Решение индивидуального домашнего задания №1

Студент: Николаев Всеволод Юрьевич
Группа: 4395
Вариант: 44

Задача 1

Условие: Является ли линейным пространством множество матриц 2×2 со следом 1?

Решение: Рассмотрим множество всех матриц 2×2 со следом 1:

$$V = \{A \in M_{2\times 2} \mid \operatorname{tr}(A) = 1\}$$

где $\operatorname{tr}(A)$ обозначает след матрицы A, т.е. сумму элементов на главной диагонали.

Чтобы проверить, является ли V линейным пространством, проверим основные свойства линейного пространства: замкнутость относительно сложения и умножения на скаляр.

Проверка замкнутости относительно сложения: Если $A, B \in V$, то их сумма $A+B$ должна также принадлежать V, то есть иметь след, равный 1.

$$\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B).$$

Так как по условию $\operatorname{tr}(A) = 1$ и $\operatorname{tr}(B) = 1$, то:

$$\operatorname{tr}(A+B) = 1 + 1 = 2.$$

Но $2 \neq 1$, следовательно, $A + B \notin V$, и множество V не замкнуто относительно сложения.

Проверка замкнутости относительно умножения на скаляр: Пусть $A \in V$ и λ — произвольное число. Тогда проверим, принадлежит ли λA множеству V:

$$\operatorname{tr}(\lambda A) = \lambda \operatorname{tr}(A) = \lambda \cdot 1 = \lambda.$$

Так как при произвольном λ значение $\operatorname{tr}(\lambda A)$ может быть любым, оно не обязательно равно 1. Следовательно, $\lambda A \notin V$, и множество V не замкнуто относительно умножения на скаляр.

Вывод: Так как множество V не замкнуто ни относительно сложения, ни относительно умножения на скаляр, оно **не является линейным пространством**.

Задача 2

Условие: Найти координаты столбца $x = (-2, -1, 3)^T$ в базисе

$$f_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad f_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad f_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Решение: Координаты вектора x в базисе $\{f_1, f_2, f_3\}$ — это такие коэффициенты c_1, c_2, c_3, при которых выполняется разложение:

$$x = c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3.$$

Шаг 1: Запись системы уравнений

Подставляем векторы:

$$\begin{bmatrix}-2\\-1\\3\end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}2\\3\\-4\end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}.$$

Распишем по координатам:

$$\begin{cases} c_1 + 2c_2 = -2, \\ c_1 + 3c_2 + c_3 = -1, \\ -c_1 - 4c_2 - c_3 = 3. \end{cases}$$

Шаг 2: Решение системы уравнений методом Гаусса

Запишем расширенную матрицу системы:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & |-2 \\ 1 & 3 & 1 & |-1 \\ -1 & -4 & -1 & |3 \end{bmatrix}.$$

Вычтем первую строку из второй:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & |-2 \\ 0 & 1 & 1 & |1 \\ -1 & -4 & -1 & |3 \end{bmatrix}.$$

Прибавим первую строку к третьей:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & |-2 \\ 0 & 1 & 1 & |1 \\ 0 & -2 & -1 & |1 \end{bmatrix}.$$

Умножим вторую строку на 2 и сложим с третьей:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & |-2 \\ 0 & 1 & 1 & |1 \\ 0 & 0 & 1 & |3 \end{bmatrix}.$$

Шаг 3: Вычисление неизвестных

Из третьего уравнения:

$$c_3 = 3.$$

Из второго уравнения:

$$c_2 + c_3 = 1 \quad \Rightarrow \quad c_2 + 3 = 1 \quad \Rightarrow \quad c_2 = -2.$$

Из первого уравнения:

$$c_1 + 2c_2 = -2 \quad \Rightarrow \quad c_1 + 2(-2) = -2 \quad \Rightarrow \quad c_1 - 4 = -2 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 2.$$

Ответ: Координаты вектора x в данном базисе:

$$[x]_f = \begin{bmatrix}2\\-2\\3\end{bmatrix}.$$

Задача 3

Условие: Даны столбцы:

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$f_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad f_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad f_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$$x = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

a) Найти матрицы перехода $C_{e\to f}$ и $C_{f\to e}$. b) Найти координаты x в базисе e.
—

Решение

1. Нахождение матрицы перехода $C_{e\to f}$

Матрица перехода $C_{e\to f}$ выражает базисные векторы e через базис f:

$$E = FC_{e\to f}.$$

Шаг 1: Запись матриц базисов

$$E = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -3 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Шаг 2: Нахождение обратной матрицы F^{-1}

Для нахождения $C_{e\to f}$ воспользуемся формулой:

$$C_{e\to f} = F^{-1}E.$$

Вычисляя F^{-1}, получаем:

$$F^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Шаг 3: Вычисление $C_{e\to f}$

Умножаем:

$$C_{e\to f} = F^{-1}E.$$

После вычислений:

$$C_{e\to f} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ -3 & 4 & -2 \end{bmatrix}.$$

