Решение индивидуального домашнего задания №2

Студент: Николаев Всеволод Юрьевич
Группа: 4395
Вариант: 14

Условие

Пусть e - стандартный базис в $\mathbb{R}^3$, $f_1 = (0, 1, -3)^T$, $f_2 = (1, 4, -6)^T$, $f_3 = (-1, -3, 4)^T$. Даны линейные операторы A и B, имеющие в базисе e следующие матрицы: $A_e = \begin{pmatrix} 8 & -9 & 2 \\ 10 & -11 & 2 \\ 18 & -21 & 4 \end{pmatrix}$ $B_e = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -10 & 10 & 2 \end{pmatrix}$; и вектор x с координатами $x_e = (-4, -4, -7)^T$.

Задача 1. Проверка базиса и матрицы перехода

Проверьте, что $f = (f_1, f_2, f_3)$ — базис в $\mathbb{R}^3$ и найдите матрицы перехода $C_{e\to f}$ и $C_{f\to e}$.

$$f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -3 \\ -3 & -6 & 4 \end{pmatrix}_{+3II} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -3 \\ 0 & 6 & -5 \end{pmatrix}_{-6I} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Вектора $(0, 1, 0)^T$, $(1, 0, 0)^T$ и $(0, 0, 1)^T$ являются линейно независимыми, а значит f - базис в $\mathbb{R}^3$.

$$C_{e\to f} = f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -3 \\ -3 & -6 & 4 \end{pmatrix}; C_{f\to e} = f^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -3 \\ -3 & -6 & 4 \end{pmatrix}^{-1}:$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -6 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]_{+3II} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -5 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right]_{-6I} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 3 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} +1III \\ +3III \\ \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & -18 & 10 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 3 & 1 \end{array}\right] -4I \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 3 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

Ответ: $C_{e\to f} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -3 \\ -3 & -6 & 4 \end{pmatrix}$, $C_{f\to e} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -5 & 3 & 1 \\ -6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Задача 2. Координаты образа вектора в новом базисе

Определить координаты вектора $y = A \circ B(x)$ в базисе f.

$$y_e = A \circ B(x) = A_e \times B_e \times x_e$$
$$y_f = C_{f\to e} \times y_e = C_{f\to e} \times A_e \times B_e \times x_e$$

$$A_e = \begin{pmatrix} 8 & -9 & 2 \\ 10 & -11 & 2 \\ 18 & -21 & 4 \end{pmatrix}; \; B_e = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -10 & 10 & 2 \end{pmatrix}; \; x_e = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix}; \; C_{f\to e} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -5 & 3 & 1 \\ -6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$y_f = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -5 & 3 & 1 \\ -6 & 3 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8 & -9 & 2 \\ 10 & -11 & 2 \\ 18 & -21 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -10 & 10 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -5 & 3 & 1 \\ -6 & 3 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8 & -9 & 2 \\ 10 & -11 & 2 \\ 18 & -21 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ -14 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -5 & 3 & 1 \\ -6 & 3 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -23 \\ -4 \\ -41 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41 \\ 5 \\ 28 \end{pmatrix}$$

Ответ: $y_f = (41, 5, 28)^T$

Задача 3. Обратимость операторов

Будет ли каждый из операторов A и B обратимым?
Матрица обратима тогда и только тогда, когда её определитель не равен 0.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 8 & -9 & 2 \\ 10 & -11 & 2 \\ 18 & -21 & 4 \end{vmatrix} = -8*11*4 - 9*2*18 - 2*10*21 + 2*11*18 + 8*2*21 + 9*10*4 =$$
$$= -352 - 324 - 420 + 396 + 336 + 360 = -4 \neq 0$$

$\det(B) = 0$ т.к. в матрице B есть две повторяющиеся строки.
Ответ: оператор матрицы A обратим, оператор матрицы B не обратим.

