大创参考文献学习笔记

作者：Lollins

时间：January 12, 2024

改变人生的事情，你必须冒险；意义非凡的事情，大多碰巧发生；不重要的事，才有周全的计划。

前言

2023/8/14，开始阅读老师给的三篇英文文献，用此文补充一些看大创文献中遇到的知识点。

2023/9/19，过去一个月了，最近在网上看到了 ElegantTEX 的模板，感觉好好看，花了一天的时间把相关的格式和细节都改了。好看了好多，不过字体变小了不少。

Lollins

January 12, 2024

目录

第 1 章 Matrix Theorem

1.1 Laplace Matrix

Laplace Operator

对于多元函数 $f(x_1,...,x_n)$ 的 Laplace Operator 为

$$\Delta f=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \tag{1.1}$$

例题 1.1 三元函数 $f(x,y,z)$ 的 Laplace Operator 为

$$\Delta f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

数值微分

根据导数近似计算公式，当 Δ 近似等于 0 时，我们可以得到 f 的导数为

$$f'(x)\approx\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$\begin{aligned}f''(x)&\approx\frac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x}\\&\approx\frac{f(x+\Delta x)+f(x-\Delta x)-2f(x)}{(\Delta x)^2}\end{aligned}$$

对二元函数 $f(x,y)$，我们对其使用 Laplace Operator，得到

$$\begin{aligned}\Delta f&=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\\&\approx\frac{f\left(x+\Delta x,y\right)+f\left(x-\Delta x,y\right)-2f\left(x,y\right)}{\left(\Delta x\right)^2}\\&+\frac{f\left(x,y+\Delta y\right)+f\left(x,y-\Delta y\right)-2f\left(x,y\right)}{\left(\Delta y\right)^2}\end{aligned}$$

把此二元函数离散化，为了简化，假设 x 和 y 的增量即步长为 1，即

$$\Delta x=x_{i+1}-x_i=1,\Delta y=y_{j+1}-y_j=1$$

点 (x_i,y_j) 处的 Laplace Operator 可以用下面的公式近似代替

$$\begin{aligned}&\frac{f\left(x_i+\Delta x,y_j\right)+f\left(x_i-\Delta x,y_j\right)-2f\left(x_i,y_j\right)}{\left(\Delta x\right)^2}\\&+\frac{f\left(x_i,y_j+\Delta y\right)+f\left(x_i,y_j-\Delta y\right)-2f\left(x_i,y_j\right)}{\left(\Delta y\right)^2}\\=&\frac{f\left(x_{i+1},y_j\right)+f\left(x_{i-1},y_j\right)-2f\left(x_i,y_j\right)}{1^2}+\frac{f\left(x_i,y_{j+1}\right)+f\left(x_i,y_{j-1}\right)-2f\left(x_i,y_j\right)}{1^2}\\=&f\left(x_{i+1},y_j\right)+f\left(x_{i-1},y_j\right)+f\left(x_i,y_{j+1}\right)+f\left(x_i,y_{j-1}\right)-4f\left(x_i,y_j\right)\end{aligned}$$

这是非常优美的结果，它就是 (x_i,y_j) 的 4 个相邻点处的函数值之和与 4 倍的 (x_i,y_j) 点处的差值，如图1.1所示

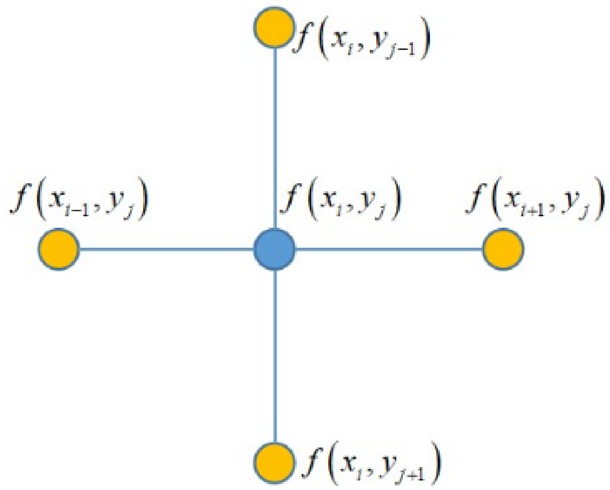


图 1.1

基于这种表示，Laplace Operator 的计算公式可以表示为

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x_{i+1}, y_j) + f(x_{i-1}, y_j) + f(x_i, y_{j+1}) + f(x_i, y_{j-1}) - 4f(x_i, y_j) \\ &= f(x_{i+1}, y_j) - f(x_i, y_j) + f(x_{i-1}, y_j) - f(x_i, y_j) \\ &+ f(x_i, y_{j+1}) - f(x_i, y_j) + f(x_i, y_{j-1}) - f(x_i, y_j) \\ &= \sum_{(k,l)\in N(i,j)} (f(x_k, y_l) - f(x_i, y_j))\end{aligned} \tag{1.2}$$

