МИНОБРНАУКИ РОССИИ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)
кафедра ФИЗИКИ

Индивидуальное домашнее задание №1 по физике
тема: "Траектория движения тела"

Фамилия И.О.: Николаев В.Ю.
группа: 2302
Преподаватель: Альтмарк А.М.
Крайний срок сдачи ИДЗ: 5.11.22
Итоговый балл:

Санкт-Петербург.
2022 г.

Условие ИДЗ

Два тела (1 и 2) движутся по плоскости. Зависимость координат от времени описываются следующими выражениями:

$$x_1(t) = A\,sin(m\,\omega\,t) * e^{-\alpha\,t};$$

$$y_1(t) = A\,sin(n\,\omega\,t + \varphi_1) * e^{-\beta\,t};$$

$$x_2(t) = A\,sin(n\,\omega\,t) * e^{-\alpha\,t};$$

$$y_2(t) = A\,sin(m\,\omega\,t + \varphi_2) * e^{-\beta\,t}.$$

Найти наибольшее r_{max} расстояние между телами за промежуток времени от 4 с до 10 с относительно начала движения (0 с), найти координату точки (x2, y2) с максимальным модулем ускорения для тела 2.

Вар.	A, м	ω, $\frac{рад}{с}$	φ_1, рад	φ_2, рад	n	m	α, $\frac{1}{с}$	β, $\frac{1}{с}$
16	1	1	3	1	1	2	0.2	0.1

Табл.1

Решение

Расстояние r между двумя телами в момент времени t считается по формуле:

$$r(t) = \sqrt{(x_1(t) - x_2(t))^2 + (y_1(t) - y_2(t))^2}.$$

Если у нас максимально расстояние между двумя телами, то максимален и квадрат расстояния R, а максимум квадрата расстояния искать проще.

$$R(t) = (x_1(t) - x_2(t))^2 + (y_1(t) - y_2(t))^2.$$

Для поиска R_{max} можно воспользоваться программой на языке python:

```
from math import *

A = 1
w = 1
fi1 = 3
fi2 = 1
n = 1
m = 2
alf = 0.2
bet = 0.1

```

```
12.   x1 = lambda t: A * sin(m * w * t      ) * exp(-alf * t)
13.   y1 = lambda t: A * sin(n * w * t + fi1) * exp(-bet * t)
14.   x2 = lambda t: A * sin(n * w * t      ) * exp(-alf * t)
15.   y2 = lambda t: A * sin(m * w * t + fi2) * exp(-bet * t)
16.
17.   R = lambda t: (x1(t) - x2(t)) ** 2 + (y1(t) - y2(t)) ** 2
18.
19.   dt = 1e-4
20.
21.   rmax = R(4)
22.   for i in range(int(4 / dt), int(10 / dt + 1)):
23.       t = i * dt
24.       res = max(rmax, R(t))
25.
26.   print(sqrt(rmax))
```

В 1 строке программы подключаются математические функции (sin, exp). С 3 по 10 строки перечисляются константы, взятые из табл.1. С 12 по 15 строки происходит объявление функций $x_1(t)$, $y_1(t)$, $x_2(t)$ и $y_2(t)$. В 17 строке происходит объявление функции R(t). В 19 строке задаётся шаг dt (чем меньше dt, тем больше точность вычислений и больше время работы программы). В 21 строке объявляется переменная rmax, в которой после завершения работы программы будет записано R_{max} (в начале это R(4)). С 22 по 24 строки идёт расчёт значения R(t+dt) и обновление максимально найденного ранее значения, где t - время при прошлом расчёте. После перерасчёта очередного значения R(t+dt) t увеличивается на dt. В 26 строке выводится корень из найденного значения R_{max}.

В результате выполнения программы мы получаем значение

$$r_{max}=1.2356745793487236.$$

Модуль ускорения вычисляется по формуле:

$$a(t) = \sqrt{a_x^2(t) + a_y^2(t)},$$

где

$$a_x(t) = \frac{d^2 x_2}{dt^2} = \frac{d^2(A\, e^{-\alpha t}\, sin(n\,\omega\, t))}{dt^2} = \frac{d(A\, e^{-\alpha t}\,(n\,\omega\, cos(n\,\omega\, t) - \alpha\, sin(n\,\omega\, t)))}{dt} =$$

$$= A\, e^{-\alpha t}\,((\alpha^2 - n^2\,\omega^2)\, sin(n\,\omega\, t) - 2\,\alpha\, n\,\omega\, cos(n\,\omega\, t)),$$

