Потом тут будет титульный лист

Сивков Вячеслав

2025

Содержание

1 Введение

Рассмотрим задачу проверки гипотезы о равенстве двух распределений

$$H_0 : F_1 = F_2 \tag{1}$$

против альтернативы

$$H_1 : F_1 \neq F_2 \tag{2}$$

в случае двух независимых выборок $X = (X_1, \dots, X_n)$ и $Y = (Y_1, \dots, Y_m)$ с функциями распределения F_1 и F_2 соответственно.

Один из важных частных случаев этой задачи выглядит следующим образом: пусть размеры выборок идентичны и равны n, пусть $h_1, h_2 \in \mathbb{R}$, $h_1, h_2 \geqslant 0$, пусть $F(x)$ некая функция распределения. Положим

$$F_1(x) = F(x) \tag{3}$$

$$F_2(x) = F(x(1 + \frac{h_2}{\sqrt{n}}) + \frac{h_1}{\sqrt{n}}). \tag{4}$$

Для проверки вышеуказанной гипотезы существует множество тестов. Одними из самых известных являются: тест Вилкоксона–Манна–Уитни, тест Андерсона–Дарлинга, энергетический тест, тест Колмогорова–Смирнова и тест Крамера–фон Мизеса. В работе [1] была получена формула для асимптотической мощности энергетического теста при неких ограничениях.

В данной работе с помощью статистического моделирования была изучена скорость сходимости эмпирических мощностей энергетического теста к асимптотической с ростом размера выборки. Также было проведено сравнение эмпирических мощностей пяти тестов для различных $F(x), h_1, h_2, n$.

2 Методы проверки гипотез

Далее описаны статистики для соответствующих тестов. В каждом из тестов мы отвергаем H_0, если значение статистики на выборках X, Y **больше** чем заранее заданное критическое значение.

2.1 Энергетический тест (ET)

Пусть $X = (X_1, \dots, X_n)$ и $Y = (Y_1, \dots, Y_m)$ независимые выборки. Статистика Φ_{nm} определяется следующим образом:

$$\begin{gathered}\Phi_{nm} = \Phi_{AB} - \Phi_A - \Phi_B, \quad \Phi_A = \frac{1}{n^2} \sum_{1 \le i \le j \le n} g(|X_i - X_j|), \\ \Phi_B = \frac{1}{m^2} \sum_{1 \le i \le j \le n} g(|Y_i - Y_j|), \quad \Phi_{AB} = \frac{1}{nm} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} g(|X_i - Y_j|),\end{gathered} \tag{5}$$

где $g(x)$ - непрерывная, монотонно возрастающая функция.

Согласно [1, Теорема 1], в условиях теоремы, асимптотическая мощность критерия $n\Phi_{nn}(X,Y)$ с уровнем значимости α равна

$$1-\Phi\left(z_{1-\frac{\alpha}{2}}-\frac{b}{a}\right)+\Phi\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}}-\frac{b}{a}\right), \tag{6}$$

где $\Phi(t)$ – функция стандартного нормального распределения, $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ – его $1-\frac{\alpha}{2}$ квантиль. А константы a,b вычисляются, как было определено в [1]. Всюду далее под статистикой для ET будет пониматься $n\Phi_{nn}$.

2.2 Тест Андерсона–Дарлинга для нескольких выборок (AD)

Пусть $k \in \mathbb{N}$ – количество выборок. Пусть n_i – размер i-й выборки, $i \in \overline{1,\ldots,k}$. Пусть $N = n_1+\ldots+n_k$. Обозначим за M_{ij} количество элементов i-й выборки, которые не больше чем $Z_{(j)}$, где $(Z_{(1)},\ldots,Z_{(N)})$ - вариационный ряд, построенный по всем имеющимся k выборкам. Тогда статистика будет выглядеть следующим образом [2]:

$$A^2_{kN}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{N-1}\frac{(NM_{ij}-jn_i)^2}{j(N-j)}. \tag{7}$$

2.3 Тест Колмогорова–Смирнова (KS)

Пусть $X=(X_1,\ldots,X_n)$ и $Y=(Y_1,\ldots,Y_m)$ независимые выборки. Пусть $N=n+m$. Пусть $(Z_{(1)},\ldots,Z_{(N)})$ - вариационный ряд, построенный по выборкам X и Y. Обозначим за $\hat{F}$ и $\hat{G}$ эмпирические функции распределения построенные по выборкам X и Y. Тогда статистика будет выглядеть так [3]:

$$KS=\max_{1\le i\le N}|\hat{F}(Z_{(i)})-\hat{G}(Z_{(i)})| \tag{8}$$

2.4 Тест Крамера-фон Мизеса (CM)

Пусть $X=(X_1,\ldots,X_n)$ и $Y=(Y_1,\ldots,Y_m)$ независимые выборки. Пусть $N=n+m$. Пусть $(Z_{(1)},\ldots,Z_{(N)})$ - вариационный ряд, построенный по выборкам X и Y. Обозначим за $\hat{F}$ и $\hat{G}$ эмпирические функции распределения построенные по выборкам X и Y. Тогда статистика будет выглядеть следующим образом [3]:

$$CM=\frac{mn}{N^2}\sum_{i=1}^{N}(\hat{F}(Z_{(i)})-\hat{G}(Z_{(i)}))^2 \tag{9}$$

2.5 Тест Вилкоксона–Манна–Уитни (WMW)

Пусть $X=(X_1,\ldots,X_n)$ и $Y=(Y_1,\ldots,Y_m)$ независимые выборки. Статистика будет выглядеть следующим образом [4]:

$$U_{nm}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\chi(X_i,Y_j), \tag{10}$$

где

$$\chi(X_i,Y_j)=\begin{cases}1, & X_i\ge Y_j\\ 0, & X_i<Y_j\end{cases} \tag{11}$$

3 Моделирование

О том, как проводилось вычисление эмпирических мощностей с помощью программы на C++.

