Конспект к коллоквиуму по математическому анализу

Николаев Всеволод

23 марта 2025 г.

Содержание

1 Равномерная непрерывность. Примеры. Теорема Кантора о равномерной непрерывности.

1.1 Используемые понятия

Компакт в $\mathbb{R}$. Множество $K \subset \mathbb{R}$ называется *компактным*, если оно *замкнуто* и *ограничено.*

Определение непрерывной функции (точечное). Функция f непрерывна в x_0, если
$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : \ |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$
Если это верно для каждой точки множества X, говорят, что f непрерывна на X.

Теорема о сходящейся подпоследовательности (Больцано–Вейерштрасса). Всякая *ограниченная* последовательность в $\mathbb{R}$ имеет *сходящуюся* подпоследовательность. Если (x_n) лежит в компактном K, то любая подпоследовательность (x_{n_k}) имеет сходящуюся подпоследовательность с пределом в K.

1.2 Ответ на вопрос

Определение (Обычная непрерывность). Функция f называется *непрерывной* в точке x_0, если
$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta(\varepsilon, x_0) > 0 : \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Определение (Равномерная непрерывность). Пусть f задана на $X \subset \mathbb{R}$. Тогда f называется *равномерно непрерывной* на X, если
$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \quad \forall x_1, x_2 \in X, \ |x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$
Ключевая особенность: δ **не** зависит от конкретной точки в X, а лишь от ε.

Теорема Кантора (формулировка). *Если функция f непрерывна на компактном множестве $X \subset \mathbb{R}$, то f равномерно непрерывна на X.*

1. Доказываем *от противного*: предположим, что f непрерывна на компакте X, но *не* является равномерно непрерывной.

2. Это означает, что существует $\varepsilon_0 > 0$, для которого *никогда* нельзя выбрать δ «раз и навсегда». Формально:
$$\forall \delta > 0, \ \exists \, x, y \in X : \ |x - y| < \delta, \ |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon_0.$$

3. Выбираем $\delta = 1/n$, строим пары (x_n, y_n). При компактности X можно выделить подпоследовательность $(x_{n_k}) \to c$. Тогда и $y_{n_k} \to c$.

4. По непрерывности f: $f(x_{n_k}) \to f(c)$ и $f(y_{n_k}) \to f(c)$, значит $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \to 0$. Это *противоречит* условию $\geq \varepsilon_0$.

Доказательство теоремы Кантора.

1. **Шаг 1. Предположение противного.** Пусть f непрерывна на компактном X, но **не** равномерно непрерывна. Тогда существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для всякого $\delta > 0$ можно найти $x, y \in X$ с
$$|x - y| < \delta, \quad |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon_0.$$

2. **Шаг 2. Построение последовательностей.** Для $n \in \mathbb{N}$ возьмём $\delta = 1/n$. Найдём $x_n, y_n \in X$:
$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n}, \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0.$$
3. **Шаг 3. Извлечение сходящейся подпоследовательности.** Поскольку X *компактно* (см. `sub_1.tex` о необходимости замкнутости и ограниченности), существует подпоследовательность $(x_{n_k}) \to c \in X$. Из условия $|x_{n_k} - y_{n_k}| < 1/n_k \to 0$ следует $y_{n_k} \to c$ тоже.
4. **Шаг 4. Применение непрерывности f.** По непрерывности f:
$$f(x_{n_k}) \to f(c), \quad f(y_{n_k}) \to f(c).$$
Тогда
$$|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \ \to \ 0.$$
5. **Шаг 5. Противоречие.** Но по выбору (x_{n_k}, y_{n_k}) мы всегда имели $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon_0 > 0$. Получено противоречие. Значит исходное предположение неверно.
6. **Шаг 6. Вывод.** Следовательно, f равномерно непрерывна на X.

2 Дифференциал функции. Теорема Ферма. Теорема Ролля. Примеры.

2.1 Используемые понятия

Локальный экстремум. Точка x_0 называется *локальным минимумом* (соответственно, максимумом), если существует $\delta > 0$ такое, что для всех x из $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ выполняется $f(x) \geq f(x_0)$ (или $f(x) \leq f(x_0)$ для максимума).

Теорема Вейерштрасса (о достижении экстремума). Если f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то f достигает на нём своих наибольшего и наименьшего значений. Формально:

$$\exists x_{\min}, x_{\max} \in [a, b] : \quad f(x_{\min}) \leq f(x) \leq f(x_{\max}) \quad \forall x \in [a, b].$$

Производная в точке. Напомним, $f'(x_0)$ есть предел

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

если этот предел конечен.

2.2 Ответ на вопрос

Дифференциал функции. Пусть функция f определена в окрестности точки x_0 и дифференцируема в x_0. Тогда *дифференциалом* $df(x_0)$ функции f в точке x_0 называется величина

$$df(x_0) \;=\; f'(x_0)\,(x - x_0),$$

где $dx = x - x_0$ считается «малым» приращением аргумента. В более общем смысле при малом dx пишут

$$df(x_0) \;=\; f'(x_0)\,dx.$$

Это выражает, что приращение функции раскладывается на линейную часть $df(x_0)$ и малую «остаточную» часть $o(dx)$:

$$f(x_0 + dx) - f(x_0) \;=\; df(x_0) + o(dx).$$

Теорема Ферма (о локальном экстремуме). Если функция f дифференцируема в точке x_0 и имеет там локальный минимум или максимум, то

$$f'(x_0) \;=\; 0.$$

Теорема Ролля. Пусть f удовлетворяет трём условиям:

1. Непрерывна на отрезке $[a, b]$;
2. Дифференцируема на интервале (a, b);
3. При этом $f(a) = f(b)$.

Тогда существует хотя бы одна точка $c \in (a, b)$ такая, что

$$f'(c) = 0.$$

Идея доказательства Теоремы Ферма.

- Предположим, x_0 — точка локального минимума. Тогда для x вблизи x_0 имеем $f(x) \geq f(x_0)$.
- Рассматриваем разность $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ при $x > x_0$ и при $x < x_0$.
- Переходя к пределу $x \to x_0^+$ и $x \to x_0^-$, получаем $f'(x_0) \geq 0$ и $f'(x_0) \leq 0$ соответственно. Значит $f'(x_0) = 0$.
- Для локального максимума аналогично.

Идея доказательства Теоремы Ролля.

- Если f постоянна на $[a, b]$, то $f'(x) = 0$ на (a, b) и теорема доказана.
- Если f не постоянна, по **теореме о достижении экстремума** (см. `sub_2.tex`) она достигает минимума и максимума в некотором $x_{\min}, x_{\max} \in [a, b]$.
- Поскольку $f(a) = f(b)$, хотя бы один из экстремумов не может быть только на концах. Тогда внутри (a, b) есть точка локального экстремума c.
- По Теореме Ферма, $f'(c) = 0$.

Доказательство Теоремы Ферма (пошагово):

1. Пусть x_0 — точка локального минимума, то есть существует $\delta > 0$ такое, что при $|x - x_0| < \delta$, $f(x) \geq f(x_0)$.
2. Для $x > x_0$ рассмотрим $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$. При переходе $x \to x_0^+$, этот предел есть $f'(x_0) \geq 0$.
3. Для $x < x_0$ аналогично, но тогда $x - x_0 < 0$, и из неравенства $f(x) \geq f(x_0)$ получаем $f'(x_0) \leq 0$.
4. Значит $f'(x_0) \geq 0$ и $f'(x_0) \leq 0$, откуда $f'(x_0) = 0$.
5. Случай локального максимума разбирается аналогично (только знак меняется).

