Diferenciación (de Lebesgue)

Lorenzo Martinelli*

10 de febrero de 2026

Notas de Análisis Real tomadas de las clases de Victoria Paternostro durante el segundo cuatrimestre de 2025. Estas cubren alrededor de 4 clases donde se desarrolló la teoría de diferenciación de Lebesgue.

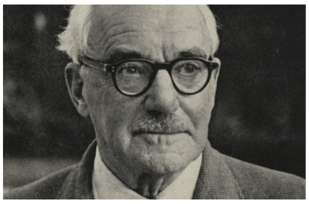
1. Introducción

El eje de estas notas va a ser extender resultados ya conocidos como el *Teorema Fundamental del Cálculo*[1] a una clase de funciones más amplia con la integral de Lebesgue.

1:

Remark 1.1 (TFC) Dada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ entonces $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ es derivable en x si f es continua en x y vale que $F'(x) = f(x)$.

G. H Hardy



J. E. Littlewood

2. Maximal de Hardy-Littlewood

Definition 2.1 *Dada $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ definimos la función maximal de H-L como*

$$Mf(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q f(y)dy$$

con Q cubo abierto.

Vamos a comenzar probando algunas propiedades del maximal.

Proposition 2.1 *Dada $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$:*

1. *Mf es medible.*
2. *Mf es finita a.e.*

Demostración. Vamos a hacer un poco de trampa utilizando un resultado que aún no probamos, el lema de Hardy-Littlewood.

1. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, definimos $E_\alpha = \{Mf > \alpha\}$. Sea $x \in E_\alpha$ tenemos que existe Q cubo abierto tal que $x \in Q$ y $\frac{1}{|Q|} \int_Q f > \alpha$. Luego, para todo $\hat{x} \in Q$ vale que $Mf(\hat{x}) > \alpha$, es decir, $Q \subset E_\alpha$.
2. Queremos ver que $|\{Mf = +\infty\}| = 0$. Tenemos que

$$|\{Mf = +\infty\}| \leq |\{Mf > \alpha\}| \leq \frac{c}{\alpha} \|f\|_1$$

donde la última desigualdad es el lema mencionado antes.

$\square$

Remark 2.1 El maximal es sub-lineal, es decir, $M(f+g)(x) \leq Mf(x) + Mg(x)$.

* Universidad de Buenos Aires

Notemos que, en general, Mf no está en L^1. Consideremos $f = \chi_{[0,1]}$, $x > 0$ y $Q = (0, x+1)$. De esta manera

$$Mf(x) \geq \frac{1}{Q}\int_Q |f(y)|dy = \frac{1}{x+1} \notin L^1(0, +\infty).$$

Ahora enunciaremos formalmente el lema de Hardy-Littlewood sin demostración puesto que para esta deberemos probar varios resultados antes.

G. Vitali (1875 - 1932)

Theorem 2.2 (Lema de Hardy-Littlewood) *Existe $c > 0$ tal que para toda $f \in L^1$*

$$|\{Mf > \alpha\}| \leq \frac{c}{\alpha}\|f\|_1 \quad \forall \alpha > 0.$$

El primer resultado que necesitamos es el siguiente lema.

Lemma 2.3 (Simple de Vitali) *Dado $E \subset \mathbb{R}^n$, si $|E|_e < +\infty$ y $K = \{Q_i\}_i$ es una familia de cubos que cubre a E entonces existe $\beta > 0$ (que solo depende de la dimensión) y $Q_1, ..., Q_N \in K$ disjuntos tal que $\sum_{j=1}^N |Q_j| \geq \beta|E|_e$.*

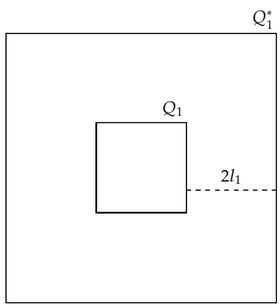
Demostración. Comencemos con un poco de notación.

- $Q = Q(\ell)$ si ℓ es la longitud.
- $K_1 = K$
- $\ell_1^* = \sup\{\ell : Q(\ell) \in K\}$

Si $\ell_1^* = +\infty$ entonces existe una sucesión de cubos $(Q_k)_k \subset K$ tal que $|Q_k| \longrightarrow \infty$. Luego, existe k tal que $|Q_k| \geq \beta|E|_e$ para todo $\beta > 0$.

Si $\ell_1^* < +\infty$, tomemos $Q_1 \in K_1$ tal que $Q_1 = Q_1(\ell_1)$ y $\ell_1 > \frac{1}{2}\ell_1^*$. Separamos la familia original en dos familias disjuntas nuevas, $K_1 = K_2 \cup K_2'$ de la siguiente manera:

1:



Not drawn to scale

- $K_2 = \{Q \in K_1$ tal que $Q \cap Q_1 = \emptyset\}$
- $K_2' = \{Q \in K_1$ tal que $Q \cap Q_1 \neq \emptyset\}$