Выбираем некий тест $T(X,Y)$. Фиксируем некую функцию распределения $F(x)$. Фиксируем $n \in \mathbb{N}$ – размер выборок. Фиксируем $h_1, h_2 \in \mathbb{R}$, $h_1, h_2 \geqslant 0$ – параметры отличия по сдвигу и масштабу соответственно. F_1 и F_2 определяем как было указано в (3) и (4) соответственно. Фиксируем $\alpha \in (0,1)$ – уровень значимости. Выбираем $N \in \mathbb{N}$ и $M \in \mathbb{N}$.

Сначала приближённо вычисляем критическое значение c_α для выбранного ранее теста так, чтобы он имел уровень значимости α следующим образом:

1. Генерируем выборки $X^{(k)}$ и $Y^{(k)}$ размера n, из F_1, где $k \in \overline{1,\ldots,M}$.
2. Вычисляем $T(X^{(k)}, Y^{(k)})$ для всех $k \in \overline{1,\ldots,M}$
3. Получаем выборку из распределения $T(X,Y)$ размера M, по ней строим эмпирическое распределение $\hat{T}(X,Y)$.
4. В качестве c_α берём $1-\alpha$ квантиль $\hat{T}(X,Y)$.

Далее, для вычисления эмпирической мощности делаем следующее:

1. Генерируем $X^{(i)}, Y^{(i)}$ – выборки размера n из F_1 и F_2 соответственно, для $i \in \overline{1,\ldots,N}$.
2. Считаем количество отвержений H_0 как $cnt = \#\{(X^{(i)}, Y^{(i)}) \mid T(X^{(i)}, Y^{(i)}) \geqslant c_\alpha,\ i \in \overline{1,\ldots,N}\}$.
3. В качестве эмпирической мощности берём $\frac{cnt}{N}$.

4 Результаты

При вычислении значений в таблицах 2–7 и на рисунках 1–8 для энергетического теста $g(x) = \ln(1 + x^2)$. А интегралы $J_1, J_2, J_3, J_1^*(h_1)$ и $J_2^*(h_2)$ имеют тот же смысл, как и в [1].

Пример 1
Пусть $F(x)$ - ф-я стандартного нормального распределения. Пусть $\alpha = 0.05$, $N = 5000$, $M = 5000$. С помощью численного интегрирования были получены значения:

$$J_1 = 0.810113 \quad J_2 = 1.154885 \quad J_3 = 0.763368 \quad \frac{J_1^*(h_1)}{{h_1}^2} = 0.227179 \quad \frac{J_2^*(h_2)}{{h_2}^2} = 0.147563$$

В таблицах 1 и 2 представлены значения асимптотической мощности, вычисленные по формуле (6), и эмпирические мощности, полученные для $n = 100, 400, 900, 1600, 2000, 3000$. Для вычисления значений в таблице 1 было взято значение $h_2 = 0$, для вычисления значений в таблице 2 было взято значение $h_1 = 0$.

Таблица 1: Значения эмпирической (EP) и асимптотической (AP) мощности ($h_2 = 0$)

	h1=1.0	h1=2.0	h1=3.0	h1=4.0	h1=5.0	h1=6.0	h1=7.0	h1=8.0	h1=9.0	h1=10.0
EP (n=100)	0.095	0.264	0.514	0.763	0.912	0.982	0.997	0.999	1	1
EP (n=400)	0.093	0.259	0.506	0.761	0.915	0.983	0.998	1.000	1	1
EP (n=900)	0.099	0.255	0.509	0.754	0.904	0.978	0.997	1.000	1	1
EP (n=1600)	0.086	0.245	0.497	0.751	0.919	0.983	0.998	0.999	1	1
EP (n=2000)	0.103	0.264	0.519	0.771	0.915	0.981	0.997	1.000	1	1
EP (n=3000)	0.111	0.275	0.529	0.767	0.917	0.983	0.997	1.000	1	1
AP	0.100	0.257	0.499	0.742	0.904	0.975	0.995	0.999	1	1

Таблица 2: Значения эмпирической (EP) и асимптотической (AP) мощности ($h_1 = 0$)

	h2=0.5	h2=1.0	h2=1.5	h2=2.0	h2=2.5	h2=3.0	h2=3.5	h2=4.0	h2=4.5	h2=5.0
EP (n=100)	0.046	0.049	0.070	0.087	0.134	0.171	0.234	0.315	0.408	0.488
EP (n=400)	0.049	0.070	0.093	0.134	0.193	0.283	0.392	0.511	0.618	0.742
EP (n=900)	0.056	0.072	0.098	0.152	0.217	0.334	0.447	0.596	0.705	0.822
EP (n=1600)	0.056	0.075	0.095	0.141	0.237	0.323	0.462	0.601	0.735	0.844
EP (n=2000)	0.054	0.068	0.103	0.147	0.220	0.335	0.459	0.610	0.738	0.840
EP (n=3000)	0.045	0.057	0.082	0.137	0.213	0.311	0.446	0.602	0.726	0.834
AP	0.058	0.082	0.124	0.183	0.260	0.351	0.453	0.557	0.658	0.749

Пример 2
Пусть $F(x)$ - ф-я стандартного распределения Коши.
Пусть $\alpha = 0.05$, $N = 5000$, $M = 5000$. С помощью численного интегрирования были получены значения:

$$J_1 = 2.197224 \quad J_2 = 9.577512 \quad J_3 = 6.881056 \quad \frac{J_1^*(h_1)}{{h_1}^2} = 0.111110 \quad \frac{J_2^*(h_2)}{{h_2}^2} = 0.111105$$

В таблицах 3 и 4 представлены значения асимптотической мощности, вычисленные по формуле (6), и эмпирические мощности, полученные для выборок размера $n = 100$, 400, 900, 1600, 2000, 3000. Для вычисления значений в таблице 3 было взято значение $h_2 = 0$, для вычисления значений в таблице 4 было взято значение $h_1 = 0$.

