Содержание

1 Равномерная непрерывность. Примеры. Теорема Кантора

Вспомогательные понятия

Компакт в $\mathbb{R}$. Множество $K \subset \mathbb{R}$ называется *компактным*, если оно замкнуто и ограничено.

Непрерывность (точечное определение). Функция f называется непрерывной в точке x_0, если
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$
Если это выполняется для любой точки множества X, то f непрерывна на X.

Теорема Больцано–Вейерштрасса. Любая ограниченная последовательность в $\mathbb{R}$ имеет сходящуюся подпоследовательность. Если (x_n) лежит в компактном K, то любая подпоследовательность (x_{n_k}) содержит сходящуюся подпоследовательность с пределом в K.

Равномерная непрерывность. Функция f, определённая на $X \subset \mathbb{R}$, называется *равномерно непрерывной*, если
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \ \forall x_1, x_2 \in X, \ |x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$
Важное отличие: величина δ зависит только от ε, а не от точки $x_0 \in X$.

Ответ на вопрос

Теорема (*Теорема Кантора*).

Если функция f непрерывна на компактном множестве $K \subset \mathbb{R}$, то f равномерно непрерывна на K.

План доказательства.

1. Допустим, что f непрерывна на K, но не является равномерно непрерывной.
2. Покажем, что существует $\varepsilon_0 > 0$, при котором нельзя «раз и навсегда» выбрать δ, подходящее всем точкам в K.
3. Используем компактность K и теорему Больцано–Вейерштрасса для извлечения сходящейся подпоследовательности, приводящей к противоречию с неравномерной непрерывностью.
4. Следовательно, f равномерно непрерывна.

$\square$

Доказательство.

Пусть f непрерывна на K. Предположим, что f не равномерно непрерывна. Тогда
$$\exists \varepsilon_0 > 0 \ \forall \delta > 0 : \ \exists x, y \in K : \ |x - y| < \delta, \quad |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon_0.$$

Устанавливаем $\delta = 1/n$ и строим пары (x_n, y_n). Поскольку K компактно, можно выделить сходящуюся подпоследовательность (x_{n_k}, y_{n_k}) с $x_{n_k} \to c$ и $y_{n_k} \to c$. Из непрерывности f следует

$$|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \to 0,$$

что противоречит условию $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon_0$. Следовательно, наше предположение было неверным, и f равномерно непрерывна на K. ■

Пример.

- Функция $f(x) = kx + b$ равномерно непрерывна на всей $\mathbb{R}$, так как

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |k| \cdot |x_1 - x_2|.$$

- Функция $g(x) = x^2$ не является равномерно непрерывной на $\mathbb{R}$, хотя непрерывна. Но на любом отрезке $[a, b]$ она будет равномерно непрерывна (по Теореме Кантора).

2 Дифференциал функции. Теорема Ферма. Теорема Ролля. Примеры.

Вспомогательные понятия

Дифференциал функции. Пусть функция f задана в окрестности точки x_0 и дифференцируема в x_0. *Дифференциалом* $df(x_0)$ называют

$$df(x_0) \;=\; f'(x_0)\,(x - x_0).$$

При малом приращении $dx = x - x_0$ это выражение можно записать как

$$df(x_0) = f'(x_0)\,dx,$$

где остаток $f(x_0 + dx) - f(x_0) - df(x_0)$ мал по сравнению с dx (обозначают $o(dx)$).

Локальный экстремум. Точка x_0 называется *локальным минимумом* (соответственно, максимумом) функции f, если существует $\delta > 0$ такое, что при $|x - x_0| < \delta$ выполняется

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \text{(или } f(x) \leq f(x_0) \text{ для макс.).}$$

Теорема Вейерштрасса (о достижении экстремума). Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то

$$\exists\, x_{\min}, x_{\max} \in [a, b] : \quad f(x_{\min}) \leq f(x) \leq f(x_{\max}) \;\; \forall\, x \in [a, b].$$

Производная. Напомним, что $f'(x_0)$ есть предел

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

если этот предел конечен. Если $f'(x_0)$ существует для всех x_0 из некоторого промежутка, говорят, что f дифференцируема на этом промежутке.

Ответ на вопрос

Теорема (*Теорема Ферма*).

Если функция f дифференцируема в точке x_0 и имеет там локальный минимум или максимум, то $f'(x_0) = 0$.

План доказательства.

1. Пусть x_0 — точка локального минимума, тогда для x рядом с x_0 выполняется $f(x) \geq f(x_0)$.
2. Рассмотреть разность $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ при $x > x_0$ и при $x < x_0$ и перейти к пределу.
3. Получить, что $f'(x_0) \geq 0$ и $f'(x_0) \leq 0$, откуда $f'(x_0) = 0$.

4. Случай локального максимума аналогичен.

□

Доказательство.

Пусть x_0 — точка локального минимума. Тогда существует $\delta > 0$, что при $|x - x_0| < \delta$ верно $f(x) \geq f(x_0)$. Для $x > x_0$ имеем

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

Переходя к пределу при $x \to x_0^+$, получаем $f'(x_0) \geq 0$. Аналогично, если $x < x_0$, то $x - x_0 < 0$, и разность $f(x) - f(x_0)$ остаётся неотрицательной, что даёт $f'(x_0) \leq 0$. Значит $f'(x_0) \geq 0$ и $f'(x_0) \leq 0$, откуда $f'(x_0) = 0$. В случае локального максимума знак меняется, но рассуждение то же. Таким образом, если у f есть локальный экстремум в точке x_0, то $f'(x_0) = 0$. ■

Теорема (*Теорема Ролля*).

Пусть f непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема на интервале (a, b) и при этом $f(a) = f(b)$. Тогда существует хотя бы одна точка $c \in (a, b)$ такая, что

$$f'(c) = 0.$$

План доказательства.

1. Если f постоянна на $[a, b]$, то $f'(x) = 0$ на (a, b), и нужная точка c может быть любая.
2. Если f не постоянна, по Теореме Вейерштрасса достигаются минимум и максимум на $[a, b]$ в точках $x_{\min}, x_{\max}$.
3. Поскольку $f(a) = f(b)$, хотя бы один из экстремумов не может «жить» только на концах, значит есть локальный экстремум внутри (a, b).
4. По Теореме Ферма в точке локального экстремума c имеем $f'(c) = 0$.

□

Доказательство.

Предположим, что f не постоянна (иначе всё очевидно). По непрерывности и Теореме Вейерштрасса, функция f достигает своего минимума и максимума на отрезке $[a, b]$ (в точках $x_{\min}$ и $x_{\max}$). Поскольку $f(a) = f(b)$, по крайней мере один из этих экстремумов не может приходиться только на границы; значит существует $c \in (a, b)$, где f имеет локальный экстремум. По Теореме Ферма это даёт $f'(c) = 0$. ■

Пример.

- **Дифференциал:** Для $f(x) = x^2$ в точке $x_0 = 2$ получаем $f'(2) = 4$. Тогда при малом dx, $df(2) = 4\,dx$. Если $dx = 0.1$, то $df(2) = 0.4$, а реальное $f(2.1) - f(2)$ будет $4.41 - 4 = 0.41$, что близко к 0.4.
- **Пример (Теорема Ферма):** $f(x) = x^2$ имеет локальный минимум в $x = 0$, причём $f'(0) = 0$.
- **Пример (Теорема Ролля):** На $[0, 4]$ возьмём $f(x) = x^2 - 4x$. Тогда $f(0) = f(4) = 0$. Применяем Теорему Ролля: найдётся $c \in (0, 4)$ с $f'(c) = 0$. И вправду, $f'(x) = 2x - 4$, значит $c = 2$.

3 Теорема Лагранжа. Необходимое и достаточное условие постоянства дифференцируемой функции на промежутке. Необходимое и достаточное условие монотонности дифференцируемой функции на промежутке.

Вспомогательные понятия

Непрерывность на отрезке. Функция f называется *непрерывной* на отрезке $[a, b]$, если для любой точки $x_0 \in [a, b]$ и любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in [a, b]$ с $|x - x_0| < \delta$ выполняется $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Дифференцируемость. Функция f называется *дифференцируемой* на интервале (a, b), если в каждой точке $x_0 \in (a, b)$ существует конечный предел

$$f'(x_0) \;=\; \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Монотонность (возрастание, убывание). Говорят, что функция f *возрастает* на промежутке (a, b), если для любых $x_1, x_2 \in (a, b)$ при $x_1 < x_2$ выполняется $f(x_1) \le f(x_2)$ (или $<$ для строго возрастающей). Аналогично, f *убывает*, если $x_1 < x_2 \implies f(x_1) \ge f(x_2)$.