Sea Q_1^* el cubo con mismo centro que Q_1 y con lado de longitud $5\ell_1$. [1] Afirmamos que si $Q \in K_2'$ entonces $Q \subset Q*_1$ pues dado ℓ tal que $Q = Q(\ell) \in K_2'$ tenemos que $\ell \leq \ell_1^* < 2\ell_1$. ¿Y ahora qué? Repetimos el argumento en K_2 teniendo en cuenta que si $\ell_2^* = \sup\{\ell : Q(\ell) \in K_2\}$ entonces $\ell_2^* \leq \ell_1^*$. Tomemos ahora $Q_2 = Q_2(\ell_2)$ tal que $\ell_2 > \frac{1}{2}\ell_2^*$ y separamos, igual que antes, $K_2 = K_3 \cup K_3'$. Donde los cubos $Q \in K_3'$ cumple que $Q \subset Q_2^*$ donde Q_2^* es el cubo con el mismo centro que Q_2 y lado $5\ell_2$. Continuando con esta construcción, en el paso j tenemos:

- $Q_1, Q_2, ..., Q_j$ cubos disjuntos,
- $\ell_1^* \geq \ell_2^* \geq ... \geq \ell_j^*$ y
- todo cubo de K_{j+1}' está contenido en el cubo de centro Q_j y lado $5\ell_j$.

Si en el N-ésimo paso (para algún N) K_N es vacío ¿Qué ocurre? Veamos que

$$K = K_N' \cup ... \cup K_2',$$

entonces $E \subset \bigcup_{j=1}^{N-1} Q_j^*$ y, por lo tanto, $|E|_e \leq \sum_{j=1}^{N-1} |Q_j^*| = 5^n \sum_{j=1}^{N-1} |Q_j|$. [2]

2: Q_j^* no tiene porqué estar en K.

¿Y si $K_N \neq \emptyset$ para todo $n \in N$? Notemos que $(\ell_j^*)_j$ converge pues es decreciente y $0 < \ell_j^* < \infty$. Tenemos dos casos:

$$\lim_{j\to+\infty} \ell_j^* = 0 \quad \text{o} \quad \lim_{j\to+\infty} \ell_j^* = \alpha \neq 0.$$

Si $\ell_j^* \to \alpha > 0$ entonces $|Q_j| \nrightarrow 0$ pues $\ell_j \geq 1/2\ell_j^*$. Luego, $\sum_{j=1}^{\infty} |Q_j| = +\infty$. De esta manera, para cualquier $\beta > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{j=1}^{N} |Q_j| > \beta |E|_e$.

¿Y si $\ell_j^* \to 0$? Veamos que en este caso todo cubo de K_1 está contenido en $\bigcup_{j\geq 1} Q_j^*$. Supogamos que existe $Q = Q(\ell)$ en K_1 que no está en la unión, entonces $Q \in K_j$ para todo j, luego $\ell \leq \ell_j^*$ para todo j y, por lo tanto, $\ell = 0$, lo cual es absurdo.

Como consencuencia de lo que probamos recien, $E \subset \bigcup_{j\geq 1} Q_j^*$ y así $|E|_e \leq \sum_{j\geq 1} |Q_j^*| = 5^n \sum_{j\geq 1} |Q_j|$. Ahora, tomando $0 < \beta < 1/5^n$ tenemos que existe $N \in \mathbb{N}$ que cumple lo que buscamos.

□

Ahora sí nos encontramos en condiciones de probar el lema de Hardy-Littlewood.

Demostración. Dado $\alpha > 0$ consideremos E_α definido como antes. [3] Sabemos que si $x \in E_\alpha$ existe Q_x que contiene a x y,

3:

Remark 2.2 Dado $\alpha > 0$ definimos $E_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^d : Mf(x) > \alpha\}$.

$$\frac{1}{|Q_x|} \int_{Q_x} |f(y)| dy > \alpha.$$

Notemos que $\{Q_x\}_{x\in E_\alpha}$ es un cubrimiento de E_α. ¿Podemos usar el Lema de Vitali? No, pues la medida de E_α no tiene porque ser finita. Consideremos entonces dado $k \in \mathbb{N}$

$$E_k = E_\alpha \cap B_k(0).$$

Ahora, por el lema de vitali, existen $Q_1, ..., Q_N$ cubos disjuntos y $\beta > 0$ tal que

$$|E_k| \leq \frac{1}{\beta} \sum_i^N |Q_i| \leq \frac{1}{\beta} \sum_i^N \frac{1}{\alpha} \int_{Q_i} |f(y)| dy = \frac{1}{\beta\alpha} \int_{\bigcup Q_i} |f(y)| dy.$$

Luego, por continuidad de la medida y considerando $c = \frac{1}{\beta}$ tenemos el resultado

$$|E_\alpha| = \lim_{k\to+\infty} |E_k| \leq \frac{c}{\alpha} \int_{\bigcup Q_i} |f(y)| dy \leq \frac{c}{\alpha} \|f\|_1.$$

□

3. El teorema de diferenciación de Lebesgue

Henri Léon Lebesegue (1875 - 1941)

Con los resultado previos, estamos en condiciones tanto de enunciar como de demostrar este resultado.