Таблица 3: Значения эмпирической (EP) и асимптотической (AP) мощности ($h_2 = 0$)

	h1=1.0	h1=2.0	h1=3.0	h1=4.0	h1=5.0	h1=6.0	h1=7.0	h1=8.0	h1=9.0	h1=10.0
EP (n=100)	0.067	0.111	0.204	0.343	0.516	0.678	0.814	0.907	0.962	0.986
EP (n=400)	0.069	0.128	0.212	0.352	0.523	0.683	0.827	0.919	0.965	0.990
EP (n=900)	0.065	0.115	0.207	0.358	0.514	0.684	0.817	0.920	0.967	0.989
EP (n=1600)	0.080	0.116	0.229	0.362	0.530	0.700	0.835	0.930	0.967	0.992
EP (n=2000)	0.061	0.105	0.203	0.338	0.502	0.677	0.821	0.907	0.968	0.990
EP (n=3000)	0.054	0.106	0.190	0.312	0.499	0.659	0.813	0.913	0.962	0.990
AP	0.066	0.116	0.201	0.319	0.461	0.608	0.741	0.846	0.918	0.961

Таблица 4: Значения эмпирической (EP) и асимптотической (AP) мощности ($h_1 = 0$)

	h2=1.0	h2=2.0	h2=3.0	h2=4.0	h2=5.0	h2=6.0	h2=7.0	h2=8.0	h2=9.0	h2=10.0
EP (n=100)	0.060	0.085	0.132	0.190	0.269	0.329	0.420	0.494	0.574	0.653
EP (n=400)	0.063	0.109	0.167	0.257	0.370	0.509	0.624	0.717	0.829	0.887
EP (n=900)	0.067	0.107	0.190	0.292	0.421	0.552	0.683	0.805	0.881	0.932
EP (n=1600)	0.058	0.110	0.179	0.295	0.431	0.586	0.720	0.833	0.902	0.954
EP (n=2000)	0.063	0.112	0.187	0.310	0.445	0.586	0.731	0.834	0.914	0.958
EP (n=3000)	0.064	0.114	0.197	0.309	0.470	0.617	0.756	0.852	0.926	0.967
AP	0.066	0.115	0.201	0.319	0.461	0.608	0.741	0.846	0.918	0.961

Далее, в таблицах 5 - 8 представлены эмпирические мощности 5 тестов. На рис. 1 - рис. 4 представлены зависимости эмпирических мощностей от различий по масштабу/сдвигу, и на рис. 5 - рис. 8 представлены зависимости эмпирических мощностей от размера выборки.

Таблица 5: Стандартное нормальное распределение (h2=0)

test	sample size	h1=1.0	h1=2.0	h1=3.0	h1=4.0	h1=5.0
	n=100	0.1	0.27	0.53	0.78	0.91
AD	n=400	0.11	0.28	0.55	0.78	0.93
	n=900	0.11	0.27	0.54	0.79	0.93
	n=100	0.1	0.27	0.51	0.76	0.91
CM	n=400	0.11	0.26	0.53	0.76	0.92
	n=900	0.1	0.26	0.51	0.75	0.91
	n=100	0.1	0.26	0.49	0.76	0.92
ET	n=400	0.1	0.26	0.51	0.77	0.92
	n=900	0.12	0.29	0.52	0.76	0.92
	n=100	0.09	0.24	0.46	0.7	0.87
KS	n=400	0.1	0.24	0.45	0.7	0.88
	n=900	0.09	0.23	0.46	0.69	0.88
	n=100	0.17	0.38	0.67	0.86	0.96
WMW	n=400	0.19	0.42	0.68	0.88	0.97
	n=900	0.16	0.38	0.66	0.85	0.96

Таблица 6: Стандартное нормальное распределение (h1=0)

test	sample size	h2=1.0	h2=3.0	h2=5.0	h2=7.0	h2=9.0
	n=100	0.07	0.23	0.61	0.9	0.98
AD	n=400	0.07	0.28	0.75	0.98	1
	n=900	0.06	0.28	0.8	0.99	1
	n=100	0.05	0.11	0.3	0.62	0.84
CM	n=400	0.05	0.14	0.42	0.81	0.97
	n=900	0.06	0.15	0.49	0.88	0.99
	n=100	0.06	0.21	0.52	0.82	0.95
ET	n=400	0.07	0.27	0.73	0.97	1
	n=900	0.06	0.28	0.79	0.98	1
	n=100	0.06	0.13	0.29	0.54	0.76
KS	n=400	0.06	0.15	0.36	0.71	0.92
	n=900	0.06	0.17	0.43	0.79	0.96
	n=100	0.06	0.05	0.06	0.05	0.06
WMW	n=400	0.06	0.06	0.05	0.06	0.06
	n=900	0.05	0.06	0.05	0.05	0.05

Таблица 7: Стандартное распределение Коши (h2=0)

test	sample size	h1=1.0	h1=3.0	h1=5.0	h1=7.0	h1=9.0
	n=100	0.06	0.21	0.51	0.81	0.94
AD	n=400	0.07	0.21	0.5	0.8	0.95
	n=900	0.07	0.22	0.54	0.82	0.96
	n=100	0.06	0.24	0.55	0.82	0.96
CM	n=400	0.07	0.24	0.55	0.85	0.97
	n=900	0.07	0.24	0.57	0.85	0.97
	n=100	0.07	0.2	0.51	0.82	0.96
ET	n=400	0.07	0.21	0.5	0.82	0.97
	n=900	0.06	0.21	0.51	0.83	0.97
	n=100	0.07	0.25	0.57	0.85	0.97
KS	n=400	0.06	0.26	0.59	0.87	0.98
	n=900	0.08	0.25	0.6	0.87	0.98
	n=100	0.1	0.3	0.61	0.84	0.95
WMW	n=400	0.1	0.31	0.61	0.85	0.96
	n=900	0.11	0.32	0.62	0.86	0.97

