



# 数学分析

作者：Lollins

时间：September 21, 2023



改变人生的事情，你必须冒险；意义非凡的事情，大多碰巧发生；不重要的事，才有周全的计划。

# 前言

2023/8/17, 发现用  $\text{\LaTeX}$  做笔记还挺舒服的, 以前喜欢用 iPad, 觉得手写的东西记得还牢固。但是 iPad 电池有问题, 而且自己字写的好丑, 不想用 iPad 了。 $\text{\LaTeX}$  的格式真没话说, 用起来很舒服。

这篇文章我来写一点关于数学分析中, 可能被我遗忘掉了的知识点。

本笔记主要参考中科大程艺老师的《数学分析讲义》。

Lollins

September 21, 2023

# 目录

第 1 章 极限	1
第 2 章 单变量函数的连续性	2
第 3 章 单变量函数的微分学	3
第 4 章 不定积分	4
第 5 章 单变量函数的积分学	5
5.1 变上限积分 . . . . .	5
第 6 章 常微分方程初步	6
第 7 章 无穷级数	7
第 8 章 空间解析几何	8
第 9 章 多变量函数的微分学	9
9.1 方向导数与梯度 . . . . .	9
第 10 章 多变量函数的重积分	10
第 11 章 曲线积分和曲面积分	11
11.1 数量场在曲线上的积分 . . . . .	11
11.2 数量场在曲面上的积分 . . . . .	11
11.3 向量场在曲线上的积分 . . . . .	12
11.4 向量场在曲面上的积分 . . . . .	13
第 12 章 Fourier 分析	14
第 13 章 反常积分和含参变量积分	15
第 14 章 实属理论	16
第 15 章 连续性与收敛性	17
第 16 章 度量空间的连续函数	18
第 17 章 映射的微分	19
第 18 章 Riemann 积分	20

## 第 1 章 极限

## 第 2 章 单变量函数的连续性

## 第 3 章 单变量函数的微分学

## 第 4 章 不定积分

## 第 5 章 单变量函数的积分学

### 5.1 变上限积分

#### 定理 5.1

对于函数  $I(x) = \int_0^{g(x)} f(t)dt$ , 我们有  $I'(x) = g'(x)f(x)$





## 第 6 章 常微分方程初步

## 第 7 章 无穷级数

## 第 8 章 空间解析几何

## 第9章 多变量函数的微分学

### 9.1 方向导数与梯度

#### 定义 9.1 (叉乘)

对于向量  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ , 定义叉乘为

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}\end{aligned}$$

#### 定义 9.2 (方向导数)

对于  $\mathbf{e} = \mathbf{i} \cos \alpha + \mathbf{j} \sin \alpha, f(x, y)$ , 如果极限

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + t \cos \alpha, y + t \sin \alpha) - f(x, y)}{t} \quad (9.1)$$

存在, 那么称极限值为  $f$  在点  $(x, y)$  沿方向  $\mathbf{e}$  的方向导数, 记为  $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}}(x, y)$ 。

#### 定理 9.1

设  $f(x, y)$  是平面区域  $D$  上的可微函数, 则  $f(x, y)$  在  $D$  上任何一点沿方向  $\mathbf{e} = \mathbf{i} \cos \alpha + \mathbf{j} \sin \alpha$  的方向导数都存在, 而且有

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \alpha \quad (9.2)$$

#### 定义 9.3 (梯度)

对于  $\mathbf{e} = \mathbf{i} \cos \alpha + \mathbf{j} \sin \alpha, f(x, y)$ , 记

$$\text{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} \quad (9.3)$$

为  $f$  在点  $(x, y)$  处的梯度。

因此函数沿任何方向的方向导数为该方向与函数的梯度的内积 ( $\theta$  为  $\text{grad} f$  和  $\mathbf{e}$  之间的夹角), 即

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}} = \text{grad} f \cdot \mathbf{e} = |\text{grad} f| |\mathbf{e}| \cos \theta \quad (9.4)$$

## 第 10 章 多变量函数的重积分

## 第 11 章 曲线积分和曲面积分

### 11.1 数量场在曲线上的积分

#### 定理 11.1

设  $L$  是空间上的一条光滑曲线, 其参数方程表示为

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \quad t \in [\alpha, \beta] \quad (11.1)$$

$\phi(x, y, z)$  在  $L$  上连续, 则  $\phi(x, y, z)$  在曲线  $L$  上可积, 且

$$\begin{aligned} \int_L \phi(x, y, z) ds &= \int_{\alpha}^{\beta} \phi(x(t), y(t), z(t)) |\mathbf{r}'(t)| dt \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \phi(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt \end{aligned}$$

**例题 11.1** 求曲线积分  $\int_L xy ds$ 。其中  $L$  为椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  在第一象限上的弧段。

**解**  $L$  的方程可写为

$$x = a \cos \theta, \quad y = b \sin \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},$$

所以

$$\begin{aligned} \int_L xy ds &= ab \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta \sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta} d\theta \\ &= \frac{ab}{2} \int_0^{\pi/2} \sqrt{b^2 + (a^2 - b^2) \sin^2 \theta} d \sin^2 \theta \\ &= \frac{ab}{3(a^2 - b^2)} (b^2 + (a^2 - b^2) \sin^2 \theta)^{3/2} \Big|_0^{\pi/2} \\ &= \frac{ab(a^2 + ab + b^2)}{3(a + b)} \end{aligned}$$