Теорема Ролля (напоминание). Пусть f *непрерывна* на $[a, b]$, *дифференцируема* на (a, b) и $f(a) = f(b)$. Тогда существует точка $c \in (a, b)$, где $f'(c) = 0$.

Ответ на вопрос

Теорема (*Теорема Лагранжа (о среднем значении)*).

Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b). Тогда существует точка $c \in (a, b)$ такая, что

$$f(b) - f(a) \;=\; f'(c)\,\bigl(b - a\bigr).$$

План доказательства.

1. Эта теорема является обобщением Теоремы Ролля (см. вспомогательные понятия).
2. Рассмотрим функцию $F(x) = f(x) - \alpha x$, где $\alpha = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.
3. Заметим, что $F(a) = F(b)$, откуда по Теореме Ролля существует c с $F'(c) = 0$.
4. Тогда $F'(c) = f'(c) - \alpha = 0 \implies f'(c) = \alpha$, и α равна $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

$\square$

Доказательство.

Обозначим $\alpha = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Рассмотрим $F(x) = f(x) - \alpha x$. Тогда

$$F(b) - F(a) \;=\; \big[f(b) - \alpha b\big] \;-\; \big[f(a) - \alpha a\big] \;=\; \big[f(b) - f(a)\big] - \alpha\,(b-a) = 0.$$

По условию, F непрерывна на $[a,b]$ и дифференцируема на (a,b) (как разность таких же функций). Из $F(a) = F(b)$ следует, что по Теореме Ролля существует $c \in (a,b)$ с $F'(c) = 0$. Но $F'(x) = f'(x) - \alpha$, значит

$$f'(c) - \alpha \;=\; 0 \quad\Longrightarrow\quad f'(c) \;=\; \alpha \;=\; \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Это и требовалось доказать. ■

Теорема (*Условие постоянства дифференцируемой функции*).
Пусть f дифференцируема на промежутке (a,b). Тогда f постоянна на (a,b) **тогда и только тогда**, когда

$$f'(x) \;=\; 0 \quad \text{для всех } x \in (a,b).$$

План доказательства.

1. Если $f'(x) = 0$ всюду, по Теореме Лагранжа (или Ролля) разность $f(x_2) - f(x_1)$ оказывается равной нулю, значит f постоянна.

2. Если f постоянна, то очевидно $f'(x) = 0$.

□

Доказательство.
(Необходимость) Если f константа, тогда для любых x_1, x_2 выполняется $f(x_2) = f(x_1)$, откуда $f'(x) = 0$ в любой точке, где существует производная.
(Достаточность) Пусть $f'(x) = 0$ для всех $x \in (a,b)$. Возьмём любые $x_1 < x_2$ в (a,b). Применим Теорему Лагранжа на отрезке $[x_1, x_2]$: найдётся $c \in (x_1, x_2)$, что

$$f(x_2) - f(x_1) \;=\; f'(c)\,\big(x_2 - x_1\big).$$

Но $f'(c) = 0$, значит $f(x_2) = f(x_1)$. Следовательно, f одно и то же число на всём (a,b). ■

Теорема (*Условие монотонности дифференцируемой функции*).
Пусть f дифференцируема на промежутке (a,b).

- f **возрастает** на (a,b) $\iff$ $f'(x) \geq 0$ для всех $x \in (a,b)$ (причём множество нулей $f'(x) = 0$ не содержит интервалов).

- f **убывает** на (a,b) $\iff$ $f'(x) \leq 0$ для всех $x \in (a,b)$ (и множество нулей не содержит интервалов).

План доказательства.

1. Если $f'(x) \geq 0$ на (a,b), то для $x_2 > x_1$ по Теореме Лагранжа $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)\,(x_2 - x_1) \geq 0$.

2. Если f возрастает, то $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \geq 0$. Переходя к пределу, получаем $f'(x) \geq 0$.

3. Уточнение про то, что при равенстве нулю на целом подинтервале, функция фактически становится постоянной там, что «ломает» строгое возрастание.

□

Доказательство.

(Случай возрастания) Пусть $x_1 < x_2$. Если $f'(x) \geq 0$, по Теореме Лагранжа найдётся $c \in (x_1, x_2)$:

$$f(x_2) - f(x_1) \;=\; f'(c)\,(x_2 - x_1) \;\geq\; 0,$$

значит $f(x_2) \geq f(x_1)$ — неубывание.

Обратное: если f возрастает, $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \geq 0$. Переходя к пределу при $x_2 \to x_1$, получаем $f'(x_1) \geq 0$. Аналогичные аргументы для убывания (меняются знаки).

Если $f'(x) = 0$ на целом подинтервале, там f постоянна, нарушая «строгое» возрастание.

■

Пример.

- **Функция**, у которой $f'(x) \geq 0$, но есть точки с $f'(x) = 0$, будет возрастать (не строго), однако если такие нули идут целым отрезком, то там f постоянна.
- **Пример**: $f(x) = x^3$ на $\mathbb{R}$: $f'(x) = 3x^2 \geq 0$, значит f возрастает на всей оси. При этом $f'(0) = 0$, но это всего одна точка.

4 Равномерная непрерывность. Примеры. Теорема Кантора о равномерной непрерывности.

Вспомогательные понятия

Теорема (*Теорема Кантора*).

Если f непрерывна на *компактном* множестве $X \subset \mathbb{R}$, то f равномерно непрерывна на X.

План доказательства.

1. Доказывать будем *от противного*: считаем, что f непрерывна на компакте, но **не** равномерно непрерывна.
2. Из этого следует существование $\varepsilon_0 > 0$, при котором нельзя подобрать «глобальное» δ, годящееся для всех точек в X.
3. Для каждой n, пусть $\delta = \frac{1}{n}$. Тогда находятся точки (x_n, y_n) с $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$, но $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0$.
4. Используем компактность X: извлекаем сходящуюся подпоследовательность $(x_{n_k}) \to c$. Поскольку $|x_{n_k} - y_{n_k}| < 1/n_k \to 0$, получаем $y_{n_k} \to c$ тоже.
5. По непрерывности f имеем $f(x_{n_k}) \to f(c)$ и $f(y_{n_k}) \to f(c)$, значит $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \to 0$, что противоречит условию $\geq \varepsilon_0$.

□

Доказательство.

Пусть f непрерывна на компактном X, но, вопреки теореме, *не* равномерно непрерывна. Тогда

$$\exists\, \varepsilon_0 > 0 \quad \forall\, \delta > 0,\ \exists x, y \in X : \quad |x - y| < \delta, \quad |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon_0.$$

Выберем $\delta = 1/n$ и построим пары (x_n, y_n) с

$$|x_n - y_n| < \tfrac{1}{n}, \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0.$$

Так как X — компакт, последовательность (x_n) имеет сходящуюся подпоследовательность $(x_{n_k}) \to c \in X$. По условию $|x_{n_k} - y_{n_k}| < 1/n_k \to 0$, значит $y_{n_k} \to c$ тоже. Из непрерывности f в точке c следует

$$f(x_{n_k}) \to f(c), \quad f(y_{n_k}) \to f(c),$$

так что $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \to 0$. Но по построению $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon_0 > 0$. Это даёт противоречие.

Следовательно, наша гипотеза о «неравномерной непрерывности» была ошибочной, и f действительно равномерно непрерывна на X. ■

Пример.

- **Пример (равномерная непрерывность на $\mathbb{R}$):** Линейная функция $f(x) = kx + b$. Имеем $|f(x_1) - f(x_2)| = |k| \cdot |x_1 - x_2|$, что легко «контролируется» выбором $\delta = \frac{\varepsilon}{|k|}$.
- **Пример (не равномерная на $\mathbb{R}$):** $f(x) = x^2$. Несмотря на непрерывность на $\mathbb{R}$, не получается «глобально» связать $|x_1 - x_2|$ с $|f(x_1) - f(x_2)|$ единым $\delta(\varepsilon)$, поскольку при больших $|x|$ влияние приращения аргумента сильно возрастает.
- Аналогично, e^x неравномерно непрерывна на всей оси: чем больше x, тем чувствительнее функция к малым изменениям x.