Таблица 8: Стандартное распределение Коши (h1=0)

test	sample size	h2=1.0	h2=3.0	h2=5.0	h2=7.0	h2=9.0
	n=100	0.05	0.09	0.17	0.3	0.47
AD	n=400	0.06	0.1	0.21	0.42	0.65
	n=900	0.05	0.1	0.23	0.45	0.71
	n=100	0.05	0.07	0.12	0.21	0.33
CM	n=400	0.05	0.08	0.16	0.32	0.52
	n=900	0.04	0.08	0.16	0.34	0.6
	n=100	0.05	0.13	0.27	0.43	0.6
ET	n=400	0.06	0.16	0.36	0.62	0.82
	n=900	0.06	0.17	0.4	0.69	0.88
	n=100	0.06	0.1	0.18	0.28	0.39
KS	n=400	0.06	0.11	0.2	0.34	0.54
	n=900	0.06	0.1	0.21	0.4	0.61
	n=100	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05
WMW	n=400	0.04	0.05	0.04	0.05	0.04
	n=900	0.05	0.05	0.06	0.05	0.06

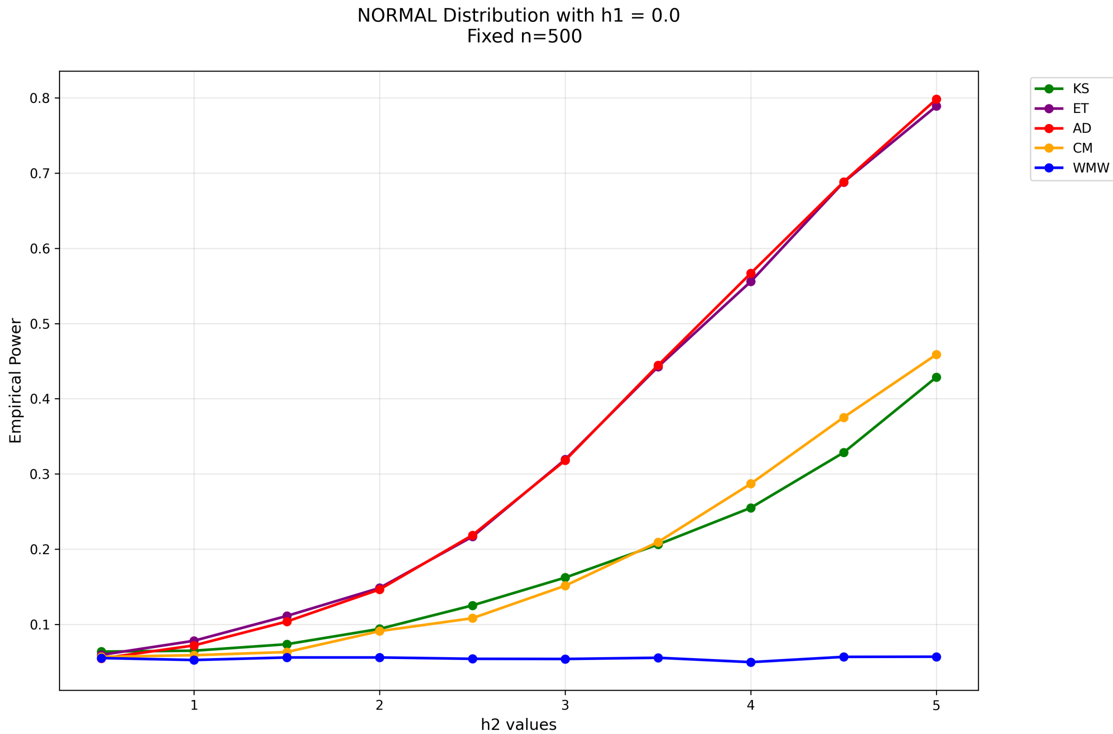

Рис. 1: Зависимость эмпирических мощностей от различия по масштабу, в случае стандартных нормальных распределений с одинаковым сдвигом.

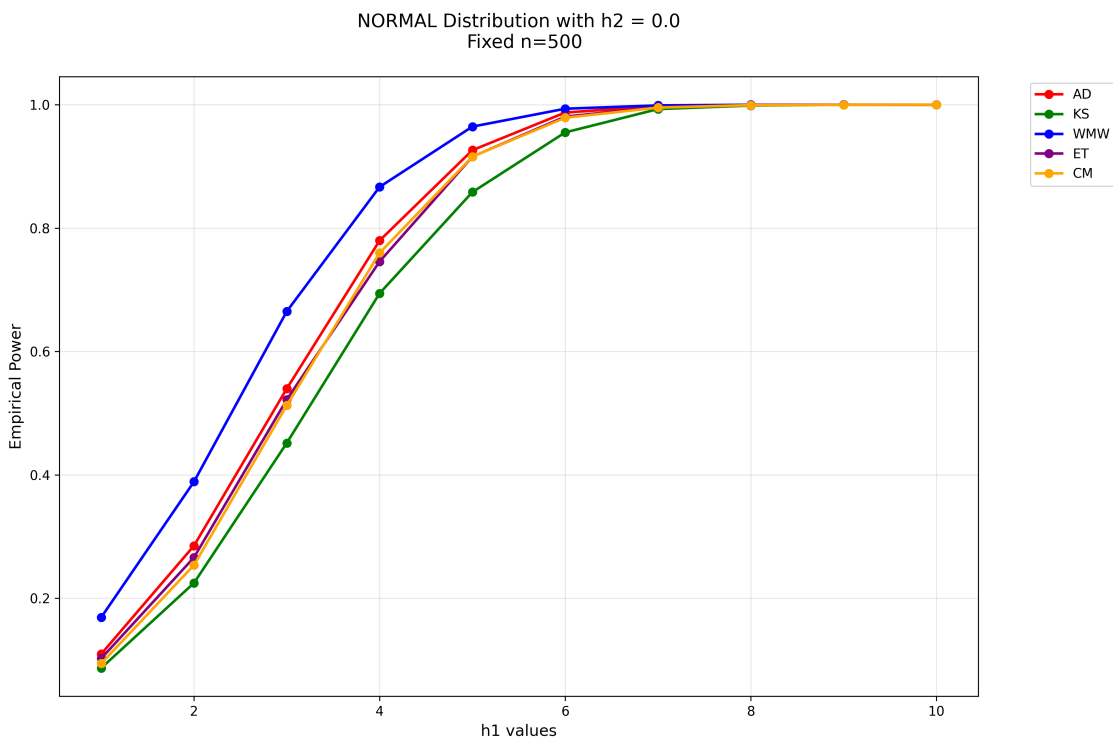

Рис. 2: Зависимость эмпирических мощностей от различия по сдвигу, в случае стандартных нормальных распределений с одинаковым масштабом.

