Введение в математический анализ

Урок 3. Множество. Последовательность. Часть 2

Задания к уроку №3

1) Пусть $x_n = n^{(-1)^n}$. Доказать, что последовательность $\{x_n\}$: а) неограниченная; б) не является бесконечно большой.

2) Доказать, что последовательность $\{\sin n\}$ расходится.

3) Найти пределы:
а) $\lim_{n\to\infty} \frac{10n}{n^2+1}$; б) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-n}{n-\sqrt{n}}$; в) $\lim_{n\to\infty} \frac{5\cdot 3^n}{3^n-2}$.

4) Найти предел $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n}-n\right)$.

5) Вычислить $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}\cos n}{n+1}$.

\+ Код \+ Текст

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
```

#1

Докажем, что последовательность неограничена.

Последовательность $\{x_n\}$ называется неограниченной, если для любого сколь угодно большого M>0 найдётся такой номер N_M, что для любого n >= N $|y_n|$ > M

Найдём номер N_M члена последовательности, который первым окажется больше M = 100

$$|n^{(-1)^n}| > 100 => n > 100$$
$$N_m = 101$$

т.е. все $|x_n|$ начиная с 101 будут больше M следовательно последовательность неограничена

Докажем, что последовательность не является бесконечно большой

Найдём предел функции $\lim\limits_{n\to\infty} n^{(-1)^n}$ Подставим $n = \infty$

$$\infty^{(-1)^\infty} = \infty$$

Предел функции равен бесконечности, значит последовательность является бесконечно большой

№2

Докажем от противного, пусть последовательность sin(n) является фундаментальной, в таком случае верно утверждение

$$\lim_{n\to\infty}(\sin(n+1)-\sin(n-1)) = 0$$

т.к. $\sin(a)-\sin(b) = 2\cos(\frac{a+b}{2})sin(\frac{a-b}{2})$, получаем

$$\lim_{n\to\infty} 2\cos(\frac{n+1+n-1}{2})\sin(\frac{n+1-(n-1)}{2}) = 0$$
$$\lim_{n\to\infty} 2\cdot\cos(n)\cdot\sin(1) = 0$$

для того чтоб данные равенство выполнялось, необходимо чтобы

$$\lim_{n\to\infty}\cos(n) = 0$$

но и

$$\lim_{n\to\infty}\sin(n) = 0$$

, так же должно быть верно. А из выражения

$$sin^2(n) + cos^2(n) = 1$$

получается что предел sin должен быть равен 1. Исходя из данного противоречия можно сделать вывод что последовательность sin(n) расходится

№3

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{10n}{n^2+1}$

$$\lim \quad 10n \quad \infty \quad \lim \quad 10\infty \quad \lim \quad \infty \quad 0$$

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2-n}{n-\sqrt{n}}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-n}{n-\sqrt{n}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{n\to\infty} \frac{\infty^2-\infty}{\infty-\sqrt{\infty}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\infty-\infty}{\infty-\infty} = \infty$$

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5\cdot 3^n}{3^n-2}$ Разделим числитель и знаменатель на 3^n

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5}{1-\frac{2}{3^n}}$$

исходя из того что $\frac{1}{x^n} \longrightarrow 0$ при n>0 и $x \longrightarrow \infty$ получим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5}{1-0} = \lim_{n\to\infty} 5 = 5$$

№4

Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+n}-n)$

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+n}-n)$$

Умножим и разделим на сопряженное выражение $\sqrt{n^2+n}+n$

$$\frac{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{(\sqrt{n^2+n})^2+n\cdot\sqrt{n^2+n}-n\cdot\sqrt{n^2+n}-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}$$

разделим числитель и знаменатель на n

$$\frac{\frac{n}{n}}{\sqrt{n^2+n}/n+1} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$$

исходя из того что $\frac{1}{n} \longrightarrow 0$ при $n \longrightarrow \infty$ получим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{1}{2}$$

№5

Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}\cdot\cos n}{n+1}$

В данном случае можно воспользоваться теоремой о 2х милиционерах исходя из того $-1 <= cos(n) <= 1$ следует что

$$-\frac{\sqrt{n}}{n+1} <= \frac{\sqrt{n}\cdot\cos n}{n+1} <= \frac{\sqrt{n}}{n+1}$$

пределы которых равны

$$\lim_{n\to\infty} -\frac{\sqrt{n}}{n+1} = \lim_{n\to\infty} -\frac{\sqrt{n}}{n+1} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}\cdot\cos n}{n+1} = 0$$