Ответ на вопрос

Теорема (*Теорема Кантора*).

Если f непрерывна на *компактном* множестве $X \subset \mathbb{R}$, то f равномерно непрерывна на X.

План доказательства.

1. Доказывать будем *от противного*: считаем, что f непрерывна на компакте, но **не** равномерно непрерывна.

2. Из этого следует существование $\varepsilon_0 > 0$, при котором нельзя подобрать «глобальное» δ, годящееся для всех точек в X.

3. Для каждой n, пусть $\delta = \frac{1}{n}$. Тогда находятся точки (x_n, y_n) с $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$, но $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0$.

4. Используем компактность X: извлекаем сходящуюся подпоследовательность $(x_{n_k}) \to c$. Поскольку $|x_{n_k} - y_{n_k}| < 1/n_k \to 0$, получаем $y_{n_k} \to c$ тоже.

5. По непрерывности f имеем $f(x_{n_k}) \to f(c)$ и $f(y_{n_k}) \to f(c)$, значит $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \to 0$, что противоречит условию $\geq \varepsilon_0$.

□

Доказательство.

Пусть f непрерывна на компактном X, но, вопреки теореме, *не* равномерно непрерывна. Тогда

$$\exists\, \varepsilon_0 > 0 \quad \forall\, \delta > 0,\ \exists x, y \in X: \quad |x - y| < \delta, \quad |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon_0.$$

Выберем $\delta = 1/n$ и построим пары (x_n, y_n) с

$$|x_n - y_n| < \tfrac{1}{n}, \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0.$$

Так как X — компакт, последовательность (x_n) имеет сходящуюся подпоследовательность $(x_{n_k}) \to c \in X$. По условию $|x_{n_k} - y_{n_k}| < 1/n_k \to 0$, значит $y_{n_k} \to c$ тоже. Из непрерывности f в точке c следует

$$f(x_{n_k}) \to f(c), \quad f(y_{n_k}) \to f(c),$$

так что $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \to 0$. Но по построению $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon_0 > 0$. Это даёт противоречие.

Следовательно, наша гипотеза о «неравномерной непрерывности» была ошибочной, и f действительно равномерно непрерывна на X. ■

Пример.

- **Пример (равномерная непрерывность на $\mathbb{R}$):** Линейная функция $f(x) = kx + b$. Имеем $|f(x_1) - f(x_2)| = |k| \cdot |x_1 - x_2|$, что легко «контролируется» выбором $\delta = \frac{\varepsilon}{|k|}$.

- **Пример (не равномерная на $\mathbb{R}$):** $f(x) = x^2$. Несмотря на непрерывность на $\mathbb{R}$, не получается «глобально» связать $|x_1 - x_2|$ с $|f(x_1) - f(x_2)|$ единым $\delta(\varepsilon)$, поскольку при больших $|x|$ влияние приращения аргумента сильно возрастает.

- Аналогично, e^x неравномерно непрерывна на всей оси: чем больше x, тем чувствительнее функция к малым изменениям x.

5 Вывод рядов Тейлора для функций y=exp(x), y=sinx, y=cosx через следствие из теоремы Лагранжа. Формула Эйлера.

Вспомогательные понятия

Ряд Маклорена. Пусть функция f имеет все производные в некоторой окрестности точки 0. Тогда *рядом Маклорена* для f называют

$$f(0) \;+\; \frac{f'(0)}{1!}\,x \;+\; \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 \;+\; \dots \;+\; \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n \;+\; \dots$$

Если этот ряд сходится к $f(x)$ при соответствующих значениях x, то мы получаем разложение $f(x)$ в степенной ряд около 0.

Остаточный член в форме Лагранжа. В случае, когда у функции f есть $(n+1)$-я производная в окрестности 0, можно записать

$$R_n(x) \;=\; \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,x^{n+1},$$

где ξ — некоторая точка между 0 и x. Это называют *остаточным членом* (или недостающим звеном) в формуле Тейлора (Маклорена).

Идея применения Теоремы Лагранжа. Для доказательства формулы Тейлора с остатком в форме Лагранжа часто используют теорему Лагранжа о среднем значении для производных: если $P_n(x)$ — многочлен Тейлора степени n, то на отрезке $[0, x]$ применяют теорему Лагранжа к функции $f(x) - P_n(x)$, чтобы получить вид « $f^{(n+1)}(\xi)\,x^{n+1}/(n+1)!$».

Комплексная экспонента. Функция e^{ix}, где i — мнимая единица, можно рассматривать как обобщение экспоненты на комплексную плоскость:

$$e^{ix} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!}.$$

Из этого получается *Формула Эйлера* при разбиении на действительную и мнимую часть.

Ответ на вопрос

Теорема (*Формула Тейлора (с остатком в форме Лагранжа)*).

Пусть функция f имеет $(n+1)$-ю производную в окрестности 0. Тогда для x из этой окрестности справедливо разложение:

$$f(x) \;=\; f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\,x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n \;+\; \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,x^{n+1}}_{R_n(x)},$$

где ξ — некоторая точка между 0 и x. Это и называют *рядом Тейлора (Маклорена)* с остаточным членом в форме Лагранжа.

План доказательства.

1. Рассмотреть многочлен Тейлора $P_n(x)$, равный сумме первых $n+1$ членов (то есть до x^n).
2. Применить теорему Лагранжа к функции $f(x) - P_n(x)$ на отрезке $[0, x]$.
3. Показать, что «остаток» $R_n(x)$ принимает вид $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,x^{n+1}$.
4. Подставляя в эту схему конкретные $f(x)$ (как e^x, $\sin x$, $\cos x$), получаем соответствующие ряды.

$\square$

Доказательство.

Пусть f удовлетворяет условиям теоремы (все производные до порядка $n+1$ определены и непрерывны в окрестности 0). Определим

$$P_n(x) \;=\; f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\,x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n.$$

Тогда рассмотрим на промежутке $[0, x]$ (предполагая $x > 0$ для определённости) функцию

$$g(t) \;=\; f(t) - P_n(t).$$

Заметим, что $g(0) = 0$. По построению, g непрерывна и дифференцируема. Применим теорему Лагранжа (о среднем значении): существует $\xi \in (0, x)$ такое, что

$$g(x) - g(0) \;=\; g'(\xi)\,\bigl(x - 0\bigr).$$

Так как $g(0) = 0$, получаем

$$g(x) \;=\; g'(\xi)\,x.$$

Но

$$g'(t) \;=\; f'(t) - \left[\tfrac{d}{dt}P_n(t)\right] \;=\; f'(t) - \Bigl[f'(0) + \cdots + \tfrac{f^{(n)}(0)}{(n-1)!}\,t^{n-1}\Bigr].$$

Ещё раз применяя теорему Лагранжа к разности $f'(t)$ и многочлена производных, доказывают, что это выражение сводится к $\frac{f^{(n+1)}(\eta)}{n!}\,t^n$ (или детально, если нужно). Таким образом, окончательно получается

$$f(x) - P_n(x) \;=\; \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,x^{n+1}.$$

Это и есть остаток $R_n(x)$. В итоге,

$$f(x) \;=\; P_n(x) + R_n(x), \quad R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,x^{n+1}.$$

$\blacksquare$

Пример.

Применение к e^x, $\sin x$, $\cos x$.

- **Функция** $f(x) = e^x$**.** Все её производные равны e^x, значит в точке 0 они все равны 1. Отсюда ряд:

  $$e^x \;=\; 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x),$$

  где $R_n(x) = \frac{e^\xi}{(n+1)!}\,x^{n+1}$ с некоторой $\xi \in (0, x)$.

- **Функция** $f(x) = \sin x$**.** Производные цикличны, на $x = 0$ берут значения 0, 1, 0, -1, ... Получаем
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + R_n(x).$$
- **Функция** $f(x) = \cos x$**.** Аналогично,
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + R_n(x).$$

Пример.

Формула Эйлера.
$$e^{ix} = \cos x + i\,\sin x.$$

Если в ряде для e^x подставить $x \mapsto ix$, раскрыв степенные множители i^n (где $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, и т.д.), происходит естественное разбиение на действительную часть (совпадающую с рядом $\cos x$) и мнимую часть (совпадающую с рядом $\sin x$). Это даёт знаменитую тождественность Эйлера.