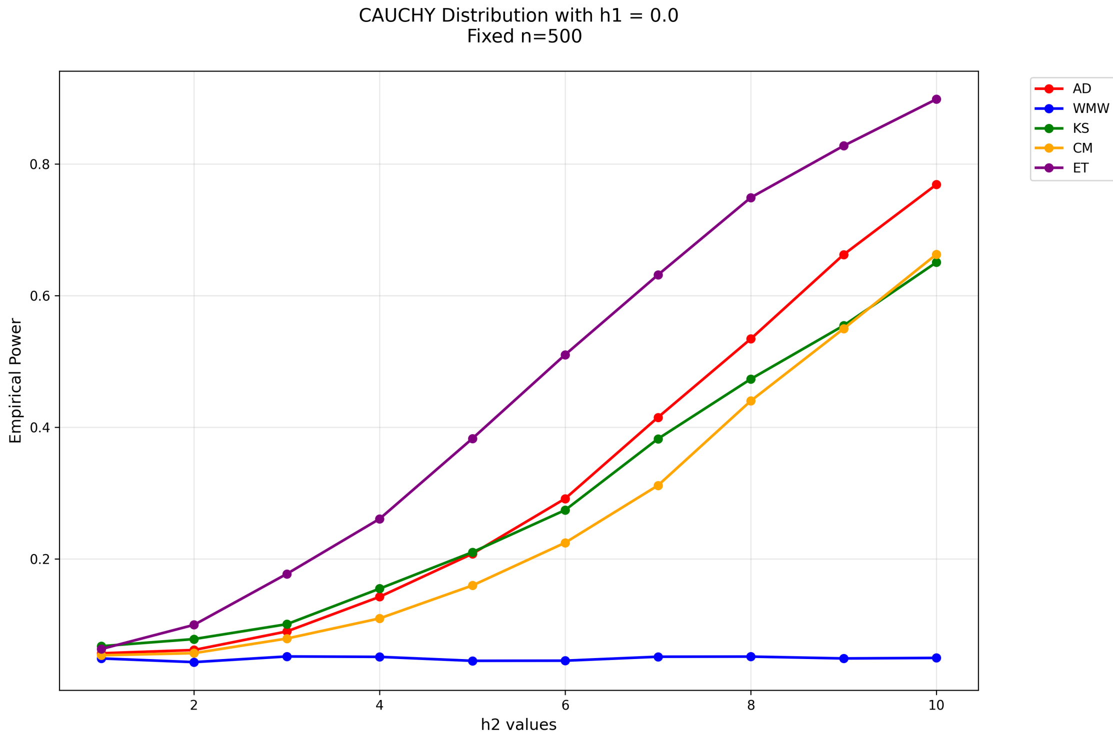

Рис. 3: Зависимость эмпирических мощностей от различия по масштабу, в случае стандартных распределений Коши с одинаковым сдвигом.

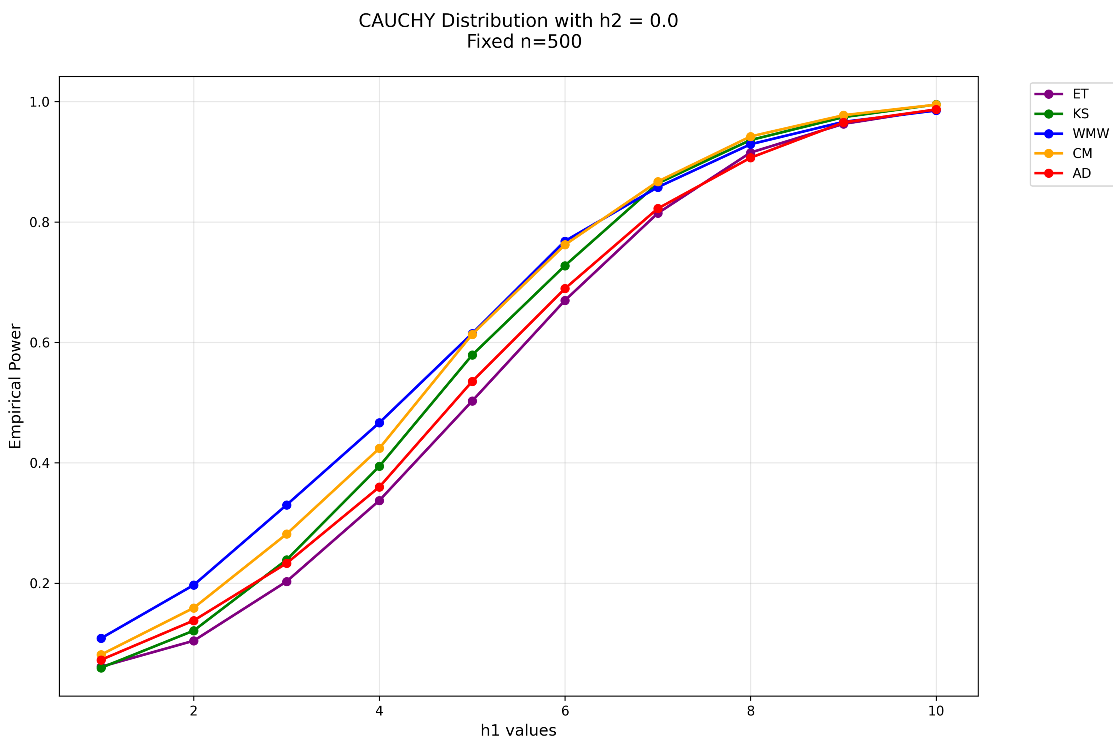

Рис. 4: Зависимость эмпирических мощностей от различия по сдвигу, в случае стандартных распределений Коши с одинаковым масштабом.

