

## Разбиение задач на типы и решения

**Тип 1: Верхнетреугольные матрицы.**

**Аналогичные задачи:** 35, 40, 45, 48, 49, 51, 52

**Пример (вариант 35):** Является ли линейным пространством множество верхнетреугольных матриц размера  $4 \times 4$ ?

**Решение:**

Сумма и произведение на число верхнетреугольных матриц также являются верхнетреугольными, так как элементы ниже главной диагонали остаются нулями после выполнения операций.

**Ответ:** Да, это линейное пространство.

**Тип 2: Симметричные матрицы.**

**Аналогичные задачи:** 31, 34, 39, 60, 62

**Пример (вариант 31):** Является ли линейным пространством множество симметричных матриц размера  $4 \times 4$ ?

**Решение:**

Пусть  $A = A^T, B = B^T$ . Тогда

$$(A + B)^T = A^T + B^T = A + B, \quad (\lambda A)^T = \lambda A^T = \lambda A,$$

то есть сумма и произведение на скаляр также симметричны.

**Ответ:** Да, является линейным пространством.

**Тип 3: Матрицы с фиксированным следом.**

**Аналогичные задачи:** 33, 36, 44, 47, 53, 54, 61

**Пример (вариант 33):** Является ли линейным пространством множество матриц  $5 \times 5$  со следом 1?

**Решение:**

Проверим замкнутость относительно сложения:

$$\text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B) = 1 + 1 = 2 \neq 1.$$

Таким образом, множество не замкнуто.

**Ответ:** Нет, не является.

**Тип 4: Многочлены с фиксированным корнем.**

**Аналогичные задачи:** 38, 43, 50, 55, 57

**Пример (вариант 38):** Является ли линейным пространством множество многочленов, имеющих корень 2?

**Решение:**

Пусть  $f(2) = 0, g(2) = 0$ . Тогда

$$(f + g)(2) = f(2) + g(2) = 0 + 0 = 0, \quad (\lambda f)(2) = \lambda f(2) = \lambda \cdot 0 = 0,$$

значит множество замкнуто.

**Ответ:** Да, является.

**Тип 5: Экспоненциальные функции.**

**Аналогичные задачи:** 32, 42

**Пример (вариант 32):** Является ли линейным пространством множество функций вида  $e^{\lambda x}$ ?

**Решение:**

Сумма двух функций:

$$e^{\lambda x} + e^{\mu x},$$

не представляется в виде одной функции  $e^{kx}$ , значит множество не замкнуто.

**Ответ:** Нет, не является.

**Тип 6: Многочлены ограниченной степени.**

**Аналогичные задачи:** 41

**Пример (вариант 41):** Является ли линейным пространством множество многочленов степени не выше 3?

**Решение:**

Сумма и умножение на число многочленов степени не выше 3 сохраняет степень многочлена, значит множество замкнуто.

**Ответ:** Да, является.

**Тип 7: Матрицы с нулевым определителем.**

**Аналогичные задачи:** 46, 58, 59

**Пример (вариант 46):** Является ли линейным пространством множество матриц  $3 \times 3$  с определителем 0?

**Решение:**

Сумма двух вырожденных матриц не всегда является вырожденной, например, если одна матрица противоположна другой. Значит множество не замкнуто.

**Ответ:** Нет, не является.