Доказательство Теоремы Ролля (пошагово):

1. Если f постоянна на $[a, b]$, то $f'(x) = 0$ на всём (a, b), и точка c может быть любая.
2. Иначе f непостоянна и, благодаря непрерывности на $[a, b]$, достигает минимума и максимума (Теорема Вейерштрасса, см. `sub_2.tex`).
3. Пусть $x_{\min}$ и $x_{\max}$ — точки, где достигаются минимум и максимум. Поскольку $f(a) = f(b)$, как минимум одно из этих значений будет «внутренним» для отрезка, иначе функция была бы постоянно равна этому значению. Значит есть $c \in (a, b)$ — точка локального экстремума.
4. По Теореме Ферма, в точке локального экстремума c имеем $f'(c) = 0$.
5. Следовательно, нашли искомую точку $c \in (a, b)$, что доказывает Теорему Ролля.

Пример (дифференциал). Для $f(x) = x^2$, в точке $x_0 = 2$ имеем $f'(2) = 4$. Тогда малому приращению dx соответствует $df(2) = 4\,dx$. Если $dx = 0.1$, то $df(2) = 0.4$, а реальное $f(2.1) - f(2) = 4.41 - 4 = 0.41$, что близко к 0.4.

Пример (Теорема Ферма). Функция $f(x) = x^2$ имеет локальный минимум в $x = 0$, причём $f'(0) = 0$.

Пример (Теорема Ролля). На отрезке $[0, 4]$ возьмём $f(x) = x^2 - 4x$. Тогда $f(0) = f(4) = 0$, f непрерывна на $[0, 4]$ и дифференцируема на $(0, 4)$. По Теореме Ролля существует $c \in (0, 4)$ с $f'(c) = 0$. Действительно, $f'(x) = 2x - 4$, отсюда $c = 2$.

3 Теорема Лагранжа. Необходимое и достаточное условие постоянства дифференцируемой функции на промежутке. Необходимое и достаточное условие монотонности дифференцируемой функции на промежутке.

3.1 Используемые понятия

Теорема Ролля (напоминание). Пусть f непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема на (a, b) и $f(a) = f(b)$. Тогда существует точка $c \in (a, b)$, где $f'(c) = 0$.

Определение дифференцируемости (напоминание). Функция f называется дифференцируемой в точке x_0, если существует конечный предел

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Если $f'(x_0)$ существует для всех x_0 в (a, b), говорят, что f дифференцируема на (a, b).

Определение монотонности (напоминание). Функция f называется *возрастающей* на (a, b), если для любых $x_1, x_2 \in (a, b)$, при $x_1 < x_2$ выполняется $f(x_1) \leq f(x_2)$ (нестрого) или $f(x_1) < f(x_2)$ (строго). Аналогично определяется убывание.

Определение постоянной функции. Функция f называется постоянной на (a, b), если $f(x_1) = f(x_2)$ для любых $x_1, x_2 \in (a, b)$.

3.2 Ответ на вопрос

Теорема Лагранжа (о среднем значении). Пусть функция f *непрерывна* на отрезке $[a, b]$ и *дифференцируема* на интервале (a, b). Тогда существует точка $c \in (a, b)$ такая, что

$$f(b) - f(a) \;=\; f'(c)\,\big(b - a\big).$$

(*Остальные определения см. в* `sub_3.tex` *— например, производная, непрерывность, и т.п.*)

Необходимое и достаточное условие постоянства дифференцируемой функции. Пусть функция f дифференцируема на промежутке (a, b). Тогда она *постоянна* на (a, b) **тогда и только тогда**, когда

$$f'(x) \;=\; 0 \quad \text{для всех } x \in (a, b).$$

Необходимое и достаточное условие монотонности дифференцируемой функции. Пусть f дифференцируема на промежутке (a, b). Тогда верны следующие утверждения:

- Функция f **возрастает** на (a, b) $\iff$ $f'(x) \geq 0$ для всех $x \in (a, b)$, причём множество точек, где $f'(x) = 0$, не содержит интервалов.

- Функция f **убывает** на (a, b) $\iff$ $f'(x) \leq 0$ для всех $x \in (a, b)$, причём множество точек, где $f'(x) = 0$, не содержит интервалов.

Основная идея доказательства теоремы Лагранжа:

- Эта теорема является обобщением Теоремы Ролля.

- Сущность: Рассмотрим функцию $F(x) = f(x) - \alpha x$, где $\alpha = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
- Из условия $F(a) = F(b)$ и непрерывности+дифференцируемости F на $[a, b]$ применяем Теорему Ролля: существует $c \in (a, b)$, где $F'(c) = 0$.
- Тогда $F'(c) = f'(c) - \alpha = 0 \implies f'(c) = \alpha = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Идея доказательства условия постоянства:

- Если $f'(x) = 0$ повсюду, то по Теореме Лагранжа (или Ролля) разность $f(x_2) - f(x_1)$ всегда равна нулю, значит f постоянна.
- Если f постоянна, ясно, что $f'(x) = 0$.

Идея доказательства условия монотонности:

- Если $f'(x) \geq 0$ на (a, b), то при $x_2 > x_1$ можно показать $f(x_2) \geq f(x_1)$.
- Обратное: если f возрастает, то для $x_2 > x_1$ имеем $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \geq 0$. Переходя к пределу, получаем $f'(x) \geq 0$.
- Уточнение, что множество точек с $f'(x) = 0$ не содержит внутренних отрезков, нужно, чтобы исключить «застревание» функции на целых интервалах.

Доказательство Теоремы Лагранжа

1. **Построение вспомогательной функции.** Пусть $\alpha = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Рассмотрим
$$F(x) \;=\; f(x) - \alpha\, x.$$
Тогда $F(a) = f(a) - \alpha a$ и $F(b) = f(b) - \alpha b$. Заметим:
$$F(b) - F(a) \;=\; [f(b) - f(a)] \;-\; \alpha[b - a] \;=\; 0.$$

2. **Применение Теоремы Ролля.** Функция F непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b) (как разность непрерывных и дифференцируемых функций). Причём $F(a) = F(b)$. По Теореме Ролля (см. `sub_3.tex` при необходимости) существует $c \in (a, b)$: $F'(c) = 0$.

3. **Заключение.** Из $F'(x) = f'(x) - \alpha$ получаем $F'(c) = f'(c) - \alpha = 0 \implies f'(c) = \alpha$. Но $\alpha = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, значит
$$f'(c) \;=\; \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$
На этом доказательство завершается.

Доказательство необходимого и достаточного условия постоянства

1. **Необходимость (если f постоянна).** Если f есть константа, то для всех $x \in (a, b)$ приращения $f(x_2) - f(x_1) = 0$, значит $f'(x) = 0$ в любой точке, где она дифференцируема.

2. **Достаточность (если $f'(x) = 0$ повсюду).** Пусть $f'(x) = 0$ на (a, b). Возьмём любые $x_1, x_2 \in (a, b)$, причём $x_2 > x_1$. По Теореме Лагранжа существует $c \in (x_1, x_2)$ с
$$f(x_2) - f(x_1) \;=\; f'(c)\,(x_2 - x_1).$$
Но $f'(c) = 0$, значит $f(x_2) = f(x_1)$. Следовательно, f неизменна на всём промежутке.

Доказательство необходимого и достаточного условия монотонности

(Рассмотрим случай возрастания; для убывания аналогично меняются знаки.)

1. **Если $f'(x) \geq 0$ для всех x, то f возрастает.** Пусть $x_1 < x_2$. По Теореме Лагранжа на отрезке $[x_1, x_2]$ существует $c \in (x_1, x_2)$ такое, что

   $$f(x_2) - f(x_1) \; = \; f'(c)\,(x_2 - x_1).$$

   Раз $f'(c) \geq 0$ и $x_2 - x_1 > 0$, то $f(x_2) - f(x_1) \geq 0 \implies f(x_2) \geq f(x_1)$. Значит f неубывает. Для *строгого* возрастания нужно уточнить, что нет интервалов, где $f'(x) = 0$ постоянно.

2. **Если f возрастает, то $f'(x) \geq 0$.** При $x_2 > x_1$ имеем $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \geq 0$. Переходя к пределу, получаем $f'(x) \geq 0$.

