



Actuarial Sciences Review

作者: Lollins

组织: 安徽师范大学数学与统计学院

时间: June 25, 2024

邮箱: jieyu8258@gmail.com

唯有热爱可抵岁月长!

前言

由于 king 哥已经弄好了一份精美的精算学 pdf 电子笔记，若我再做精算学上课笔记，实乃多余。故我决定做一份精算学复习资料，主要是对精算学的一些重要知识点进行总结¹，以便于大家复习。

随着这学期的期末考试结束，大家的大学生涯基本也算是告一段落了。愿大家都能顺利通过考试，也祝大家顺利毕业，前程似锦！

Lollins

June 25, 2024

¹本文不涉及一些细节上证明以及推导，想了解公式由来的读者直接阅读 king 哥群里的 pdf 即可。

目录

期末复习相关内容

精算学的主要内容

1. 你能活多久?(生存分布)
2. 你死的时候, 保险公司支付你 1 元, 这 1 元的现值为多少?(人寿保险)
3. 在你活着时, 保险公司每年支付你 1 元, 这些支付的现值是多少?(生存年金)
4. 上述的寿险与生存年金, 你该向保险公司缴纳多少保费?(保费理论)
5. 保险公司为了保证支付, 要准备多少钱?(准备金理论)

题型

1. 填空题: $5 \times 3 = 15$ 分; (年金与寿险的关系, UDD 假设关系)
2. 分析题: $3 \times 7 = 21$ 分; (解释含义)
3. 解答题: $3 \times 4 = 12$ 分; (生存年金分类, 第四章与第五章的一些定义)
4. 计算题: $4 \times 10 = 40$ 分; (前四章一章一题)
5. 综合题: $1 \times 12 = 12$ 分. (重点复习第五章的例题)

注 连续分布就考指数, 离散分布就考均匀, 生死合险不考, 每年分成 m 个区间不考.

第1章 生存分布

1.1 新生儿的生存分布

定义 1.1 (生存函数)

称 $s(t) := P(X > t), t > 0$ 为 X 的生存函数.

推论 1.1

$$s(t) = 1 - F(t), s'(t) = -f(t).$$

定义 1.2 (死亡力函数)

称 $\mu(t) := -\frac{s'(t)}{s(t)}, t \geq 0$ 为新生儿的死亡力函数.

推论 1.2

关于 $\mu(t), s(t)$ 及 $f_X(t)$ 有如下结论:

1. $\mu(t) = -\frac{s'(t)}{s(t)} = \frac{f_X(t)}{1-F_X(t)} = \frac{f_X(t)}{s(t)};$
2. $f_X(t) = \mu(t)s(t);$
3. $s(t) = e^{-\int_0^t \mu(s)ds}.$

注

1. 由 $s(t) = e^{-\int_0^t \mu(s)ds}$ 及 $\mu(t) = -\frac{s'(t)}{s(t)}$ 可知, 生存函数 $s(t)$ 与死亡力函数 $\mu(t)$ 相互唯一确定.
2. 一个函数 $\mu(t)$ 要作为死亡力, 必须满足以下两条:
 - (a). $\mu(t) \geq 0, \forall t \geq 0$ (保证 $s(t)$ 单调递减).
 - (b). $\int_0^\infty \mu(t)dt = \infty$ (保证 $s(\infty) = 0$).

例题 1.1 假设新生儿的寿命服从以 λ 为参数的指数分布, 则密度函数 $f_X(t) = \lambda e^{-\lambda t}, t > 0$.

解 分布函数 $F_X(t) = \int_0^t f_X(s)ds = 1 - e^{-\lambda t}, t > 0$.

生存函数 $s(t) = 1 - F_X(t) = e^{-\lambda t}, t > 0$. 故其死亡力函数为

$$\mu(t) = -\frac{s'(t)}{s(t)} = -\frac{-\lambda e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}} \equiv \lambda. \quad (1.1)$$

注 由(1.1)式可知, 若新生儿寿命服从以 λ 为参数的指数分布, 则死亡力 $\mu(t) \equiv \lambda$, 和 t 无关. 这表示新生儿的死亡力在任何时候都是一样的. 也就是说, 新生儿永远年轻. 这当然与实际情况不符. 所以, 指数分布作为寿命分布是有缺陷的. 但由于指数分布的计算较为简单, 所以在理论研究中, 学者们很多时候都采用指数分布作为寿命分布.

定义 1.3 (整数年龄与分数年龄)

很多时候, 保险金都是在整数时刻支付的. 所以有必要研究整数年龄和分数年龄. 设 $K(0)$ 为 X 的整数部分, $S(0)$ 为 X 的分数部分. 即

$$X = K(0) + S(0).$$

记 $\dot{e}_0 = E(X)$, 它表示新生儿的期望寿命; 记 $e_0 = E(K(0))$, 它表示期望整数寿命. 易知

$$e_0 \leq \dot{e}_0 < e_0 + 1.$$

引理 1.1

设随机变量 X 的 n 阶矩存在, 即 $E(X^n) < \infty$, 则 $\lim_{M \rightarrow \infty} M^n s(M) = 0$.

推论 1.3

如下结论成立:

1. $e_0 = E(X) = \int_0^\infty s(t)dt$;
2. $E(X^2) = \int_0^\infty 2ts(t)dt$;
3. $E(K(0)^2) = \sum_{n=1}^\infty (2n-1)s(n)$;
4. $e_0 = E(K(0)) = \sum_{n=1}^\infty s(n)$.



注 $E(X^n) = \int_0^\infty nt^{n-1}s(t)dt$.

1.2 x 岁个体的生存分布定义 1.4 (x 岁个体余命的分布、密度及生存函数)

将一个 x 岁还活着的个体记为 (x) . 个体 (x) 的余命记为 $T(x)$, 显然有 $T(x) = X - x$.

记 $F_{T(x)}(t)$ 为 $T(x)$ 的分布函数, $f_{T(x)}(t)$ 为 $T(x)$ 的密度函数, 则

$$F_{T(x)}(t) = 1 - \frac{s(x+t)}{s(x)}, \quad f_{T(x)}(t) = -\frac{s'(x+t)}{s(x)}.$$

称 $s_{T(x)}(t) := P(T(x) > t)$ 为个体 (x) 的生存函数.

定义 1.5 (x 岁个体的死亡率)

称 $\mu_x(t) = -\frac{s'_{T(x)}(t)}{s_{T(x)}(t)}$ 为 x 岁个体在 t 年后的死亡率函数.



推论 1.4

我们有

1. $s_{T(x)}(t) = 1 - F_{T(x)}(t) = \frac{s(x+t)}{s(x)}$;
2. $\mu_x(t) = \frac{f_{T(x)}(t)}{1 - F_{T(x)}(t)} = \frac{f_{T(x)}(t)}{s_{T(x)}(t)} = -\frac{s'_{T(x)}(t)}{s_{T(x)}(t)}$.
3. $f_{T(x)}(t) = s_{T(x)}(t)\mu_x(t)$;
4. $\mu_x(t) = \mu(x+t)$;
5. $s_{T(x)}(t) = e^{-\int_0^t \mu_x(s)ds} = e^{-\int_0^t \mu(x+s)ds} = e^{-\int_x^{x+t} \mu(s)ds}$.



注 理论上, 一个人一旦出生, 其死亡率就“注定”了. 如果他在 x 岁还活着, 在 t 年后他变为 $x+t$ 岁, 此时他的死亡率是 $\mu_x(t)$. 换一种观点, 如果站在 0 时刻 (他出生时) 看, 他在 $x+t$ 岁的死亡率应为 $\mu(x+t)$. 故有

$$\mu_x(t) = \mu(x+t).$$

例题 1.2 设新生儿的寿命服从以 $\lambda > 0$ 为参数的指数分布. 则 $s(t) = e^{-\lambda t}, t > 0$.

解 从而有

$$F_{T(x)}(t) = 1 - \frac{s(x+t)}{s(x)} = 1 - \frac{e^{-\lambda(x+t)}}{e^{-\lambda x}} = 1 - e^{-\lambda t} = F_X(t);$$

$$f_{T(x)}(t) = F'_{T(x)}(t) = F'_X(t) = f_X(t);$$

$$\mu_x(t) = \mu(x+t) \equiv \lambda.$$

以上计算再次表明, 在指数分布寿命假设下, 新生儿的寿命 X 与 x 岁的个体的余命 $T(x)$ 的分布相同. 进一步说明指数分布作为寿命分布是有缺陷的.

命题 1.1

$\forall u, t > 0$, 有

$$P(T(x) > t + u | T(x) > t) = P(T(x+t) > u). \quad (1.2)$$

该式的含义为: 一个 x 岁的人, 在 $x+t$ 岁还活着的条件下, 再活 u 年不死的概率与一个 $x+t$ 岁的人在 u 年内未死的概率相等.



注由(??)式立即可得

$$P(T(x) \leq t + u | T(x) > t) = P(T(x+t) \leq u). \quad (1.3)$$

例题 1.3 设新生儿的寿命服从指数分布, 参数为 λ .