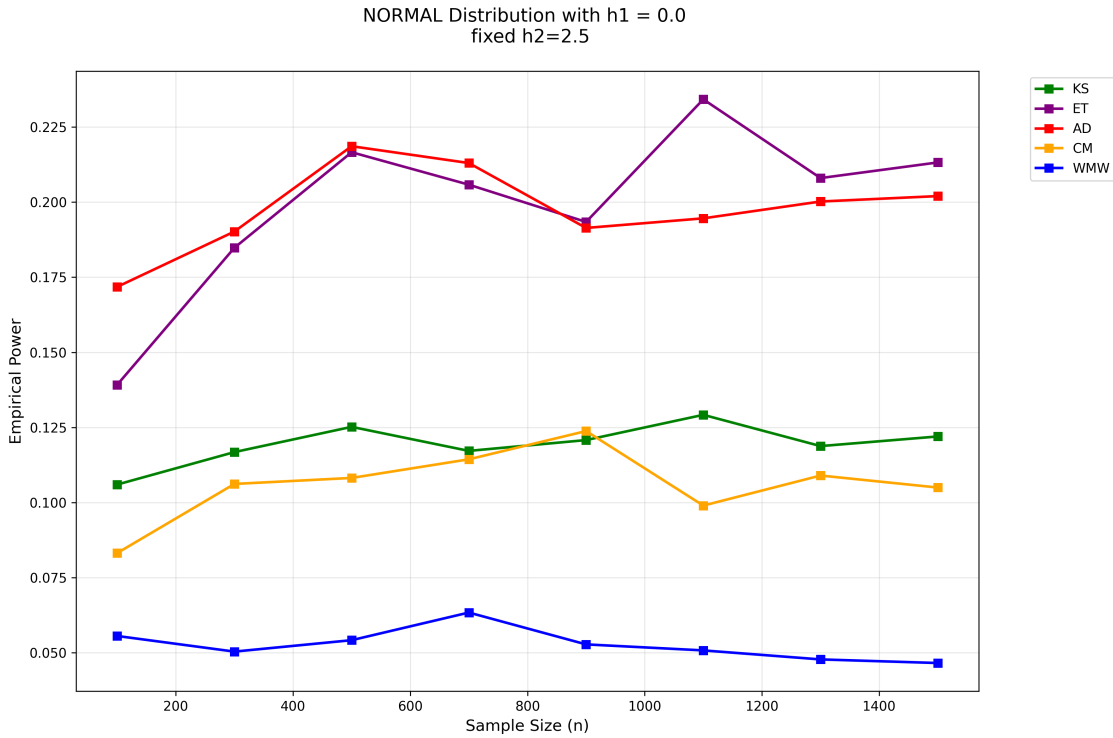

Рис. 5: Зависимость эмпирических мощностей от размера выборки в случае стандартных нормальных распределений, отличающихся масштабом.

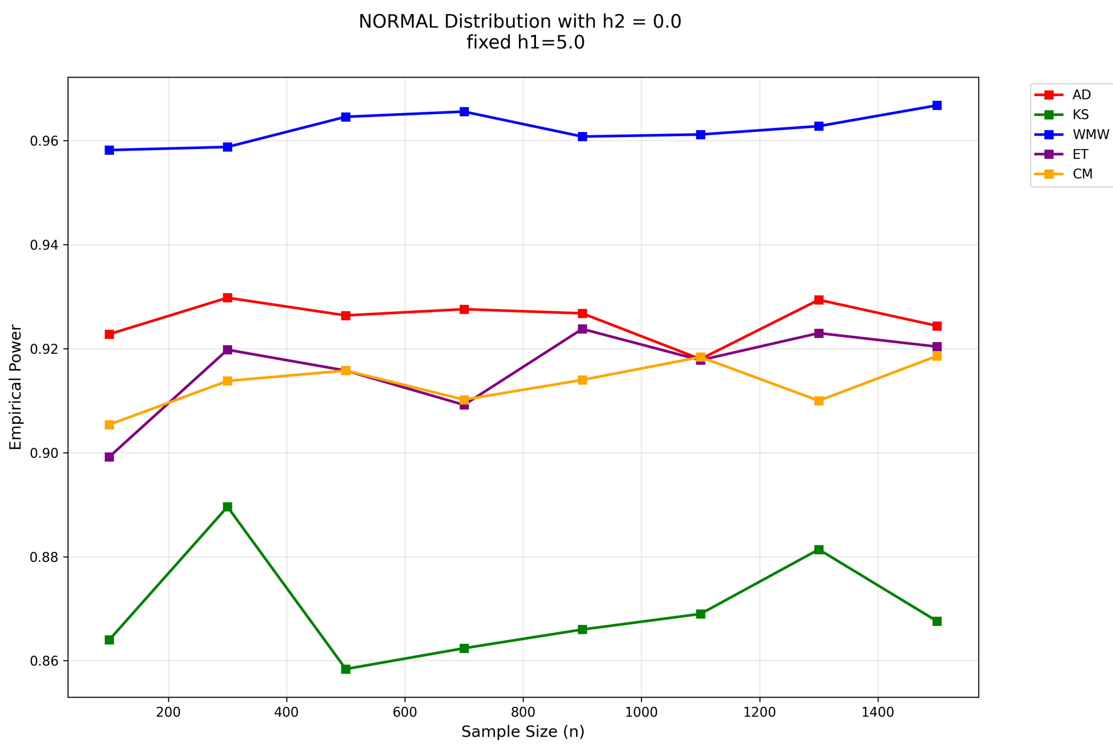

Рис. 6: Зависимость эмпирических мощностей от размера выборки в случае стандартных нормальных распределений, отличающихся сдвигом.