3. **Уточнение про множество нулей $f'(x)$.** Если на каком-то подинтервале $f'(x)$ всё время равно нулю, то f там постоянна, что может «ломать» строгое возрастание (если отрезок ненулевой длины). Поэтому для строгой монотонности требуется, чтобы подмножество нулей не содержало интервалов.

4 Равномерная непрерывность. Примеры. Теорема Кантора о равномерной непрерывности.

4.1 Используемые понятия

Определение компакта в $\mathbb{R}$. Множество $K \subset \mathbb{R}$ называется *компактным*, если оно *замкнуто* и *ограничено*.

Теорема Больльцано–Вейерштрасса. Всякая *ограниченная* последовательность (x_n) в $\mathbb{R}$ имеет *сходящуюся* подпоследовательность. На языке компактных множеств: любая последовательность, целиком лежащая в компактном K, содержит сходящуюся подпоследовательность с пределом в K.

Определение непрерывности (подробно). Напомним: f непрерывна на X, если для любой точки $x_0 \in X$:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

4.2 Ответ на вопрос

Непрерывность (точечная). Функция f называется *непрерывной* в точке x_0, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon, x_0) > 0 : \ |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Если это выполняется для всех x_0 из множества X, то говорят, что f непрерывна на X.

Равномерная непрерывность. Пусть f задана на $X \subseteq \mathbb{R}$. Функция f называется *равномерно непрерывной* на X, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \ \forall x_1, x_2 \in X, \quad |x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Существенное отличие от обычной непрерывности — в том, что δ выбирается *только* в зависимости от ε и **не** зависит от точки x_0.

Теорема Кантора. Если f непрерывна на *компактном* множестве $X \subset \mathbb{R}$, то f **равномерно непрерывна** на X.

- Доказывать будем *от противного*: предположим, что f непрерывна на компакте, но не равномерно непрерывна.
- Это означает существование $\varepsilon_0 > 0$ такого, что нельзя подобрать «глобальное» δ, выполняющее условие равномерной непрерывности.
- Для каждой n, выбрав $\delta = 1/n$, находятся точки (x_n, y_n) с $|x_n - y_n| < 1/n$, но $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0$.
- Компактность X обеспечивает возможность извлечения сходящейся подпоследовательности $(x_{n_k}) \to c$. Поскольку $|x_{n_k} - y_{n_k}| < 1/n_k \to 0$, то $y_{n_k} \to c$ тоже.
- По непрерывности f получаем $f(x_{n_k}) \to f(c)$ и $f(y_{n_k}) \to f(c)$, что даёт $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \to 0$, противореча условию $\geq \varepsilon_0$.
- Противоречие доказывает равномерную непрерывность.

Доказательство Теоремы Кантора

Шаг 1: Предположение от противного. Пусть f непрерывна на компактном X, но **не** равномерно непрерывна. Тогда

$$\exists\, \varepsilon_0 > 0 : \quad \forall \delta > 0,\ \exists x, y \in X : \ |x - y| < \delta,\ \ |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon_0.$$

Шаг 2: Построение последовательностей. Выбираем $\delta = 1/n$. Появляются пары $(x_n, y_n) \in X$ со свойствами:

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n}, \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0.$$

Шаг 3: Извлечение сходящейся подпоследовательности (компактность). Последовательность (x_n), являясь «лежачей» в X, по теореме Болльцано–Вейерштрасса (см. `sub_4.tex`) имеет сходящуюся подпоследовательность $(x_{n_k}) \to c \in X$. Тогда $|x_{n_k} - y_{n_k}| < 1/n_k \to 0 \implies y_{n_k} \to c$.

Шаг 4: Применение непрерывности к подпоследовательностям. Из непрерывности f в точке c:

$$f(x_{n_k}) \to f(c), \quad f(y_{n_k}) \to f(c),$$

значит $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \to 0$.

Шаг 5: Противоречие. По построению же $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon_0 > 0$. Получаем противоречие «$\to 0$» против «$\geq \varepsilon_0$». Значит исходное предположение ложно.

Шаг 6: Вывод. Таким образом, функция f **является** равномерно непрерывной на X.

Пример (равномерная непрерывность на $\mathbb{R}$).

- Линейная функция: $f(x) = kx + b$. Для любой пары x_1, x_2 справедливо $|f(x_1) - f(x_2)| = |k|\,|x_1 - x_2|$, здесь очевидна равномерная непрерывность (достаточно взять $\delta = \frac{\varepsilon}{|k|}$).
- Тригонометрические функции $\sin x$, $\cos x$ на всей $\mathbb{R}$ тоже равномерно непрерывны (ограничены и периодичны, их изменения «контролируются»).

Пример (не равномерно непрерывные на $\mathbb{R}$).

- $f(x) = x^2$: хотя непрерывна на $\mathbb{R}$, она не равномерно непрерывна на всей оси (с ростом x глобальная «δ» становится недостаточной).
- e^x тоже не равномерно непрерывна на всей $\mathbb{R}$ (аналогичная причина).

5 Вывод рядов Тейлора для функций y=exp(x), y=sinx, y=cosx через следствие из теоремы Лагранжа. Формула Эйлера.

5.1 Используемые понятия

Теорема Лагранжа (о среднем значении). Пусть функция f непрерывна на $[0, x]$ (при $x > 0$) и дифференцируема на $(0, x)$. Тогда существует $c \in (0, x)$ такое, что

$$f(x) - f(0) \;=\; f'(c)\,\bigl(x - 0\bigr).$$

n-я производная. Функция f называется n раз дифференцируемой в точке, если существуют все производные $f'(x_0), f''(x_0), \ldots, f^{(n)}(x_0)$. Аналогично в окрестности.

Определение комплексной экспоненты (для Формулы Эйлера). Если z комплексное, e^z определяется как $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$. Это расширяет понятие экспоненты на комплексную область.

5.2 Ответ на вопрос

Ряд Тейлора (Маклорена) и остаточный член. Пусть функция f имеет все производные в некоторой окрестности точки 0. Тогда *ряд Маклорена* для f есть

$$f(0) \;+\; \frac{f'(0)}{1!}\,x \;+\; \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 \;+\; \ldots \;+\; \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n + \ldots$$

Остаточный член $R_n(x)$ (в форме Лагранжа) можно записать как

$$R_n(x) \;=\; \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,x^{n+1},$$

где ξ лежит между 0 и x (см. `sub_5.tex`, Теорема о среднем значении в форме Лагранжа).

Формула Тейлора (с остатком в форме Лагранжа). Пусть f имеет $(n+1)$-ю производную в окрестности 0. Тогда для x из этой окрестности выполняется:

$$f(x) \;=\; f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\,x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,x^{n+1}}_{R_n(x)},$$

где ξ — некоторая точка между 0 и x. Эта запись называется *рядом Тейлора (Маклорена)* с остаточным членом в *форме Лагранжа*.

Идея вывода:

- Используем *теорему Лагранжа* о среднем значении производной. Рассматриваем многочлен $P_n(x)$, равный сумме до n-го члена ряда, и функцию $f(x) - P_n(x)$.
- Применяем теорему Лагранжа к $f(x) - P_n(x)$ на отрезке $[0, x]$, получаем «остаток» $R_n(x)$ в виде $f^{(n+1)}(\xi)\,x^{n+1}/(n+1)!$.
- Далее, зная все производные f, вычисляем $f^{(k)}(0)$ и подставляем в общую формулу.

Вывод ряда Тейлора для e^x

1. **Производные в окрестности** 0. Пусть $f(x) = e^x$. Тогда $f^{(k)}(x) = e^x$ для любого k. Следовательно, $f^{(k)}(0) = 1$.