6 Теорема Коши. Правило Лопиталя (доказательство – только для случая 0/0). Примеры, когда правило неприменимо.

Вспомогательные понятия

Проколотая окрестность. Окрестность точки a называют *проколотой*, если в ней учитывают все точки, кроме, возможно, самой a. Формально, это множество

$$\{\, x : 0 < |x - a| < \delta\},$$

где $\delta > 0$. Функции f и g говорят «дифференцируемы в проколотой окрестности a», если они имеют производные для всех x этого множества (кроме, возможно, самой точки a).

Теорема Ролля (напоминание). Пусть h непрерывна на $[p, q]$, дифференцируема на (p, q) и $h(p) = h(q)$. Тогда существует $c \in (p, q)$ с $h'(c) = 0$. Часто используется для построения доказательств Лагранж-типа.

Неопределённости вида $0/0$ и ∞/∞. Правило Лопиталя применимо только к случаям, когда $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ одновременно равны нулю, либо одновременно стремятся к $\pm\infty$. Во всех остальных случаях правило не даёт результата.

Условия дифференцируемости. Если функции f, g дифференцируемы в некоторой проколотой окрестности a, то мы можем говорить о $f'(x)$ и $g'(x)$ при $x \to a$, даже если $f(a)$ или $g(a)$ не определены (или не дифференцируемы) строго в точке a.

Ответ на вопрос

Теорема (*Теорема Коши (обобщённая теорема Лагранжа)*).
Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют условиям:

- непрерывны на $[a, b]$,
- дифференцируемы на (a, b),
- $g'(x) \neq 0$ для всех $x \in (a, b)$.

Тогда существует точка $c \in (a, b)$ такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

План доказательства.

1. Сконструировать вспомогательную функцию $\Phi(t) = f(t) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[\, g(t) - g(a)\,]$.
2. Показать, что $\Phi(a) = \Phi(b) = 0$.

3. Применить Теорему Ролля, найти $c \in (a, b)$ с $\Phi'(c) = 0$.

4. Вывести оттуда $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\, g'(c)$.

5. Получить требуемое равенство $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.

□

Доказательство.

Предположим f, g удовлетворяют условиям: непрерывны на $[a, b]$, дифференцируемы на (a, b), причём $g'(x) \neq 0$ на (a, b). Определим

$$\Phi(t) \;=\; f(t) - f(a) \;-\; \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\,\bigl[g(t) - g(a)\bigr].$$

Нетрудно проверить, что $\Phi(a) = 0$ и

$$\Phi(b) \;=\; f(b) - f(a) \;-\; \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\bigl[g(b) - g(a)\bigr] \;=\; 0.$$

Поскольку Φ непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b), по Теореме Ролля существует $c \in (a, b)$, где $\Phi'(c) = 0$. Но

$$\Phi'(t) \;=\; f'(t) \;-\; \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\, g'(t).$$

Тогда $\Phi'(c) = 0 \implies f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\, g'(c)$. Поделив обе части на $g'(c)$ (отлично от 0), получаем

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} \;=\; \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Это и доказывает обобщённую Теорему Лагранжа (Коши). ■

Теорема (*Правило Лопиталя (случай 0/0)*).

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в проколотой окрестности точки a. Предположим, что

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to a} g(x) = 0,$$

и $g'(x) \neq 0$ в этой окрестности. Если существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \;=\; L,$$

то существует и $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, причём

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

План доказательства.

1. Рассмотреть отношение $\frac{f(x)}{g(x)}$ при $x \to a$ (обе функции стремятся к 0).

2. Применить Теорему Коши к f и g на отрезке $[a, x]$, используя $f(a) = g(a) = 0$.

3. Утверждается, что $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$ для некоторого $c_x \in (a, x)$.

4. Переходя к пределу $x \to a$, если $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, то получаем $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

□

Доказательство.

По условию $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, и $g'(x) \neq 0$ в проколотой окрестности. Предположим, что $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$.

Для $x > a$ (или $x < a$, в зависимости от ситуации) рассмотрим отрезок $[a, x]$. Тогда $f(a) = g(a) = 0$. По Теореме Коши (см. выше) существует $c_x \in (a, x)$, где

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}.$$

Но $f(a) = g(a) = 0$, значит

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}.$$

При $x \to a$, точка $c_x \to a$. Если $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, то $\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} \to L$. Следовательно,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

■

Пример.

Примеры, когда правило Лопиталя неприменимо:

- **Нет неопределённости** $0/0$: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x+1} = \frac{0}{1} = 0$ — здесь всё очевидно, правило Лопиталя не нужно.
- **Предел** $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ **не существует**: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(1/x)}{1/x}$ – поведение непредсказуемо; производные $f'(x)$ и $g'(x)$ «скачут».
- f **или** g **не дифференцируемы (хотя бы в проколотой окрестности)**: $f(x) = |x|$, $g(x) = x$ при $x \to 0$: f не дифференцируема в 0.

7 Формула Тейлора для многочлена. Формула Тейлора с остатком в форме Пеано.

Вспомогательные понятия

Многочлен и его производные. Пусть $P(x)$ — многочлен степени n, то есть

$$P(x) \;=\; a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n.$$

Все производные $P^{(k)}(x)$ существуют на $\mathbb{R}$, причём для $k > n$ эти производные тождественно равны нулю.

Малое «о» и запись $o\big((x-x_0)^n\big)$. Говорят, что $r_n(x) = o\big((x-x_0)^n\big)$ при $x \to x_0$, если

$$\lim_{x \to x_0} \frac{r_n(x)}{(x-x_0)^n} \;=\; 0.$$

Иными словами, функция $r_n(x)$ «уходит в ноль» быстрее, чем $(x-x_0)^n$, когда x приближается к x_0.

Общее представление о разложении Тейлора. Формула Тейлора обычно записывается в виде

$$f(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \;+\; R_n(x),$$

где $R_n(x)$ — остаточный член, который может принимать разные формы (например, форма Лагранжа или форма Пеано).

Ответ на вопрос

Теорема (*Формула Тейлора для многочлена*).

Пусть $P(x)$ — многочлен степени n. Тогда его разложение в окрестности x_0 совпадает со стандартным полиномом Тейлора степени n, а *остаток* (производные порядка выше n) равен 0.

План доказательства.

1. Заметим, что для $m > n$, $P^{(m)}(x) \equiv 0$ (у многочлена).
2. Построить формулу Тейлора $T_n(x)$ до степени n, сослаться на нулевые старшие производные.
3. Показать, что фактически $P(x) = T_n(x)$, поскольку коэффициенты полностью совпадают.

$\square$

Доказательство.

Пусть $P(x)$ — многочлен степени n. Рассмотрим «полином Тейлора» порядка n вокруг x_0:

$$T_n(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x-x_0)^k.$$

Так как производные $P^{(k)}(x)$ для $k > n$ тождественно равны нулю, в формуле не возникает никаких членов выше n-го порядка, и «остаток» $R_n(x)$ отсутствует.

Кроме того, само определение производной многочлена показывает, что $P^{(k)}(x_0)$ являются соответствующими коэффициентами, и $T_n(x)$ на самом деле совпадает с исходным многочленом $P(x)$ (коэффициенты совпадают). Значит

$$P(x) \;=\; T_n(x),$$

и никакого дополнительного остатка нет. ∎

Теорема (*Формула Тейлора с остатком в форме Пеано*).

Пусть функция f n раз дифференцируема в точке x_0. Тогда

$$f(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x-x_0)^k \;+\; o\big((x-x_0)^n\big).$$

План доказательства.

1. Написать классическую формулу Тейлора (с формой Лагранжа для остатка).
2. Показать, что если $f^{(n)}$ непрерывна, то этот остаток становится $o((x-x_0)^n)$.
3. Использовать аргумент, что $(x-x_0)^{n+1}$ «уходит» быстрее, чем $(x-x_0)^n$ при $x \to x_0$.

□

Доказательство.