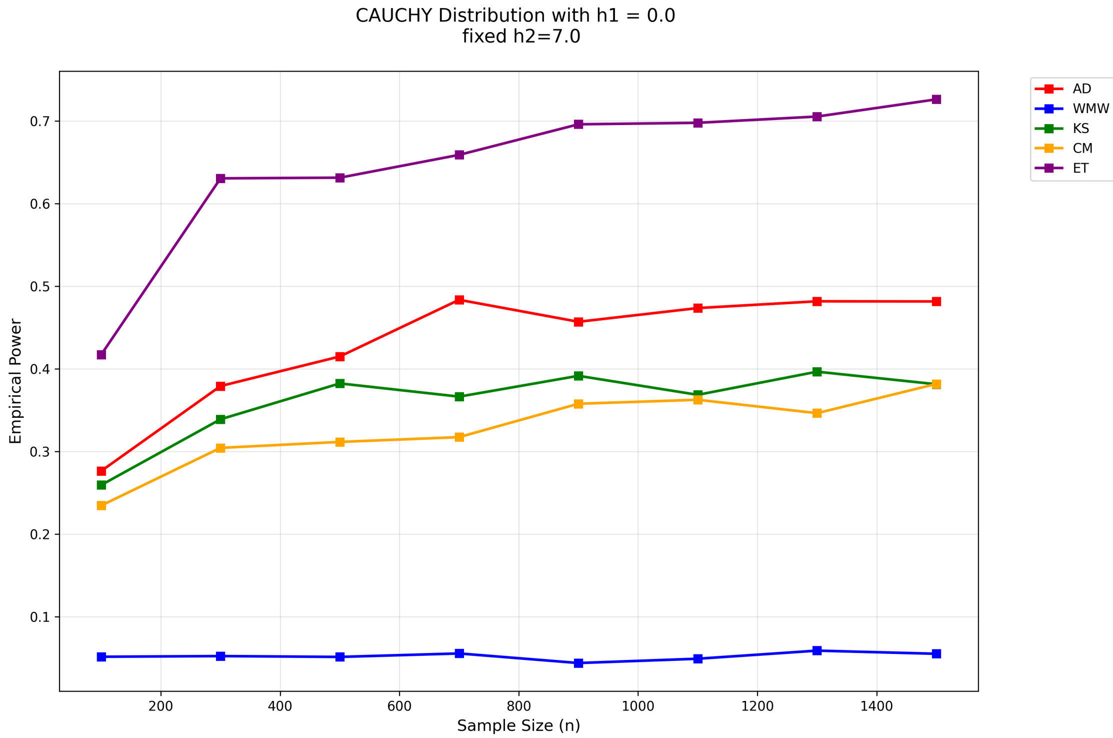

Рис. 7: Зависимость эмпирических мощностей от размера выборки в случае стандартных распределений Коши, отличающихся масштабом.

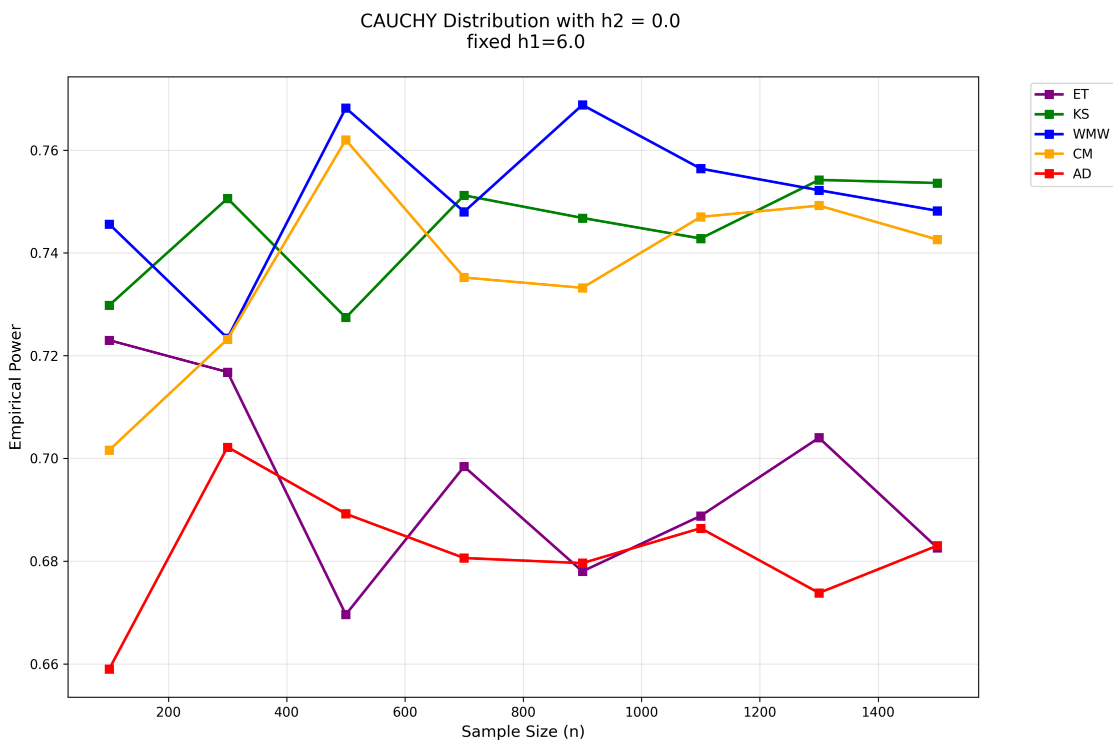

Рис. 8: Зависимость эмпирических мощностей от размера выборки в случае стандартных распределений Коши, отличающихся сдвигом.

