

Diferenciación (de Lebesgue)

Lorenzo Martinelli*

3 de febrero de 2026

Notas de Análisis Real tomadas de las clases de Victoria Paternostro durante el segundo cuatrimestre de 2025. Estas cubren alrededor de 4 clases donde se desarrolló la teoría de diferenciación de Lebesgue.

1 Introducción	1
2 Maximal de Hardy-Littlewood	1
3 El teorema de diferenciación de Lebesgue	4

1. Introducción

El eje de estas notas va a ser extender resultados ya conocidos como el *Teorema Fundamental del Cálculo*¹ a una clase de funciones más amplia con la integral de Lebesgue.

1:

Remark 1.1 (TFC) Dada $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ entonces $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ es derivable en x si f es continua en x y vale que $F'(x) = f(x)$.

2. Maximal de Hardy-Littlewood

Definition 2.1 Dada $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ definimos la función maximal de H-L como

$$Mf(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q f(y)dy$$

con Q cubo abierto.

Vamos a comenzar probando algunas propiedades del maximal.

Proposition 2.1 Dada $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$:

1. Mf es medible.
2. Mf es finita a.e.

Demostración. Vamos a hacer un poco de trampa utilizando un resultado que aún no probamos, el lema de Hardy-Littlewood.

1. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, definimos $E_\alpha = \{Mf > \alpha\}$. Sea $x \in E_\alpha$ tenemos que existe Q cubo abierto tal que $x \in Q$ y $\frac{1}{|Q|} \int_Q f > \alpha$. Luego, para todo $\hat{x} \in Q$ vale que $Mf(\hat{x}) > \alpha$, es decir, $Q \subset E_\alpha$.
2. Queremos ver que $|\{Mf = +\infty\}| = 0$. Tenemos que

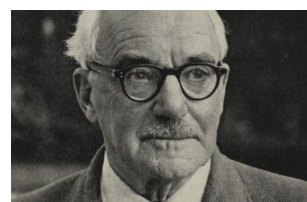
$$|\{Mf = +\infty\}| \leq |\{Mf > \alpha\}| \leq \frac{c}{\alpha} \|f\|_1$$

donde la última desigualdad es el lema mencionado antes.

□



G. H Hardy



J. E. Littlewood

Remark 2.1 El maximal es sub-lineal, es decir, $M(f + g)(x) \leq Mf(x) + Mg(x)$.

* Universidad de Buenos Aires

Notemos que, en general, Mf no está en L^1 . Consideremos $f = \chi_{[0,1]}$, $x > 0$ y $Q = (0, x+1)$. De esta manera

$$Mf(x) \geq \frac{1}{Q} \int_Q |f(y)| dy = \frac{1}{x+1} \notin L^1(0, +\infty).$$

Ahora enunciaremos formalmente el lema de Hardy-Littlewood sin demostración puesto que para esta deberemos probar varios resultados antes.

Theorem 2.2 (Lema de Hardy-Littlewood) *Existe $c > 0$ tal que para toda $f \in L^1$*

$$|\{Mf > \alpha\}| \leq \frac{c}{\alpha} \|f\|_1 \quad \forall \alpha > 0.$$

El primer resultado que necesitamos es el siguiente lema.

Lemma 2.3 (Simple de Vitali) *Dado $E \subset \mathbb{R}^n$, si $|E|_e < +\infty$ y $K = \{Q_i\}_i$ es una familia de cubos que cubre a E entonces existe $\beta > 0$ (que solo depende de la dimensión) y $Q_1, \dots, Q_N \in K$ disjuntos tal que $\sum_{j=1}^N |Q_j| \geq \beta |E|_e$.*

Demostración. Comencemos con un poco de notación.

- $Q = Q(\ell)$ si ℓ es la longitud.
- $K_1 = K$
- $\ell_1^* = \sup\{\ell : Q(\ell) \in K\}$

Si $\ell_1^* = +\infty$ entonces existe una sucesión de cubos $(Q_k)_k \subset K$ tal que $|Q_k| \rightarrow \infty$. Luego, existe k tal que $|Q_k| \geq \beta |E|_e$ para todo $\beta > 0$.