解 我们有 $\mu(t) \equiv \lambda$, 且

$$\begin{aligned} s(t) &= e^{-\lambda t}, t > 0. \\ F_{T(x)} &= 1 - \frac{s(x+t)}{s(x)} = 1 - e^{-\lambda t} = F_x(t). \\ f_{T(x)}(t) &= F'_{T(x)}(t) = \lambda e^{-\lambda t} = f_x(t), t > 0. \\ s_{T(x)}(t) &= \frac{s(x+t)}{s(x)} = e^{-\lambda t} = s(t), t > 0. \\ \mu_x(t) &= \mu(x+t) \equiv \mu, t > 0. \\ e_x &= \sum_{k=1}^{\infty} k p_x = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda k} = \frac{e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}}. \\ \dot{e}_x &= \int_0^{\infty} t p_x dt = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$

显而易见, 这里的 \dot{e}_x 和 e_x 与 x 无关, 也就是说, 所有人的剩余寿命的期望都是一样的, 和他现在的年龄无关. 这进一步说明指数分布作为寿命分布是有缺陷的. 此外, 因 $\dot{e}_x = ET(x) = \frac{1}{\lambda}$, 故指数分布的参数 λ 正好是期望寿命的倒数.

命题 1.2

定义如下几个记号:

1. 用 ${}_t p_x \stackrel{\text{def}}{=} P(T(x) > t) = s_{T(x)}(t)$ 表示个体 (x) 在 t 年后还活着的概率. 显然有

$${}_t p_x = s_{T(x)}(t) = e^{-\int_0^t \mu_x(s) ds} = e^{-\int_0^t \mu(x+s) ds} = e^{-\int_x^{x+t} \mu(s) ds}.$$

2. 用 ${}_t q_x \stackrel{\text{def}}{=} P(T(x) \leq t) = F_{T(x)}(t)$ 表示一个 x 岁的人在 t 年内死亡的概率. 易知

$${}_t p_x + {}_t q_x = 1.$$

3. 用 ${}_{u|t} q_x \stackrel{\text{def}}{=} P(u < T(x) \leq u+t)$ 表示一个 x 岁的人在 $x+u$ 岁还活着, 但在未来 t 年内死亡的概率.

**推论 1.5**

如下几个结论成立:

1. $\frac{d({}_t p_x)}{dt} = -{}_t p_x \mu_x(t)$;
2. $\frac{d({}_t p_x)}{dx} = {}_t p_x (\mu(x) - \mu(x+t))$;
3. $f_{T(x)}(t) = {}_t p_x \cdot \mu_x(t)$;
4. ${}_t p_x = {}_s p_x \cdot {}_{t-s} p_{x+s}, 0 \leq s \leq t$;
5. ${}_{u|t} q_x = {}_u p_x - {}_{u+t} p_x, u, t > 0$;
6. ${}_{u|t} q_x = {}_u p_x {}_t q_{x+u}, u, t \geq 0$.



定义 1.6 (个体 (x) 的整数与分数余命及期望)

类似处理新生儿的寿命一样, 可将个体 (x) 的余命 $T(x)$ 分为整数部分和小数部分. 设

$$T(x) = K(x) + S(x),$$

其中 $K(x)$ 是 $T(x)$ 的整数部分, $S(x)$ 是 $T(x)$ 的小数部分. 记

$$\dot{e}_x \stackrel{\text{def}}{=} E(T(x)), \quad e_x \stackrel{\text{def}}{=} E(K(x)).$$

则简单计算可知

$$\dot{e}_x = E(T(x)) = \int_0^\infty {}_t p_x dt, \quad e_x = E(K(x)) = \sum_{k=1}^\infty k p_x.$$



1.3 随机生存群

定义 1.7 (模型描述)

设 0 时刻系统中有 l_0 个新生儿, 他们的寿命独立同分布, 服从某分布, 生存函数为 $s(t), t \geq 0$. 记

$\mathcal{L}(x)$ 为在 x 岁还活着的总人数;

${}_t \mathcal{D}_x$ 为 $[x, x+t]$ 内死去的总人数.

设系统中初始时刻的 l_0 个人的寿命分别为 X_1, X_2, \dots, X_n , 则他们独立同分布, 且

$$P(X_i > t) = s(t), i = 1, \dots, n.$$

显然有

$$\mathcal{L}(x) = \sum_{i=1}^{l_0} I_{\{X_i \geq x\}}, \quad {}_t \mathcal{D}_x = \sum_{i=1}^{l_0} I_{\{x \leq X_i < x+t\}},$$

其中 $I_A = \begin{cases} 1, & \omega \in A, \\ 0, & \omega \in A^c \end{cases}$ 为示性函数.

令

$l_x \stackrel{\text{def}}{=} E(\mathcal{L}(x))$, 它表示在 x 岁还活着的期望人数;

${}_t d_x \stackrel{\text{def}}{=} E({}_t \mathcal{D}_x)$, 它表示在 $[x, x+t]$ 内死去人数的期望.

**推论 1.6**

如下结论成立:

1. $l_x = l_0 s(x), {}_t d_x = l_x - l_{x+t};$
2. ${}_t p_x = \frac{l_{x+t}}{l_x};$
3. ${}_t q_x = \frac{{}_t d_x}{l_x};$
4. $l_{x+t} = l_x e^{-\int_x^{x+t} \mu(s) ds};$
5. $\frac{dl_x}{dx} = -l_x \mu(x);$
6. ${}_n d_x = \int_x^{x+n} l_y \mu(y) dy.$



注 下面我们分析等式 ${}_t d_x = \int_x^{x+t} l_y \mu(y) dy$ 的含义.

等式左端 ${}_t d_x$ 表示在 $[x, x+t]$ 内死去的人数. 现分析右端. 注意到

$$\mu(y) dy = -\frac{s'(y)}{s(y)} dy = -\frac{ds(y)}{s(y)} = \frac{s(y) - s(y + \Delta y)}{s(y)}.$$

所以 $\mu(y) dy$ 表示一个人在 y 岁还活着的条件下, 在 $[y, y + dy]$ 内死去的概率, 于是 $l_y \mu(y) dy$ 表示在 $[y, y + dy]$ 内死去的人数. 对 y 积分可知, 等式右端的 $\int_x^{x+t} l_y \mu(y) dy$ 表示在 $[x, x+t]$ 内死去的人数. 所以右端等于左端.

1.4 生命表的元素

命题 1.3

在精算学的诸多记号中,若左下标是 1,通常将其省略,所以我们有

$$p_x \triangleq {}_1p_x, q_x \triangleq {}_1q_x,$$

$$L_x \triangleq {}_1L_x, {}_u|q_x \triangleq {}_u|{}_1q_x.$$



命题 1.4

记 $a \wedge b = \min\{a, b\}$, $a \vee b = \max\{a, b\}$, $EX = \int_0^\infty xf(x)dx$, $X \geq 0$. 计算可得

$$E(X \wedge t) = \int_0^t xf(x)dx + tP(X > t).$$



定义 1.8 (条件数学期望)

设 A 是一个随机事件, X 为一个随机变量, 给定事件 A 的条件下, X 的条件期望定义为

$$E(X|A) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{E(XI_A)}{EI_A} = \frac{E(XI_A)}{P(A)}.$$

可以类似条件概率的定义理解条件期望的定义.



定义 1.9

${}_tL_x$: 所有人在 $[x, x+t]$ 内活过的总时间, 记作 ${}_tL_x = l_x E(T(x) \wedge t)$.



推论 1.7

如下结论成立:

$$\begin{aligned} {}_tL_x &= l_x E(T(x) \wedge t) \\ &= \int_0^t sl_{x+s} \mu(x+s) ds + tl_{x+t} \\ &= \int_0^t l_{x+s} ds \end{aligned}$$



注 表达式 $\int_0^t sl_{x+s} \mu(x+s) ds + tl_{x+t}$ 的含义如下:

一方面, 在 $x+s$ 岁活着的人有 l_{x+s} 个, 每个人在 $[x+s, x+s+ds]$ 内死去的概率为 $\mu(x+s)ds$, 所以, 在 $[x+s, x+s+ds]$ 内死去的人数为 $l_{x+s} \mu(x+s)ds$, 他们每个人在 $[x, x+t]$ 内活 s 年, 所以在 $x+s$ 岁死去的人在 $[x, x+t]$ 内活的总时间为 $sl_{x+s} \mu(x+s)ds$, 再对 s 在 $(0, t)$ 求积分 (求和) 可知, $\int_0^t sl_{x+s} \mu(x+s)ds$ 表示在 $[x, x+t]$ 内死去的人在这段时间内活过的总时间.

另一方面, 在 $x+t$ 岁还活着的人有 l_{x+t} 个, 他们每个人在 $[x, x+t]$ 内活了 t 岁, 故他们在 $[x, x+t]$ 内总共活了 tl_{x+t} 岁.

综合以上分析, $\int_0^t sl_{x+s} \mu(x+s)ds + tl_{x+t}$ 表示所有人在 $[x, x+t]$ 内活过的总时间, 这是一个复杂的公式, 但它有一个简单的表达 $\int_0^t l_{x+s} ds$.

定义 1.10

$a(x)$: 一个 x 岁的人在 1 年内死去的条件下, 在 $[x, x+1)$ 内活过的期望时间, 记作 $a(x) = E(T(x)|T(x) \leq 1)$.