Theorem 3.1 (Teorema de Diferenciación de Lebesgue) *Sea* $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ *entonces*

$$\lim_{\substack{|Q|\to 0\\ Q\ni x}} \frac{1}{|Q|}\int_Q f(y)dy = f(x) \quad a.e.\ x\in\mathbb{R}^d$$

Demostración. Queremos ver que

$$\left|\frac{1}{|Q|}\int_Q f(y)-f(x)dy\right| \le \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)-f(x)|dy$$

es chico. Vamos a verlo en primer lugar para continuas de soporte compacto. [1] Tomemos $g\in\mathscr{C}_c(\mathbb{R}^d)$, $x\in\mathbb{R}^d$,

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |g(y)-g(x)|dy \le \sup_{y\in Q}|g(y)-g(x)| \to 0$$

donde el último límite vale por continuidad. Ahora, sea $f\in L^1$ y consideremos una sucesión $(g_k)_k \in \mathscr{C}_c(\mathbb{R}^d)$ tal que $\|g_k - f\|_1 \to 0$.

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{|Q|}\int_Q f(y)-f(x)dy\right| &\le \left|\frac{1}{|Q|}\int_Q f(y)-g_k(y)dy\right|\\ &+\left|\frac{1}{|Q|}\int_Q g_k(y)-g_k(x)dy\right|\\ &+\left|\frac{1}{|Q|}\int_Q g_k(x)-f(x)dy\right|\\ &\le M(f-g_k)(x)\\ &+\left|\frac{1}{|Q|}\int_Q g_k(y)-g_k(x)dy\right|^2\\ &+\left|f(x)-g_k(x)\right|.\end{aligned}$$

Ahora, tenemos que

$$\limsup_{|Q|\to 0}\left|\frac{1}{|Q|}\int_Q f(y)-f(x)dy\right| \le M(f-g_k)(x)+|f(x)-g_k(x)|.$$

Consideremos el conjunto

$$E_\varepsilon = \{x\in\mathbb{R}^d : \limsup_{|Q|\to 0}\left|\frac{1}{|Q|}\int_Q f(y)-f(x)dy\right| > \varepsilon\}$$

y notemos que está contenido en

$$\{M(f-g_k) > \frac{\varepsilon}{2}\}\cup\{|f(x)-g_k(x)| > \frac{\varepsilon}{2}\}$$

Teniendo esto en cuenta y utilizando tanto el lema de H-L como la

1: ¿Por qué? Porque son densas en L^1.

2:
Tenemos control sobre este termino.

desigualdad de Tchebychev obtenemos que

$$|E_\varepsilon| \leq \frac{2}{\varepsilon} c\|f - g_k\|_1 + \frac{2}{\varepsilon}\|f - g_k\|_1 \to 0,$$

con lo cual dado $\varepsilon > 0$ tenemos que $|E_\varepsilon| = 0$ y, en consecuencia

$$\left|\{x \in \mathbb{R}^d : \limsup_{|Q|\to 0} \left|\frac{1}{|Q|}\int_Q f(y) - f(x)dy\right| \neq 0\}\right|$$
$$\leq \left|\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_{\frac{1}{n}}\right| \leq \sum_n |E_{\frac{1}{n}}| = 0.$$

□

Pafnuti Lvóvich Tchebyshev (1821 - 1894)

Veamos algunas consecuencias de este resultado a continuación.

Corollary 3.2 *Si $f \in L^1$ entonces $f(x) \leq Mf(x)$ a.e.*

Demostración.

$$f(x) \leq |f(x)| = \lim_{|Q|\to 0} \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)| \leq Mf(x).$$

Donde la igualdad vale a.e. por el teorema de diferenciación. □

Definition 3.1 (Punto de Lebesgue) *Dada $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ decimos que $x \in \mathbb{R}^d$ es un punto de Lebesgue si*

$$\lim_{|Q|\to 0} \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y) - f(x)|dx = 0,$$

donde $Q \ni x$ son cubos abiertos. [2]

2: Notemos que si x es de Lebesgue entonces

$$\lim_{|Q|\to 0} ⨍_Q f(y)dy = f(x).$$

Theorem 3.3 *Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ entonces casi todo punto es de Lebesgue.*

Demostración. Dado $r \in \mathbb{Q}$ tenemos que

$$\lim_{|Q|\to 0} ⨍_Q |f(y) - r| = |f(x) - r| \quad a.e. \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

tomando $g_r(x) = |f(x) - r|$. Si notamos $E_r = \{\lim_{|Q|\to 0} ⨍_Q g_r(y)dy \neq g(x)\}$ tenemos que $|E_r| = 0$ y

$$|E| = |\bigcup_{r\in\mathbb{Q}} E_r| \leq \sum_r |E_r| = 0.$$

Ahora, si $x \notin E$, dado $\varepsilon > 0$ podemos tomar $r \in \mathbb{Q}$ tal que $|f(x) - r| < \varepsilon$ y así, $|f(y) - f(x)| < |f(y) - r| + \varepsilon$. Luego,

$$\limsup_{|Q|\to 0} ⨍_Q |f(y) - f(x)| \leq |f(x) - r| + \varepsilon < 2\varepsilon$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario tenemos el resultado. □

Ahora viene vitali 2... la puta que me parío...