2. **Запись общего члена.** По Формуле Тейлора (Маклорена),
$$e^x \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n + R_n(x).$$
Но $f^{(n)}(0) = 1$, значит
$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + R_n(x).$$

3. **Вид остатка в форме Лагранжа.**
$$R_n(x) \;=\; \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\, x^{n+1} \;=\; \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}\, x^{n+1}, \quad \xi \in (0, x).$$

4. **При** $n \to \infty$ и фиксированном x, e^{ξ} остаётся конечным. Получаем $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, значит
$$e^x \;=\; 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots.$$

Вывод ряда Тейлора для $\sin x$ и $\cos x$

1. **Пусть** $f(x) = \sin x$**.** Производные: $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f^{(3)}(x) = -\cos x$, $f^{(4)}(x) = \sin x$ и т.д. На $x = 0$: $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f^{(3)}(0) = -1$, $f^{(4)}(0) = 0$, и цикл повторяется.
$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n + R_n(x).$$
Подставляя значения, получаем чётные производные $= 0$ в 0, нечётные чередуются $1, -1, \dots$.
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + R_n(x).$$
Остаток $R_n(x)$ (по Лагранжу) будет $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\, x^{n+1}$ для некоторой $\xi \in (0, x)$.

2. **Аналогично для** $g(x) = \cos x$**.** $g(0) = 1$, $g'(0) = 0$, $g''(0) = -1$, $g^{(3)}(0) = 0$, $g^{(4)}(0) = 1, \dots$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + R_n(x).$$

Формула Эйлера:
$$e^{ix} = \cos x + i\, \sin x.$$

Краткое объяснение. Если подставить в разложение e^x вместо x — комплексное ix, то
$$e^{ix} \;=\; 1 + (ix) + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \dots.$$
Распределяя степени i^n на действительную и мнимую часть, получаем чётные степени $i^{2k} = (-1)^k$ и нечётные $i^{2k+1} = i\,(-1)^k$. В итоге исходные суммы группируются exactly как в рядах для $\cos x$ и $\sin x$.
$$e^{ix} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots\right) \;+\; i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\right) = \cos x + i\, \sin x.$$

6 Теорема Коши. Правило Лопиталя (доказательство – только для случая 0/0). Примеры, когда правило неприменимо.

6.1 Используемые понятия

Теорема Ролля (напоминание). Пусть f непрерывна на отрезке $[p, q]$, дифференцируема на (p, q) и $f(p) = f(q)$. Тогда существует точка $c \in (p, q)$, где $f'(c) = 0$.

Определение: проколотая окрестность. Говорят, что функция f дифференцируема (или определена) в проколотой окрестности точки a, если существует $\delta > 0$ такое, что при $0 < |x - a| < \delta$, $f(x)$ (и её производная) определена. При этом в самой точке a она может быть не определена или не дифференцируема.

Неопределённости вида $0/0$ и ∞/∞. Правило Лопиталя распространяется на случаи, когда $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ или $\pm\infty$. В остальных случаях правило не даёт результата.

6.2 Ответ на вопрос

Теорема Коши (обобщённая теорема Лагранжа). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют условиям:

- непрерывны на $[a, b]$,
- дифференцируемы на (a, b),
- $g'(x) \neq 0$ для всех $x \in (a, b)$.

Тогда существует точка $c \in (a, b)$ такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Правило Лопиталя (только для случая $\frac{0}{0}$). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в *проколотой* окрестности точки a (то есть всюду, кроме, возможно, самой точки a). Предположим:

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to a} g(x) = 0,$$

и $g'(x) \neq 0$ в этой окрестности. Если существует (конечный или бесконечный) предел

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L,$$

то существует и предел $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, причём

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Основная идея Теоремы Коши:

- Является обобщением Теоремы Лагранжи (достаточно взять $g(x) = x$).

- Используется для доказательства Правила Лопиталя: рассматриваем $f(x), g(x)$ и применяем теорему Коши к $[a, x]$.

Основная идея Правила Лопиталя (0/0):

- Рассматриваем отношение $\frac{f(x)}{g(x)}$ при $x \to a$.
- Применяем теорему Коши к функциям $F(t) = f(t) - f(a)$, $G(t) = g(t) - g(a)$ на отрезке $[a, x]$.
- Переходя к пределу, получаем $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, если последний существует.

Доказательство Теоремы Коши (обобщённая Лагранжа)

1. **Условие:** f, g непрерывны на $[a, b]$, дифференцируемы на (a, b), причём $g'(x) \neq 0$.
2. **Построение.** Рассмотрим функцию
$$\Phi(t) \;=\; f(t) - f(a) \;-\; \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \big[g(t) - g(a)\big].$$
Тогда $\Phi(a) = 0$ и $\Phi(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[\,g(b) - g(a)\,] = 0$.
3. **Применение Теоремы Ролля (см. `sub_6.tex`):** Поскольку Φ непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b) (как разность таковых), и $\Phi(a) = \Phi(b) = 0$, существует $c \in (a, b)$ с $\Phi'(c) = 0$.
4. **Производная:**
$$\Phi'(t) = f'(t) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\, g'(t).$$
Тогда $\Phi'(c) = 0 \implies f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\, g'(c)$.
5. **Следствие:**
$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Доказательство Правила Лопиталя (случай 0/0)

1. **Условие:** $\lim_{x\to a} f(x) = 0,\ \lim_{x\to a} g(x) = 0,\ g'(x) \neq 0$. Предположим, что существует $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$.
2. **Рассмотрим f и g на отрезке $[a, x]$ (при $x > a$).** По условию $f(a) = g(a) = 0$. Применяем Теорему Коши к f и g на $[a, x]$:
$$\exists\, c_x \in (a, x) : \quad \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}.$$

3. **Переход к пределу:** Поскольку $f(a) = 0$, $g(a) = 0$, имеем

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}.$$

Когда $x \to a$, точка c_x тоже $\to a$ (так как c_x лежит между a и x). Если $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, то $\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} \to L$. Значит

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \;=\; L.$$

- **Если нет неопределённости 0/0 или ∞/∞.** Пример: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x+1} = \frac{0}{1} = 0$ — тут нет неопределённости, применять Лопиталя смысла нет.
- **Если** $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ **не существует.** Пример: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(1/x)}{1/x}$: - $f(x) = \sin(1/x)$, $g(x) = 1/x$. При $x \to 0$, $f'(x)$ и $g'(x)$ ведут себя крайне нестабильно. Предел $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ не существует.
- **Если f или g не дифференцируемы в проколотой окрестности точки.** Пример: $f(x) = |x|$, $g(x) = x$ при $x \to 0$ не дифференцируемо в 0.

7 Формула Тейлора для многочлена. Формула Тейлора с остатком в форме Пеано.

7.1 Используемые понятия

Определение n-кратной дифференцируемости. Функция f называется n раз дифференцируемой в точке x_0, если существуют конечные все производные $f'(x_0), f''(x_0), \dots, f^{(n)}(x_0)$.

Малое «о» и запись $o(g(x))$. Говорят, что $h(x)$ есть $o\big(g(x)\big)$ при $x \to x_0$, если

$$\lim_{x \to x_0} \frac{h(x)}{g(x)} = 0.$$

В таком случае пишут $h(x) = o(g(x))$.

Остаточный член в форме Лагранжа (напоминание). Если f имеет $(n+1)$-ю производную в окрестности x_0, то для

$$f(x) = f(x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x)$$

справедливо

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \quad \xi \in (x_0, x).$$

7.2 Ответ на вопрос

Многочлен и его производные. Пусть $P(x)$ — многочлен степени n, т. е.

$$P(x) \; = \; a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n.$$

Он бесконечно дифференцируем на всей $\mathbb{R}$, но начиная с порядка выше n, все производные равны нулю.

Формула Тейлора для многочлена. Если $f(x) = P(x)$ — многочлен степени n, то для точки $x_0 \in \mathbb{R}$ имеем

$$P(x) \; = \; P(x_0) + \frac{P'(x_0)}{1!}\,(x - x_0) + \dots + \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x - x_0)^n.$$

Поскольку производные порядка выше n у многочлена равны 0, *остаточный член* отсутствует (или равен нулю).