推论 1.8

以下等式成立:

1. $a(x) = \int_0^1 t {}_t p_x u_x(t) dt$;
2. $L_x = d_x a(x) + l_{x+1}$.



注 表达式 $L_x = d_x a(x) + l_{x+1}$ 的含义如下:

等式右端的 $d_x a(x)$ 表示 $[x, x+1)$ 内死去的人在 $[x, x+1)$ 内活过的总时间. 右端的 $l_{x+1} \times 1$ 表示在 $x+1$ 岁活着的 l_{x+1} 人在 $[x, x+1)$ 内活过的总时间. 所以, 右端表示所有人在 $[x, x+1)$ 活过的总时间, 正好等于左端的 L_x .

命题 1.5

1. 中心死亡率: ${}_n m_x = \frac{{}_n q_x}{\int_0^n {}_t p_x dt} = \frac{{}_n d_x}{{}_n L_x}$;
2. $T_x \triangleq \int_0^\infty l_{x+s} ds = {}_\infty L_x$, T_x 表示所有人在 $[x, \infty)$ 内活过的总时间;
3. $Y_x \triangleq \int_0^\infty T_{x+s} ds$.



1.5 分数年龄上的死亡假设

定义 1.11 (死亡力均匀分布假设 (UDD 假设))

若 x 为非负整数, $s(t)$ 是生存函数, 若 $\forall t \in [0, 1)$, 都有

$$s(x+t) = (1-t)s(x) + ts(x+1). \quad (1.4)$$

称在 $[x, x+1)$ 上, 死亡力均匀分布假设成立.

**推论 1.9**

设 $[x, x+1)$ 上 UDD 假设成立, 则有以下结论:

1. $l_{x+t} = (1-t)l_x + tl_{x+1}, t \in [0, 1)$;
2. ${}_t d_x = td_x, t \in [0, 1)$;
3. ${}_t q_x = tq_x, t \in [0, 1)$;
4. $f_{T(x)}(t) = q_x, t \in [0, 1)$;
5. $\mu_x(t) = \frac{q_x}{1-tq_x}$.

**命题 1.6**

在 UDD 假设之下, 我们有如下两个命题:

1. 已知在每一年龄段上 UDD 假设成立, 则 $K(x)$ 与 $S(x)$ 相互独立, 且 $S(x)$ 服从 $[0, 1]$ 上的均匀分布;
2. 在每一年龄段 UDD 假设成立时, 有

$$\hat{e}_x = e_x + \frac{1}{2}, \quad D(T(x)) = D(K(x)) + \frac{1}{12}.$$

**定义 1.12 (常数死亡力假设)**

设 x 为整数, 若 $\forall t \in [0, 1)$ 有

$$\ln s(x+t) = (1-t) \ln s(x) + t \ln s(x+1). \quad (1.5)$$

则称生存函数在年龄段 $[x, x+1)$ 满足常数死亡力假设.



推论 1.10

设在年龄段 $[x, x+1)$ 常数死亡力假设成立, 则对 $t \in (0, 1)$, 有

1. 期望生存人数满足 $\ln l_{x+t} = (1-t) \ln l_x + t \ln l_{x+1}$;
2. 死亡力为常数, 即 $\mu_x(t) = -\ln p_x \triangleq \mu$;
3. $l_{x+t} = l_x e^{-\mu t}$, ${}_t q_x = 1 - p_x^t$, $f_{T(x)}(t) = -p_x^t \ln p_x$.



例题 1.4 设 $S(x) = 1 - \frac{x}{12}$, $0 \leq x \leq 12$, l_0 个个体相互独立, 生存函数都是 $S(x)$.

- (1) 求 $({}_3\mathcal{D}_0, {}_3\mathcal{D}_3, {}_3\mathcal{D}_6, {}_3\mathcal{D}_9)$ 的联合分布;
- (2) 求这四个随机变量的期望和方差;
- (3) 求它们两两之间的相关系数.

解 易知 l_0 个人的寿命 $X_1, X_2, \dots, X_{l_0} \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} U[0, 12]$. 且随机变量满足

$${}_3\mathcal{D}_0 = \sum_{k=1}^{l_0} I_{\{0 \leq X_k \leq 3\}}, {}_3\mathcal{D}_3 = \sum_{k=1}^{l_0} I_{\{3 \leq X_k \leq 6\}}, {}_3\mathcal{D}_6 = \sum_{k=1}^{l_0} I_{\{6 \leq X_k \leq 9\}}, {}_3\mathcal{D}_9 = \sum_{k=1}^{l_0} I_{\{9 \leq X_k \leq 12\}}.$$

(1) 令事件 $A = \{{}_3\mathcal{D}_0 = k_1, {}_3\mathcal{D}_3 = k_2, {}_3\mathcal{D}_6 = k_3, {}_3\mathcal{D}_9 = k_4\}$, 若事件 A 发生, 则在 l_0 个人中, 有 k_1 人在 $[0, 3]$ 内死亡; 有 k_2 人在 $[3, 6]$ 内死亡; 有 k_3 人在 $[6, 9]$ 内死亡; 有 k_4 人在 $[9, 12]$ 内死亡, 其中 $k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = l_0$. 从 $k_1 + k_2 + k_3 + k_4$ 个人中, 选出 k_1 个人在 $[0, 3]$ 内死亡, 有 $C_{k_1+k_2+k_3+k_4}^{k_1}$ 种选法; 从 $k_2 + k_3 + k_4$ 个人中, 选出 k_2 个人在 $[3, 6]$ 内死亡, 有 $C_{k_2+k_3+k_4}^{k_2}$ 种选法; 从 $k_3 + k_4$ 个人中, 选出 k_3 个人在 $[6, 9]$ 内死亡, 有 $C_{k_3+k_4}^{k_3}$ 种选法. 于是

$$P(A) = \frac{(k_1 + k_2 + k_3 + k_4)!}{k_1! k_2! k_3! k_4!} \cdot {}_3q_0^{k_1} \cdot {}_3|_3q_0^{k_2} \cdot {}_6|_3q_0^{k_3} \cdot {}_9|_3q_0^{k_4}.$$

- (2) 对于一个二项分布 $B(n, p)$, 其期望 $E[X] = np$, 方差 $\text{Var}(X) = np(1-p)$.

因此, 对于每个随机变量 ${}_3\mathcal{D}_k$ 有

期望

$$E({}_3\mathcal{D}_k) = \frac{l_0}{4};$$

方差

$$\text{Var}({}_3\mathcal{D}_k) = l_0 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3l_0}{16}.$$

- (3) 以 ${}_3\mathcal{D}_0, {}_3\mathcal{D}_3$ 的相关系数为例:

$$\begin{aligned} \text{Cov}({}_3\mathcal{D}_0, {}_3\mathcal{D}_3) &= E({}_3\mathcal{D}_0 {}_3\mathcal{D}_3) - E({}_3\mathcal{D}_0)E({}_3\mathcal{D}_3) \\ &= E\left(\sum_{k=1}^{l_0} I_{\{0 \leq X_k \leq 3\}} \cdot \sum_{j=1}^{l_0} I_{\{3 \leq X_j \leq 6\}}\right) - \left(\frac{l_0}{4}\right)^2 \\ &= \sum_{k=1}^{l_0} \sum_{j \neq k} E(I_{\{0 \leq X_k \leq 3\}} \cdot I_{\{3 \leq X_j \leq 6\}}) - \left(\frac{l_0}{4}\right)^2 \\ &= \frac{l_0(l_0-1)}{16} - \frac{l_0^2}{16} = -\frac{l_0}{16}. \end{aligned}$$

(对于 $\sum_{k=1}^{l_0} \sum_{j \neq k} E(I_{\{0 \leq X_k \leq 3\}} \cdot I_{\{3 \leq X_j \leq 6\}}) = \frac{l_0(l_0-1)}{16}$ 的理解: 其中 $\sum_{k=1}^{l_0} \sum_{j \neq k} 1 = l_0(l_0-1)$, 而 $p(I_{c \leq X_i \leq c+3}) = \frac{1}{4}$, 故 $I_{0 \leq X_k \leq 3}$ 与 $I_{3 \leq X_j \leq 6}$ 同时取 1 的概率为 $\frac{1}{16}$.)

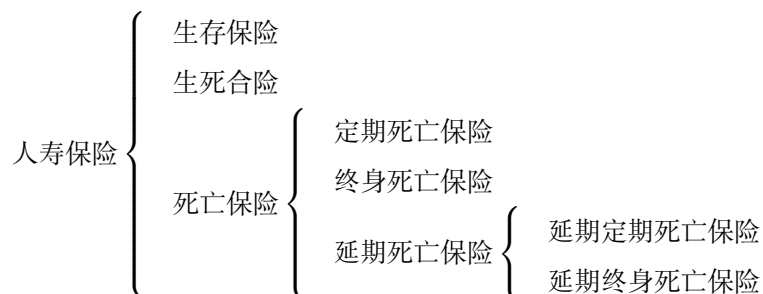
求出协方差后即可求相关系数:

$$\begin{aligned} \rho({}_3\mathcal{D}_0, {}_3\mathcal{D}_3) &= \frac{\text{Cov}({}_3\mathcal{D}_0, {}_3\mathcal{D}_3)}{\sqrt{D({}_3\mathcal{D}_0)} \cdot \sqrt{D({}_3\mathcal{D}_3)}} \\ &= \frac{-\frac{l_0}{16}}{\sqrt{\frac{3}{16}l_0} \cdot \sqrt{\frac{3}{16}l_0}} \\ &= -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

类似计算可知, 两两之间所有相关系数皆为 $-\frac{1}{3}$.

