MODELOS Y SISTEMAS

Práctica 2: Modelos en Espacio de Estados

1. Hallar la solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = y - 1 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

en el intervalo [0,7].

2. En ciertas circunstancias, el número de individuos en determinadas poblaciones de bacterias se rige por la ley

$$y' = 0.2y.$$

Si al comienzo del experimento hay 30.000 bacterias,

   (a) Cuántas habrá 10 horas más tarde?
   (b) En qué instante habrá 100.000 bacterias?

3. Se supone que la población de un país era de 39,5 millones en el año 2000 y que crece siguiendo la ley de Maithus

$$y' = 0.05y$$

donde $y(t)$ representa el número de millones de habitantes en el instante t.

   (a) Cuántos millones de habitantes habrá en 2010?
   (b) Cuándo se alcanzarán los 50 millones de habitantes?

4. Un objeto se coloca en una habitación que está a temperatura constante de $25°C$. Se sabe que la constante de enfriamiento del objeto es 0.02. Al comienzo la temperatura del objeto es de $55°C$. Considerando la ley de enfriamiento de Newton dada por

$$y' = k(t_a - y)$$

donde y denota la temperatura del objeto, k su constante de enfriamiento y t_a la temperatura ambiente,

   (a) Qué temperatura tendrá el objeto después de 50 minutos?
   (b) Cuánto tarda en ponerse a temperatura de $46°C$?
   (c) Qué pasa con la temperatura después de varias horas?

5. Dibujar en la misma ventana gráfica las soluciones correspondientes a la ley lineal

$$y' = -y + t$$

en el intervalo $[0, 20]$ considerando distintos valores de $y(0)$ entre -10 y 10. Analizar los resultados.

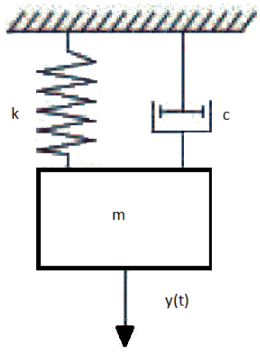
6. Escribir un código que permita resolver numéricamente una ecuación diferencial ordinaria utilizando una función ODE. Utilizar el código para simular los sistemas de los ejercicios 7,8,y 9 en un intervalo de tiempo conveniente y graficar la solución.

7. En algunos modelos de pesca se utiliza la ecuación

$$y' = \alpha y \ln(k/y) - qy$$

donde el término $-qy$ mide el efecto negativo que ejerce la pesca sobre el crecimiento de la población. Estos modelos ayudan a analizar la sostenibilidad de los bancos de pesca. Calcular y dibujar en un mismo gráfico las soluciones del problema para $\alpha = 0.2$, $k = 27$ e $y(0) = 10$, variando los valores del parámetro $q : 0, 0.05, 0.1, 0.2, 0.3$.

8. Considere el siguiente sistema

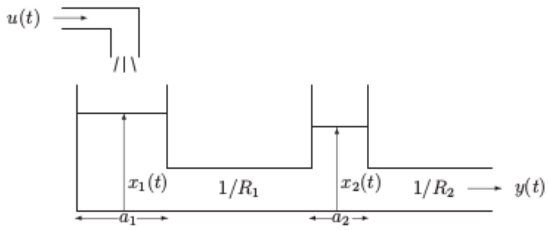


   (a) Escriba la ecuación diferencial que describe el sistema.
   (b) Resuelva la ecuacón para $m = 5Kg$, $c = 1000Ns/m$ y $k = 750N/m$ con una condición inicial $y(0) = 1m$ y velocidad inicial $y'(0) = 0.5m/s$.
   (c) Escriba la representación en espacio de estado.
   (d) Escriba el polinomio carácteristico del modelo y la solución general.
   (e) Resuelva en Matlab para los valores dados. Cambie de a uno los valores de los parámetros y observe los diferentes resultados.

9. (Ecuaciones Diferenciales en www.ehu.es/izaballa) Los balances de masa se utilizan en ingeniería para realizar modelos compartimentales. En esencia establecen que la variación de la masa en un compartimento es igual al flujo de masa entrante menos el de la saliente por unidad de tiempo; i.e.

$$\dot{m} = \dot{m}_e - \dot{m}_s$$

donde m denota la masa total por unidad de tiempo, m_e la masa entrante y m_s la masa saliente.



Usando un balance de masa, determina un sistema de ecuaciones que modelice la altura de los depósitos en la Figura en cada instante de tiempo suponiendo que

(a) el líquido que fluye es agua,

(b) el área de los depósitos es $a_1, a_2 > 0$, respectivamente

(c) inicialmente los depósitos están vacós y a partir de ese instante el agua fluye continuamente,

(d) el flujo de agua entre los depósitos es proporcional a la diferencia $x1(t) - x2(t)$ con una constante $1/R_1$,

(e) el flujo de salida del segundo depósito es proporcional a $x_2(t)$ con una constante $1/R2$,

(f) el caudal de entrada es tal que los depósitos nunca se llenan ni vacían completamente.