Формула Тейлора с остатком в форме Пеано. Пусть f имеет (n)-ю производную в окрестности x_0. Тогда

$$f(x) \; = \; f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}\,(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x - x_0)^n + o\big((x - x_0)^n\big).$$

Здесь используется *малое «о»*:

$$r_n(x) \; = \; o\big((x - x_0)^n\big), \quad x \to x_0,$$

значит

$$\lim_{x \to x_0} \frac{r_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

Теорема (Формула Тейлора для многочлена). Если $P(x)$ — многочлен степени n, то его разложение в окрестности x_0 *совпадает* со стандартным полиномом Тейлора степени n, а *остаток* (производные порядка выше n) равен 0.

Теорема (Формула Тейлора с остатком в форме Пеано). Пусть f n раз дифференцируема в точке x_0. Тогда

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x-x_0)^k \;+\; o\big((x-x_0)^n\big).$$

Для многочлена:

- Все производные порядка выше n у многочлена равны нулю.
- Поэтому «ряд Тейлора» фактически совпадает с самим многочленом. Остаточный член $R_n(x)$ тождественно 0.

Для формы Пеано:

- Малая функция $o\big((x-x_0)^n\big)$ означает, что остаток *«уходит в ноль»* быстрее, чем $(x-x_0)^n$.
- Используется определение непрерывности производных и соответствующих пределов, где высокие приращения в $(x-x_0)^n$ доминируют над остаточным членом.

Доказательство Формулы Тейлора для многочлена

1. **Расширенный полином.** Пусть $P(x)$ — многочлен степени n. Рассмотрим многочлен Тейлора (степени n) вокруг x_0:

$$T_n(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x-x_0)^k.$$

2. **Равенство старших производных нулю.** Поскольку $P^{(m)}(x) \equiv 0$ при $m > n$, никакой остаточный член не возникает.

3. **Сравнение $P(x)$ и $T_n(x)$.** Уже само определение производных наглядно показывает: $P(x)$ и $T_n(x)$ — один и тот же полином (коэффициенты совпадают).

4. **Вывод.** Таким образом, $P(x) = T_n(x) \implies$ формула Тейлора для многочлена полностью совпадает с самим многочленом.

Доказательство Формулы Тейлора с остатком в форме Пеано

1. **Постановка задачи.** Требуется показать, что

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \;+\; r_n(x),$$

   где $r_n(x) = o((x-x_0)^n)$ при $x \to x_0$.

2. **Индикатор быстрого убывания $r_n(x)$.** То есть $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{r_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$.

3. **Использование дифференцируемости порядка n.** По определению (см. `sub_7.tex`), если f имеет непрерывные производные до порядка n, то мы можем разложить f по (классической) формуле Тейлора (с формой Лагранжа для остатка) и затем показать, что этот остаток $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ ведёт себя как $o((x-x_0)^n)$, если $f^{(n+1)}$ непрерывна в x_0 и, например, равна нулю там *или* $f^{(n+1)}$ ограничена в малой окрестности.

4. **Точнее.** Если $f^{(n)}$ непрерывна в x_0, то $f^{(n+1)}(\xi) \to f^{(n+1)}(x_0)$ при $\xi \to x_0$ (если $(n+1)$-я производная существует в окрестности). Даже если $f^{(n+1)}(x_0)$ сама равна нулю — остаток $(x-x_0)^{n+1}$ «уходит» быстрее, чем $(x-x_0)^n$.

5. **Вывод о малом «о»**. Отсюда следует требуемое $r_n(x) = o((x-x_0)^n)$.

Пример 1: $f(x) = x^3$. Разложение вокруг $x_0 = 1$:

$$f'(x) = 3x^2, \quad f''(x) = 6x, \quad f^{(3)}(x) = 6, \quad f^{(4)}(x) = 0, \ldots$$

По формуле Тейлора (степени 3), никакого «остатка» не остаётся, так как это многочлен. Итог:

$$x^3 = 1 + 3(x-1) + 3(x-1)^2 + (x-1)^3.$$

Пример 2: $f(x) = e^x$. Разложение до n-го члена в точке 0 даёт:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n), \quad x \to 0.$$

Здесь уже работает «форма Пеано», так как e^x не полином, но $e^{(k)}(0) = 1$.

8 Достаточные условия существования экстремума (по второй производной).

8.1 Используемые понятия

Теорема Ферма (напоминание). Если f дифференцируема в точке x_0 и имеет там локальный экстремум, то $f'(x_0) = 0$.

Определение непрерывности второй производной. Если $f''(x)$ существует в некоторой окрестности x_0 и является непрерывной в x_0, то говорят, что f имеет *непрерывную вторую производную* в x_0.

Дифференцируемость в (a, b). Говорят, что f дифференцируема на интервале (a, b), если $f'(x)$ существует для всех $x \in (a, b)$.

8.2 Ответ на вопрос

Локальный минимум и максимум. Точка x_0 внутри промежутка (a, b) называется *точкой локального минимума* функции f, если существует $\delta > 0$, что для всех x с $|x - x_0| < \delta$ выполняется

$$f(x) \;\geq\; f(x_0).$$

Аналогично, x_0 является *точкой локального максимума*, если в некоторой окрестности x_0 значение $f(x) \leq f(x_0)$.

Вторая производная. Если функция f дифференцируема на (a, b), и $f'(x)$ тоже дифференцируема на (a, b), то в точках, где это возможно, определена *вторая производная* $f''(x)$.

Теорема (достаточные условия экстремума по второй производной). Пусть f дифференцируема на (a, b) и $x_0 \in (a, b)$ — такая точка, где $f'(x_0) = 0$. Предположим, что у f существует непрерывная в x_0 вторая производная $f''(x_0)$. Тогда:

1. Если $f''(x_0) > 0$, то x_0 — точка **локального минимума**.
2. Если $f''(x_0) < 0$, то x_0 — точка **локального максимума**.
3. Если $f''(x_0) = 0$, вывод не делается (нужен дополнительный анализ).

- Ключевой «трюк»: если $f''(x_0) > 0$, то $f'(x)$ возрастает вблизи x_0. Но при x_0 мы имеем $f'(x_0) = 0$.
- Следовательно, для $x > x_0$, $f'(x)$ становится положительной (или почти), а для $x < x_0$ — отрицательной (или почти), что даёт локальный минимум.
- Аналогично, если $f''(x_0) < 0$, $f'(x)$ убывает вблизи x_0, и x_0 — локальный максимум.

Доказательство достаточности (подробно):

1. **Наличие $f'(x_0) = 0$.** По **теореме Ферма** (см. `sub_8.tex`), это условие часто является необходимым для экстремума. Мы рассматриваем *достаточность*, когда вдобавок знаем про вторую производную.
2. **Случай $f''(x_0) > 0$.**

- Из непрерывности f'' в x_0 вытекает, что при x достаточно близком к x_0, вторая производная $f''(x)$ «сохраняет» тот же знак (положительный).
- Значит $f'(x)$ строго возрастает вблизи x_0. Но $f'(x_0) = 0$.
- Тогда для $x > x_0$ с x рядом с x_0, $f'(x)$ станет положительной, а для $x < x_0$ — отрицательной.
- Следовательно, при $x > x_0$, f возрастает, при $x < x_0$, f убывает. Значит x_0 — локальный минимум.

3. **Случай $f''(x_0) < 0$.**

   - Аналогичные рассуждения: $f'(x)$ вблизи x_0 будет убывать, и при $x > x_0$ произведёт знак отрицательный, а при $x < x_0$ — знак положительный (около x_0).
   - Следовательно, слева функция возрастает, а справа убывает. Точка x_0 — локальный максимум.

4. **Случай $f''(x_0) = 0$.**

   - Из этого факта *нельзя* вывести строгое заключение об экстремуме: нужны дополнительные рассуждения (см. примеры x^3, x^4).