第2章 人寿保险

2.1 人寿保险概述



2.2 生存保险

定义 2.1 (支付现值)

若被保险人在 n 年内死亡 (即 $T(x) < n$), 则不予任何支付;

若他在 n 年内未死 (即 $T(x) \geq n$), 则在 n 时刻支付他 1 元保险金.

若 $T(x) < n$, 则 $Z = 0$; 若 $T(x) \geq n$, 则 $Z = 1 \cdot \nu^n = \nu^n$, 其中贴现因子 $\nu = \frac{1}{1+i}$.

即 $Z = \nu^n I_{\{T(x) \geq n\}}$.



命题 2.1 (精算现值与方差)

- $E(Z) = \nu^n \cdot {}_n p_x = A_{x:\overline{n}|} = {}_n E_x$;
- $E(Z^2) = E\left([\nu^n I_{\{T(x) \geq n\}}]^2\right) = E(\nu^{2n} I_{\{T(x) \geq n\}}) = \nu^{2n} \cdot {}_n p_x$;
- $DZ = E(Z^2) - (E(Z))^2 = \nu^{2n} \cdot {}_n p_x \cdot {}_n q_x$.



推论 2.1 (精算现值的性质)

$\forall 0 \leq k \leq n$, 有

- ${}_n E_x = {}_k E_x \cdot {}_{n-k} E_{x+k}$;
- $(1+i)^k \cdot l_x \cdot {}_n E_x = l_{x+k} \cdot {}_{n-k} E_{x+k}$.



注 等式 $(1+i)^k \cdot l_x \cdot {}_n E_x = l_{x+k} \cdot {}_{n-k} E_{x+k}$ 的含义如下:

在 0 时刻, l_x 个人各自买了一份 n 年期的生存保险, 保费总额为 $l_x \cdot {}_n E_x$, k 年后, 这笔钱的积累值为 $(1+i)^k \cdot l_x \cdot {}_n E_x$, 若此时保险公司破产不干了, 他分给在 k 时刻还活着的 l_{x+k} 个人每人 ${}_{n-k} E_{x+k}$ 元, 这正好够每个人去重新买一份 $n-k$ 年期的生存保险.

2.3 n 年期(定期)死亡保险

2.3.1 死亡立即支付的 n 年期定期寿险

定义 2.2 (支付现值)

若 (x) 在 n 年内死亡(即 $T(x) < n$), 则在 $T(x)$ 时刻支付 1 元保险金;

若 (x) 在 n 年内未死(即 $T(x) \geq n$), 则不予支付.

若 $T(x) < n$, 则 $Z = \nu^{T(x)}$; 若 $T(x) \geq n$, 则 $Z = 0$.

所以 $Z = \nu^{T(x)} I_{\{T(x) < n\}}$.



命题 2.2 (精算现值与方差)

- $E(Z) = \int_0^n \nu^t \cdot {}_t p_x \cdot \mu_x(t) dt = \int_0^n e^{-\delta t} \cdot {}_t p_x \cdot \mu_x(t) dt = \bar{A}_{x:\overline{n}|}^1$;
- $DZ = {}^2\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 - (\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1)^2 = \bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 @ 2\delta - (\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 @ \delta)^2$.



注 记 ${}^j\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 = \int_0^n e^{-j\delta t} \cdot {}_t p_x \cdot \mu_x(t) dt$, ${}^j\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 @ \delta = \bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 @ j\delta$.

推论 2.2 (精算现值的性质)

$\forall 0 \leq k \leq n$, 有

- $\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 = \bar{A}_{x:\overline{k}|}^1 + {}_k E_x \cdot \bar{A}_{x+k:\overline{n-k}|}^1$;
- $l_x \cdot \bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 = \int_0^n \nu^t \cdot l_{x+t} \cdot \mu_x(t) dt$.



注 等式 $l_x \cdot \bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 = \int_0^n \nu^t \cdot l_{x+t} \cdot \mu_x(t) dt$ 的含义如下::

$\mu_x(t) dt$ 表示在 $[x+t, x+t+dt]$ 内死去的概率, 所以 $l_{x+t} \mu_x(t) dt$ 表示在 $[x+t, x+t+dt]$ 内死去的人数, 在这期间内死去的人每人支付 1 元保险金, 共 $l_{x+t} \mu_x(t) dt$ 元, 这些钱的现值为 $\nu^t l_{x+t} \mu_x(t) dt$, 于是 $\int_0^n \nu^t l_{x+t} \mu_x(t) dt$ 表示在 $[x, x+n]$ 内死去的人领取的保险的总现值, 这些钱应等于初始时刻的 l_x 个人的保费总额 $l_x \bar{A}_{x:\overline{n}|}^1$.

例题 2.1 假设死亡力 $\mu(t) \equiv \mu$, 利息力为 δ , 个体 (x) 投了一个 n 年期寿险, 计算精算现值及支付现值的方差.

解 由于死亡力是一个常数, 所以

$$\begin{aligned} \bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 &= \int_0^n e^{-\delta t} {}_t p_x \mu_x(t) dt = \int_0^n e^{-\delta t} \cdot e^{-\int_x^{x+t} \mu ds} \mu dt \\ &= \int_0^n e^{-\delta t} \cdot e^{-\mu t} \mu dt = \frac{\mu}{\mu + \delta} (1 - e^{-(\mu + \delta)n}). \end{aligned}$$

进而有

$${}^2\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 = \frac{\mu}{\mu + 2\delta} (1 - e^{-(\mu + 2\delta)n}).$$

于是

$$\begin{aligned} DZ &= {}^2\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 - (\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1)^2 \\ &= \frac{\mu}{\mu + 2\delta} (1 - e^{-(\mu + 2\delta)n}) - \left(\frac{\mu}{\mu + \delta} (1 - e^{-(\mu + \delta)n}) \right)^2. \end{aligned}$$

2.3.2 死亡年末支付的 n 年期定期寿险

定义 2.3 (支付现值)

若个体 (x) 在 n 年内死亡, 则在其死亡年末支付 1 元;

若个体 (x) 在 n 年内未死, 则不予支付.

$Z = \nu^{K(x)+1} I_{\{T(x) < n\}}$.



命题 2.3 (精算现值与方差)

1. $E(Z) = \sum_{k=0}^{n-1} \nu^{k+1} {}_k|q_x = A_{x:\overline{n}|}^1$;
2. $DZ = {}^2A_{x:\overline{n}|}^1 - (A_{x:\overline{n}|}^1)^2$, 其中 ${}^2A_{x:\overline{n}|}^1 = \sum_{k=0}^{n-1} \nu^{2(k+1)} {}_k|q_x$.

推论 2.3 (精算现值的性质)

$\forall 0 \leq m \leq n$, 有 $A_{x:\overline{n}|}^1 = A_{x:\overline{m}|}^1 + m E_x \cdot A_{x+m:\overline{n-m}|}^1$.

注意到当 $m=1$ 时, $A_{x:\overline{1}|}^1 = \nu q_x$, ${}_1E_x = \nu p_x$, 立即可得

1. $A_{x:\overline{n}|}^1 = \nu q_x + \nu p_x \cdot A_{x+1:\overline{n-1}|}^1$;
2. $(1+i)l_x A_{x:\overline{n}|}^1 = d_x + l_{x+1} A_{x+1:\overline{n-1}|}^1$.

注 等式 $(1+i)l_x A_{x:\overline{n}|}^1 = d_x + l_{x+1} A_{x+1:\overline{n-1}|}^1$ 的含义如下:

此式的左端表示在 0 时刻, l_x 个人各自买了一份 n 年期的死亡保险, 保费总额为 $l_x A_{x:\overline{n}|}^1$. 一年后, 这笔钱的积累值为 $(1+i)l_x A_{x:\overline{n}|}^1$. 右端表示, 在 $[0, 1]$ 之间有 d_x 个人死去, 保险公司需给他们每人 1 元, 共 d_x 元. 若此时保险公司破产不干了, 他分给在 1 时刻还活着的 l_{x+1} 个人每人 $A_{x+1:\overline{n-1}|}^1$ 元, 这正好够每个人去重新买一份 $n-1$ 年期的死亡保险. 所以保险公司一年后的支出总额为 $d_x + l_{x+1} A_{x+1:\overline{n-1}|}^1$, 正好等于保险公司收到总保费在一年后的累计值. 所以左端等于右端.

例题 2.2 设一个 20 岁的人买了一份 10 年期的死亡保险, 设其余命 $T(20)$ 服从 $[0, 80]$ 上的均匀分布, $i = 0.05$, 保险金死亡年末支付 10 万元.

