$$

□