### 11.2 数量场在曲面上的积分

#### 定理 11.2

设  $S$  是一张有界的光滑曲面,  $\varphi(x, y, z)$  是定义在  $S$  上的数量场, 且在  $S$  上连续。设曲面的参数方程为

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}, \quad (u, v) \in D, \quad (11.2)$$

则  $\varphi(x, y, z)$  在  $S$  上可积, 为

$$\begin{aligned} \iint_S \varphi(x, y, z) dS &= \iint_D \varphi(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v| du dv \\ &= \iint_D \varphi(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EG - F^2} du dv \end{aligned}$$

其中  $\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v$  为向量叉乘 (参考定义 9.1), 以及

$$E = r'^2_u = x'^2_u + y'^2_u + z'^2_u,$$

$$G = r'^2_v = x'^2_v + y'^2_v + z'^2_v,$$

$$F = \mathbf{r}'_u \cdot \mathbf{r}'_v = x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v$$

**例题 11.2** 设  $S$  是第一卦限的球面,  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  ( $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ ), 计算曲面积分  $\iint_S (x^2 + y^2) dS$ 。

解 将球面  $S$  表示为参数方程

$$x = R \sin \theta \cos \varphi, y = R \sin \theta \sin \varphi, z = R \cos \theta,$$

则  $\theta, \varphi$  的变化范围是平面  $O'\theta\varphi$  上的矩形  $D'$

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2},$$

所以

$$\begin{aligned} \iint_S (x^2 + y^2) dS &= \iint_{D'} R^2 \sin^2 \theta \cdot R^2 \sin \theta d\theta d\varphi \\ &= R^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta d\theta \\ &= \frac{1}{3} \pi R^4 \end{aligned}$$

## 11.3 向量场在曲线上的积分

### 定理 11.3

设向量场  $\mathbf{v} = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$  在区域  $D$  上连续, 曲线  $L_{AB} \subset D$  具有参数方程表示

$$L_{AB}: \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, \quad \alpha \leq t \leq \beta, \quad (11.3)$$

且有连续的导函数, 参数  $t$  是正向参数, 则向量场在  $L_{AB}$  上可积, 且可化为下列定积分

$$\begin{aligned} \int_{L_{AB}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{v}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} (Px'(t) + Qy'(t) + Rz'(t)) dt \end{aligned} \quad (11.4)$$



**例题 11.3** 计算曲线积分  $\int_L xy dx + x^2 dy$ ,  $L$  是三角形  $OAB$  的正向周界 (如图11.1), 其中  $A(1, 0), B(1, 2), O(0, 0)$ 。

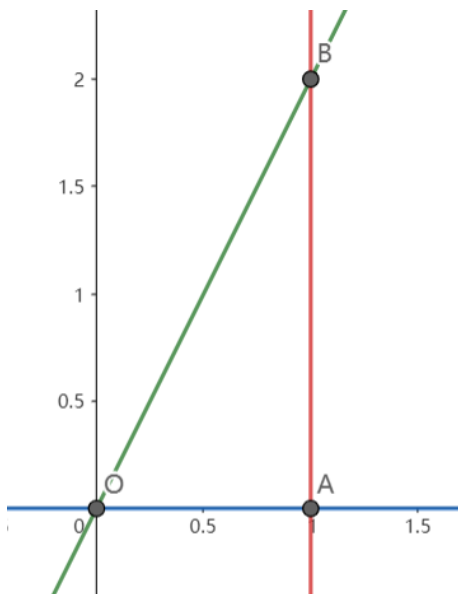


图 11.1

解 因为

$$\begin{aligned}\int_L xydx + x^2dy &= \int_{L_1} xydx + x^2dy + \int_{L_2} xydx + x^2dy \\ &\quad + \int_{L_3} xydx + x^2dy,\end{aligned}$$

在  $L_1$  上,  $y = 0, dy = 0, x$  是参变量,  $0 \leq x \leq 1$ , 所以

$$\int_{L_1} xydx + x^2dy = \int_0^1 x \cdot 0dx = 0;$$

在  $L_2$  上,  $x = 1, dx = 0, y$  是参变量,  $0 \leq y \leq 2$ , 所以

$$\int_{L_2} xydx + x^2dy = \int_0^2 1 \cdot dy = 2;$$

在  $L_3$  上,  $y = 2x, 0 \leq x \leq 1, x$  是参变量, 所以

$$\int_{L_3} xydx + x^2dy = \int_1^0 x \cdot 2xdx + x^2d(2x) = -\frac{4}{3}$$

从而算得

$$\int_L xy dx + x^2 dy = \frac{2}{3}$$

## 11.4 向量场在曲面上的积分



## 第 12 章 Fourier 分析

## 第 13 章 反常积分和含参变量积分

## 第 14 章 实属理论

## 第 15 章 连续性与收敛性

## 第 16 章 度量空间的连续函数

## 第 17 章 映射的微分

## 第 18 章 Riemann 积分