Si $\ell_1^* < +\infty$, tomemos $Q_1 \in K_1$ tal que $Q_1 = Q_1(\ell_1)$ y $\ell_1 > \frac{1}{2}\ell_1^*$. Separamos la familia original en dos familias disjuntas nuevas, 1:
 $K_1 = K_2 \cup K'_2$ de la siguiente manera:

- $K_2 = \{Q \in K_1 \text{ tal que } Q \cap Q_1 = \emptyset\}$
- $K'_2 = \{Q \in K_1 \text{ tal que } Q \cap Q_1 \neq \emptyset\}$

Sea Q_1^* el cubo con mismo centro que Q_1 y con lado de longitud $5\ell_1$. ¹ Afirmamos que si $Q \in K'_2$ entonces $Q \subset Q_1^*$ pues dado ℓ tal que $Q = Q(\ell) \in K'_2$ tenemos que $\ell \leq \ell_1^* < 2\ell_1$. ¿Y ahora qué? Repetimos el argumento en K_2 teniendo en cuenta que si $\ell_2^* = \sup\{\ell : Q(\ell) \in K_2\}$ entonces $\ell_2^* \leq \ell_1^*$. Tomemos ahora $Q_2 = Q_2(\ell_2)$ tal que $\ell_2 > \frac{1}{2}\ell_2^*$ y separamos, igual que antes, $K_2 = K_3 \cup K'_3$. Donde los cubos $Q \in K'_3$ cumple que $Q \subset Q_2^*$ donde Q_2^* es el cubo con el mismo centro que Q_2 y lado $5\ell_2$. Continuando con esta construcción, en el paso j tenemos:

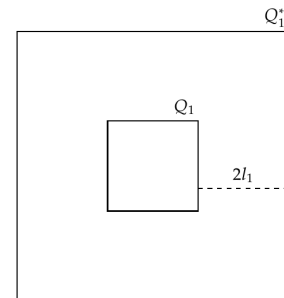
- Q_1, Q_2, \dots, Q_j cubos disjuntos,
- $\ell_1^* \geq \ell_2^* \geq \dots \geq \ell_j^*$ y
- todo cubo de K'_{j+1} está contenido en el cubo de centro Q_j y lado $5\ell_j$.

Si en el N -ésimo paso (para algún N) K_N es vacío ¿Qué ocurre? Veamos que

$$K = K'_N \cup \dots \cup K'_2,$$



G. Vitali (1875 - 1932)



Not drawn to scale

entonces $E \subset \bigcup_{j=1}^{N-1} Q_j^*$ y, por lo tanto, $|E|_e \leq \sum_{j=1}^{N-1} |Q_j^*| = 5^n \sum_{j=1}^{N-1} |Q_j|$.²

¿Y si $K_N \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$? Notemos que $(\ell_j^*)_j$ converge pues es decreciente y $0 < \ell_j^* < \infty$. Tenemos dos casos:

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \ell_j^* = 0 \quad \text{o} \quad \lim_{j \rightarrow +\infty} \ell_j^* = \alpha \neq 0.$$

Si $\ell_j^* \rightarrow \alpha > 0$ entonces $|Q_j| \not\rightarrow 0$ pues $\ell_j \geq 1/2\ell_j^*$. Luego, $\sum_{j=1}^{\infty} |Q_j| = +\infty$. De esta manera, para cualquier $\beta > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{j=1}^N |Q_j| > \beta |E|_e$.

¿Y si $\ell_j^* \rightarrow 0$? Veamos que en este caso todo cubo de K_1 está contenido en $\bigcup_{j \geq 1} Q_j^*$. Supongamos que existe $Q = Q(\ell)$ en K_1 que no está en la unión, entonces $Q \in K_j$ para todo j , luego $\ell \leq \ell_j^*$ para todo j y, por lo tanto, $\ell = 0$, lo cual es absurdo.

Como consecuencia de lo que probamos recién, $E \subset \bigcup_{j \geq 1} Q_j^*$ y así $|E|_e \leq \sum_{j \geq 1} |Q_j^*| = 5^n \sum_{j \geq 1} |Q_j|$. Ahora, tomando $0 < \beta < 1/5^n$ tenemos que existe $N \in \mathbb{N}$ que cumple lo que buscamos. \square

Ahora sí nos encontramos en condiciones de probar el lema de Hardy-Littlewood.

Demostración. Dado $\alpha > 0$ consideremos E_α definido como antes.

³ Sabemos que si $x \in E_\alpha$ existe Q_x que contiene a x y,

$$\frac{1}{|Q_x|} \int_{Q_x} |f(y)| dy > \alpha.$$

3:

Remark 2.2 Dado $\alpha > 0$ definimos $E_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^d : Mf(x) > \alpha\}$.