- *Функция* $f(x) = x^2$*:* $f'(0) = 0$, $f''(0) = 2 > 0$. По теореме, $x = 0$ — локальный минимум (что верно).
- *Функция* $f(x) = x^3$*:* $f'(0) = 0$, $f''(0) = 0$. По рассматриваемой теореме вывод не делается, и действительно $x = 0$ — точка перегиба, *не* экстремум.
- *Функция* $f(x) = -x^2$*:* $f'(0) = 0$, $f''(0) = -2 < 0$. Значит в $x = 0$ локальный максимум.

9 Теорема Лиувилля. Пример трансцендентного числа.

9.1 Используемые понятия

Минимальный многочлен алгебраического числа. Пусть α — алгебраическое (корень целого ненулевого многочлена). Его *минимальным многочленом* называется многочлен $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$, у которого α — корень, степень P — наименьшая возможная, и старший коэффициент положителен, а все общие делители коэффициентов равны 1.

Оценка "разности корней". Из теории алгебраических уравнений известно, что если $P(x)$ — многочлен степени d с целыми коэффициентами, то расстояния между его корнями не могут быть «слишком маленькими» относительно высоты коэффициентов. Точнее, если $r_1, \dots, r_d$ — корни, то существуют нижние границы $|r_i - r_j|$ в зависимости от коэффициентов P (см. теорему о разложении в произведение линейных множителей).

Рациональное приближение. Если α действительно алгебраична степени d, то для больших q рациональные приближения $\frac{p}{q}$ не могут удовлетворять $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^n}$ при $n > d$, иначе возникнет противоречие (Теорема Лиувилля).

9.2 Ответ на вопрос

Алгебраическое и трансцендентное число.

- *Алгебраическое число* — это действительное (или комплексное) число, являющееся корнем многочлена с рациональными (или целыми) коэффициентами. Например, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{7}$.
- *Трансцендентное число* — это число, **не** являющееся алгебраическим. Примеры: e, π (доказано Линдеманом), а также более специальные конструкции (числа Лиувилля).

Приближение чисел рациональными дробями. Для действительного числа α говорят, что *оно допускает «слишком хорошие» рациональные приближения*, если существуют бесконечные наборы дробей $\frac{p}{q}$, удовлетворя

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^n}$$

для больших q, при некоторых n существенно превосходящих 1.

Теорема Лиувилля (о трансцендентных числах). Если действительное число α удовлетворяет следующему условию: существует $n > 1$ и бесконечно много рациональных дробей $\frac{p}{q}$, для которых

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^n},$$

то число α **не** алгебраично (то есть оно **трансцендентно**).

- Предположим противное: α — алгебраическое, но допускает «чрезмерно точные» рациональные приближения.
- Рассматривается соответствующий *минимальный многочлен* числа α степени d.
- Показывается, что при достаточно хороших приближениях противоречат оценкам, вытекающим из теоремы о том, как далеко корни полинома могут быть друг от друга.

- Возникает противоречие, откуда делается вывод: число α не может быть алгебраическим, оно — трансцендентно.

Доказательство (классический эскиз):

1. **Предположение.** Пусть α — корень целого многочлена $P(x)$ степени d. Считаем $P(x)$ приведённым (нет общих делителей).
2. **Рациональные приближения.** Допустим, существуют бесконечно многие $\frac{p}{q}$ с $|q\alpha - p| < q^{1-n}$, то есть $|\alpha - p/q| < 1/q^n$ при $n > d$.
3. **Оценка многочлена.** Рассмотрим $P\left(\frac{p}{q}\right)$; используя замену $x = \frac{p}{q}$ и разложение $P(\alpha) = 0$, анализируют величину $|P(\frac{p}{q}) - P(\alpha)|$.
4. **Неравенство:** Т.к. $P(x)$ — многочлен степени d, разность $|P(x) - P(\alpha)|$ может быть оценена через $|x - \alpha|$, где в высших степенях играют роль биномиальные формулы, а коэффициенты — целые.
5. **Противоречие:** При «слишком» быстром убывании $|x - \alpha| < 1/q^n$ с $n > d$, получается невозможная малая оценка для $|P(p/q)|$, хотя p/q — рациональная точка, где P должно принимать вполне «ограниченное снизу» значение (не равное нулю, раз $p/q \neq \alpha$).
6. **Итог.** Противоречие доказывает, что α не может быть алгебраическим. Следовательно, α — трансцендентное.

Пример: число Лиувилля. Классический пример:

$$\beta = \sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k!} \; = \; 0.110001000000000000000001\ldots$$

Здесь в десятичной записи стоят единицы на позициях $1!, 2!, 3!, \ldots$ и нули в остальных. Нетрудно проверить, что для любого n можно найти рациональную дробь p/q с $q = 10^{n!}$, которая приближает β с точностью $1/q^n$. По **теореме Лиувилля**, такое число β *трансцендентно.*

10 Формулы Маклорена для функций y=exp(x), y=sinx, y=cosx, y=ln(1+x), y=pow((1+x),a).

10.1 Используемые понятия

Определение n-й производной. Если функция f n раз дифференцируема в окрестности 0, то $f^{(n)}(0)$ есть её n-я производная в точке 0.

Радиус сходимости степенного ряда. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ имеет некий *радиус сходимости* R, $0 \le R \le \infty$, где ряд сходится при $|x| < R$ и расходится (как правило) при $|x| > R$.

Бином Ньютона (обобщённый). Для вещественного a при $|x| < 1$:

$$(1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n,$$

где $\binom{a}{n} = \dfrac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!}$.

Формула Тейлора (общая). При разложении $f(x)$ в окрестности 0 с учётом всех производных получаем ряд (если сходится) называемый рядом Маклорена, частный случай ряда Тейлора.

10.2 Ответ на вопрос

Ряд Маклорена (частный случай ряда Тейлора). Пусть функция f бесконечно дифференцируема в окрестности $x = 0$. Тогда её *ряд Маклорена* — это разложение:

$$f(x) \ = \ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n,$$

если этот ряд сходится к $f(x)$ при соответствующих x (см. `sub_10.tex` о радиусе сходимости).

1) Функция $f(x) = e^x$. Все производные $f^{(n)}(x) = e^x$, значит $f^{(n)}(0) = 1$. Итоговая формула:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ряд сходится абсолютно для всех x.

2) Функция $f(x) = \sin x$. Набор производных цикличен:

$$f'(x) = \cos x,\ f''(x) = -\sin x,\ f^{(3)}(x) = -\cos x,\ f^{(4)}(x) = \sin x, \dots$$

Значения в 0: $f(0) = 0,\ f'(0) = 1,\ f''(0) = 0,\ f^{(3)}(0) = -1, \dots$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

3) Функция $f(x) = \cos x$. Аналогично, производные:

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

4) Функция $f(x) = \ln(1+x)$**.** Все производные в точке 0 (для $|x| < 1$) дают:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots, \quad |x| < 1.$$

При $x = 1$ ряд сходится условно (это знаменитый «$\ln 2$» ряд).

5) Функция $f(x) = (1+x)^a$**.** Для $|x| < 1$ и произвольного действительного a (бином Ньютона в обобщённом смысле):

$$(1+x)^a = 1 + a\,x + \frac{a(a-1)}{2!}\,x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}\,x^3 + \dots.$$

Ряд сходится при $|x| < 1$.

- e^x**, sin x, cos x**: Производные в 0 легко вычислить, дающие конкретные формулы для $f^{(n)}(0)$.
- **ln(1+x)**: Рассматриваем $f(x) = \ln(1+x)$, находим $f^{(n)}(x)$ и подставляем $x = 0$, выписываем коэффициенты.
- $(1+x)^a$: Используем обобщённую биномную формулу (либо вывод через производные в 0).

Примерный план доказательства (для e^x**).**

1. **Показываем, что все производные** $f^{(n)}(0) = 1$**.**
2. **Формула Маклорена**:
$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$
3. **Радиус сходимости — неограничен.** По признаку д'Аламбера или частному признаку Бернулли, ряд сходится для всех $x \in \mathbb{R}$.