$$a_y(t) = \frac{d^2 y_2}{dt^2} = \frac{d^2(A\, e^{-\beta t}\, sin(m\,\omega\, t + \varphi_2))}{dt^2} = \frac{d(A\, e^{-\alpha t}\,(m\,\omega\, cos(m\,\omega\, t + \varphi_2) - \beta\, sin(m\,\omega\, t + \varphi_2)))}{dt} =$$

$$= A\, e^{-\beta t}\,((\beta^2 - m^2\,\omega^2)\, sin(m\,\omega\, t + \varphi_2) - 2\,\beta\, m\,\omega\, cos(m\,\omega\, t + \varphi_2)).$$

Если у нас максимально ускорение тела, то максимален и квадрат ускорение A, а максимум квадрата расстояния искать проще.

$$A(t) = a_x^2(t) + a_y^2(t).$$

Найдём момент времени t_{res} от 0 с. до 10 с., в котором ускорение второго тела максимально, а также значение координат второго тела в момент времени tres с помощью программы на языке python:

```
1.    from math import *
2.
3.    A = 1
4.    w = 1
5.    fi1 = 3
6.    fi2 = 1
7.    n = 1
8.    m = 2
9.    alf = 0.2
10.   bet = 0.1
11.
12.   x2 = lambda t: A * sin(n * w * t      ) * exp(-alf * t)
13.   y2 = lambda t: A * sin(m * w * t + fi2) * exp(-bet * t)
14.   ax = lambda t: A * exp(-alf * t) * ((alf**2 - n**2 * w**2) * sin(n * w * t      ) - 2 * alf * n * w * cos(n * w * t      ))
15.   ay = lambda t: A * exp(-bet * t) * ((bet**2 - m**2 * w**2) * sin(m * w * t + fi2) - 2 * bet * m * w * cos(m * w * t + fi2))
16.
17.   a = lambda t: ax(t)**2 + ay(t)**2
18.
19.   k = 1e-4
20.
21.   amax = a(0)
22.   tres = 0
23.   for i in range(int(0 / k), int(10 / k + 1)):
24.       t = i * k
25.       tmp = a(t)
26.       if amax < tmp:
27.           amax = tmp
28.           tres = t
29.
30.   print(amax, x2(tres), y2(tres))
```

В 1 строке программы подключаются математические функции (sin, exp). С 3 по 10 строки перечисляются константы, взятые из табл.1. С 12 по 15 строки происходит объявление функций $x_2(t)$, $y_2(t)$, $a_x(t)$ и $a_y(t)$. В 17 строке происходит объявление функции A(t). В 19 строке задаётся шаг dt (чем меньше dt, тем больше точность вычислений и больше время работы программы). В 21 строке объявляется переменная amax, в которой после завершения работы программы будет записано A_{max} (в начале это A(0)). 22 строке объявляется переменная tres, в которой после завершения работы программы будет записано t_{res} (в начале это 0). С 23 по 28 строки идёт расчёт значения A(t+dt), обновление максимально найденного ранее значения и обновление tres, если amax увеличилось, где t - время при прошлом расчёте. После перерасчёта очередного значения R(t+dt) t увеличивается на dt. В 30 строке выводятся модуль максимального ускорения тела и координаты, которое имело второй тело в момент времени с максимальным модулем ускорения.

В результате выполнения программы мы получаем значения

$$a_{max}=3.962743149824852;$$
$$x_2=0.206156756061803;$$
$$y_2=0.9693922540448852.$$

После 10 секунд значение функции

$$A(t) = a_x^2(t) + a_y^2(t) =$$
$$= (e^{-0.2\,t}((0.2^2 - 1^2)\,sin(1\,t) - 2 * 0.2 * 1\,cos(1\,t)))^2 +$$
$$+ (e^{-0.1\,t}((0.1^2 - 2^2)\,sin(2\,t + 1) - 2 * 0.1 * 2\,cos(2\,t + 1)))^2 \leq$$
$$\leq (\frac{-0.2^2+1^2+2*0.2}{e^2})^2 + (\frac{-0.1^2+2^2+2*0.1*2}{e^1})^2 = (\frac{1,76}{e^2})^2 + (\frac{4,39}{e})^2 \leq 3,$$

поэтому точка, найденная программой является искомой.

Ответ: r_{max}=1.2356745793487236, x_2=0.206156756061803, y_2=0.9693922540448852.