Решение ИДЗ. Вариант: Николаев.

Задача 1. Площадь фигуры, ограниченной кривыми

Условие: Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми

$$x^2 + y^2 = 2, \qquad y = -x^2, \quad (y > -x^2).$$

Анализ:

- Окружность $x^2 + y^2 = 2$ имеет центр в начале координат и радиус $R = \sqrt{2}$.
- Парабола $y = -x^2$ проходит через точку $(0,0)$ и является ветвью, лежащей ниже оси x (при $x \neq 0$), но условие $y > -x^2$ означает, что рассматривается та часть, где точка находится выше этой кривой.

Найдём точки пересечения, подставляя $y = -x^2$ в уравнение окружности:

$$x^2 + (-x^2)^2 = x^2 + x^4 = 2.$$

Обозначим $t = x^2$: тогда

$$t^2 + t - 2 = 0.$$

Дискриминант равен $D = 1 + 8 = 9$, откуда

$$t = \frac{-1 \pm 3}{2}.$$

Отрицательное значение t отбрасываем, получаем $x^2 = 1$ и, соответственно, $x = \pm 1$. При $x = \pm 1$ имеем

$$y = -1.$$

Таким образом, пересечения: $(-1, -1)$ и $(1, -1)$.

Описание области: Для фиксированного x внутри круга (то есть для x от $-\sqrt{2}$ до $\sqrt{2}$), вертикальный отрезок внутри окружности имеет границы $y = -\sqrt{2 - x^2}$ и $y = \sqrt{2 - x^2}$. При условии $y > -x^2$ нижняя граница становится следующей:

- Если $|x| \leq 1$, то $-x^2 > -\sqrt{2 - x^2}$ (так как, например, при $x = 0$: $0 > -\sqrt{2}$). Здесь нижней границей выбираем $y = -x^2$.
- Если $|x| > 1$, то нижняя граница определяется условием круга, т.е. $y = -\sqrt{2 - x^2}$ (так как $-\sqrt{2 - x^2} > -x^2$).

Выразим площадь через интегралы:

Область разбивается по x:

$$A = \underbrace{\int_{-\sqrt{2}}^{-1} \left[\sqrt{2 - x^2} - \left(-\sqrt{2 - x^2}\right)\right] dx + \int_{-1}^{1} \left[\sqrt{2 - x^2} - \left(-x^2\right)\right] dx}_{\text{для } x \in [-1,1]} +$$

$$+ \int_{1}^{\sqrt{2}} \left[\sqrt{2 - x^2} - \left(-\sqrt{2 - x^2}\right)\right] dx.$$

Используя чётность, можно записать:

$$A = 2\int_{1}^{\sqrt{2}} 2\sqrt{2 - x^2}\, dx + 2\int_{0}^{1} \left[\sqrt{2 - x^2} + x^2\right] dx.$$

Обозначим:

$$I_1 = \int_1^{\sqrt{2}} 2\sqrt{2-x^2}\,dx, \qquad I_2 = \int_0^1 \left[\sqrt{2-x^2}+x^2\right]dx.$$

Для I_1 воспользуемся стандартной формулой:

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C, \quad a = \sqrt{2}.$$

Вычисляем:

$$F(x) = \frac{x}{2}\sqrt{2-x^2} + \arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}.$$

При $x = \sqrt{2}$: $\sqrt{2-\ 2} = 0, \quad \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$. При $x = 1$: $\sqrt{2-1} = 1, \quad \arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$.

Тогда:

$$I_1 = 2\Big[F(\sqrt{2}) - F(1)\Big] = 2\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right] = 2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Для I_2:

$$\int_0^1 \sqrt{2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}, \qquad \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}.$$

Следовательно,

$$I_2 = \left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}+\frac{\pi}{4}.$$

Таким образом, общая площадь:

$$A = 2I_1 + 2I_2 = 2\left(\frac{\pi}{2}-1\right) + 2\left(\frac{5}{6}+\frac{\pi}{4}\right) = (\pi-2) + \left(\frac{5}{3}+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{2} - 2 + \frac{5}{3}.$$

Приведя к общему знаменателю (6):

$$A = \frac{9\pi}{6} - \frac{12}{6} + \frac{10}{6} = \frac{9\pi-2}{6}.$$

Ответ к задаче 1:

$$A = \frac{9\pi-2}{6}.$$

Задача 2. Длина дуги параболы

Условие: Найти длину дуги параболы

$$y = 4x^2 - 4x + 2,$$

от $x_1 = 5$ до $x_2 = 6$.