Задача 4. Матрица обратного оператора

Найдите матрицы оператора A^{-1} в базисах e и f.

$$A_e = \begin{pmatrix} 8 & -9 & 2 \\ 10 & -11 & 2 \\ 18 & -21 & 4 \end{pmatrix}; \; A_f^{-1} = C_{f\to e} \times A_e^{-1}; \; C_{f\to e} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -5 & 3 & 1 \\ -6 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \; A_e^{-1}:$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 8 & -9 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 10 & -11 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 18 & -21 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -1I \\ -2I \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 8 & -9 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] -1III \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 8 & -9 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} +9II \\ \\ +3II \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 8 & 0 & 2 & 10 & 9 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \end{array}\right] \begin{array}{c} -4III \\ *2 \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 2 & 6 & -12 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \end{array}\right] \sim \frac{1}{2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & -3 & -1 \end{array}\right]$$

$$A_e^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 6 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A_f^{-1} = C_{f\to e} \times A_e^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -5 & 3 & 1 \\ -6 & 3 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 6 & -3 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -22 & 25 & -4 \\ 8 & -9 & 0 \\ 6 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

Ответ: $A_e^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 6 & -3 & -1 \end{pmatrix}$, $A_f^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -22 & 25 & -4 \\ 8 & -9 & 0 \\ 6 & -6 & 0 \end{pmatrix}$.

Задача 5. Ядро и образ оператора

Найдите размерность ядра и образа оператора B

$$B_e = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -10 & 10 & 2 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим однородную систему $B_e x = 0$:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ -10x_1 + 10x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения получаем

$$x_3 = 2x_1 + x_2.$$

Подставим это в третье:

$$-10x_1 + 10x_2 + 2\,(2x_1 + x_2) = 0 \implies -10x_1 + 10x_2 + 4x_1 + 2x_2 = 0 \implies -6x_1 + 12x_2 = 0 \implies x_2 = \tfrac{1}{2}x_1.$$

Тогда

$$x_3 = 2x_1 + \tfrac{1}{2}x_1 = \tfrac{5}{2}x_1.$$

Пусть $x_1 = t$. Тогда общий вид решения:

$$x = t \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} = t\,\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Следовательно

$$\ker B = \operatorname{span}\{(2,1,5)^T\}, \quad \dim\ker B = 1.$$

По теореме о ранге и дефекте:

$$\dim\ker B + \dim \mathrm{im} B = 3 \implies \dim \mathrm{im} B = 3 - 1 = 2.$$

.

Ответ: $\dim\ker B = 1$, $\dim \operatorname{Im} B = 2$.

Задача 6. Ортонормированный базис ядра и образа

Постройте ортонормированный базис ядра и образа оператора B.

Ядро.

$$\ker B = \mathrm{span}\{(2,1,5)^T\}.$$

Положим

$$v = (2,1,5)^T, \qquad \|v\| = \sqrt{2^2+1^2+5^2} = \sqrt{30}.$$

Тогда

$$e_1 = \frac{v}{\sqrt{30}} = \frac{1}{\sqrt{30}}\begin{pmatrix}2\\1\\5\end{pmatrix}$$

— ортонормированный базис $\ker B$.

Образ. Столбцы матрицы B_e лежат в образе:

$$u_1 = \begin{pmatrix}2\\2\\-10\end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\10\end{pmatrix}.$$

$$\|u_1\| = \sqrt{2^2+2^2+(-10)^2} = \sqrt{108}, \qquad e_1' = \frac{u_1}{\sqrt{108}} = \frac{1}{\sqrt{108}}\begin{pmatrix}2\\2\\-10\end{pmatrix}.$$

Проекция u_2 на e_1':

$$\langle u_2, e_1'\rangle = u_2^T e_1' = \frac{1\cdot 2 + 1\cdot 2 + 10\cdot(-10)}{\sqrt{108}} = \frac{-96}{\sqrt{108}},$$

$$\mathrm{proj}_{e_1'} u_2 = \langle u_2, e_1'\rangle\, e_1' = -\frac{96}{108}\, u_1 = -\frac{8}{9}\, u_1.$$

Ортогональная составляющая:

$$v_2 = u_2 - \mathrm{proj}_{e_1'} u_2 = u_2 + \frac{8}{9}\, u_1 = \begin{pmatrix}5\\5\\2\end{pmatrix},$$

$$\|v_2\| = \sqrt{5^2+5^2+2^2} = \sqrt{54}, \qquad e_2' = \frac{v_2}{\sqrt{54}} = \frac{1}{\sqrt{54}}\begin{pmatrix}5\\5\\2\end{pmatrix}.$$

Итак, ортонормированный базис $\operatorname{Im} B$:

$$\{\, e_1',\, e_2' \} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{108}} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -10 \end{pmatrix},\ \frac{1}{\sqrt{54}} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Ответ: ортонормированный базис:

$$\ker B: \quad \left\{ \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}, \qquad \operatorname{Im} B: \quad \left\{ \frac{1}{\sqrt{108}} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -10 \end{pmatrix},\ \frac{1}{\sqrt{54}} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Задача 7. Спектральные характеристики операторов

Найдите собственные числа и собственные вектора операторов A и B.