解 支付现值

$$Z = \nu^{K(20)+1} I_{T(20) < 10} \cdot 100000,$$

精算现值

$$\begin{aligned} E(Z) &= 100000 \cdot A_{20:\overline{10}|}^1 \\ &= 100000 \cdot \sum_{k=0}^9 \nu^{k+1} \cdot {}_k|q_{20} \\ &\approx 9652.1687. \end{aligned}$$

命题 2.4 (死亡年末支付与死亡立即支付的关系)

设死亡力均匀分布假设成立, 则 $\overline{A}_{x:\overline{n}|}^1 = \frac{i}{\delta} A_{x:\overline{n}|}^1$.

2.4 终身死亡保险

2.4.1 死亡后立即支付的终身死亡保险

定义 2.4 (支付现值)

在个体 (x) 死亡时刻立刻支付 1 元保险金, $Z = \nu^{T(x)}$.

命题 2.5 (精算现值与方差)

1. $E(Z) = \int_0^\infty \nu^t {}_t p_x \mu_x(t) dt = \overline{A}_x$;
2. $DZ = {}^2\overline{A}_x - (\overline{A}_x)^2$, 其中 ${}^2\overline{A}_x = \int_0^\infty \nu^{2t} {}_t p_x \mu_x(t) dt$.

推论 2.4 (精算现值的性质)

1. 对 $n \geq 1$, 有 $\bar{A}_x = \bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 + {}_nE_x \cdot \bar{A}_{x+n}$;
2. $\frac{d\bar{A}_x}{dx} = \delta\bar{A}_x + \mu(x)(\bar{A}_x - 1)$.



例题 2.3 设死亡力为 μ , 利息力为 δ , 个体 (x) 投了一份死亡立即支付的终身寿险, 求 \bar{A}_x , ${}^2\bar{A}_x$ 和给付现值 Z 的方差 $D(Z)$.

解

$$\begin{aligned}
 \bar{A}_x &= \int_0^\infty e^{-\delta t} \cdot {}_t p_x \cdot \mu_x(t) dt \\
 &= \int_0^\infty e^{-\delta t} \cdot e^{-\int_x^{x+t} \mu(s) ds} \cdot \mu_x(t) dt \\
 &= \int_0^\infty e^{-\delta t} \cdot e^{-\int_x^{x+t} \mu ds} \cdot \mu dt \\
 &= \int_0^\infty e^{-\delta t} \cdot e^{-\mu t} \cdot \mu dt \\
 &= \frac{\mu}{\delta + \mu}, \\
 {}^2\bar{A}_x &= \frac{\mu}{2\delta + \mu}, \\
 DZ &= {}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2 = \frac{\mu}{2\delta + \mu} - \left(\frac{\mu}{\delta + \mu}\right)^2.
 \end{aligned}$$

2.4.2 死亡年末支付的终身寿险

定义 2.5 (支付现值)

在个体 (x) 死亡的年末, 保险人支付 1 元保险金, $Z = \nu^{K(x)+1}$.



命题 2.6 (精算现值与方差)

1. $E(Z) = \sum_{k=0}^\infty \nu^{k+1} {}_k|q_x = A_x$;
2. $DZ = {}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2$, 其中 ${}^2\bar{A}_x = \int_0^\infty \nu^{2t} {}_t p_x \mu_x(t) dt$.



推论 2.5 (精算现值的性质)

1. $A_x = A_{x:\overline{n}|}^1 + {}_nE_x \cdot A_{x+n}$;
2. $A_x = \nu q_x + \nu p_x \cdot A_{x+1}$;
3. $(1+i)A_x = q_x + p_x \cdot A_{x+1}$;
4. $(1+i)l_x A_x = d_x + l_{x+1} \cdot A_{x+1}$;
5. $l_x A_x = \sum_{k=0}^\infty \nu^{k+1} \cdot d_{x+k}$.



命题 2.7

在 UDD 假设之下, 有 $\bar{A}_x = \frac{i}{\delta} A_x$.



2.5 生死合险 (两全保险)

2.6 延期终身死亡保险

2.6.1 死亡立即支付的延期终身死亡保险

2.7 将每年分为 m 个区间, 在死亡区间末支付 1 元的终身死亡保险

2.8 变额人寿保险

第3章 生存年金

在本章最后一章节给出了各种生存年金的定义公式及精算现值, 故在前面几个章节仅给出一些命题与性质.

3.1 期初生存年金

3.1.1 终身期初生存年金

推论 3.1

因为 $Z = \ddot{a}_{\overline{K(x)+1}|} = \frac{1-\nu^{K(x)+1}}{d}$, 所以 $\ddot{a}_x = EZ = E(\ddot{a}_{\overline{K(x)+1}|}) = E(\frac{1-\nu^{K(x)+1}}{d})$. 故 $\ddot{a}_x = \frac{1-E(\nu^{K(x)+1})}{d} = \frac{1-A_x}{d}$. 于是如下等式成立,

$$A_x + d\ddot{a}_x = 1.$$



3.1.2 n 年期期初生存年金

推论 3.2 ($A_{x:\overline{n}|}$ 与 $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ 的关系)

$$d\ddot{a}_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|} = 1.$$



命题 3.1

1. $\ddot{a}_x = \ddot{a}_{x:\overline{n}|} + {}_nE_x\ddot{a}_{x+n}$;
2. $l_x\ddot{a}_x = l_x\ddot{a}_{x:\overline{n}|} + \nu^n l_{x+n}\ddot{a}_{x+n}$.



注 等式 $l_x\ddot{a}_x = l_x\ddot{a}_{x:\overline{n}|} + \nu^n l_{x+n}\ddot{a}_{x+n}$ 的含义如下:

左端表示初始时刻有 l_x 个 (x) 岁的个体, 各买一份终身期初生存年金, 保险公司共收到保费 $l_x\ddot{a}_x$ 元. 右端表示在收到保费后, 保险公司将其中的 $l_x\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ 为 l_x 个人各买一份 n 年期期初生存年金, 保证 n 年内死去的人可以领到年金, 剩余的部分拿去投资, 在第 n 年末, 还有 l_{x+n} 个人活着, 保险公司给他们每人买一份终身期初生存年金, 共需 $l_{x+n}\ddot{a}_{x+n}$ 元. 保险公司支出的总现值为 $l_x\ddot{a}_{x:\overline{n}|} + \nu^n l_{x+n}\ddot{a}_{x+n}$. 保险公司收入的现值应等于支出的总现值, 所以左端等于右端.

现行的养老保险其实就是保费分期缴纳的延期终身期初生存年金.

3.2 期末生存年金

3.3 每年分成 m 个区间的生存年金

3.4 连续生存年金

定义 3.1 (连续年金)

设年金函数 (年金的支付速率) 为 $f(t)$, 则在 $[t, t+dt]$ 内支付的额度为 $f(t)dt$, 其现值为 $\nu^t f(t)dt$, 所以在 $[0, n]$ 内支付的总现值为 $\int_0^n \nu^t f(t)dt$. 特别地, 若 $f(t) \equiv 1$, 则得到 $\bar{a}_{\overline{n}|} = \frac{1-\nu^n}{\delta}$. 以下总假定年金支付速率为 1.



3.4.1 连续的终身生存年金

推论 3.3 (\bar{a}_x 与 \bar{A}_x 的关系)

$$\delta \bar{a}_x + \bar{A}_x = 1.$$

命题 3.2

$$\frac{d}{dx} \bar{a}_x = (\mu(x) + \delta) \bar{a}_x - 1.$$

例题 3.1 设死亡力为 μ , 利息力为 δ , 求 $\bar{a}_x, \bar{A}_x, D(\bar{a}_{\overline{T(x)|}})$.

解 $\bar{a}_x = \int_0^\infty \nu^t {}_t p_x dt = \int_0^\infty e^{-\delta t} e^{-\int_0^t \mu(s) ds} dt = \int_0^\infty e^{-\mu t} e^{-\delta t} dt = \frac{1}{\mu + \delta}.$
 $\bar{A}_x = \int_0^\infty \nu^t {}_t p_x \mu(t) dt = \int_0^\infty e^{-\delta t} e^{-\int_0^t \mu(s) ds} \mu(t) dt = \int_0^\infty e^{-\mu t} e^{-\delta t} \mu(t) dt = \frac{\mu}{\mu + \delta}.$
 ${}^2 A_x = \frac{\mu}{\mu + 2\delta}$, 故 $D(\bar{a}_{\overline{T(x)|}}) = \frac{{}^2 A_x - (\bar{A}_x)^2}{\delta^2} = \frac{1}{\delta^2} [\frac{\mu}{\mu + 2\delta} - (\frac{\mu}{\mu + \delta})^2].$