Решение: Для функции $y = f(x)$ дуга определяется по формуле

$$L = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$$

Вычисляем производную:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(4x^2-4x+2) = 8x - 4.$$

Следовательно,

$$L = \int_5^6 \sqrt{1+(8x-4)^2}\,dx = \int_5^6 \sqrt{1+64(x-0.5)^2}\,dx.$$

Для удобства сделаем подстановку:

$$u = 8(x - 0.5), \quad du = 8dx, \quad dx = \frac{du}{8}.$$

При $x = 5$: $u = 8(4.5) = 36$; при $x = 6$: $u = 8(5.5) = 44$.

Получаем:

$$L = \frac{1}{8} \int_{36}^{44} \sqrt{1 + u^2}\, du.$$

Антидифференциал:

$$\int \sqrt{1 + u^2}\, du = \frac{1}{2}\Big(u\sqrt{1 + u^2} + \operatorname{arcsinh}(u)\Big) + C.$$

Таким образом,

$$L = \frac{1}{16} \left[\ u\sqrt{1 + u^2} + \operatorname{arcsinh}(u)\ \right]_{u=36}^{u=44}.$$

То есть,

$$L = \frac{1}{16}\Big[44\sqrt{1 + 44^2} + \operatorname{arcsinh}(44) - 36\sqrt{1 + 36^2} - \operatorname{arcsinh}(36)\Big].$$

Заметим, что $44^2 = 1936$ и $36^2 = 1296$.

Ответ к задаче 2:

$$L = \frac{1}{16}\Big[44\sqrt{1937} - 36\sqrt{1297} + \operatorname{arcsinh}(44) - \operatorname{arcsinh}(36)\Big].$$

Задача 3. Абсцисса центра масс фигуры, ограниченной параболой и касательными

Условие: Пусть дана парабола

$$y = 4x^2 - 4x + 2,$$

а $x_1 = 5$ и $x_2 = 6$. Построим касательные к параболе в точках $x = 5$ и $x = 6$.

Найдем уравнения касательных.

Для $x = 5$:

$$y(5) = 4 \cdot 5^2 - 4 \cdot 5 + 2 = 100 - 20 + 2 = 82, \quad f'(5) = 8 \cdot 5 - 4 = 36.$$

Уравнение касательной:

$$y - 82 = 36(x - 5) \quad \Rightarrow \quad y = 36(x - 5) + 82.$$

Для $x = 6$:

$$y(6) = 4 \cdot 6^2 - 4 \cdot 6 + 2 = 144 - 24 + 2 = 122, \quad f'(6) = 8 \cdot 6 - 4 = 44.$$

Уравнение касательной:

$$y - 122 = 44(x - 6) \quad \Rightarrow \quad y = 44(x - 6) + 122.$$

Найдём точку пересечения касательных:

$$36(x - 5) + 82 = 44(x - 6) + 122.$$

Приводим к общему виду:

$$36x - 180 + 82 = 44x - 264 + 122 \quad \Longrightarrow \quad 36x - 98 = 44x - 142.$$

Вынесем x:

$$-98 + 142 = 44x - 36x \quad \Rightarrow \quad 44 = 8x, \quad x = 5.5.$$

Подставляя $x = 5.5$ в одно из уравнений, получаем:

$$y = 36(0.5) + 82 = 18 + 82 = 100.$$

Таким образом, касательные пересекаются в точке $(5.5, 100)$.

Описание фигуры: Фигура ограничена:

1. Дугой параболы от точки $(5, 82)$ до $(6, 122)$.
2. Отрезками касательных: от $(5, 82)$ до $(5.5, 100)$ (касательная в $x = 5$) и от $(5.5, 100)$ до $(6, 122)$ (касательная в $x = 6$).

Чтобы найти абсциссу центра масс, выразим фигуру в виде вертикальных сечений по x. Заметим, что нижняя граница задаётся касательными, а верхняя — параболой.

Для $x \in [5, 6]$ нижняя граница определяется по частям:

- При $x \in [5, 5.5]$ нижняя кривая — касательная в $x = 5$:

$$g_1(x) = 36(x - 5) + 82.$$

- При $x \in [5.5, 6]$ нижняя кривая — касательная в $x = 6$:

$$g_2(x) = 44(x - 6) + 122.$$

Верхняя граница задаётся параболой:

$$f(x) = 4x^2 - 4x + 2.$$

Найдем разности $f(x) - g_i(x)$:

Для $x \in [5, 5.5]$**:**

$$f(x) - g_1(x) = \left(4x^2 - 4x + 2\right) - \left[36(x - 5) + 82\right] = 4x^2 - 4x + 2 - 36x + 180 - 82 = 4x^2 - 40x + 100.$$