Для $\sin x$**,** $\cos x$**,** $\ln(1+x)$**,** $(1+x)^a$ аналогично расписываются производные и их значения в 0, а сходимость анализируется по радиусу, связанному с разложением и возможными особенностями (см. `sub_10.tex`).

- $\sin x$ при $x = \pi$: $\sin\pi = 0$. Ряд даёт $0 - \frac{\pi^3}{3!} + \frac{\pi^5}{5!} - \dots$ (проверка сходимости).
- $\ln(1+x)$ при $x = \frac{1}{2}$: $\ln\left(\frac{3}{2}\right) \approx 0.40536$. Ряд: $\frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{24} - \dots$.
- $(1+x)^a$ при $a = \frac{1}{2}$: $\sqrt{1+x} = \dots$ бином Ньютона.

11 Формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа. Приближенные вычисления по формуле Тейлора.

11.1 Используемые понятия

Обобщённая теорема Ролля (Теорема Коши). Если f и g непрерывны на $[a, b]$, дифференцируемы на (a, b), и $g'(x) \neq 0$ на (a, b), то существует $c \in (a, b)$:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

При удачном выборе «вспомогательных» функций подстановка даёт нужный результат о $F^{(n+1)}(\xi) = 0$.

n-кратная производная в точке. Если f дифференцируема n раз в окрестности x_0, мы обозначаем $f^{(n)}(x_0)$ как производную n-го порядка, если та существует и непрерывна.

Пример применения индукции. Чтобы показать наличие ξ с $F^{(n+1)}(\xi) = 0$, обычно делают «по шагам»: сначала доказывают, что в (a, b) есть c_1 с $F^{(1)}(c_1) = 0$ (Теорема Ролля), затем в (a_1, b_1) подинтервале ищут c_2 с $F^{(2)}(c_2) = 0$, и т. д.

11.2 Ответ на вопрос

Формула Тейлора и остаточный член. Пусть f имеет $(n + 1)$-ю производную в окрестности точки x_0. Тогда можно представить $f(x)$ в виде:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x),$$

где $R_n(x)$ называется *остаточным членом*.

Форма Лагранжа остаточного члена. Существует точка ξ между x_0 и x (включая возможность $\xi \in (x, x_0)$), такая что

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Это утверждение мы будем доказывать ниже (используя теорему Лагранжа о среднем значении).

Формулировка (Тейлор + Лагранж). Пусть f непрерывно дифференцируема на отрезке $[x_0, x]$ (или $[x, x_0]$) до порядка $(n + 1)$. Тогда:

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k}_{\text{многочлен Тейлора порядка } n} + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

где ξ лежит между x_0 и x.

Приближённые вычисления. Чтобы вычислить $f(x)$ примерно, берут полином Тейлора степени n:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k,$$

и оценивают ошибку (погрешность) через

$$|R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \right|.$$

Обычно используют верхнюю оценку: если $|f^{(n+1)}(t)| \le M$ на $[x_0, x]$, то

$$|R_n(x)| \;\le\; \frac{M\,|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

- Рассмотрим функцию $F(x) = f(x) - P_n(x)$, где $P_n(x)$ — многочлен Тейлора степени n вокруг x_0.
- По определению P_n, все производные F до порядка n в точке x_0 равны нулю.
- Применяем теорему Лагранжа *в обобщённом виде* (Теорема Коши или вариант теоремы Ролля) к F на отрезке $[x_0, x]$, получаем существование точки ξ, где $(n+1)$-я производная $F^{(n+1)}(\xi) = 0$. Но $F^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t)$, потому что $(n+1)$-я производная многочлена P_n равна нулю.
- Отсюда возникает

  $$F(x) = F(x_0) + \cdots + \frac{F^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

  но $F(x_0) = F'(x_0) = \cdots = F^{(n)}(x_0) = 0$. Значит $F(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$.

Шаг 1: Построение многочлена Тейлора.

$$P_n(t) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(t - x_0)^k.$$

По определению производной порядок k, P_n «согласован» с f до n-го порядка в точке x_0.

Шаг 2: Рассмотрим $F(t) = f(t) - P_n(t)$. Тогда

$$F^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) - P_n^{(k)}(x_0) = 0 \quad \text{для } k = 0, 1, \dots, n.$$

Шаг 3: Применяем обобщённую теорему Ролля. На отрезке $[x_0, x]$ (или $[x, x_0]$), функция F удовлетворяет условию $F^{(k)}(x_0) = F^{(k)}(x) \dots$ (не все равны, но ключ в том, что мы можем включить вспомогательную функцию «$G(t) = \dots$» — см. `sub_11.tex` о теореме Коши). В итоге *по индукции* выводится, что существует ξ между x_0 и x, где $F^{(n+1)}(\xi) = 0$. А $F^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t)$.

Шаг 4: Остаточный член.

$$F(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(x - x_0)^{n+1}.$$

Перенося, получаем:

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(x - x_0)^{n+1}.$$

Это и есть искомая формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа.

Пример: функция $f(x) = \sqrt{1+x}$, при x мало.

- Выбираем $x_0 = 0$. Имеем $f(0) = 1$, $f'(0) = \frac{1}{2}$, $f''(0) = -\frac{1}{8}$, ...
- Третьепорядочное приближение:

$$P_2(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2.$$

- Ошибка (остаток) $R_2(x) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}x^3$ для некоторого $\xi \in (0, x)$. Используя оценку $|f^{(3)}(t)| \leq M$ на $[0, x]$, будет $\left|R_2(x)\right| \leq \frac{M|x|^3}{6}$.

Так можно оценить точность приближённого вычисления $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$ для малых x.

12 Формула Стирлинга (с эквивалентностью).

12.1 Используемые понятия

Интегральная аппроксимация суммы. Ключ к доказательству формулы Стирлинга:

$$\sum_{k=1}^{n} \ln k \quad \text{сравнивается с} \quad \int_1^n \ln x\, dx.$$

Разность между этой суммой и интегралом — «погрешность», часто контролируемая приёмами типа «прямоугольников» или *упрощённой* формулы Эйлера–Маклорена.

Обозначения: $O(\cdot)$, $o(\cdot)$. Символ $O(g(n))$ означает, что рассматриваемая величина не превосходит по абсолютному значению $C\,|g(n)|$ при достаточно больших n. Символ $r(n) = o(g(n))$ значит $\lim_{n\to\infty} \frac{r(n)}{g(n)} = 0$.

Эквивалентность функций. Запись $f(n) \sim g(n)$ означает $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$. В контексте формулы Стирлинга: $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

12.2 Ответ на вопрос

Факториал $n!$. Для натурального n вводится произведение:

$$n! \;=\; 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n.$$

Формула Стирлинга (эквивалентность). При $n \to \infty$

$$n! \;\sim\; \sqrt{2\pi\, n}\left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

то есть

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi\, n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1.$$

Основная идея. Используется:

$$\ln(n!) = \sum_{k=1}^{n} \ln k \quad \approx \quad \int_1^n \ln x\, dx = n\ln n - n + 1.$$

Разность «сумма – интеграл» даёт поправку, которая приводит к множителю $\sqrt{2\pi n}$.

1. **Переход к логарифмам.**

$$\ln(n!) = \sum_{k=1}^{n} \ln k.$$

2. **Сравнение с интегралом.**

$$\sum_{k=1}^{n} \ln k \;\approx\; \int_1^n \ln x\, dx = n\ln n - n + 1.$$

3. **Тонкая оценка (через формулу Эйлера–Маклорена).**

$$\ln(n!) = n\ln n - n + \tfrac{1}{2}\ln(n) + O(1).$$

4. **Экспоненцирование.**

$$n! = \exp(n \ln n - n + \tfrac{1}{2}\ln n + O(1)) = \sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \exp\bigl(O(1)\bigr).$$

При более точном разборе получается желаемый множитель $\sqrt{2\pi}$, то есть

$$n! \ \sim\ \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Уже при умеренных n, например $n = 10$, точность формулы достаточно хороша; отклонение от $\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ в долях процента относительно $n!$.