2. Нахождение матрицы перехода $C_{f\to e}$

$$C_{f\to e} = (C_{e\to f})^{-1}.$$

Так как $C_{e\to f}$ аналогична F^{-1}, то:

$$C_{f\to e} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \end{bmatrix}.$$

—

3. Нахождение координат x в базисе e

Ищем коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, такие что:

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3.$$

Решаем систему:

$$E\alpha = x.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -3 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Шаг 1: Приведение к ступенчатому виду

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & |3 \\ -3 & 4 & -2 & |-3 \\ -1 & 1 & 1 & |-2 \end{bmatrix}.$$

Прибавим первую строку ко второй:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & |3 \\ 0 & 1 & -2 & |0 \\ -1 & 1 & 1 & |-2 \end{bmatrix}.$$

Прибавим первую строку к третьей:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & |3 \\ 0 & 1 & -2 & |0 \\ 0 & 0 & 1 & |1 \end{bmatrix}.$$

Шаг 2: Вычисление неизвестных

Из третьего уравнения:

$$\alpha_3 = 1.$$

Из второго уравнения:

$$\alpha_2 - 2\alpha_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 = 2.$$

Из первого уравнения:

$$\alpha_1 - \alpha_2 = 3 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 - 2 = 3 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = 5.$$

Ответ:

1. Матрица перехода $C_{e\to f}$:

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ -3 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

2. Матрица перехода $C_{f\to e}$:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

3. Координаты x в базисе e:

$$[x]_e = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Задача 4

Условие: Дана матрица:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 9 & -2 & 6 \\ 1 & 3 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & 1 & 2 & -2 \\ -3 & -5 & -6 & 3 & -7 \\ -1 & -2 & -4 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

a) Найти базис линейной оболочки строк матрицы A. b) Найти базис пространства решений системы $Ax = 0$.

—

Решение

1. Нахождение базиса линейной оболочки строк

Базис линейной оболочки строк матрицы A — это линейно независимый набор строк матрицы. Для его нахождения приводим матрицу A к **ступенчатому виду** методом элементарных преобразований строк.

Шаг 1: Приведение к ступенчатому виду (метод Гаусса)

Начнем с исходной матрицы:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 9 & -2 & 6 \\ 1 & 3 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & 1 & 2 & -2 \\ -3 & -5 & -6 & 3 & -7 \\ -1 & -2 & -4 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Шаг 1.1: Сделаем первый элемент (в позиции A_{11}) равным 1, поделив первую строку на 3:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 3 & -\frac{2}{3} & 2 \\ 1 & 3 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & 1 & 2 & -2 \\ -3 & -5 & -6 & 3 & -7 \\ -1 & -2 & -4 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Шаг 1.2: Обнуляем элементы под первым ведущим элементом ($A_{21}, A_{31}, A_{41}, A_{51}$):

- $R_2 \leftarrow R_2 - R_1$, - $R_3 \leftarrow R_3 + R_1$, - $R_4 \leftarrow R_4 + 3R_1$, - $R_5 \leftarrow R_5 + R_1$.

После этих преобразований получаем:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 3 & -\frac{2}{3} & 2 \\ 0 & \frac{10}{3} & -2 & -\frac{4}{3} & 1 \\ 0 & \frac{8}{3} & 4 & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{14}{3} & 3 & \frac{5}{3} & -1 \\ 0 & -\frac{7}{3} & -1 & -\frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

Шаг 1.3: Приводим оставшиеся строки к ступенчатому виду, выполняя аналогичные преобразования.

После приведения к ступенчатому виду получаем:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Шаг 2: Определение базиса линейной оболочки строк

Базис линейной оболочки строк составляют ненулевые строки приведенной матрицы:

$$B_{\text{row}} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Ответ: Базис линейной оболочки строк матрицы A:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

—

2. Нахождение базиса пространства решений системы $Ax = 0$

Пространство решений системы $Ax = 0$ (ядро матрицы A) содержит все векторы x, удовлетворяющие:

$$Ax = 0.$$

Шаг 1: Запись системы уравнений
Из ступенчатой формы матрицы A' получаем систему:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_3 + 2x_5 = 0, \\ x_2 - 2x_3 + x_5 = 0, \\ x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

Шаг 2: Выражаем переменные через свободные параметры
Выберем свободные переменные: $x_3 = t$, $x_5 = s$.

$$\begin{cases} x_1 = -3t - 2s, \\ x_2 = 2t - s, \\ x_3 = t, \\ x_4 = -s, \\ x_5 = s. \end{cases}$$

Шаг 3: Представляем решение в виде линейной комбинации

$$x = t \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Шаг 4: Определение базиса пространства решений
Векторы, соответствующие параметрам t и s, образуют базис пространства решений:

$$B_{\text{null}} = \left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Ответ: Базис пространства решений $Ax = 0$:

$$\left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

—

Вывод

1. Базис линейной оболочки строк состоит из трех векторов.
2. Базис пространства решений $Ax = 0$ состоит из двух векторов, что соответствует размерности ядра матрицы A, так как $\operatorname{rank}(A) = 3$ и $\dim(\ker A) = 5 - 3 = 2$.