Предположим, f имеет непрерывные производные вплоть до порядка n. По классической Формуле Тейлора с остатком в форме Лагранжа,

$$f(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x-x_0)^k \;+\; \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(x-x_0)^{n+1}$$

для некоторой ξ между x_0 и x. Поскольку $f^{(n+1)}$ непрерывна в x_0, при $x \to x_0$ значение $f^{(n+1)}(\xi)$ остаётся ограниченным, а $(x-x_0)^{n+1}$ «уходит» быстрее, чем $(x-x_0)^n$. Таким образом

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(x-x_0)^{n+1} \;=\; o\big((x-x_0)^n\big).$$

Значит вся формула переписывается в виде

$$f(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x-x_0)^k \;+\; o\big((x-x_0)^n\big),$$

что и требовалось доказать. ∎

Пример.

Примеры:

- **Многочлен $P(x)$.** Для $P(x)$ степени n справедлива формула Тейлора, где *нет* остатка, потому что $P^{(m)}(x) \equiv 0$ при $m > n$.
- **$f(x) = e^x$.** Не является многочленом, но при разложении вокруг 0:

  $$e^x \;=\; 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \;+\; o(x^n), \quad x \to 0.$$

  Остаточный член именно «форма Пеано», показывающая, что остаток делится на x^n с показателем n и уходит в ноль.

8 Достаточные условия существования экстремума (по второй производной).

Вспомогательные понятия

Локальный минимум и максимум. Точка x_0 внутри промежутка (a, b) называется *локальным минимумом* функции f, если существует $\delta > 0$ такое, что при $|x - x_0| < \delta$ выполняется $f(x) \geq f(x_0)$. Аналогично, x_0 называется *локальным максимумом*, если в некоторой окрестности x_0 верно $f(x) \leq f(x_0)$.

Вторая производная. Пусть f дифференцируема на интервале (a, b), и $f'(x)$ тоже дифференцируема на (a, b). Тогда в точках, где это возможно, определена *вторая производная* $f''(x) = \big(f'(x)\big)'$.

Теорема Ферма (напоминание). Если функция f дифференцируема в точке x_0 и имеет там локальный минимум или максимум, то $f'(x_0) = 0$. Это — необходимое условие экстремума (без второй производной).

Ответ на вопрос

Теорема (*Достаточные условия экстремума по второй производной*).

Пусть f дифференцируема на (a, b) и $x_0 \in (a, b)$ — такая точка, где $f'(x_0) = 0$. Предположим, что у f существует непрерывная в x_0 вторая производная $f''(x_0)$. Тогда:

1. Если $f''(x_0) > 0$, то x_0 — точка **локального минимума**.
2. Если $f''(x_0) < 0$, то x_0 — точка **локального максимума**.
3. Если $f''(x_0) = 0$, вывод о виде экстремума не делается (нужен дополнительный анализ).

План доказательства.

1. Исходя из Теоремы Ферма, имеем $f'(x_0) = 0$.
2. Случай $f''(x_0) > 0$: показывает, что $f'(x)$ возрастает вблизи x_0, отсюда x_0 становится локальным минимумом.
3. Случай $f''(x_0) < 0$: говорит, что $f'(x)$ убывает вблизи x_0, получаем локальный максимум.
4. Если $f''(x_0) = 0$, дополнительно надо исследовать ситуацию (пример x^3).

$\square$

Доказательство.

Пусть $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0)$ существует и непрерывна в x_0.

Случай $f''(x_0) > 0$. Из непрерывности f'' около x_0 следует, что при x достаточно близком к x_0, вторая производная $f''(x)$ остаётся положительной. Это значит, что $f'(x)$

строго возрастает вблизи x_0. Так как $f'(x_0) = 0$, то при $x > x_0$ значения $f'(x)$ становятся положительными, а при $x < x_0$ — отрицательными. Следовательно,

$$x > x_0 \implies f'(x) > 0 \implies f \text{ возрастает справа,}$$

$$x < x_0 \implies f'(x) < 0 \implies f \text{ убывает слева.}$$

Значит x_0 — локальный минимум.

Случай $f''(x_0) < 0$. Аналогично, теперь $f'(x)$ убывает при x около x_0. Поскольку $f'(x_0) = 0$, при $x > x_0$ значения $f'(x)$ оказываются отрицательными, а при $x < x_0$ — положительными. Тогда

$$x < x_0 \implies f'(x) > 0 \implies f \text{ возрастает слева,}$$

$$x > x_0 \implies f'(x) < 0 \implies f \text{ убывает справа.}$$

Следовательно, x_0 — локальный максимум.

Случай $f''(x_0) = 0$. Здесь нельзя сделать однозначный вывод об экстремуме (например, $f(x) = x^3$ при $x = 0$ даёт $f'(0) = 0, f''(0) = 0$, но это не экстремум). Нужны другие способы анализа (см. более высокие производные, графический анализ и т. п.). ■

Пример.

- **Пример:** $f(x) = x^2$. Имеем $f'(0) = 0$, $f''(0) = 2 > 0$, значит в $x = 0$ локальный минимум.
- **Пример:** $f(x) = x^3$. Имеем $f'(0) = 0$, но $f''(0) = 0$, что не даёт никакого вывода о минимуме/максимуме. На практике $x = 0$ — это точка перегиба без экстремума.
- **Пример:** $f(x) = -x^2$. Имеем $f'(0) = 0$, $f''(0) = -2 < 0$, стало быть $x = 0$ — локальный максимум.

9 Теорема Лиувилля. Пример трансцендентного числа.

Вспомогательные понятия

Алгебраическое и трансцендентное число.

- *Алгебраическое число* — корень некоторого ненулевого многочлена с рациональными (или целыми) коэффициентами. Например, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{7}$.

- *Трансцендентное число* — не является алгебраическим. Примеры: e, π, а также специальные конструкции (числа Лиувилля).

Приближение чисел рациональными дробями. Говорят, что действительное число α *допускает «слишком хорошие» рациональные приближения*, если существуют бесконечные наборы дробей $\frac{p}{q}$, для которых

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \; < \; \frac{1}{q^n}$$

при некоторых больших q и $n > 1$ (как правило n существенно больше 1).

Минимальный многочлен (напоминание). Для алгебраического числа α его *минимальным многочленом* называют многочлен $P(x)$ наименьшей степени d (со старшим коэффициентом 1, без общих делителей), у которого $P(\alpha) = 0$.

Если α было бы таким, что у него «слишком хорошие» приближения, то анализ $P\big(\frac{p}{q}\big)$ приводит к противоречию, используемому в доказательстве теоремы Лиувилля.

Ответ на вопрос

Теорема (*Теорема Лиувилля*).

Пусть действительное число α удовлетворяет следующему условию: существует $n > 1$ и бесконечно много рациональных дробей $\frac{p}{q}$, для которых

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \; < \; \frac{1}{q^n}.$$

Тогда α **не** алгебраично (то есть оно **трансцендентно**).

План доказательства.

1. Предположим противное: α — алгебраическое, корень некоторого целочисленного многочлена $P(x)$ степени d.

2. Допустим, есть бесконечно много $\frac{p}{q}$, дающих $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^n}$, причём $n > d$.

3. Рассмотреть $|P(\frac{p}{q}) - P(\alpha)|$ и использовать свойства многочлена P (его степень, целые коэффициенты).

4. Получить противоречие из «слишком хорошего» приближения, показывая, что $P(\frac{p}{q})$ оказывается «слишком близко» к нулю, но не равно нулю.

5. Заключить, что α не может быть алгебраическим, значит трансцендентно.

$\square$

Доказательство.

Пусть, ради противного, α — корень целого многочлена $P(x)$ степени d (приведённого, без общих делителей). Предположим, что существуют бесконечно многие дроби $\frac{p}{q}$ с

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \; < \; \frac{1}{q^n}$$

для некоторого $n > d$. Тогда $|q\alpha - p| < q^{1-n}$.

Рассмотрим $P\bigl(\frac{p}{q}\bigr) - P(\alpha) = P\bigl(\frac{p}{q}\bigr)$ (ведь $P(\alpha) = 0$). С помощью разложения многочлена (по формуле Тейлора или биному), учитывая целые коэффициенты и тот факт, что $|\frac{p}{q} - \alpha| < \frac{1}{q^n}$, при достаточно больших q получаем оценку $|P(\frac{p}{q})|$ слишком малой для ненулевого целочисленного P. Например, высшие степени $(\frac{p}{q} - \alpha)^d$ дают вклад порядка $\frac{1}{q^{dn}}$, что при $n > d$ «умирает» так быстро, что невозможно без $P(\frac{p}{q})$ быть нулём. Иными словами, получаем противоречие с тем, что $P(\frac{p}{q})$ — целая комбинация, не может быть «чересчур» малой, если $\frac{p}{q} \neq \alpha$.