Заметим, что

$$4x^2 - 40x + 100 = 4\left(x^2 - 10x + 25\right) = 4(x - 5)^2.$$

Область по $x \in [5.5, 6]$ аналогично:

$$f(x) - g_2(x) = 4x^2 - 4x + 2 - \left[44(x - 6) + 122\right] = 4x^2 - 48x + 144 = 4(x - 6)^2.$$

Площадь фигуры R вычисляется как

$$A_R = \int_5^{5.5} 4(x - 5)^2 \, dx + \int_{5.5}^{6} 4(x - 6)^2 \, dx.$$

Сделав замену $u = x - 5$ (при первом интеграле) и $v = 6 - x$ (при втором), получаем

$$A_R = 4 \int_0^{0.5} u^2 \, du + 4 \int_0^{0.5} v^2 \, dv = 2 \cdot \frac{(0.5)^3}{3} + 2 \cdot \frac{(0.5)^3}{3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}.$$

Для нахождения абсциссы центра масс воспользуемся формулой:

$$\bar{x} = \frac{1}{A_R}\int_R x\,dA = \frac{1}{A_R}\left[\int_5^{5.5} x\cdot 4(x-5)^2dx + \int_{5.5}^{6} x\cdot 4(x-6)^2dx\right].$$

Вычисление первого слагаемого: Сделаем замену $u = x-5$, тогда $x = u+5$ и $u \in [0, 0.5]$:

$$M_1 = 4\int_0^{0.5}(u+5)u^2du = 4\Big[\int_0^{0.5} u^3du + 5\int_0^{0.5} u^2du\Big].$$

Так как

$$\int_0^{0.5} u^3du = \frac{(0.5)^4}{4} = \frac{1}{64}, \qquad \int_0^{0.5} u^2du = \frac{(0.5)^3}{3} = \frac{1}{24},$$

то

$$M_1 = 4\left(\frac{1}{64} + 5\cdot\frac{1}{24}\right) = 4\left(\frac{1}{64} + \frac{5}{24}\right) = \frac{43}{48} \quad \text{(в точных дробях)}.$$

Вычисление второго слагаемого: Сделаем замену $v = 6-x$ (при $x \in [5.5, 6]$), тогда $x = 6-v$ и $v \in [0, 0.5]$:

$$M_2 = 4\int_0^{0.5}(6-v)v^2dv = 4\left[6\int_0^{0.5} v^2dv - \int_0^{0.5} v^3dv\right] = 4\left(6\cdot\frac{1}{24} - \frac{1}{64}\right) = \frac{15}{16}.$$

Общий момент:

$$M = \frac{43}{48} + \frac{15}{16} = \frac{43+45}{48} = \frac{88}{48} = \frac{11}{6}.$$

Таким образом,

$$\bar{x} = \frac{M}{A_R} = \frac{11/6}{1/3} = \frac{11}{6}\cdot 3 = \ 5.5.$$

Ответ к задаче 3:

$$\bar{x} = 5.5.$$

Задача 4. Ордината центра масс фигуры

Чтобы найти ординату центра масс, воспользуемся формулой для момента по y:

$$\bar{y} = \frac{1}{A_R}\int_R \frac{f^2(x) - g^2(x)}{2}\,dx,$$

где $f(x)$ — верхняя граница (парабола), а $g(x)$ — нижняя (касательные). При разбиении по областям получаем:

$$J_1 = \frac{1}{2}\int_5^{5.5}\Big[f^2(x) - g_1^2(x)\Big]dx, \qquad J_2 = \frac{1}{2}\int_{5.5}^{6}\Big[f^2(x) - g_2^2(x)\Big]dx.$$

Заметим, что

$$f^2(x) - g_i^2(x) = (f(x) - g_i(x))\big(f(x) + g_i(x)\big),$$

а мы уже доказали, что

$$f(x) - g_1(x) = 4(x-5)^2, \qquad f(x) - g_2(x) = 4(x-6)^2.$$

Путём аккуратных замен (подстановки $u = x-5$ для J_1 и $v = 6-x$ для J_2) можно показать, что

$$J_1 = \frac{479}{30}, \qquad J_2 = \frac{529}{30}.$$

Таким образом, суммарный момент по y равен

$$J = J_1 + J_2 = \frac{479 + 529}{30} = \frac{1008}{30} = \frac{168}{5} \quad (= 33.6).$$

При этом, поскольку площадь $A_R = \frac{1}{3}$, ордината центра масс будет равна

$$\bar{y} = \frac{J}{A_R} = \frac{168/5}{1/3} = \frac{168}{5} \cdot 3 = \frac{504}{5} = 100.8.$$

Ответ к задаче 4:

$$\bar{y} = \frac{504}{5} \quad .$$