13 Формула Стирлинга (с равенством).

13.1 Используемые понятия

Формула Эйлера–Маклорена (намёк). Для достаточно гладкой функции f, при суммировании:

$$\sum_{k=a}^{b} f(k) \approx \int_a^b f(x)\,dx + \text{(пограничные и высшие члены)},$$

используются числа Бернулли. В частности, для $f(k) = \ln k$ даёт точное выражение логарифма факториала:

$$\ln(n!) = n \ln n - n + \tfrac{1}{2}\ln(n) + \dots$$

Числа Бернулли. Обозначаются B_m, входят в разложение. Не нужны формулы здесь, достаточно знать: они позволяют оценивать дополнительный член, который даёт диапазон $0 < \theta_n < \frac{1}{12n}$.

Точный вид остатка. При экспоненцировании логарифмической оценки:

$$\ln(n!) = n \ln n - n + \tfrac{1}{2}\ln(2\pi n) + \theta_n$$

возникает $n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\theta_n}$. Ограничения на θ_n следуют из дополнительных членов Эйлера–Маклорены.

13.2 Ответ на вопрос

14 Определение интеграла Римана. Отличие от «обычного» предела.

14.1 Используемые понятия

Верхние и нижние суммы (Дарбу). Для разбиения $D = \{x_0, \ldots, x_n\}$:

$$\overline{S}(f, D) = \sum_{i=1}^{n} \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)\, \Delta x_i, \quad \underline{S}(f, D) = \sum_{i=1}^{n} \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)\, \Delta x_i.$$

Если при $\|D\| \to 0$, $\overline{S}(f, D)$ и $\underline{S}(f, D)$ сходятся к одной величине, эта величина называется $\int_a^b f$.

Уточнение разбиения. Дано два разбиения D, D'. Их *уточнением* называют разбиение, содержащее **все** точки D и D'. При сопоставлении интегральных сумм на этом уточнённом разбиении можно показать, что они близки при мелком $\|D\| \to 0$.

Сущность «обычного» предела vs. интеграл. - Обычный предел $\lim_{x \to x_0} f(x)$ говорит о локальном поведении f возле одной точки x_0. - Интеграл Римана — предел *сумм* на всем отрезке $[a, b]$ с измельчающимся разбиением. Глобальное свойство. 7

14.2 Ответ на вопрос

Интеграл Римана. Пусть f задана на $[a, b]$. Разобьём отрезок:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b, \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad \xi_i \in [x_{i-1}, x_i].$$

Тогда *интегральная сумма*:

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta x_i.$$

Если при $\max_i \Delta x_i \to 0$ все такие суммы S *стремятся к одному и тому же* числу I, независимо от выбора точек ξ_i, то f называется **интегрируемой по Риману**, а I — её интегралом:

$$I = \int_a^b f(x)\, dx.$$

- При *непрерывности* f на $[a, b]$ интеграл Римана существует.
- Критерий Дарбу: если верхние и нижние суммы сближаются, интеграл существует.

- Рассматривается равномерная непрерывность на $[a, b]$ и «мелкие» разбиения, чтобы функция не успевала сильно меняться в каждом отрезке.
- Используется факт, что всякая пара разбиений «уточняется» до одного общего, и разность сумм делается малой.

1. **Два разбиения.** Пусть D и D' — любые разбиения, $\|D\| \to 0$ и $\|D'\| \to 0$.
2. **Уточнение.** Построить «общее» разбиение D'' содержащее все точки D и D'. Сопоставить интегральные суммы.

3. **Оценка разницы.** При малых Δx_i, из равномерной непрерывности (или ограниченности) f следует, что интегральные суммы $S(f, D)$ и $S(f, D')$ близки.

4. **Вывод.** Предел един, определение интеграла однозначно.

- Обычный предел: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ — *точечный* анализ, рассматриваем поведение функции в одной точке.

- Интеграл Римана: *глобальный* (берёт во внимание всё множество $[a, b]$), есть *предел сумм* при возрастании числа разбиений.

Если $f(x) = \text{const}$, то любая интегральная сумма есть $\text{const}(b - a)$, предел одинаков независимо от разбиения.

15 Формула Ньютона-Лейбница.

15.1 Используемые понятия

Непрерывность и существование первообразной. Если f непрерывна на $[a, b]$, то любая первообразная F (то есть $F'(x) = f(x)$) будет непрерывно дифференцируема на (a, b).

Теорема о среднем значении для интегралов. Для каждого отрезка $[x_{i-1}, x_i]$ найдётся η_i с

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx = f(\eta_i)\,(x_i - x_{i-1}).$$

(Аналогична теореме Лагранжа для дифференцирования.)

Смысл формулы Ньютона–Лейбница. Определённый интеграл — площадь под f, а F — функция, чья производная равна f. Тогда приращение $F(b) - F(a)$ «накрывает» общую «площадь» (или суммирует мгновенные приращения).

15.2 Ответ на вопрос

Определённый интеграл. Функция f называется интегрируемой по Риману на $[a, b]$, если предел сумм вида

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i,$$

при разбиении $[a, b]$ на всё более мелкие отрезки (с максимальной длиной $\Delta x_i \to 0$), существует и не зависит от выбора ξ_i. Этот предел есть $\int_a^b f(x)\,dx$.

Первообразная (примитив). Функция F называется *первообразной* для f на $[a, b]$, если $F'(x) = f(x)$ для всех $x \in (a, b)$. Если F дифференцируема на (a, b) и непрерывна на $[a, b]$, то это достаточно для теоремы Ньютона–Лейбница.

Формула Ньютона–Лейбница. Пусть f непрерывна на $[a, b]$ и F — первообразная f на $[a, b]$. Тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

- Рассматривается $\int_a^b f(x)\,dx$ и разбиение отрезка $[a, b]$.
- По определению первообразной $F'(x) = f(x)$ на (a, b).
- Считаем интегральные суммы $S = \sum f(\xi_i)\,\Delta x_i$ и замечаем связь с приростами $F(x_i) - F(x_{i-1})$.
- Подсчитываем $\sum [F(x_i) - F(x_{i-1})] = F(b) - F(a)$.
- Показываем, что эта сумма совпадает с $\int_a^b f(x)\,dx$ в пределе.

1. **Разбиение отрезка** $[a, b]$**.** Пусть $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ — любое разбиение, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.
2. **Интегральная сумма.** Рассмотрим $S = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

3. **Прирост первообразной.** Так как $F'(x) = f(x)$, то по теореме о среднем значении существует $\eta_i \in [x_{i-1}, x_i]$ с

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(\eta_i)\,\Delta x_i = f(\eta_i)\,\Delta x_i.$$

4. **Сравнение с интегральной суммой.** Если выбрать $\xi_i = \eta_i$, видим, что $\sum[F(x_i) - F(x_{i-1})] = \sum f(\eta_i)\Delta x_i = S$. Но слева — телескопическая сумма:

$$\sum_{i=1}^{n} [\,F(x_i) - F(x_{i-1})\,] = F(x_n) - F(x_0) = F(b) - F(a).$$

5. **Вывод.** Переходя к пределу при $\|D\| \to 0$, интегральная сумма $\sum f(\xi_i)\,\Delta x_i$ стремится к $\int_a^b f(x)\,dx$, а мы установили её равенство $F(b) - F(a)$. Следовательно,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Функция $f(x) = x^2$. Одна из первообразных: $F(x) = \frac{x^3}{3}$. По формуле Ньютона–Лейбница:

$$\int_0^2 x^2\,dx = \left[\tfrac{x^3}{3}\right]_0^2 = \tfrac{2^3}{3} - 0 = \tfrac{8}{3}.$$