Следовательно, наше допущение о «слишком хороших» приближениях алгебраического α ложно. Значит α — трансцендентное. $\blacksquare$

Пример.

Число Лиувилля. Рассмотрим

$$\beta \; = \; \sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k!} \; = \; 0.110001000000000000000001\ldots$$

(десятичная запись имеет единицы в позициях $1!, 2!, 3!, \ldots$). Нетрудно проверить, что для любого $n > 1$ существует рациональная дробь $\frac{p}{q}$ (с $q = 10^{n!}$) приближающая β с точностью $\frac{1}{q^n}$. По Теореме Лиувилля, такое β не алгебраично, значит **трансцендентно**.

10 Формулы Маклорена для функций y=exp(x), y=sinx, y=cosx, y=ln(1+x), y=pow((1+x),a).

Вспомогательные понятия

Ряд Маклорена (частный случай ряда Тейлора). Пусть функция f бесконечно дифференцируема в окрестности $x = 0$. Тогда её *ряд Маклорена* — это разложение вида

$$f(x) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n,$$

если данный ряд сходится к $f(x)$ для соответствующих значений x. Радиус и область сходимости могут быть разными в зависимости от особенностей f.

Производные порядка n и значения в точке 0. Если f имеет все производные (бесконечно дифференцируема) у $x = 0$, тогда

$$f^{(n)}(0) \;\text{— } n\text{-я производная в точке } 0.$$

Эти значения формируют коэффициенты при x^n в ряде Маклорена.

Обобщённая биномиальная формула. Для произвольного действительного a и $|x| < 1$:

$$(1+x)^a \;=\; 1 + a\,x + \frac{a(a-1)}{2!}\,x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}\,x^3 + \dots.$$

Этот ряд сходится при $|x| < 1$ и является расширением классического бинома Ньютона (в котором a – целое неотрицательное число).

Ответ на вопрос

Теорема (*Формулы Маклорена*).

Пусть f бесконечно дифференцируема в некоторой окрестности 0. Тогда для каждой из нижеуказанных функций верны следующие ряды Маклорена (при своих радиусах сходимости):

1. $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}.$

2. $\sin x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}.$

3. $\cos x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R}.$

4. $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \dots, \quad |x| < 1.$

5. $(1+x)^a = 1 + a\,x + \dfrac{a(a-1)}{2!}\,x^2 + \dots, \quad |x| < 1.$

План доказательства.

1. Для e^x, $\sin x$, $\cos x$ вычислить все производные в точке 0, получить $f^{(n)}(0)$.
2. Подставить в общий вид $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n$.
3. Показать (или сослаться на известные результаты) о радиусе сходимости: $e^x, \sin x, \cos x$ сходятся на всей $\mathbb{R}$.
4. Для $\ln(1+x)$ разложить в степенной ряд при $|x|<1$, найти формулы производных, увидеть знакочередующиеся коэффициенты.
5. Для $(1+x)^a$ — использовать бином Ньютона (обобщённый) или вывести через производные.

□

Доказательство.

(1) Функция e^x. Все производные $f^{(n)}(x) = e^x$, значит в точке 0 они равны 1. По определению:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Радиус сходимости — неограничен (по признаку д'Аламбера).

(2) Функция $\sin x$. Производные идут по циклу: $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, ... В точке 0 они чередуются: 0, 1, 0, -1, ... Поэтому

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Ряд сходится для всех $x \in \mathbb{R}$.

(3) Функция $\cos x$. Аналогично, если в $\sin x$ заменить фазы производных, получаем

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Тоже сходится на всей $\mathbb{R}$.

(4) Функция $\ln(1+x)$. Для $|x|<1$, последовательно вычисляются $f^{(n)}(0)$, давая чередующиеся коэффициенты:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots.$$

При $x=1$ получается «$\ln(2)$»-ряд, который сходится условно.

(5) Функция $(1+x)^a$. Применяем обобщённую биномную формулу (или дифференцируемость порядка n) — получаем:

$$(1+x)^a = 1 + a\,x + \frac{a(a-1)}{2!}\, x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}\, x^3 + \dots, \quad |x|<1.$$

Это ряд сходящийся в круге $|x|<1$. Таким образом, все 5 функций имеют свой ряд Маклорена, рассчитываемый из $f^{(n)}(0)$, и каждый сходится в определённой области (свой радиус сходимости). ■

Пример.

Примеры использования рядов:

- Подстановка $x = \pi$ в $\sin x$ даёт $\sin \pi = 0$, а ряд: $0 - \frac{\pi^3}{3!} + \frac{\pi^5}{5!} - \cdots = 0$ (знакочередующаяся сумма).

- Для $\ln(1 + \frac{1}{2}) = \ln\left(\frac{3}{2}\right) \approx 0.40536$ можно использовать разложение $\frac{1}{2} - \frac{(\frac{1}{2})^2}{2} + \frac{(\frac{1}{2})^3}{3} - \ldots$.

- $(1 + x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1 + x}$ — частный случай биномной формулы.

11 Формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа. Приближенные вычисления по формуле Тейлора.

Вспомогательные понятия

Формула Тейлора и остаточный член. Пусть f имеет $(n+1)$-ю производную в окрестности точки x_0. Тогда можно представить $f(x)$ в виде:

$$f(x) \;=\; f(x_0) \;+\; \frac{f'(x_0)}{1!}\,(x-x_0) \;+\; \dots \;+\; \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x-x_0)^n \;+\; R_n(x),$$

где $R_n(x)$ — *остаточный член.*

Форма Лагранжа для остаточного члена. Существует точка ξ между x_0 и x такая, что

$$R_n(x) \;=\; \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(x-x_0)^{n+1}.$$

Это часто доказывают, используя обобщённую *Теорему Лагранжа* (или Коши) и идеи, связанные с «нулевыми» значениям производных при замене на многочлен Тейлора до порядка n.

Приближённые вычисления. Чтобы приблизительно вычислить $f(x)$, берут полином Тейлора

$$P_n(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x-x_0)^k,$$

оценивая погрешность через

$$|R_n(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(x-x_0)^{n+1}\right|.$$

Если $|f^{(n+1)}(t)| \le M$ на $[x_0,x]$, то

$$|R_n(x)| \;\le\; \frac{M\,|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!},$$

что даёт верхнюю границу ошибки.

Ответ на вопрос

Теорема (*Формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа*).

Пусть f непрерывно дифференцируема на отрезке $[x_0,x]$ (или $[x,x_0]$) до порядка $(n+1)$. Тогда

$$f(x) \;=\; \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x-x_0)^k}_{\text{многочлен Тейлора порядка } n} \;+\; \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(x-x_0)^{n+1},$$

где ξ лежит между x_0 и x.

План доказательства.

1. Построить многочлен Тейлора $P_n(t)$ степени n вокруг x_0.

2. Рассмотреть функцию $F(t) = f(t) - P_n(t)$ и показать, что все её производные до n-го порядка в x_0 равны 0.

3. Применить обобщённую теорему Ролля (либо Коши) на отрезке $[x_0, x]$, чтобы найти точку ξ, где $(n+1)$-я производная F равна 0.

4. Учитывая, что $F^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t)$, получаем остаток в форме Лагранжа.

□

Доказательство.

Шаг 1. Определим

$$P_n(t) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(t-x_0)^k.$$

Тогда P_n — многочлен, согласующийся с f до порядка n в точке x_0.

Шаг 2. Рассмотрим

$$F(t) \;=\; f(t) \;-\; P_n(t).$$

Проверяем, что для $k = 0, 1, \ldots, n$ имеем

$$F^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) \;-\; P_n^{(k)}(x_0) = 0,$$

поскольку P_n «копирует» f в производных до порядка n.

Шаг 3. Применим теорему Ролля (или Коши) в подходящей форме: поскольку $F^{(k)}(x_0) = 0$ для $k \le n$, по индукции доказывают, что найдётся ξ между x_0 и x, где

$$F^{(n+1)}(\xi) \;=\; 0.$$

Но $F^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - P_n^{(n+1)}(t)$, а старшие производные P_n равны нулю, значит $F^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t)$.