其中 $N(i,j)$ 为 (x_i, y_j) 的邻居节点

图的邻接矩阵与加权度矩阵

图是一种几何结构，对它的研究起源于古老的哥尼斯堡七桥问题。一个图 $G(graph)$ 由顶点和边构成，通常将顶点的集合记为 $V(vertex)$，边的集合记为 $E(edge)$。边由其连接的起点和终点表示。如图1.2所示，它是一个典型的图。

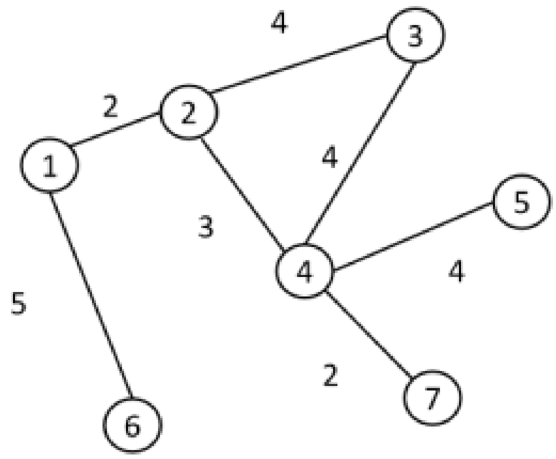


图 1.2

图的边可以是有方向的，也可以是无方向的，前者被称为有向图，后者被称为无向图。邻接矩阵是用来方便存储图的结构，用线性代数的方法研究图的问题。

如果一个图有 n 个顶点，其邻接矩阵 W 为 $n \times n$ 的矩阵，矩阵元素 w_{ij} 表示边 (i,j) 的权重，如果矩阵两

个顶点之间没有边连接，则记为 0。对于无向连接矩阵，满足 $w_{ij} = w_{ji}$。图1.2的邻接矩阵如下

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

对于无向图，顶点的加权度是与该顶点相关的所有边的权重之和。对于无向图连接矩阵 W，顶点 i 的加权度为 W 第 i 行元素之和

$$d_i = \sum_{j=1}^{n} w_{ij}$$

加权度矩阵 D 为对角矩阵，其主对角线元素为每个顶点的加权度，其他位置的元素为 0。

$$d_{ii} = d_i = \sum_{j=1}^{n} w_{ij} \tag{1.3}$$

对于图1.2，它的加权度矩阵如式1.4所示

$$\begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 13 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{1.4}$$

Laplace Matrix

如果将图的顶点处的值看作是函数值，则在顶点 i 处的 Laplace Operator 为

$$\Delta f_i = \sum_{j \in N_i} (f_i - f_j)$$

这里的 N_i 为顶点 i 的所有邻居顶点集合。这里我们调换了 f_i 和 f_j 的位置，和之前的 Laplace Operator 相比，相当于多了一个负号。由于图的边可以带有权重，我们可以在上面的计算公式中加上权重

$$\Delta f_i = \sum_{j \in N_i} w_{ij} (f_i - f_j) \tag{1.5}$$

这一推广如图1.3所示，图中图中红色的顶点是 i，蓝色的顶点是它的邻居顶点，灰色的顶点是其他顶点。

如果 j 不是 i 的邻居，则 $w_{ij} = 0$。因此式1.5也可以写做

$$\Delta f_i = \sum_{j \in N_i} w_{ij} (f_i - f_j) = \sum_{j \in N_i} w_{ij} f_i - \sum_{j \in N_i} w_{ij} f_j = d_i f_i - \mathbf{w}_i \mathbf{f} \tag{1.6}$$

这里的 d_i 就是第 i 个节点的加权度，$\boldsymbol{w_i}$ 为邻接矩阵第 i 行，$\boldsymbol{f}$ 是所有顶点的值构成的列向量,$\boldsymbol{w_i f}$ 是二者的内积。

