

Санкт-Петербургский Государственный Электротехнический Университет
«ЛЭТИ»

кафедра физики

Задание №1 по разделу "Электростатика"

Название: Численное решение уравнения Лапласа.

Фамилия И.О.: Николаев В.Ю.

группа: 4395

Преподаватель: Альтмарк А.М.

Итоговый балл:

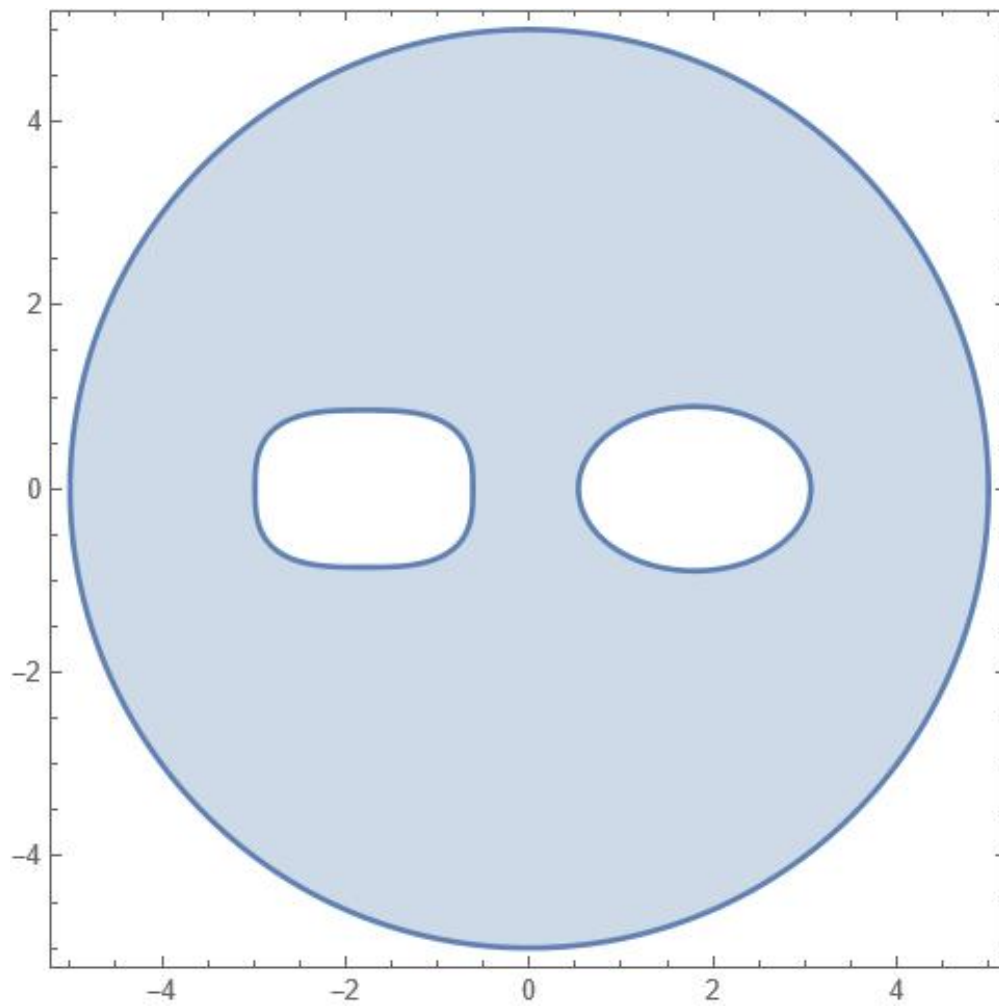
Крайний срок сдачи: 17.04

Санкт-Петербург 2025

Условие задания

Дана электростатическая система, состоящая из трех электродов. Внешний электрод обладает потенциалом 0 В. Внутренние электроды обладают потенциалами, отличными от 0. Найти длину силовой линии (линия, ортогональная эквипотенциалам или линия, касательная к которой направлены вектора напряженности электрического поля) проходящую через заданную точку и записать её в файл IDZ1.txt. Контуры электродов можно построить по формулам, указанным в таблице и сравнить с соответствующим изображением в jpeg – файле. Координаты в данном задании можно считать безразмерными.

Вар.:	14
Уравнение внешнего электрода:	$x^2 + y^2 = 25$
Уравнения электрода 1:	$\frac{3 \frac{9}{5}+x ^3}{10} + \frac{4 y ^3}{5} = \frac{1}{2}$
Уравнения электрода 2:	$\frac{ \frac{9}{5}+x ^2}{2} + y ^2 = \frac{4}{5}$
Точка силовой линии:	$\{0, -2\}$
Потенциал на электроде 1, В:	7
Потенциал на электроде 2, В:	-8



Физическая постановка задачи

В данной задаче необходимо найти распределение электростатического потенциала в двумерной области, содержащей три электрода:

- **Внешний электрод**, задающий граничные условия $\varphi = 0$ на окружности $x^2 + y^2 = 25$.
- **Электрод 1**, имеющий потенциал 7 В, описывается неявным уравнением $(3|\frac{9}{5} + x|^3)/10 + (4|y|^3)/5 = 1/2$.
- **Электрод 2**, имеющий потенциал -8 В, описывается уравнением $|\frac{-9}{5} + x|^2/2 + |y|^2 = 4/5$.