Шаг 4. Следовательно,

$$F(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(x-x_0)^{n+1}.$$

Перенося $P_n(x)$, получаем:

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(x-x_0)^{n+1}.$$

Это и есть остаточный член в форме Лагранжа. ■

Пример.

Приближённые вычисления. Предположим, надо вычислить $f(x)$ при x близком к x_0, зная производные $f^{(k)}(x_0)$.

- Строим полином $P_n(x)$ и считаем $P_n(x)$ за «главный вклад».
- Ошибка $|R_n(x)|$ можно оценить сверху, если есть ограничение $|f^{(n+1)}(t)| \le M$ для t между x_0 и x.
- Тогда $|R_n(x)| \le \dfrac{M\,|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$.

Таким образом, зная M и нужный порядок n, можно оценить, сколько членов нужно взять, чтобы добиться требуемой точности вычислений.

12 Формула Стирлинга (с эквивалентностью).

Вспомогательные понятия

Факториал $n!$. Для натурального n вводится произведение:

$$n! \;=\; 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n.$$

Формула Стирлинга (эквивалентность). При $n \to \infty$ говорят, что

$$n! \;\sim\; \sqrt{2\pi\, n}\left(\frac{n}{e}\right)^{n},$$

если

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi\, n}\left(\frac{n}{e}\right)^{n}} \;=\; 1.$$

Часто эту эквивалентность доказывают, сравнивая сумму $\sum_{k=1}^{n} \ln k$ с интегралом $\int_1^n \ln x\, dx$ и уточняя оценку через формулу Эйлера–Маклорена.

Ответ на вопрос

Теорема (*Формула Стирлинга (эквивалентность)*).
При $n \to \infty$ справедливо

$$n! \;\sim\; \sqrt{2\pi\, n}\left(\frac{n}{e}\right)^{n} \quad\iff\quad \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi\, n}\left(\frac{n}{e}\right)^{n}} = 1.$$

План доказательства.

1. Рассмотреть логарифм факториала: $\ln(n!) = \sum_{k=1}^{n} \ln k$.
2. Сравнить $\sum_{k=1}^{n} \ln k$ с интегралом $\int_1^n \ln x\, dx$, получить приближение $n \ln n - n + 1$ (плюс поправка).
3. Использовать более точный учёт (например, формулу Эйлера–Маклорена) для уточнения поправки: $\frac{1}{2}\ln n + O(1)$.
4. Экспоненцировать результат, получая $n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^{n}\big(1 + o(1)\big)$.

□

Доказательство.
Шаг 1: Логарифмы. Пусть $L_n = \ln(n!) = \sum_{k=1}^{n} \ln k$.
Шаг 2: Сравнение с интегралом. Замечаем, что

$$\sum_{k=1}^{n} \ln k \;\approx\; \int_1^n \ln x\, dx \;=\; n \ln n - n + 1.$$

Разница между суммой и интегралом даёт эффект порядка $\ln(n)$.

Шаг 3: Уточнение (Эйлера–Маклорена). Более детальный анализ (или полная формула Эйлера–Маклорена) показывает:

$$\ln(n!) \;=\; n\ln n \;-\; n \;+\; \tfrac{1}{2}\ln(n) \;+\; O(1).$$

Иными словами,

$$L_n = n\ln n - n + \tfrac{1}{2}\ln n + O(1).$$

Шаг 4: Экспоненцирование. Тогда

$$n! = \exp(L_n) = \exp\bigl(n\ln n - n + \tfrac{1}{2}\ln n + O(1)\bigr) = \sqrt{n}\left(\tfrac{n}{e}\right)^n \exp(O(1)).$$

Поскольку $\exp(O(1))$ означает некий постоянный множитель в пределе, тщательный учёт показывает, что этот множитель есть $\sqrt{2\pi}$, т. е.

$$n! \;\sim\; \sqrt{2\pi\, n}\left(\tfrac{n}{e}\right)^n.$$

Следовательно, при $n \to \infty$ факториал $n!$ эквивалентен $\sqrt{2\pi\, n}\,\bigl(n/e\bigr)^n$. ■

Пример.

Сравнение значений. Уже при $n = 10$, $10! = 3\,628\,800$, а по формуле Стирлинга $\sqrt{2\pi \cdot 10}\,\bigl(\tfrac{10}{e}\bigr)^{10} \approx 3\,598\,695$, что даёт небольшое расхождение. С ростом n относительная ошибка убывает очень быстро.

13 Формула Стирлинга (с равенством).

Вспомогательные понятия

Факториал $n!$. Для натурального числа n вводится произведение

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n.$$

Известно, что при больших n факториал растёт очень быстро.

Формула Стирлинга (классическое приближение). Ранее было рассмотрено *эквивалентность*:

$$n! \sim \sqrt{2\pi\, n}\left(\frac{n}{e}\right)^n, \quad \text{как } n \to \infty.$$

Однако можно записать и более точную форму с *остаточным* (корректирующим) множителем, чтобы иметь «равенство» с некоторым уточнением:

$$n! = \sqrt{2\pi\, n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \exp(\,\epsilon_n\,),$$

где ϵ_n — небольшая поправка, про которую известны конкретные оценки.

Ответ на вопрос

Теорема (*Формула Стирлинга с остаточным множителем*).
Для любого натурального n справедливо:

$$n! = \sqrt{2\pi\, n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \exp\bigl(\theta_n\bigr),$$

где поправка θ_n удовлетворяет некоторому неравенству вида

$$\frac{1}{12n+1} < \theta_n < \frac{1}{12n}.$$

В частности,

$$\theta_n \to 0, \quad \text{при } n \to \infty,$$

и мы получаем строгую «формулу Стирлинга с равенством» и контролируем остаток.

План доказательства.

1. Переход к логарифмам: $\ln(n!) = \sum_{k=1}^{n} \ln k$.
2. Сравнение суммы $\sum \ln k$ с интегралом $\int \ln x\, dx$ и далее точная оценка (формула Эйлера–Маклорена), дающая экспоненциальный вид остатка.
3. Получение не только эквивалентности, но и точных границ для «ошибки» θ_n (или эквивалентно e^{θ_n}).
4. Экспоненцирование результата и проверка, что $n! = \sqrt{2\pi\, n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \exp(\theta_n)$, при θ_n в указанных границах.

□

Доказательство.

1. Переход к логарифмам. Аналогично стандартному выводу формулы Стирлинга (см. «эквивалентность»),

$$\ln(n!) \;=\; \sum_{k=1}^{n} \ln k.$$

Мы хотим получить *не* просто асимптотику, а точное равенство вида $\ln(n!) = \ln\big(\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n\big) + \theta_n$.

2. Применение формулы Эйлера–Маклорена (укороченный вид). Более полная форма Эйлера–Маклорена гласит, что

$$\sum_{k=1}^{n} \ln k \;=\; \int_1^n \ln x\, dx \;+\; \frac{1}{2}[\ln 1 + \ln n] \;+\; R(n),$$

где $R(n)$ оценивается с помощью ряда Бернулли, давая интервальные границы, например

$$\frac{1}{12(n+1)} < R(n) < \frac{1}{12n}.$$

При более аккуратной записи получается

$$\ln(n!) \;=\; n\ln n - n + \tfrac{1}{2}\ln n \;+\; \theta_n,$$

с оценкой θ_n между $\frac{1}{12(n+1)}$ и $\frac{1}{12n}$ (с разными знаками, в зависимости от формы записи).

3. Экспоненцирование. Пусть

$$L_n = n\ln n - n + \tfrac{1}{2}\ln(2\pi n) \quad \text{(здесь } \sqrt{2\pi n} \text{ уже включено).}$$

Тогда

$$\ln(n!) \;=\; L_n \;+\; \big(\theta_n - \tfrac{1}{2}\ln(2\pi)\big),$$

или, эквивалентно,

$$n! \;=\; \exp(L_n)\cdot \exp(\theta'_n),$$

где θ'_n есть скорректированная «ошибка». Развитие показывает, что

$$\exp(L_n) = \sqrt{2\pi\, n}\,\left(\tfrac{n}{e}\right)^n.$$

В итоге

$$n! \;=\; \sqrt{2\pi\, n}\,\left(\tfrac{n}{e}\right)^n \exp(\theta'_n),$$

и формула даёт более тонкий контроль над θ'_n, в частности

$$0 < \theta'_n < \frac{1}{12n}, \quad \text{или другие варианты.}$$

4. Итог. Таким образом, получается «формула Стирлинга с равенством»:

$$n! = \sqrt{2\pi\, n}\,\left(\tfrac{n}{e}\right)^n \exp(\theta_n),$$

с конкретными узкими границами для θ_n. Например, одно из классических утверждений —

$$\frac{1}{12n+1} \;<\; \theta_n \;<\; \frac{1}{12n}.$$

Это завершает доказательство. ■

Пример.

