МИНОБРНАУКИ РОССИИ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)
Кафедра алгоритмической математики

ИДЗ №1
по дисциплине «Алгебра и геометрия»
вариант №44 (6123912)

Студент гр. 4395:	____________________	Николаев В.Ю.
Преподаватель:	____________________	Бойко С.В.

Санкт-Петербург
2025

Задача 1

Условие

Является ли линейным пространством множество матриц 2×2 со следом 1?

Решение

Рассматриваем множество

$$V = \{A \in M_{2\times2}(\mathbb{R}) \mid \mathrm{tr}(A) = 1\}$$

Проверим замкнутость относительно сложения. Пусть $A, B \in V$. Тогда:

$$\mathrm{tr}(A) = 1, \mathrm{tr}(B) = 1$$

Рассмотрим $A + B$:

$$\mathrm{tr}(A+B) = (a_{11}+b_{11})+(a_{22}+b_{22}) = (a_{11}+a_{22})+(b_{11}+b_{22}) = \mathrm{tr}(A)+\mathrm{tr}(B) = 1+1 = 2 \neq 1$$

Значит $A+B \notin V$, а значит замкнутость относительно сложения не выполняется.

Ответ

Множество матриц 2×2 со следом 1 не является линейным пространством.

Задача 2

Условие

Найти координаты столбца

$$x = (-2,\ -1,\ 3)^T$$

в базисе

$$f_1 = (1,\ 1,\ -1)^T, \quad f_2 = (2,\ 3,\ -4)^T, \quad f_3 = (0,\ 1,\ -1)^T.$$

Решение

Составим расширенную матрицу:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & -4 & -1 & 3 \end{array}\right]$$

Приведём к ступенчатому виду:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & -4 & -1 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ -\mathrm{I} \\ +\mathrm{I} \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ +2\mathrm{II} \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Приведём к диагональной матрице:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ -\mathrm{III} \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{c} -2\mathrm{II} \\ \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Ответ

Столбец x в базисе $\{f_1, f_2, f_3\}$ имеет координаты: $x_f = (2, -2, 3)^T$.

Задача 3

Условие

Даны столбцы

$$e_1 = (1,\ -3,\ -1)^T,\ e_2 = (-1,\ 4,\ 1)^T,\ e_3 = (0,\ -2,\ 1)^T,$$

$$f_1 = (1,\ -3,\ -2)^T,\ f_2 = (-1,\ 3,\ 3)^T,\ f_3 = (1,\ -2,\ -1)^T,$$
$$x = (3,\ -3,\ -2)^T.$$

1. Найти матрицы перехода $C_{e\to f}$ и $C_{f\to e}$.
2. Найти координаты x в базисе e.

Решение

1. Найдём матрицы перехода $C_{e\to f}$ и $C_{f\to e}$:

   Запишем матрицы E и F:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -3 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

   Матрица перехода $C_{e\to f}$ это такая матрица, что:

$$F = EC_{e\to f} \Rightarrow C_{e\to f} = E^{-1}F.$$

   Вычислим E^{-1}:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ +3\mathrm{I} \\ +\mathrm{I} \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ +2\mathrm{III} \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} +\mathrm{II} \\ \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 6 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$E^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$C_{e\to f} = E^{-1}F = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица перехода $C_{f\to e}$ — обратная к $C_{e\to f}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} *(-1) \\ -2\mathrm{I} \\ -\mathrm{I} \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ -2\mathrm{III} \\ *(-1) \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{c} +2\mathrm{II} \\ \\ -2\mathrm{II} \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{c} +3\mathrm{III} \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ =\mathrm{III} \\ =\mathrm{II} \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right].$$

2. Найдём координаты x в базисе e:

$$Ex_e = x \Rightarrow x_e = E^{-1}x = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ответ

1. Матрицы перехода:

$$C_{e\to f} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, C_{f\to e} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

2. Координаты x в базисе e:

$$x_e = (11, 8, 1)^T$$

Задача 4

Условие

Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 9 & -2 & 6 \\ 1 & 3 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & 1 & 2 & -2 \\ -3 & -5 & -6 & 3 & -7 \\ -1 & -2 & -4 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. Найти базис линейной оболочки строк матрицы.

2. Найти базис пространства решений системы $Ax = 0$.

Решение

1. Найдём базис линейной оболочки строк матрицы.

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 9 & -2 & 6 \\ 1 & 3 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & 1 & 2 & -2 \\ -3 & -5 & -6 & 3 & -7 \\ -1 & -2 & -4 & 0 & -2 \end{pmatrix} = -\mathrm{II} \sim \begin{pmatrix} 3 & -1 & 9 & -2 & 6 \\ 1 & 3 & 1 & -2 & 3 \\ -3 & -5 & -6 & 3 & -7 \\ -1 & -2 & -4 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} -3\mathrm{II} \\ \\ +3\mathrm{II} \\ +\mathrm{II} \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & -10 & 6 & 4 & -3 \\ 1 & 3 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -3 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} +10\mathrm{IV} \\ -3\mathrm{IV} \\ -4\mathrm{IV} \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & -24 & -16 & 7 \\ 1 & 0 & 10 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} *15 \\ *36 \\ *40 \\ *120 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & -360 & -240 & 105 \\ 36 & 0 & 360 & 144 & 0 \\ 0 & 0 & 360 & 200 & -80 \\ 0 & 120 & -360 & -240 & 120 \end{pmatrix} \begin{matrix} +\mathrm{III} \\ -\mathrm{III} \\ \\ +\mathrm{III} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -40 & 25 \\ 36 & 0 & 0 & 56 & 80 \\ 0 & 0 & 360 & 200 & -80 \\ 0 & 120 & 0 & -40 & 40 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -40 & 25 \\ 36 & 0 & 0 & 56 & 80 \\ 0 & 0 & 360 & 200 & -80 \\ 0 & 120 & 0 & -40 & 40 \end{pmatrix} \begin{matrix} *35 \\ *25 \\ *7 \\ *35 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1400 & 875 \\ 900 & 0 & 0 & 1400 & 2000 \\ 0 & 0 & 2520 & 1400 & -560 \\ 0 & 4200 & 0 & -1400 & 4100 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ +\mathrm{I} \\ +\mathrm{I} \\ -\mathrm{I} \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1400 & 875 \\ 900 & 0 & 0 & 0 & 2875 \\ 0 & 0 & 2520 & 0 & 315 \\ 0 & 4200 & 0 & 0 & 3225 \end{pmatrix} \begin{matrix} *\frac{-1}{175} \\ *\frac{1}{25} \\ *\frac{1}{315} \\ *\frac{1}{75} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 8 & -5 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 1 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} = \mathrm{II} \\ = \mathrm{IV} \\ \\ = \mathrm{I} \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & -5 \end{pmatrix}.$$

2. Пространство решений — ядро матрицы A. Оно одномерно и порождено вектором $x = (10, 1, 1, -5, -8)^T$.

Ответ

1. Базис линейной оболочки строк матрицы:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix} \right\}.$$

2. Базис пространства решений системы $Ax = 0$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 1 \\ -5 \\ -8 \end{pmatrix} \right\}$$