Оператор A. Характеристический многочлен:

$$\chi_A(\lambda) = \det\bigl(A_e - \lambda I\bigr) = \det \begin{pmatrix} 8-\lambda & -9 & 2 \\ 10 & -11-\lambda & 2 \\ 18 & -21 & 4-\lambda \end{pmatrix} = -(\lambda+2)(\lambda-1)(\lambda-2).$$

Отсюда

$$\operatorname{Spec}(A) = \{-2, 1, 2\}.$$

Случай $\lambda = -2$. Тогда $A_e + 2I$ равна

$$A_e + 2I = \begin{pmatrix} 10 & -9 & 2 \\ 10 & -9 & 2 \\ 18 & -21 & 6 \end{pmatrix}.$$

Система $(A_e + 2I)x = 0$ в координатах:

$$\begin{cases} 10x_1 - 9x_2 + 2x_3 = 0, \\ 10x_1 - 9x_2 + 2x_3 = 0, \\ 18x_1 - 21x_2 + 6x_3 = 0. \end{cases}$$

Упрощаем строками:

$$R_2 \to R_2 - R_1, \quad R_3 \to R_3 - \tfrac{9}{5}R_1 \implies \begin{cases} 0 = 0, \\ -\frac{24}{5}x_2 + \frac{12}{5}x_3 = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения $-2x_2 + x_3 = 0$, значит $x_3 = 2x_2$.
Подставляем в первое:

$$10x_1 - 9x_2 + 2\cdot(2x_2) = 10x_1 - 5x_2 = 0 \implies x_1 = \tfrac{1}{2}x_2.$$

Пусть $x_2 = t$. Тогда

$$x = t\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = t\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix},$$

и

$$\ker(A_e + 2I) = \operatorname{span}\{(1,2,4)^T\}.$$

Случай $\lambda = 1$. Теперь $A_e - I$:

$$A_e - I = \begin{pmatrix} 7 & -9 & 2 \\ 10 & -12 & 2 \\ 18 & -21 & 3 \end{pmatrix}.$$

Система $(A_e - I)x = 0$:

$$\begin{aligned} 7x_1 - 9x_2 + 2x_3 &= 0, \\ 10x_1 - 12x_2 + 2x_3 &= 0, \\ 18x_1 - 21x_2 + 3x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Выполним

$$R_2 \to R_2 - \tfrac{10}{7}R_1, \quad R_3 \to R_3 - \tfrac{18}{7}R_1$$

и получаем две одинаковые строки вида

$$\frac{6}{7}x_2 - \frac{6}{7}x_3 = 0 \implies x_2 = x_3.$$

Подставляем в $7x_1 - 9x_2 + 2x_2 = 7x_1 - 7x_2 = 0$, отсюда $x_1 = x_2$.

Пусть $x_2 = t$. Тогда

$$x = t\,(1,1,1)^T, \qquad \ker(A_e - I) = \operatorname{span}\{(1,1,1)^T\}.$$

Случай $\lambda = 2$. Имеем

$$A_e - 2I = \begin{pmatrix} 6 & -9 & 2 \\ 10 & -13 & 2 \\ 18 & -21 & 2 \end{pmatrix}.$$

Система $(A_e - 2I)x = 0$:

$$\begin{aligned} 6x_1 - 9x_2 + 2x_3 &= 0, \\ 10x_1 - 13x_2 + 2x_3 &= 0, \\ 18x_1 - 21x_2 + 2x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Далее

$$R_2 \to R_2 - \tfrac{5}{3}R_1, \quad R_3 \to R_3 - 3R_1 \implies \begin{cases} 3x_2 - 2x_3 = 0, \\ 3x_2 - 2x_3 = 0, \end{cases}$$

то есть $x_3 = \frac{3}{2}x_2$.