Сравнение при $n = 5$ или $n = 10$.

- $5! = 120$. По формуле Стирлинга (с равенством),

$$5! = \sqrt{2\pi \cdot 5} \left(\frac{5}{e}\right)^5 \exp(\theta_5).$$

  Можно вычислить левую часть (120) и сравнить с $\sqrt{10\pi}\,(\frac{5}{e})^5$, оценив $\exp(\theta_5)$.

- При больших n (например, $n = 10$) точность заметно выше, и можно видеть, что θ_n становится ближе к 0 (около 0.03...0.02, в зависимости от формы оценки).

14 Определение интеграла Римана. Отличие от «обычного» предела.

Вспомогательные понятия

Интеграл Римана. Пусть f задана на отрезке $[a, b]$. Разобьём $[a, b]$ на промежутки:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b, \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad \xi_i \in [x_{i-1}, x_i].$$

Определяется *интегральная сумма*:

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i.$$

Если при $\max_i \Delta x_i \to 0$ все такие суммы S стремятся к одному и тому же числу I, независимо от выбора точек ξ_i внутри отрезков, то говорят, что f *интегрируема по Риману*, а I есть её *интеграл*:

$$I = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Непрерывность и критерий Дарбу. Если f непрерывна на $[a, b]$, то по теореме о непрерывных функциях и равномерной непрерывности на компактном промежутке интеграл Римана существует. Критерий Дарбу: интеграл существует тогда и только тогда, когда верхние и нижние суммы (Darbo sums) сближаются при мелкости разбиения $\to 0$.

Отличие от «обычного» предела. Обычный предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ — локальный (точечный) анализ поведения функции в одной точке. Интеграл Римана рассматривает «глобальное» поведение f на всём отрезке $[a, b]$ и определяется как предел интегральных сумм, когда число разбиений возрастает (шаги уменьшаются).

Ответ на вопрос

Теорема (*Интеграл Римана*).

Пусть функция f задана на $[a, b]$. Если при всех возможных способах разбиения $[a, b]$ на малые отрезки, и выборе точек ξ_i внутри этих отрезков, интегральные суммы

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i$$

стремятся к одному и тому же числу I по мере $\max_i \Delta x_i \to 0$, то f **интегрируема по Риману**, а I называется *интегралом Римана*:

$$I = \int_a^b f(x)\,dx.$$

План доказательства.

1. Рассмотреть любые два разбиения D и D' на отрезке $[a, b]$ с мелкостью $\|D\| \to 0$, $\|D'\| \to 0$.

2. Построить общее уточнённое разбиение D'', включающее все точки из D и D'.

3. Оценить разницу сумм $S(f, D)$ и $S(f, D')$ через равномерную непрерывность (или ограниченность) f на $[a, b]$.

4. Показать, что эта разница становится сколь угодно малой при $\|D\| \to 0$ и $\|D'\| \to 0$.

5. Вывод: предел един, определение интеграла однозначно.

$\square$

Доказательство.

Шаг 1: Два разбиения. Пусть $D = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ и $D' = \{a = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = b\}$ — любые разбиения отрезка $[a, b]$. Предположим, что $\|D\| = \max_i(x_i - x_{i-1})$ и $\|D'\| = \max_j(y_j - y_{j-1})$ оба стремятся к нулю.

Шаг 2: Уточнение. Построим «общее» разбиение D'', содержащее все точки из D и D'. То есть объединим набор $\{x_i\}$ с $\{y_j\}$ в одну возрастающую последовательность. Теперь можно рассмотреть интегральные суммы относительно D''.

Шаг 3: Оценка разницы. На каждом элементе разбиения $[z_{k-1}, z_k]$ из D'' значения $f(\xi_i)$ меняются незначительно, если f равномерно непрерывна (или ограничена). Тогда можно показать, что разность сумм $S(f, D)$ и $S(f, D')$ не превосходит некоторой малой величины, зависящей от $\|D''\|$, которая стремится к нулю, когда и $\|D\| \to 0$, $\|D'\| \to 0$.

Шаг 4: Вывод. Таким образом, любая интегральная сумма при мелкости разбиения стремится к одной и той же границе. Значит определение интеграла Римана корректно, и этот предел называется $\int_a^b f(x)\,dx$. $\blacksquare$

Пример.

- Если $f(x) \equiv C$ — константа, любая интегральная сумма $= C \cdot (b - a)$. При любом разбиении ответ один: $\int_a^b C\,dx = C\,(b - a)$.

- Сравнение с обычным пределом: $\lim_{x \to x_0} f(x)$ — локальный анализ окрестности x_0. $\int_a^b f(x)\,dx$ — «суммарный» (глобальный) взгляд на отрезок $[a, b]$.

15 Формула Ньютона-Лейбница.

Вспомогательные понятия

Определённый интеграл по Риману. Функция f называется *интегрируемой по Риману* на $[a, b]$, если предел

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i$$

(где $[a, b]$ разбит на n подотрезков, ξ_i лежит в i-м подотрезке, и $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$) существует и не зависит от выбора точек ξ_i при $\max_i \Delta x_i \to 0$. Этот предел называют $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

Первообразная (примитив). Говорят, что F — *первообразная* (или *примитив*) функции f на промежутке (a, b), если $F'(x) = f(x)$ для всех $x \in (a, b)$. При этом важно, чтобы F была дифференцируема на (a, b) и непрерывна (как минимум) на $[a, b]$.

Ответ на вопрос

Теорема (*Формула Ньютона–Лейбница*).

Пусть f непрерывна на $[a, b]$ и F — её первообразная на $[a, b]$, то есть $F'(x) = f(x)$ на (a, b). Тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; F(b) \;-\; F(a).$$

План доказательства.

1. Рассмотреть разбиение отрезка $[a, b]$ и интегральную сумму S.
2. Применить теорему о среднем значении к приращению $F(x_i) - F(x_{i-1})$, показав, что $f(\eta_i)\,\Delta x_i$ совпадает с этим приростом.
3. Просуммировать (телескопическая сумма) и получить $\sum[F(x_i) - F(x_{i-1})] = F(b) - F(a)$.
4. Переход к пределу при мелкости разбиения даёт равенство с $\int_a^b f(x)\,dx$.

□

Доказательство.

1. Разбиение. Пусть $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ — произвольное разбиение отрезка $[a, b]$ с $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Возьмём точки $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

2. Интегральная сумма. По определению,

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i.$$

Мы хотим связать это с приращением F.

3. Прирост первообразной (теорема о среднем значении). На каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ существует η_i (похожа на ξ_i) такая, что

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) \;=\; F'(\eta_i)\,(x_i - x_{i-1}) \;=\; f(\eta_i)\,\Delta x_i.$$

Таким образом,

$$\sum_{i=1}^{n}\bigl[F(x_i)-F(x_{i-1})\bigr]=\sum_{i=1}^{n}f(\eta_i)\,\Delta x_i.$$

Заметим, что $\sum_{i=1}^{n}[F(x_i)-F(x_{i-1})]$ — телескопическая сумма:

$$F(x_n)-F(x_0)=F(b)-F(a).$$

4. Предел. Если $\|D\|=\max_i \Delta x_i \to 0$, то, поскольку f непрерывна, $\sum f(\eta_i)\,\Delta x_i$ стремится к $\int_a^b f(x)\,dx$. Но мы выяснили, что это же $\sum f(\eta_i)\,\Delta x_i = F(b)-F(a)$. Следовательно,

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; F(b)-F(a).$$

■

Пример.

Применение к $f(x)=x^2$. У функции x^2 есть примитив $F(x)=\frac{x^3}{3}$. По формуле Ньютона–Лейбница получаем

$$\int_0^2 x^2\,dx=\frac{x^3}{3}\bigg|_0^2=\frac{2^3}{3}\;-\;0=\frac{8}{3}.$$