Лекция 5 от 26.01.2016

Умножение чисел

Запишем умножение столбиком. На получение одной строки нужно $O(n)$ операций, на сложение — тоже $O(n)$; итого — $O(n^2)$. Можно ли быстрее? Колмогоров считал нельзя, оказалось, что можно.

Воспользуемся стратегией "Разделяй и властвуй".

$$\begin{array}{r} x = 10^{\frac{n}{2}}a + b \\ y = 10^{\frac{n}{2}}c + d \\ \hline xy = 10^n ac + 10^{\frac{n}{2}}(ad + bc) + bd \end{array}$$

$T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n)$
$T(n) \leqslant aT\left(\frac{n}{b}\right) + n^d$
$a = 4;\ b = 2;\ d = 1$
$a > b^d$
$T(n) = O\left(n^{\log_b a}\right) = O(a^2)$
А если сведём к трем подзадачам? Тогда получится вот так:
$T(n) = O\left(n^{\log_2 3}\right) \approx O(n^{1.58})$
Давайте перемножим:
$(a + b)(c + d) = ac + (ad + bc) + bd$
То есть $ad + bc$ из формулы — это $(a + b)(c + d) - ac - bd$
$xy = 10^n ac + 10^{\frac{n}{2}} z + bd$
И получили *алгоритм Карацубы.*

Перемножение матриц

Пусть у нас есть квадратные матрицы $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$. Пусть $C = A \times B$. Действуя строго по определению, умножение матриц займёт $O(n^3)$ — для каждого жлемента матрицы нужно n умножений и $n - 1$ сложение, а элементов всего — n^2.

И снова — "Разделяй и властвуй". Попробуем делить матрицы на четыре подматрицы. Тогда пусть $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$. Тогда $C = A \times B = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & \dots \\ \vdots & \ddots \end{pmatrix}$.

$T(n) = 8T\left(\frac{n}{2}\right) + O(n^2)$
Основная теорема: $8 > 2^2$
$O\left(n^{\log_2 8}\right) = O(n^2)$.
А если свести к семи подзадачам?
Алгоритм довольно простой, но как до него додуматься — не вполне понятно.

$$\begin{aligned} M_1 &= (A_{11} + A_{22})(B_{11} + B_{22}); \\ M_2 &= (A_{21} + A_{22})B_{11}; \\ M_3 &= A_{11}(B_{12} - B_{22}); \\ M_4 &= A_{22}(B_{21} + B_{11}); \\ M_5 &= (A_{11} + A_{12})B_{22}; \\ M_6 &= (A_{21} - A_{11})(B_{11} + B_{12}); \\ M_7 &= (A_{12} - A_{22})(B_{21} + B_{22}); \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
C_1 &= M_1 + M_4 - M_5 + M_7;\\
C_2 &= M_3 + M_5;\\
C_3 &= M_2 + M_4;\\
C_4 &= M_1 - M_2 + M_5 + M_6;
\end{aligned}
$$

Можно проверить что всё верно (оставим это как упражнение читателю).
$T(n) = 7T\left(\frac{n}{2}\right) + O(n^2)$
$O\left(n^{\log_2 7}\right)$