Тема “Введение в математический анализ”

1. Как соотносятся понятия “множество” и “последовательность”? (в ответе использовать слова типа: часть, целое, общее, частное, родитель, дочерний субъект и т.д.)

Понятия "множество" и "последовательность" тесно связаны, но представляют собой различные математические объекты.

• Множество – это родительский субъект, который объединяет в себе целое количество элементов (объектов), без учета их порядка. Это общее понятие, в которое могут входить различные объекты, не обязательно связанные между собой.

• Последовательность – это дочерний субъект множества, который представляет собой часть элементов множества, упорядоченную по определенному правилу. Она является частным случаем множества, где порядок элементов имеет значение.

Другими словами, множество – это коллекция элементов, а последовательность – это упорядоченная коллекция элементов, взятых из этого множества.

Пример:

• Множество: {1, 2, 3, 4}

• Последовательность: 1, 3, 2, 4 (то же множество, но в другом порядке)

2. Прочитать высказывания математической логики, построить их отрицания и установить истинность.

$$\forall y \in [0;1] : sgn(y) = 1$$
$$\forall n \in \mathbb{N} > 2 : \exists x, y, z \in \mathbb{N} : x^n = y^n + z^n$$
$$\forall x \in \mathbb{R} \exists X \in \mathbb{R} : X > x$$
$$\forall x \in \mathbb{C} \nexists y \in \mathbb{C} : x > y || x < y$$
$$\forall y \in [0; \tfrac{\pi}{2}] \exists \varepsilon > 0 : \sin y < \sin(y + \varepsilon)$$
$$\forall y \in [0; \pi) \exists \varepsilon > 0 : \cos y > \cos(y + \varepsilon)$$
$$\exists x : x \notin \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$$

1. ∀y ∈ [0; 1]: sgn(y) = 1

Прочтение: Для любого y из отрезка [0; 1] знак (sgn) от y равен 1.

Отрицание: ∃y ∈ [0; 1]: sgn(y) ≠ 1

(Существует y из отрезка [0; 1], для которого знак от y не равен 1).

Истинность: Ложно. Функция знака sgn(y) равна 0, если y = 0.

2. $\forall n \in N > 2: \exists x, y, z \in N: x^n = y^n + z^n$

Прочтение: Для любого натурального n больше 2 существуют натуральные числа x, y, z такие, что x в степени n равно y в степени n плюс z в степени n.

Отрицание: $\exists n \in N > 2: \forall x, y, z \in N: x^n \neq y^n + z^n$

(Существует натуральное число n больше 2, для которого при любых натуральных числах x, y, z, x в степени n не равно y в степени n плюс z в степени n).

Истинность: Истинно . Это утверждение – переформулировка Великой теоремы Ферма, которая была доказана только в 1995 году.

3. $\forall x \in R \exists X \in R: X > x$

Прочтение: Для любого действительного числа x существует действительное число X, большее x.

Отрицание: $\exists x \in R \forall X \in R: X \leq x$

(Существует действительное число x, для которого при любом действительном числе X, X не больше x).

Истинность: Истинно . Для любого числа x всегда найдется число X, которое на бесконечно малую величину больше x.

4. $\forall x \in C\ \exists y \in C: x > y \mid\mid x < y$

Прочтение: Для любого комплексного числа x существует комплексное число y такое, что x больше y или x меньше y.

Отрицание: $\exists x \in C\ \forall y \in C: x \leq y \wedge x \geq y$

(Существует комплексное число x, для которого при любом комплексном числе y, x не больше y и не меньше y).

Истинность: Ложно . Комплексные числа не упорядочены, поэтому нельзя сравнивать их по принципу "больше" или "меньше".

5. $\forall y \in [0; \pi/2]\ \exists \varepsilon > 0: \sin y < \sin(y + \varepsilon)$

Прочтение: Для любого y из отрезка $[0; \pi/2]$ существует положительное число ε такое, что снус от y меньше синуса от (y + ε).