Далее, в таблицах 10–11, ET_1 обозначает энергетический тест с $g_1(x) = \ln(1 + x^2)$, а ET_2 обозначает энергетический тест с $g_2(x) = |x|$

Таблица 9: Стандартное нормальное распределение (h2=0)

test	sample size	h1=1.0	h1=1.5	h1=2.0	h1=2.5	h1=3.0	h1=3.5	h1=4.0	h1=4.5	h1=5.0
	n=100	0.1	0.18	0.28	0.39	0.53	0.66	0.76	0.86	0.91
ET_1	n=400	0.1	0.16	0.27	0.37	0.5	0.65	0.76	0.85	0.92
	n=900	0.1	0.15	0.26	0.37	0.51	0.64	0.76	0.85	0.92
	n=100	0.12	0.18	0.27	0.41	0.53	0.67	0.79	0.87	0.93
ET_2	n=400	0.11	0.18	0.27	0.41	0.56	0.68	0.77	0.87	0.94
	n=900	0.1	0.17	0.27	0.4	0.54	0.66	0.79	0.87	0.93

Таблица 10: Стандартное нормальное распределение (h1=0)

test	sample size	h2=1.0	h2=1.5	h2=2.0	h2=2.5	h2=3.0	h2=3.5	h2=4.0	h2=4.5	h2=5.0
	n=100	0.05	0.07	0.09	0.13	0.18	0.25	0.33	0.42	0.49
ET_1	n=400	0.06	0.09	0.13	0.2	0.27	0.38	0.51	0.62	0.74
	n=900	0.07	0.1	0.16	0.21	0.34	0.46	0.59	0.71	0.82
	n=100	0.05	0.07	0.08	0.11	0.15	0.21	0.27	0.34	0.42
ET_2	n=400	0.05	0.07	0.09	0.14	0.2	0.28	0.38	0.49	0.62
	n=900	0.06	0.08	0.11	0.16	0.23	0.33	0.45	0.57	0.7

Таблица 11: Стандартное распределение Коши (h2=0)

test	sample size	h1=1.0	h1=2.0	h1=3.0	h1=4.0	h1=5.0	h1=6.0	h1=7.0	h1=8.0	h1=9.0
	n=100	0.08	0.11	0.21	0.35	0.52	0.69	0.83	0.92	0.96
ET_1	n=400	0.06	0.11	0.21	0.34	0.52	0.69	0.82	0.91	0.97
	n=900	0.07	0.12	0.22	0.36	0.53	0.71	0.83	0.92	0.97
	n=100	0.06	0.07	0.07	0.07	0.08	0.09	0.11	0.14	0.19
ET_2	n=400	0.05	0.05	0.05	0.06	0.06	0.07	0.08	0.1	0.14
	n=900	0.04	0.05	0.05	0.05	0.06	0.07	0.07	0.09	0.11

Таблица 12: Стандартное распределение Коши (h1=0)

test	sample size	h2=1.0	h2=2.0	h2=3.0	h2=4.0	h2=5.0	h2=6.0	h2=7.0	h2=8.0	h2=9.0
ET_1	n=100	0.05	0.09	0.12	0.18	0.26	0.34	0.42	0.48	0.58
	n=400	0.06	0.1	0.16	0.25	0.38	0.49	0.62	0.73	0.82
	n=900	0.06	0.1	0.17	0.29	0.42	0.54	0.69	0.79	0.88
ET_2	n=100	0.04	0.04	0.05	0.05	0.04	0.04	0.05	0.05	0.04
	n=400	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.06	0.07
	n=900	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.06	0.06	0.06	0.07

5 Анализ результатов

Как нетрудно заметить, при конфигурациях, соответствующих таблицам 1 и 4, эмпирические мощности довольно быстро сходятся к асимптотическим. Но, например, в таблице 3 видно, что сходимость уже не такая быстрая при $h_1 \geq 4$.

В случае стандартных нормальных распределений, отличающихся масштабом, (см. таблицу 6) самым мощным оказался энергетический тест. Стоит отметить, что ему не сильно уступает тест Андерсона–Дарлинга. А наименее мощным оказался тест Вилкоксона.

В случае стандартных нормальных распределений, отличающихся сдвигом, (см. таблицу 5) самым мощным оказался тест Вилкоксона. А наименее мощным показал себя тест Колмогорова–Смирнова.

В случае стандартных распределений Коши, отличающихся масштабом, (см. таблицу 8) наиболее мощным оказался энергетический тест. В этот раз тест Андерсона–Дарлинга уже сильно уступает ему. И наименее мощным снова оказался тест Вилкоксона.

В случае стандартных распределений Коши, отличающихся сдвигом,(см. таблицу 7) при $h_1 \leq 5$ наиболее мощным оказался тест Вилкоксона. А при $h_1 > 5$ таковым показал себя тест Колмогорова–Смиронова. При этом отличия между ними довольно незначительны.

Касательно сравнения ET_1 и ET_2 можно сказать следующее:

В случае стандартного нормального распределения ET_1 оказался мощнее. Причём при $h_1 = 0$ отличие значительное, а при $h_2 = 0$ не очень.

В случае стандартного распределения Коши ET_2 оказывается мощнее при $h_1 \leqslant 4$ и при $h_2 \leqslant 4$. А при $h_1 \geqslant 5$ и $h_2 \geqslant 5$ наиболее мощным показал себя ET_1.

Список литературы

[1] В. Б. Мелас Д. И. Сальников. Об асимптотической мощности «энергетического» теста для проверки гипотез о равенстве двух распределений // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. — 2024.

[2] Scholz F.-W., Stephens Michael A. K-Sample Anderson–Darling Tests // Journal of the American Statistical Association. — 1987. — Vol. 82. — P. 918–924.

[3] Buning Herbert. KOLMOGOROV-SMIRNOV- AND CRAMÈR-VON MISES TYPE TWO-SAMPLE TESTS WITH VARIOUS WEIGHT FUNCTIONS // Communications in Statistics - Simulation and Computation. — 2001. — Vol. 30. — P. 847– 865.

[4] Mann Henry B., Whitney Douglas R. On a Test of Whether one of Two Random Variables is Stochastically Larger than the Other // Annals of Mathematical Statistics. — 1947. — Vol. 18. — P. 50–60.