Внутри области потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\nabla^2 \varphi = 0.$$

Далее необходимо построить **силовую линию**, проходящую через точку $(0, -2)$. Силовые линии в электростатике определяются направлением вектора напряжённости поля $\mathbf{E} = -\nabla \varphi$.

Метод решения

Решение уравнения Лапласа. Численно используется метод Якоби на равномерной сетке (241×241) в квадрате $[-6, 6] \times [-6, 6]$. На узлах, соответствующих электродам, потенциал фиксирован в соответствии с граничными условиями (0 В, 7 В и -8 В).

Построение силовой линии. Силовая линия определяется уравнением

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{-\nabla \varphi}{\|\nabla \varphi\|}.$$

Интегрирование производится в двух направлениях от заданной точки, пока траектория не достигнет какого-либо электрода.

Краткие фрагменты кода

Ниже приведены небольшие выдержки из кода для иллюстрации принципа работы.

Решение уравнения Лапласа (Jacobi)

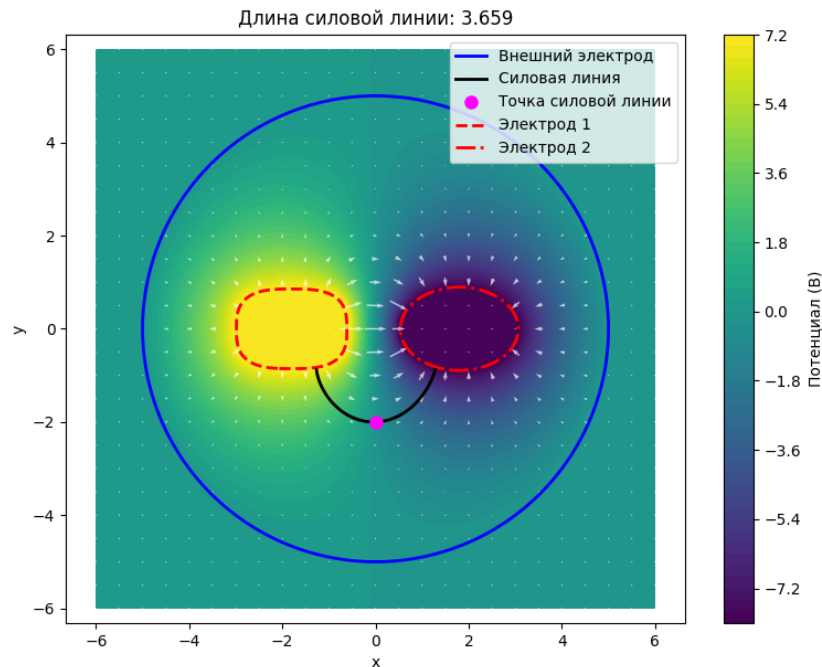
```
1 def solve_potential(x_min, x_max, y_min, y_max, nx, ny, tol_bound):
2     x = np.linspace(x_min, x_max, nx)
3     y = np.linspace(y_min, y_max, ny)
4     X, Y = np.meshgrid(x, y)
5     V = np.zeros((ny, nx))
6
7     # Boundary conditions
8     # ... (setting potentials for electrodes)
9
10    # Jacobi iterations
11    for it in range(5000):
12        V_old = V.copy()
13        # ...
14        if np.max(np.abs(V - V_old)) < 1e-4:
15            break
16    return x, y, V
```

Построение силовой линии

```
1 def compute_field_line(x, y, V, start_point, tol_bound):
2     dx, dy = compute_gradient(x, y, V)
3     interp_dx = RegularGridInterpolator((y, x), dx)
4     interp_dy = RegularGridInterpolator((y, x), dy)
5
6     def integrate_direction(pt0, sign):
7         # ...
8         return length, path
9
10    L_forward, path_forward = integrate_direction(start_point, +1)
11    L_backward, path_backward = integrate_direction(start_point, -1)
12    # ...
13    return total_length, field_line_path
```

Результаты и примеры работы

В результате программа вычисляет распределение потенциала в заданной области, строит карту потенциала, стрелки поля и отображает силовую линию, проходящую через точку $(0, -2)$.



Скрипт сохраняет длину силовой линии в файл `IDZ1.txt`. Для варианта 14, длина силовой линии составила (примерно) 3.659 условных единиц.

Выводы

- Метод Якоби позволяет решить уравнение Лапласа с заданными граничными условиями для электродов и найти потенциал в узлах сетки.

- По градиенту потенциала определяется электрическое поле \mathbf{E} , а силовая линия — это интегральная кривая, касательная к полю во всех точках.
- Численно проинтегрировав траекторию из заданной точки, удалось получить искомую силовую линию и вычислить её длину.
- Результаты визуализации наглядно показывают расположение электродов, распределение потенциала и направление силовой линии.