Notemos que $\{Q_x\}_{x \in E_\alpha}$ es un cubrimiento de E_α . ¿Podemos usar el Lema de Vitali? No, pues la medida de E_α no tiene porque ser finita. Consideremos entonces dado $k \in \mathbb{N}$

$$E_k = E_\alpha \cap B_k(0).$$

Ahora, por el lema de Vitali, existen Q_1, \dots, Q_N cubos disjuntos y $\beta > 0$ tal que

$$|E_k| \leq \frac{1}{\beta} \sum_i^N |Q_i| \leq \frac{1}{\beta} \sum_i^N \frac{1}{\alpha} \int_{Q_i} |f(y)| dy = \frac{1}{\beta \alpha} \int_{\bigcup Q_i} |f(y)| dy.$$

Luego, por continuidad de la medida y considerando $c = \frac{1}{\beta}$ tenemos el resultado

$$|E_\alpha| = \lim_{k \rightarrow +\infty} |E_k| \leq \frac{c}{\alpha} \int_{\bigcup Q_i} |f(y)| dy \leq \frac{c}{\alpha} \|f\|_1.$$

\square

3. El teorema de diferenciación de Lebesgue

Con los resultado previos, estamos en condiciones tanto de enunciar como de demostrar este resultado.

Theorem 3.1 (Teorema de Diferenciación de Lebesgue) Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ entonces

$$\lim_{\substack{|Q| \rightarrow 0 \\ Q \ni x}} \frac{1}{|Q|} \int_Q f(y) dy = f(x) \quad a.e. x \in \mathbb{R}^d$$

Demostración. Queremos ver que

$$\left| \frac{1}{|Q|} \int_Q f(y) - f(x) dy \right| \leq \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y) - f(x)| dy$$

es chico. Vamos a verlo en primer lugar para continuas de soporte compacto.¹ Tomemos $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$, $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q |g(y) - g(x)| dy \leq \sup_{y \in Q} |g(y) - g(x)| \rightarrow 0$$

donde el último límite vale por continuidad. Ahora, sea $f \in L^1$ y consideremos una sucesión $(g_k)_k \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ tal que $\|g_k - f\|_1 \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{|Q|} \int_Q f(y) - f(x) dy \right| &\leq \left| \frac{1}{|Q|} \int_Q f(y) - g_k(y) dy \right| \\ &\quad + \left| \frac{1}{|Q|} \int_Q g_k(y) - g_k(x) dy \right| \\ &\quad + \left| \frac{1}{|Q|} \int_Q g_k(x) - f(x) dy \right| \\ &\leq M(f - g_k)(x) \\ &\quad + \left| \frac{1}{|Q|} \int_Q g_k(y) - g_k(x) dy \right|^2 \\ &\quad + |f(x) - g_k(x)|. \end{aligned}$$

Ahora, tenemos que

$$\limsup_{|Q| \rightarrow 0} \left| \frac{1}{|Q|} \int_Q f(y) - f(x) dy \right| \leq M(f - g_k)(x) + |f(x) - g_k(x)|.$$

Consideremos el conjunto

$$E_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^d : \limsup_{|Q| \rightarrow 0} \left| \frac{1}{|Q|} \int_Q f(y) - f(x) dy \right| > \varepsilon\}$$

y notemos que está contenido en

$$\{M(f - g_k) > \frac{\varepsilon}{2}\} \cup \{|f(x) - g_k(x)| > \frac{\varepsilon}{2}\}$$

Teniendo esto en cuenta y utilizando tanto el lema de H-L como la



Henri Léon Lebesgue (1875 - 1941)

1: ¿Por qué? Porque son densas en L^1 .

2:
Tenemos control sobre este termino.

desigualdad de Tchebychev obtenemos que

$$|E_\varepsilon| \leq \frac{2}{\varepsilon} c \|f - g_k\|_1 + \frac{2}{\varepsilon} \|f - g_k\|_1 \rightarrow 0,$$

con lo cual dado $\varepsilon > 0$ tenemos que $|E_\varepsilon| = 0$ y, en consecuencia

$$\begin{aligned} & \left| \{x \in \mathbb{R}^d : \limsup_{|Q| \rightarrow 0} \left| \frac{1}{|Q|} \int_Q f(y) - f(x) dy \right| \neq 0\} \right| \\ & \leq \left| \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_{\frac{1}{n}} \right| \leq \sum_n |E_{\frac{1}{n}}| = 0. \end{aligned}$$

□

Veamos algunas consecuencias de este resultado a continuación.

Corollary 3.2 Si $f \in L^1$ entonces $f(x) \leq M f(x)$ a.e.

Demostración.

$$f(x) \leq |f(x)| = \lim_{|Q| \rightarrow 0} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x)| \leq M f(x).$$

Donde la igualdad vale a.e. por el teorema de diferenciación. □

Definition 3.1 (Punto de Lebesgue) *contenidos...*



Pafnuty Lvovich Tchebyshev (1821 - 1894)