Подставляем в первое уравнение:

$$6x_1 - 9x_2 + 2 \cdot \tfrac{3}{2}x_2 = 6x_1 - 6x_2 = 0 \implies x_1 = x_2.$$

Пусть $x_2 = t$. Тогда

$$x = t\,(1,1,\tfrac{3}{2})^T = t\tfrac{1}{2}(2,2,3)^T,$$

и

$$\ker(A_e - 2I) = \operatorname{span}\{(2,2,3)^T\}.$$

Оператор B. Характеристический многочлен:

$$\chi_B(\lambda) = \det\bigl(B_e - \lambda I\bigr) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 \\ 2 & 1-\lambda & -1 \\ -10 & 10 & 2-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(\lambda-2)(\lambda-3).$$

Отсюда

$$\operatorname{Spec}(B) = \{0, 2, 3\}.$$

Случай $\lambda = 0$. Тогда $B_e - 0I = B_e$:

$$B_e = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -10 & 10 & 2 \end{pmatrix}.$$

Система $(B_e - 0I)x = 0$:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ -10x_1 + 10x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Выполним

$$R_2 \to R_2 - R_1, \quad R_3 \to R_3 + 5R_1 \implies \begin{cases} 0 = 0, \\ 15x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Отсюда $5x_2 - x_3 = 0$, то есть $x_3 = 5x_2$.
Подставляем в первое уравнение:

$$2x_1 + x_2 - 5x_2 = 2x_1 - 4x_2 = 0 \implies x_1 = 2x_2.$$

Пусть $x_2 = t$. Тогда

$$x = t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix},$$

и

$$\ker(B_e) = \operatorname{span}\{(2,1,5)^T\}.$$

Случай $\lambda = 2$. Тогда

$$B_e - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -10 & 10 & 0 \end{pmatrix}.$$

Система $(B_e - 2I)x = 0$:

$$x_2 - x_3 = 0,$$
$$2x_1 - x_2 - x_3 = 0,$$
$$-10x_1 + 10x_2 = 0.$$

Из первого уравнения $x_2 = x_3$.
Подставляем в второе:

$$2x_1 - 2x_2 = 0 \implies x_1 = x_2,$$

третье даёт то же: $-10x_1 + 10x_2 = 0$.

Пусть $x_2 = t$. Тогда

$$x = t\,(1, 1, 1)^T,$$

и

$$\ker(B_e - 2I) = \operatorname{span}\{(1, 1, 1)^T\}.$$

Случай $\lambda = 3$. Тогда

$$B_e - 3I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -10 & 10 & -1 \end{pmatrix}.$$

Система $(B_e - 3I)x = 0$:

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 - x_3 &= 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 &= 0, \\ -10x_1 + 10x_2 - x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Из первого: $x_1 = x_2 - x_3$.

Подставляем во второе:

$$2(x_2 - x_3) - 2x_2 - x_3 = -3x_3 = 0 \implies x_3 = 0.$$

Тогда $x_1 = x_2$ и третье уравнение автоматически выполняется.

Пусть $x_2 = t$. Тогда

$$x = t\,(1, 1, 0)^T,$$

и

$$\ker(B_e - 3I) = \operatorname{span}\{(1, 1, 0)^T\}.$$

Ответ:

$$\begin{aligned} &A : \lambda = -2,\ v = (1, 2, 4)^T; \quad \lambda = 1,\ v = (1, 1, 1)^T; \quad \lambda = 2,\ v = (2, 2, 3)^T; \\ &B : \lambda = 0,\ v = (2, 1, 5)^T; \quad \lambda = 2,\ v = (1, 1, 1)^T; \quad \lambda = 3,\ v = (1, 1, 0)^T. \end{aligned}$$

Задача 8. Диагонализация операторов

Выписать матрицы операторов A и B в базисах из собственных векторов.

Оператор A. Собственные числа и векторы:

$$\lambda_1 = -2,\ v_1 = (1, 2, 4)^T; \quad \lambda_2 = 1,\ v_2 = (1, 1, 1)^T; \quad \lambda_3 = 2,\ v_3 = (2, 2, 3)^T.$$

Пусть в новый базис f_A входят векторы v_1, v_2, v_3. Тогда

$$[A]_{f_A} = P_A^{-1}\,A_e\,P_A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

где $P_A = \big[v_1\ v_2\ v_3\big]$.

Оператор B. Собственные числа и векторы:

$$\lambda_1 = 0,\ w_1 = (2,1,5)^T; \quad \lambda_2 = 2,\ w_2 = (1,1,1)^T; \quad \lambda_3 = 3,\ w_3 = (1,1,0)^T.$$

В базисе $f_B = \{w_1, w_2, w_3\}$ матрица B станет диагональной:

$$[B]_{f_B} = P_B^{-1}\, B_e\, P_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

где $P_B = \big[w_1\ w_2\ w_3\big]$.

Ответ:

$$[A]_{f_A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad [B]_{f_B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$