Отрицание: $\exists y \in [0; \pi/2]\ \forall \varepsilon > 0: \sin y \geq \sin(y + \varepsilon)$

(Существует y из отрезка $[0; \pi/2]$, для которого при любом положительном числе ε, sin y не меньше sin(y + ε)).

Истинность: Истинно . Функция sin y возрастает на отрезке $[0; \pi/2]$, поэтому всегда найдется такое ε, что sin(y + ε) больше sin y.

6. $\forall y \in [0; \pi)\ \exists \varepsilon > 0: \cos y > \cos(y + \varepsilon)$

Прочтение: Для любого y из интервала $[0; \pi)$ существует положительное число ε такое, что косинус от y больше косинуса от $(y + \varepsilon)$.

Отрицание: $\exists y \in [0; \pi)\ \forall \varepsilon > 0: \cos y \leq \cos(y + \varepsilon)$

(Существует y из интервала $[0; \pi)$, для которого при любом положительном числе ε, $\cos y$ не больше $\cos(y + \varepsilon)$).

Истинность: Истинно . Функция $\cos y$ убывает на интервале $[0; \pi)$, поэтому всегда найдется такое ε, что $\cos(y + \varepsilon)$ меньше $\cos y$.

7. $\exists x: x \notin \{N, Z, Q, R, C\}$

Прочтение: Существует число x, которое не принадлежит множеству натуральных, целых, рациональных, действительных и комплексных чисел.

Отрицание: $\forall x: x \in \{N, Z, Q, R, C\}$

(Для любого числа x, x принадлежит множеству натуральных, целых, рациональных, действительных и комплексных чисел).

Истинность: Ложно . Все числа, которые мы знаем, входят в одно из этих множеств.

Тема “Множество”

1. Даны три множества a,b и c. Необходимо выполнить все изученные виды бинарных операций над всеми комбинациями множеств.

Предположим, у нас есть три множества:

• $A = \{1, 2, 3\}$

• $B = \{2, 4, 6\}$

• $C = \{1, 4, 5\}$

Рассмотрим основные бинарные операции над множествами:

1. Объединение ($\cup$)

• $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$

• $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

• $B \cup C = \{1, 2, 4, 5, 6\}$

2. Пересечение ($\cap$)

• $A \cap B = \{2\}$

• $A \cap C = \{1\}$

• $B \cap C = \{4\}$

3. Разность (\)

- $A \setminus B = \{1, 3\}$
- $A \setminus C = \{2, 3\}$
- $B \setminus C = \{2, 6\}$
- $C \setminus A = \{4, 5\}$
- $C \setminus B = \{1, 5\}$
- $B \setminus A = \{4, 6\}$

4. Симметрическая разность (Δ)

- $A \Delta B = \{1, 3, 4, 6\}$
- $A \Delta C = \{2, 3, 4, 5\}$
- $B \Delta C = \{1, 2, 5, 6\}$

5. Декартово произведение (×)