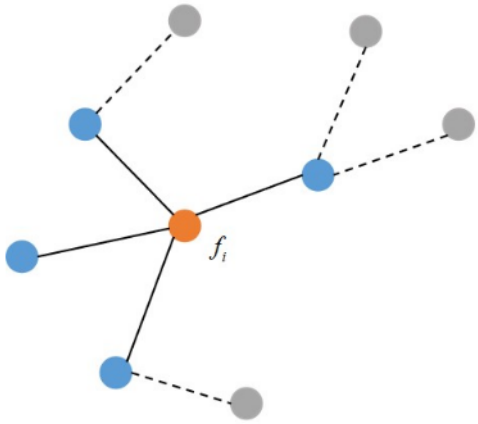


图 1.3

对图的所有顶点，我们有

$$\Delta f=\begin{bmatrix}\Delta f_1\\ \dots\\ \Delta f_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}d_1 f_1-\mathbf{w}_1\mathbf{f}\\ \dots\\ d_n f_n-\mathbf{w}_n\mathbf{f}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}d_1 & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots\\ \dots & \dots & d_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f_1\\ \dots\\ f_n\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\mathbf{w}_1\\ \dots\\ \dots\\ \mathbf{w}_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f_1\\ \dots\\ \dots\\ f_n\end{bmatrix} \tag{1.7}$$
$$=(\mathbf{D}-\mathbf{W})\,\mathbf{f}$$

我们在邻接矩阵和加权度矩阵的基础上定义 Laplace Matrix。假设无向图 G 有 n 个顶点，邻接矩阵为 W，加权度矩阵为 D。Laplace Matrix 定义为加权度矩阵与邻接矩阵之差，即

$$L=D-W \tag{1.8}$$

则图1.2的 Laplace Matrix 为

$$\begin{bmatrix}7&0&0&0&0&0&0\\0&9&0&0&0&0&0\\0&0&8&0&0&0&0\\0&0&0&13&0&0&0\\0&0&0&0&4&0&0\\0&0&0&0&0&5&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&2&0&0&0&5&0\\2&0&4&3&0&0&0\\0&4&0&4&0&0&0\\0&3&4&0&4&0&2\\0&0&0&4&0&0&0\\5&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&2&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&-2&0&0&0&-5&0\\-2&9&-4&-3&0&0&0\\0&-4&8&-4&0&0&0\\0&-3&-4&13&-4&0&-2\\0&0&0&-4&4&0&0\\-5&0&0&0&0&5&0\\0&0&0&-2&0&0&2\end{bmatrix}$$

显然 Laplace Matrix 的每行元素之和都为 0。

Properties

1. 对任意向量 $\boldsymbol{f}\in\mathbb{R}^n$，有

$$\mathbf{f}^{\mathrm{T}}\mathbf{L}\mathbf{f}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}w_{ij}\left(f_i-f_j\right)^2$$

2.Laplace Matrix 是对称半正定矩阵；

3.Laplace Matrix 的最小特征值为 0，其对应的特征向量为常向量 1，即所有分量为 1，即 $L\mathbf{1}_n=0\mathbf{1}_n=\mathbf{0}_n$；

4.Laplace Matrix 有 n 个非负实数特征值，并且满足

$$\lambda_n\geq\ldots\geq\lambda_1\geq 0$$

相关证明可以参考这篇知乎文章 理解图的拉普拉斯矩阵

1.2 Kronecker Product

定义 1.1

给定任意矩阵 $X \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 和 $Y \in \mathbb{R}^{p\times q}$ 则矩阵 X 和 Y 的 Kronecker Product 为

$$X \otimes Y = \begin{bmatrix} x_{11}\boldsymbol{Y} & x_{12}\boldsymbol{Y} & \cdots & x_{1n}\boldsymbol{Y} \\ x_{21}\boldsymbol{Y} & x_{22}\boldsymbol{Y} & \cdots & x_{2n}\boldsymbol{Y} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1}\boldsymbol{Y} & x_{m2}\boldsymbol{Y} & \cdots & x_{mn}\boldsymbol{Y} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(mp)\times(nq)} \tag{1.9}$$

其中，$\otimes$ 表示 Kronecker Product。♣

注：根据式1.9，我们可以得到

$$\boldsymbol{Y} \otimes \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} y_{11}\boldsymbol{X} & y_{12}\boldsymbol{X} & \cdots & y_{1q}\boldsymbol{X} \\ y_{21}\boldsymbol{X} & y_{22}\boldsymbol{X} & \cdots & y_{2q}\boldsymbol{X} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{p1}\boldsymbol{X} & y_{p2}\boldsymbol{X} & \cdots & y_{pq}\boldsymbol{X} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(mp)\times(nq)}$$

这意味着 $\boldsymbol{X} \otimes \boldsymbol{Y}$ 和 $\boldsymbol{Y} \otimes \boldsymbol{X}$ 不相同，即 Kronecker Product 不存在交换律。

Properties

1. **结合律 (associativity)**

$$X \otimes Y \otimes Z = (X \otimes Y) \otimes Z = X \otimes (Y \otimes Z) \tag{1.10}$$

2. **分配律 (distributivity)**

$$(\boldsymbol{X} + \boldsymbol{Y}) \otimes \boldsymbol{Z} = \boldsymbol{X} \otimes \boldsymbol{Z} + \boldsymbol{Y} \otimes \boldsymbol{Z} \tag{1.11}$$