3.4.2 n 年期连续生存年金推论 3.4 ($\bar{a}_{x:\overline{n|}}$ 与 $\bar{A}_{x:\overline{n|}}$ 的关系)

$$\delta \bar{a}_{x:\overline{n|}} + \bar{A}_{x:\overline{n|}} = 1.$$

命题 3.3

1. $\bar{a}_x = \bar{a}_{x:\overline{n|}} + {}_n E_x \bar{a}_{x+n};$
2. $l_x \bar{a}_x = l_x \bar{a}_{x:\overline{n|}} + \nu^n l_{x+n} \bar{a}_{x+n};$
3. $\bar{a}_{x:\overline{n|}} = \bar{a}_{x:\overline{m|}} + {}_m E_x \bar{a}_{x+m:\overline{n-m|}};$
4. $l_x \bar{a}_{x:\overline{n|}} = l_x \bar{a}_{x:\overline{m|}} + \nu^m l_{x+m} \bar{a}_{x+m:\overline{n-m|}}.$

3.4.3 延期 n 年的终身连续生存年金

3.5 小结

3.5.1 生存年金支付现值小结

| | 期初生存年金 | 期末生存年金 | 连续生存年金 |
|-----------|---|--|---|
| 终身 | $\ddot{a}_{\overline{K(x)+1 }} = \sum_{j=0}^{K(x)} \nu^j$ | $a_{\overline{K(x) }} = \sum_{j=1}^{K(x)} \nu^j$ | $\bar{a}_{\overline{T(x) }} = \int_0^{T(x)} \nu^t dt$ |
| n 年期 | $\ddot{a}_{\overline{(K(x)+1) \wedge n }} = \sum_{j=0}^{K(x) \wedge (n-1)} \nu^j$ | $a_{\overline{K(x) \wedge n }} = \sum_{j=1}^{K(x) \wedge n} \nu^j$ | $\bar{a}_{\overline{T(x) \wedge n }} = \int_0^{T(x) \wedge n} \nu^t dt$ |
| 延期 n 年 | $\ddot{a}_{\overline{(K(x)+1) }} - \ddot{a}_{\overline{(K(x)+1) \wedge n }}$ | $a_{\overline{K(x) }} - a_{\overline{K(x) \wedge n }}$ | $\bar{a}_{\overline{T(x) }} - \bar{a}_{\overline{T(x) \wedge n }}$ |
| n 年期确定性 | $\ddot{a}_{\overline{(K(x)+1) \vee n }}$ | $a_{\overline{K(x) \vee n }}$ | $\bar{a}_{\overline{T(x) \vee n }}$ |

3.5.2 生存年金精算现值小结

| | 期初生存年金 | 期末生存年金 | 连续生存年金 |
|-----------|---|---|---|
| 终身 | $\ddot{a}_x = \sum_{j=0}^{\infty} \nu_j^j p_x$ | $a_x = \ddot{a}_x - 1 = \sum_{j=1}^{\infty} \nu_j^j p_x$ | $\bar{a}_x = \int_0^{\infty} \nu^t {}_t p_x dt$ |
| n 年期 | $\ddot{a}_{x:\overline{n} } = \sum_{j=0}^{n-1} \nu_j^j p_x$ | $a_{x:\overline{n} } = \sum_{j=1}^n \nu_j^j p_x$ $= \ddot{a}_{x:\overline{n} } - 1 + \nu^n {}_n p_x$ | $\bar{a}_{x:\overline{n} } = \int_0^n \nu^t {}_t p_x dt$ |
| 延期 n 年 | ${}_n \ddot{a}_x = \ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\overline{n} }$ $= {}_n E_x \ddot{a}_{x+n}$ $= \sum_{j=n}^{\infty} \nu_j^j p_x$ | ${}_n a_x = a_x - a_{x:\overline{n} }$ $= {}_n E_x a_{x+n}$ $= \sum_{j=n+1}^{\infty} \nu_j^j p_x$ | ${}_n \bar{a}_x = \int_n^{\infty} \nu^t {}_t p_x dt$ $= \bar{a}_x - \bar{a}_{x:\overline{n} }$ $= {}_n E_x \bar{a}_{x+n}$ |
| n 年期确定型 | $\ddot{a}_{x:\overline{n} } = {}_n \ddot{a}_x + \ddot{a}_{\overline{n} }$ | $a_{x:\overline{n} } = a_{\overline{n} } + {}_n a_x$ | $\bar{a}_{x:\overline{n} } = {}_n \bar{a}_x + \bar{a}_{\overline{n} }$ |

第4章 净保费理论

4.1 平衡准则

定义 4.1 (平衡准则)

投保人缴纳保费的精算现值等于保险人支付保险金的精算现值。

定义 4.2 (保险人签单损失量)

L = “保险人支付保险金的现值” 减去 “投保人缴纳保费的现值”。

由平衡准则, 有 $E(L) = 0$ 。

定义 4.3 (年均衡净保费)

1. 若保费按年分期缴纳, 每年缴纳的数额一样, 则称每年缴纳的保费额为年均衡净保费;
2. 若保费按固定的速率连续缴纳, 则称保费缴纳的速率为年均衡净保费。

例题 4.1 设个体 (x) 买了一份死亡年末支付 1 元的终身死亡保险, 设 ${}_k|q_x = 0.2, k = 0, 1, 2, 3, 4$, 利率 $i = 0.06$, 保费每年年初等额分期缴纳. 分别在 (1) 平衡准则, (2) 指数准则 ($a = 0.1$), (3) 分位数准则 ($\alpha = 0.2$) 之下来计算年均衡净保费 P 。

解 保险人支付的保险金的现值为 $\nu^{K(x)+1}$;

投保人缴纳的保费总现值为 $P\ddot{a}_{\overline{K(x)+1}|}$ 。

所以签单损失量为:

$$\begin{aligned} L &= \nu^{K(x)+1} - P\ddot{a}_{\overline{K(x)+1}|} = \nu^{K(x)+1} - P \cdot \frac{1 - \nu^{K(x)+1}}{d} \\ &= \left(1 + \frac{P}{d}\right)\nu^{K(x)+1} - \frac{P}{d}. \end{aligned}$$

(1) 平衡准则之下,

$$E(L) = E(\nu^{K(x)+1}) - PE(\ddot{a}_{\overline{K(x)+1}|}) = A_x - P\ddot{a}_x = 0,$$

所以 $P = \frac{A_x}{\ddot{a}_x} = \frac{dA_x}{1 - A_x}$. 注意到

$$A_x = \sum_{k=0}^{\infty} \nu^{k+1} {}_k|q_x = \sum_{k=0}^4 \nu^{k+1} 0.2 = 0.2 \sum_{k=1}^5 \nu^k = 0.2a_{\overline{5}|} = 0.84247276.$$

所以

$$P = \frac{A_x}{\ddot{a}_x} = \frac{dA_x}{1 - A_x} = 0.3027.$$

(2) 指数准则及 (3) 分数准则之下的计算留作作业。

4.2 趸交净保费

定义 4.4 (趸交净保费)

若保费是在签定保险单时一次缴清, 则将其中净保费的部分称为趸交净保费, 通常用 P 表示。

4.3 完全连续险种的年均衡净保费

定义 4.5

称保费连续缴纳、保险金死亡立即支付的险种为完全连续险种。



4.3.1 完全连续的终身死亡保险

命题 4.1

(i) 年均衡净保费记为 ${}_h\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1)$.

(ii) 签单损失量为

$$L = \nu^{T(x)} - \bar{P}(\bar{A}_x) \bar{a}_{\overline{T(x)}|} = (1 + \frac{\bar{P}(\bar{A}_x)}{\delta}) \nu^{T(x)} - \frac{\bar{P}(\bar{A}_x)}{\delta}.$$

(iii) 年均衡净保费为

$$\bar{P}(\bar{A}_x) = \frac{\bar{A}_x}{\bar{a}_x} = \frac{\delta \bar{A}_x}{1 - \bar{A}_x} = \frac{1}{\bar{a}_x} - \delta.$$

(iv) 签单损失量 L 的方差为

$$DL = \frac{{}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2}{(\delta \bar{a}_x)^2} = \frac{{}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2}{(1 - \bar{A}_x)^2}.$$



例题 4.2 设死亡力 $\mu = 0.05$, 利息力 $\delta = 0.05$.

解 我们有

$$\bar{A}_x = \frac{\mu}{\mu + \delta} = \frac{1}{2}, \quad {}^2\bar{A}_x = \frac{\mu}{\mu + 2\delta} = \frac{1}{3}.$$

从而

$$\begin{aligned} \bar{P}(\bar{A}_x) &= \frac{\delta \bar{A}_x}{1 - \bar{A}_x} = 0.05, \\ DL &= \frac{{}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2}{(1 - \bar{A}_x)^2} = \frac{\frac{1}{3} - (\frac{1}{2})^2}{(1 - \frac{1}{2})^2} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

4.3.2 缴费期为 h 年的完全连续的 n 年期定期寿险 ($h \leq n$)

命题 4.2

(i) 年均衡净保费记为 ${}_h\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1)$.