- $A \times B = \{(1, 2), (1, 4), (1, 6), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 2), (3, 4), (3, 6)\}$
- $A \times C = \{(1, 1), (1, 4), (1, 5), (2, 1), (2, 4), (2, 5), (3, 1), (3, 4), (3, 5)\}$
- $B \times C = \{(2, 1), (2, 4), (2, 5), (4, 1), (4, 4), (4, 5), (6, 1), (6, 4), (6, 5)\}$

```python
a = {1, 2, 3}
b = {2, 4, 6}
c = {1, 4, 5}

# Объединение (∪)
print("Объединение:")
print(f"A ∪ B: {a | b}")  # a | b  или  a.union(b)
print(f"A ∪ C: {a | c}")
print(f"B ∪ C: {b | c}")

# Пересечение (∩)
print("\nПересечение:")
print(f"A ∩ B: {a & b}")  # a & b  или  a.intersection(b)
print(f"A ∩ C: {a & c}")
print(f"B ∩ C: {b & c}")

# Разность (\)
print("\nРазность:")
print(f"A \ B: {a - b}")  # a - b  или a.difference(b)
print(f"A \ C: {a - c}")
print(f"B \ C: {b - c}")
print(f"C \ A: {c - a}")
print(f"C \ B: {c - b}")
print(f"B \ A: {b - a}")

# Симметрическая разность (Δ)
print("\nСимметрическая разность:")
print(f"A Δ B: {a ^ b}")  # a ^ b  или a.symmetric_difference(b)
print(f"A Δ C: {a ^ c}")
print(f"B Δ C: {b ^ c}")

# Декартово произведение (×)
print("\nДекартово произведение:")
print(f"A × B: {set((x, y) for x in a for y in b)}")
print(f"A × C: {set((x, y) for x in a for y in c)}")
print(f"B × C: {set((x, y) for x in b for y in c)}")
```

```
Объединение:
A ∪ B: {1, 2, 3, 4, 6}
A ∪ C: {1, 2, 3, 4, 5}
B ∪ C: {1, 2, 4, 5, 6}

Пересечение:
A ∩ B: {2}
A ∩ C: {1}
B ∩ C: {4}

Разность:
A \ B: {1, 3}
A \ C: {2, 3}
B \ C: {2, 6}
C \ A: {4, 5}
C \ B: {1, 5}
B \ A: {4, 6}

Симметрическая разность:
A Δ B: {1, 3, 4, 6}
A Δ C: {2, 3, 4, 5}
B Δ C: {1, 2, 5, 6}

Декартово произведение:
A × B: {(1, 2), (1, 4), (1, 6), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 2), (3, 4), (3, 6)}
A × C: {(1, 1), (1, 4), (1, 5), (2, 1), (2, 4), (2, 5), (3, 1), (3, 4), (3, 5)}
B × C: {(2, 1), (2, 4), (2, 5), (4, 1), (4, 4), (4, 5), (6, 1), (6, 4), (6, 5)}
```

Тема 3 “Последовательность”

1. Даны 4 последовательности. Необходимо:

a. исследовать их на монотонность;

b. исследовать на ограниченность;

c. найти пятый по счету член.

Последовательность {a_n}_{n=1}[∞] = 2^n - n

a) Монотонность:

Разность соседних членов: a_{n+1} - a_n = 2ⁿ⁺¹ - (n+1) - (2^n - n) = 2^n - 1.

Разность a_{n+1} - a_n > 0 при n > 0 , следовательно, последовательность строго возрастающая .

b) Ограниченность:

Последовательность не ограничена сверху .

При n → ∞, 2^n стремится к бесконечности, а n к ∞, следовательно, a_n → ∞.

Последовательность ограничена снизу .

При n = 1, a₁ = 1.

Для n > 1, 2^n - n > 1, следовательно, a_n > 1.

Таким образом, последовательность ограничена снизу числом 1 .

c) Пятый член:

a₅ = 2^5 - 5 = 32 - 5 = 27

2. Последовательность {b_n}_{n=2}[∞] = 1/(1-n)

a) Монотонность:

Разность соседних членов: b_{n+1} - b_n = 1/(1-(n+1)) - 1/(1-n) = 1/(-n) - 1/(1-n) = (1-n - n) / (n(n-1)) = (1-2n) / (n(n-1)).

Разность b_{n+1} - b_n < 0 при n > 1 , следовательно, последовательность строго убывающая .

b) Ограниченность:

Последовательность не ограничена сверху .

При n → ∞, b_n стремится к 0.

Последовательность не ограничена снизу .

При n → ∞, b_n стремится к 0, но при n = 2, b₂ = -1.

Таким образом, последовательность не ограничена сверху и снизу .

c) Пятый член:

b₅ = 1/(1-5) = -1/4

3. Последовательность {c_n}_{n=1}[∞] = $(-1)^n$ + √2n

a) Монотонность:

Последовательность не монотонна .

При четных n: $(-1)^n = 1$, c_n возрастает.

При нечетных n: $(-1)^n = -1$, c_n убывает.

b) Ограниченность:

Последовательность не ограничена сверху .

