

Approssimazione di funzione di distribuzione cumulativa discreta

Lorenzo Nobili

Marzo 2024

1 Descrizione del problema

Su un insieme $\{1, \dots, N\}$ è definita una funzione di distribuzione cumulativa discreta

$$F(i) = y_i, \quad i = 1, \dots, N,$$

con $F(i) \geq F(i-1) \forall i = 2, \dots, N$. Si vuole definire un'altra funzione di distribuzione cumulativa G che approssima la F ma che è vincolata ad assumere al massimo $n < N$ valori (ovvero, i possibili distinti valori $G(i)$ sono n). Si vuole scegliere G in modo che l'errore assoluto (la somma delle differenze $|F(i) - G(i)|$) sia il più piccolo possibile. L'obiettivo è stato quello di definire il modello matematico del problema, per poi implementarlo attraverso AMPL.

2 Modello matematico del problema

Il modello di programmazione matematica per il problema è il seguente:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^N t_i \\ z_i \in \quad & \{0, 1\} \quad i = 1 \dots N \\ x_i \geq \quad & x_{i-1} \quad i = 2 \dots N \\ \sum_{i=1}^N \quad & z_i = n - 1 \\ x_i \leq \quad & x_{i-1} + z_i \quad i = 2 \dots N \\ t_i \geq \quad & y_i - x_i \quad i = 1 \dots N \\ t_i \leq \quad & -(y_i - x_i) \quad i = 1 \dots N \end{aligned}$$

Figura 1: Modello matematico

3 File .mod

Di seguito il file.mod per implementare il modello in AMPL.

```
###PARAMS

param n;
param N;
set Nset:= 1..N;
param F{Nset} <= 1, >= 0;

###VARS

var G{Nset} <= 1 >= 0;
var t{Nset};
var z{i in Nset} binary;
subject to c2 {i in Nset: i>1} : G[i] >= G[i-1];
subject to c3 : sum{i in Nset} (z[i]) = n-1;
subject to c4{i in Nset : i > 1} : G[i] <= G[i-1] + z[i];
subject to c5: G[N]=1;
subject to c6 {i in Nset} : t[i] >= (F[i] - G[i]);
subject to c7 {i in Nset} : t[i] >= -(F[i] - G[i]);

###OBJECTIVE :
minimize total : sum{i in Nset} (t[i]);
```

4 Risultati

Per mostrare un esempio di risoluzione, con il seguente file.dat

```
### PARAMETERS

param n := 4;
param N := 10;

param F:=
1 0.1
2 0.2
3 0.3
4 0.4
5 0.5
6 0.6
7 0.7
8 0.8
9 0.9
10 1;
```

Abbiamo il seguente risultato:

```
Gurobi 4.0.1: optimal solution; objective 0.6
67 simplex iterations
plus 24 simplex iterations for intbasis
ampl: display G
G [*]:=
1 0.1
2 0.1
3 0.4
4 0.4
5 0.4
6 0.7
7 0.7
8 0.7
9 1
10 1
```