(ii) 签单损失量: 最后的缴费时刻为 $T(x) \wedge h$, 故签单损失量为

$$L = \nu^{T(x)} I_{\{T(x) < n\}} - {}_h\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1) \bar{a}_{\overline{T(x) \wedge h}|}.$$

(iii) 在平衡准则下,

$$0 = E(L) = \bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 - {}_h\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1) \bar{a}_{x:\overline{h}|}.$$

从而

$${}_h\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1) = \frac{\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1}{\bar{a}_{x:\overline{h}|}}.$$



注 一般地,

$$\text{某险种的年均衡净保费} = \frac{\text{该险种的精算现值}}{\text{缴费期对应的生存年金}}.$$

4.3.3 其他完全连续险种的年均衡净保费

命题 4.3

- (i) 缴费期为 h 年的终身寿险: ${}_h\bar{P}(\bar{A}_x) = \frac{\bar{A}_x}{\bar{a}_{x:\overline{h}|}}$.
- (ii) 缴费期为 h 年的延 n 年期终身生存年金: ${}_h\bar{P}({}_n|\bar{a}_x) = \frac{{}_n|\bar{a}_x}{\bar{a}_{x:\overline{h}|}}$.
- (iii) 延期 n 年的终身生存年金: $\bar{P}({}_n|\bar{a}_x) = \frac{{}_n|\bar{a}_x}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}}$.
- (iv) 延期 n 年的终身死亡保险: $\bar{P}({}_n|\bar{A}_x) = \frac{{}_n|\bar{A}_x}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}}$.



4.4 完全离散险种的年均衡净保费

定义 4.6

保费按年等额分期缴纳, 保险金死亡年末支付的险种称为完全离散险种.



4.4.1 完全离散终身寿险

命题 4.4

1. 年均衡净保费记为 P_x , 保险金现值为 $\nu^{K(x)+1}$, 投保人所缴纳保费的总现值为 $P_x \ddot{a}_{\overline{K(x)+1}|}$.

2. 签单损失量

$$L = \nu^{K(x)+1} - P_x \ddot{a}_{\overline{K(x)+1}|}$$

又因 $\ddot{a}_{\overline{K(x)+1}|} = \frac{1 - \nu^{K(x)+1}}{d}$, 故

$$L = (1 + \frac{P_x}{d})\nu^{K(x)+1} - \frac{P_x}{d}.$$

3. 平衡准则下,

$$0 = E(L) = E(\nu^{K(x)+1} - P_x \ddot{a}_{\overline{K(x)+1}|}) = A_x - P_x \ddot{a}_x.$$

于是,

$$P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x}.$$

注意到 $A_x + d\ddot{a}_x = 1$, 从而有

$$P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x} = \frac{dA_x}{1 - A_x} = \frac{1}{\ddot{a}_x} - d.$$

4. 签单损失量的方差

$$\begin{aligned} D(L) &= D((1 + \frac{P_x}{d})\nu^{K(x)+1} - \frac{P_x}{d}) \\ &= (1 + \frac{P_x}{d})^2 D(\nu^{K(x)+1}) \\ &= \frac{2A_x - (A_x)^2}{(d\ddot{a}_x)^2} \\ &= \frac{2A_x - (A_x)^2}{(1 - A_x)^2}. \end{aligned}$$



例题 4.3 某人现年 50 岁, 买了一份完全离散的终身寿险, 假设 $T(50) \sim U[0, 50]$, $i = 0.05$. 求年均衡净保费 P_x , 并计算签单损失量 L 的方差.

解

$$P_{50} = \frac{A_{50}}{\ddot{a}_{50}}$$

$$A_{50} = \sum_{k=0}^{\infty} \nu^{k+1} {}_k|q_{50} = \sum_{k=0}^{49} \nu^{k+1} \frac{1}{50} = \frac{1}{50} \sum_{k=1}^{50} \nu^k \approx 0.3651185$$

$$\ddot{a}_{50} = \sum_{k=0}^{\infty} \nu^k {}_kP_{50} = \sum_{k=0}^{49} \nu^k \frac{50-k}{50}.$$

利用错位相减法, 可以计算出 \ddot{a}_{50} , 请读者自己完成. 此题可以避免 \ddot{a}_{50} 的计算.

$$P_{50} = \frac{dA_{50}}{1 - A_{50}} = 0.02738558,$$

$$D(L) = \frac{{}^2A_{50} - (A_{50})^2}{(1 - A_{50})^2} = 0.1496662.$$

4.4.2 其他完全离散险种的年均衡净保费

命题 4.5

1. 缴费期为 n 年的终身死亡保险: ${}_nP(A_x) = \frac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$.
2. n 年期生存保险: $P_{x:\overline{n}|}^1 = \frac{A_{x:\overline{n}|}^1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$.
3. 延期 n 年的终身期初生存年金: $P({}_n|\ddot{a}_x) = \frac{{}_n|\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$.
4. 缴费期为 h 年的 n 年期死亡保险: ${}_hP_{x:\overline{n}|}^1 = \frac{A_{x:\overline{n}|}^1}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}}$.



注一般地,

$$\text{完全离散险种的年均衡净保费} = \frac{\text{对应险种的精算现值}}{\text{缴费期对应的期初生存年金}}.$$

第5章 净准备金理论

5.1 确定净准备金的准则

定义 5.1 (未来损失量)

在 t 时刻的未来损失量记为 ${}_tL$.

若在 t 时刻个体 (x) 还活着, 即 $T(x) > t$, 则

${}_tL$ = “未来需支付的保险金在 t 时刻的现值” 减去 “未来支付的保费在 t 时刻的总现值”.

若 t 时刻 (x) 已经死亡, 则 ${}_tL = 0$.



命题 5.1

t 时刻的准备金用 ${}_tV$ 表示.

(i) 平衡准则: ${}_tV = E({}_tL|T(x) > t)$.

(ii) 指数准则: 给定 $a > 0$, 由

$$e^{a \cdot {}_tV} = E(e^{a \cdot {}_tL}|T(x) > t)$$

确定净准备金 ${}_tV$.

(iii) 分位数准则: 给定水平 $\alpha \in (0, 1)$, 由

$$P({}_tL > {}_tV|T(x) > t) = \alpha$$

确定净准备金 ${}_tV$.



注 (i) 分位数准则下, 保险人越怕风险, 则 α 越小, ${}_tV$ 越大即净准备金额越大.

(ii) 指数准则下,

$${}_tV = \frac{1}{a} \ln E(e^{a \cdot {}_tL}|T(x) > t).$$

对 a 求偏导数得

$$\frac{\partial {}_tV}{\partial a} = \frac{\frac{a}{E(e^{a \cdot {}_tL}|T(x) > t)} E(e^{a \cdot {}_tL} {}_tL|T(x) > t) - \ln E(e^{a \cdot {}_tL}|T(x) > t)}{a^2} > 0.$$

所以, a 越大, 净准备金 ${}_tV$ 越大, 保险人越怕风险.

(iii) 指数准则下,

$$\begin{aligned} {}_tV &= \frac{1}{a} \ln E(e^{a \cdot {}_tL}|T(x) > t) > \frac{1}{a} E(\ln e^{a \cdot {}_tL}|T(x) > t) \\ &= E({}_tL|T(x) > t) = {}_t\tilde{V} = \text{平衡准则下的净准备金}. \end{aligned}$$

即指数准则适用于规避风险的保险人.

事实上, 容易验证 $\lim_{a \downarrow 0} {}_tV = {}_t\tilde{V}$.

5.2 完全连续险种在平衡准则下的净准备金

5.2.1 平衡准则下完全连续的终身寿险的净准备金

命题 5.2

1. 未来损失量

$$\begin{aligned} {}_tL &= (\nu^{T(x)-t} - \bar{P}(\bar{A}_x)\bar{a}_{\overline{T(x)-t}|})I_{\{T(x)>t\}} \\ &= [(1 + \frac{\bar{P}(\bar{A}_x)}{\delta})\nu^{T(x)-t} - \frac{\bar{P}(\bar{A}_x)}{\delta}]I_{\{T(x)>t\}} \\ &= [\frac{1}{\delta\bar{a}_x}\nu^{T(x)-t} - \frac{\bar{P}(\bar{A}_x)}{\delta}]I_{\{T(x)>t\}}. \end{aligned}$$

2. 在平衡准则下

$$\begin{aligned} {}_t\bar{V}(\bar{A}_x) &= E({}_tL_x | T(x) > t) \\ &= E((\nu^{T(x)-t} - \bar{P}(\bar{A}_x)\bar{a}_{\overline{T(x)-t}|})I_{\{T(x)>t\}} | T(x) > t) \\ &= E((\nu^{X-(x+t)} - \bar{P}(\bar{A}_x)\bar{a}_{\overline{X-(x+t)}|})I_{\{T(x)>t\}} | X > x+t) \\ &= E(\nu^{T(x+t)} - \bar{P}(\bar{A}_x)\bar{a}_{\overline{T(x+t)}|}) \\ &= E(\nu^{T(x+t)}) - \bar{P}(\bar{A}_x)E(\bar{a}_{\overline{T(x+t)}|}) \\ &= \bar{A}_{x+t} - \bar{P}(\bar{A}_x)\bar{a}_{x+t} \\ &= \bar{A}_{x+t} - \frac{\bar{A}_x}{\bar{a}_x}\bar{a}_{x+t} \\ &= 1 - \delta\bar{a}_{x+t} - \frac{1 - \delta\bar{a}_x}{\bar{a}_x}\bar{a}_{x+t} \\ &= \frac{\bar{a}_x - \bar{a}_{x+t}}{\bar{a}_x}. \end{aligned}$$