При n → ∞, √2n стремится к бесконечности, следовательно, c_n → ∞.

Последовательность ограничена снизу .

При n = 1, c₁ = -1 + √2.

Для всех n, √2n > -1, следовательно, c_n > -2.

Таким образом, последовательность ограничена снизу числом -2 .

c) Пятый член:

c₅ = $(-1)^5$ + √2 5 = -1 + √10

4. Последовательность {d_n}_{n=1}[∞] = (-1)²ⁿ + $1/n^2$

a) Монотонность:

Разность соседних членов: d_{n+1} - d_n = (-1)²⁽ⁿ⁺¹⁾ + $1/(n+1)^2$ - ((-1)²ⁿ + $1/n^2$) = $1/(n+1)^2 - 1/n^2 = (n^2 - (n+1)^2) / (n^2(n+1)^2) = -2n - 1 / (n^2(n+1)^2)$.

Разность d_{n+1} - d_n < 0 при n > 1 , следовательно, последовательность строго убывающая .

b) Ограниченность:

Последовательность ограничена сверху .

При n = 1, d₁ = 2.

Для всех n, $1/n^2 < 1$, следовательно, d_n < 3.

Последовательность ограничена снизу .

Для всех n, $1/n^2 > 0$, следовательно, d_n > 1.

Таким образом, последовательность ограничена сверху числом 3 и снизу числом 1 .

c) Пятый член:

d₅ = (-1)¹⁰ + $1/5^2$ = 1 + 1/25 = 26/25

Последовательность	Монотонность	Ограниченность	Пятый член
$\{a\_n\}_{n=1}^{\infty} = 2^{n} - n$	Строго возрастающая	Ограничена снизу (1)	27
$\{b\_n\}_{n=2}^{\infty} = 1/(1-n)$	Строго убывающая	Не ограничена	-1/4
$\{c\_n\}_{n=1}^{\infty} = (-1)^{n} + \sqrt{2n}$	Не монотонна	Ограничена снизу (-2)	$-1 + \sqrt{10}$
$\{d\_n\}_{n=1}^{\infty} = (-1)^{2n} + 1/n^{2}$	Строго убывающая	Ограничена (1; 3)	26/25

Найти 12-й член заданной неявно последовательности

Данная последовательность является арифметической прогрессией.

a₁ = 128 - это первый член прогрессии.

d = 6 - это разность прогрессии (на сколько каждый следующий член больше предыдущего).

Чтобы найти 12-й член (a₁₂), воспользуемся формулой арифметической прогрессии:

a_n = a₁ + (n-1)d

Подставляем значения:

a₁₂ = 128 + (12-1) * 6 = 128 + 66 = 194

Ответ: 12-й член последовательности равен 194.

3. *На языке Python предложить алгоритм вычисляющий численно предел с точностью $\varepsilon = 10^{-7}$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$$

main.py

```python
import math

epsilon = 10**-7
n = 1
previous_value = 0
current_value = 1 / math.sqrt(math.factorial(n))

while abs(current_value - previous_value) >= epsilon:
    n += 1
    previous_value = current_value
    current_value = n / math.sqrt(math.factorial(n))

print(f"Предел последовательности: {current_value}")
```

Ln: 14, Col: 1

Run Share Command Line Arguments

```
Предел последовательности: 1.2822351770735609e-08
```

*Предложить оптимизацию алгоритма, полученного в задании 3, ускоряющую его сходимость.

main.py

```python

epsilon = 10**-7
n = 1
previous_value = 0
current_value = 1 / math.sqrt(math.factorial(n))
factorial_n = 1

while abs(current_value - previous_value) >= epsilon:
    n += 1
    factorial_n *= n
    previous_value = current_value
    current_value = n / math.sqrt(factorial_n)

print(f"Предел последовательности: {current_value}")
```

Ln: 15, Col: 53

Run Share Command Line Arguments

```
Предел последовательности: 1.2822351770735609e-08
```