3. 未来损失量 ${}_tL$ 的方差

$$\begin{aligned} D({}_tL | T(x) > t) &= D([\frac{1}{\delta\bar{a}_x}\nu^{T(x)-t} - \frac{\bar{P}(\bar{A}_x)}{\delta}]I_{\{T(x)>t\}} | T(x) > t) \\ &= D([\frac{1}{\delta\bar{a}_x}\nu^{X-(x+t)} - \frac{\bar{P}(\bar{A}_x)}{\delta}]I_{\{T(x)>t\}} | X > x+t) \\ &= D(\frac{1}{\delta\bar{a}_x}\nu^{T(x+t)} - \frac{\bar{P}(\bar{A}_x)}{\delta}) \\ &= \frac{1}{(\delta\bar{a}_x)^2}D(\nu^{T(x+t)}) = \frac{{}^2\bar{A}_{x+t} - (\bar{A}_{x+t})^2}{(\delta\bar{a}_x)^2}. \end{aligned}$$

例题 5.1 设 $\mu(t) = \mu$, 利息力为 δ , 某个体 (x) 买了一份完全连续的终身寿险. (1) 求 ${}_tp_x$; (2) 写出签单损失量 L ; (3) 在平衡准则下求年均净保费; (4) 求 DL ; (5) 写出 t 时刻的未来损失量 ${}_tL$; (6) 在平衡准则下求 t 时刻的净准备金 ${}_tV(\bar{A}_x)$; (7) 求 $D({}_tL)$.

解 (1) ${}_tp_x = e^{-\int_x^{x+t} \mu(s)ds} = e^{-\int_x^{x+t} \mu ds} = e^{-\mu t}$, $t \geq 0$.

$$(2) L = \nu^{T(x)} - \bar{P}(\bar{A}_x)\bar{a}_{\overline{T(x)}|}.$$

$$(3) 0 = EL = \bar{A}_x - \bar{P}(\bar{A}_x)\bar{a}_x, \text{ 故 } \bar{P}(\bar{A}_x) = \frac{\bar{A}_x}{\bar{a}_x},$$

注意到 $\bar{A}_x = \frac{\mu}{\mu+\delta}$, $\bar{a}_x = \frac{1}{\mu+\delta}$, 故 $\bar{P}(\bar{A}_x) = \frac{\bar{A}_x}{\bar{a}_x} = \mu$.

$$(4) DL = \frac{{}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2}{(\delta\bar{a}_x)^2} = \frac{{}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2}{(1 - \bar{A}_x)^2} = \frac{\frac{\mu}{\mu+\delta} - (\frac{\mu}{\mu+\delta})^2}{(1 - \frac{\mu}{\mu+\delta})^2}.$$

(5) t 时刻的未来损失量

$${}_tL = (\nu^{T(x)-t} - \bar{P}(\bar{A}_x)\bar{a}_{\overline{T(x)-t}|})I_{\{T(x)>t\}}.$$

$$(6) t \text{ 时刻的净准备金 } {}_tV(\bar{A}_x) = \frac{\bar{a}_x - \bar{a}_{x+t}}{\bar{a}_x} = 0.$$

$$(7) D({}_tL) = \frac{{}_2\bar{A}_{x+t} - (\bar{A}_{x+t})^2}{(1 - \bar{A}_x)^2} = \frac{\frac{\mu}{\mu+2\delta} - (\frac{\mu}{\mu+\delta})^2}{(1 - \frac{\mu}{\mu+\delta})^2}.$$

5.3 完全离散险种的净准备金

5.3.1 平衡准则下完全离散的终身寿险的净准备金

命题 5.3

1. 未来损失量

$$\begin{aligned} {}_kL &= (\nu^{K(x)-k+1} - P_x \ddot{a}_{\overline{K(x)-k+1}|}) I_{\{K(x) \geq k\}} \\ &= [(1 + \frac{P_x}{d}) \nu^{K(x)-k+1} - \frac{P_x}{d}] I_{\{K(x) \geq k\}} \\ &= [\frac{1}{d\ddot{a}_x} \nu^{K(x)-k+1} - \frac{P_x}{d}] I_{\{K(x) \geq k\}}. \end{aligned}$$

2. 在平衡准则下

$$\begin{aligned} {}_kV(A_x) &= E({}_kL | T(x) > k) \\ &= E((\nu^{K(x)-k+1} - P_x \ddot{a}_{\overline{K(x)-k+1}|}) I_{\{K(x) \geq k\}} | T(x) > k) \\ &= E((\nu^{K(x)-k+1} - P_x \ddot{a}_{\overline{K(x)-k+1}|}) I_{\{K(x) \geq k\}} | X > x+k) \\ &= E(\nu^{K(x+k)+1} - P_x \ddot{a}_{\overline{K(x+k)+1}|}) \\ &= E(\nu^{K(x+k)+1}) - P_x E(\ddot{a}_{\overline{K(x+k)+1}|}) \\ &= A_{x+k} - P_x \ddot{a}_{x+k} \\ &= A_{x+k} - \frac{A_x}{\ddot{a}_x} \ddot{a}_{x+k} \\ &= 1 - d\ddot{a}_{x+k} - \frac{1 - d\ddot{a}_x}{\ddot{a}_x} \ddot{a}_{x+k} \\ &= \frac{\ddot{a}_x - \ddot{a}_{x+k}}{\ddot{a}_x}. \end{aligned}$$

3. 未来损失量 ${}_kL$ 的方差

$$\begin{aligned} D({}_kL | T(x) > k) &= D([\frac{1}{d\ddot{a}_x} \nu^{K(x)-k+1} - \frac{P_x}{d}] I_{\{K(x) \geq k\}} | T(x) > k) \\ &= D([\frac{1}{d\ddot{a}_x} \nu^{K(x)-k+1} - \frac{P_x}{d}] I_{\{K(x) \geq k\}} | X > x+k) \\ &= D(\frac{1}{d\ddot{a}_x} \nu^{K(x+k)+1} - \frac{P_x}{d}) = \frac{1}{(d\ddot{a}_x)^2} D(\nu^{K(x+k)+1}) \\ &= \frac{{}_2A_{x+k} - (A_{x+k})^2}{(d\ddot{a}_x)^2} = \frac{{}_2A_{x+k} - (A_{x+k})^2}{(1 - A_x)^2}. \end{aligned}$$

例题 5.2 某人现年 20 岁, 设 ${}_k|q_{20} = \frac{1}{2^{k+1}}, k = 0, 1, 2, \dots$, 利率 $i = 0.05$. 考虑 5 年后的净准备金. (1) 写出签单损失量 L ; (2) 在平衡准则下计算年均衡净保费; (3) 求 $D(L)$; (4) 写出 5 年后的未来损失量 ${}_5L$; (5) 在平衡准则下计算 5 年后的净准备金 ${}_5V(A_{20})$; (6) 计算 $D({}_5L | T(20) \geq 5)$. (提示: 由几何分布具有无记忆性可推导出 ${}_k|q_{25} = \frac{1}{2^{k+1}}, k = 0, 1, 2, \dots$)

解 (1) $L = \nu^{K(x)+1} - P_x \ddot{a}_{\overline{K(x)+1}|}$.

$$(2) 0 = E(L) = A_{20} - P_{20} \ddot{a}_{20}, \text{ 故 } P_{20} = \frac{A_{20}}{\ddot{a}_{20}} = \frac{dA_{20}}{1 - A_{20}},$$

注意到 $A_{20} = \sum_{k=0}^{\infty} \nu^{k+1} {}_k|q_{20} = \sum_{k=0}^{\infty} \nu^{k+1} \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{\nu}{2-\nu}$,

从而 $P_{20} = \frac{dA_{20}}{1-A_{20}} = \frac{\nu}{2}$.

$$(3) D(L) = \frac{{}_2A_{20} - (A_{20})^2}{(1-A_{20})^2} = \frac{\frac{\nu^2}{2-\nu} - \left(\frac{\nu}{2-\nu}\right)^2}{1-\frac{\nu}{2-\nu}}.$$

$$(4) {}_5L = (\nu^{K(20)+1-5} - P_{20} \ddot{a}_{\overline{K(20)+1-5}|}) I_{\{K(20) \geq 5\}}.$$

$$(5) {}_5V(A_{20}) = \frac{\ddot{a}_{20} - \ddot{a}_{25}}{\ddot{a}_{20}}, \text{ 其中 } \ddot{a}_{20} = \frac{1-A_{20}}{d}, \ddot{a}_{25} = \frac{1-A_{25}}{d},$$

$$A_{25} = \sum_{k=0}^{\infty} \nu^{k+1} {}_k|q_{25} = \sum_{k=0}^{\infty} \nu^{k+1} \frac{1}{2^{k+1}} = A_{20},$$

于是 $\ddot{a}_{25} = \frac{1-A_{25}}{d} = \frac{1-A_{20}}{d} = \ddot{a}_{20}$, 所以 ${}_5V(A_{20}) = 0$.

$$(6) D({}_5L|T(20) \geq 5) = \frac{{}_2A_{25} - (A_{25})^2}{(1-A_{20})^2} = \frac{{}_2A_{20} - (A_{20})^2}{(1-A_{20})^2} = D(L).$$