3. 给定任意矩阵 $X \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 和 $Y \in \mathbb{R}^{p\times q}$，则

$$(X \otimes Y)^T = X^T \otimes Y^T \tag{1.12}$$

4. 给定任意矩阵 $X \in \mathbb{R}^{m\times n}$、$Y \in \mathbb{R}^{s\times t}$、$U \in \mathbb{R}^{n\times p}$ 和 $V \in \mathbb{R}^{t\times q}$，则

$$(X \otimes Y)(U \otimes V) = (XU) \otimes (YV) \in \mathbb{R}^{(ms)\times(pq)} \tag{1.13}$$

5. 给定矩阵 $X \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 和 $Y \in \mathbb{R}^{p\times q}$ 都是非奇异的，则

$$(X \otimes Y)^{-1} = X^{-1} \otimes Y^{-1} \tag{1.14}$$

还有一些特殊性质（懒打公式了，先从网上找了图片截屏放进去），如图1.4所示

【性质6】迹：$\mathrm{tr}(\boldsymbol{X} \otimes \boldsymbol{Y}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{X}) \cdot \mathrm{tr}(\boldsymbol{Y}), \boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^{m\times m}, \boldsymbol{Y} \in \mathbb{R}^{n\times n}$
【性质7】F-范数：$\|\boldsymbol{X} \otimes \boldsymbol{Y}\|_F = \|\boldsymbol{X}\|_F \cdot \|\boldsymbol{Y}\|_F$
【性质8】ℓ_2 范数：$\|\boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{y}\|_2 = \|\boldsymbol{x}\|_2 \cdot \|\boldsymbol{y}\|_2$
【性质9】行列式：$\det(\boldsymbol{X} \otimes \boldsymbol{Y}) = \det(\boldsymbol{X})^n \cdot \det(\boldsymbol{Y})^m, \boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^{m\times m}, \boldsymbol{Y} \in \mathbb{R}^{n\times n}$
【性质10】秩：$\mathrm{rank}(\boldsymbol{X} \otimes \boldsymbol{Y}) = \mathrm{rank}(\boldsymbol{X}) \cdot \mathrm{rank}(\boldsymbol{Y})$

图 1.4

本节主要参考了知乎的 代数基础 | Kronecker 积，文章中给出了详细的证明。

1.3 Frobenius Norm and Inner Product

定义 1.2

对于矩阵 $A \in C^{m\times n}$，其 Frobenius Norm 为

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.15}$$

其 Frobenius Inner Product 为

$$\langle A, B\rangle_F = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} A^*_{ij} B_{ij} \tag{1.16}$$

♣

又由于

$$\begin{aligned} tr(A^H B) &= \sum_{i=1}^{n}(A^H B)_{ii} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} A^H_{ik} B_{ki} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} A^*_{ki} B_{ki} \end{aligned}$$

故我们可以得到

$$\langle A, B\rangle_F = tr(A^H B)$$

本节主要参考了 Frobenius 范数和内积的关系

1.4 Diagonally-dominant Matrix

定义 1.3 (Strictly Diagonally-dominant Matrix)

对于一个矩阵 $A_{n\times n}$，满足 $\forall i = 1, 2 \ldots, n$，有

$$|a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |a_{ij}| \tag{1.17}$$

那么我们称 $A_{n\times n}$ 为 Strictly Diagonally-dominant Matrix。

♣

定理 1.1

如果矩阵 A 严格对角占优，则 A 非奇异。

♡

具体的证明可以参考这篇文章严格对角占优矩阵非奇异。

1.5 Hurwitz Matrix

定义 1.4 (Hurwitz Matrix)

给定一个多项式（多项式的所有根都有负实部）

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 \tag{1.18}$$

和 n 阶矩阵

$$H=\begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & a_n & a_{n-2} & \ddots & & & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & a_{n-1} & & \ddots & & a_0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & a_n & & & \ddots & a_1 & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & & & & a_2 & a_0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & a_4 & a_2 & a_0 \end{pmatrix} \tag{1.19}$$

那么称矩阵 H 为多项式 p 的 Hurwitz Matrix。
p 多项式的所有根都有负实部 $\Longleftrightarrow$ H 的所有顺序主子式大于 0。

例题 1.2 在 Mathematica 中调用函数指令，可以得到 $p(x)=5+4x+3x^2$ 和 $p(x)=5+4x+3x^2+2x^3+x^4$ 的 2 阶与 4 阶的 Hurwitz Matrix，分别如图1.5和图1.6 所示（原本想 LaTeX 嵌入 mma 代码，奈何网上资料太少加上自己能力有限，嵌入失败，就截图放里面了）

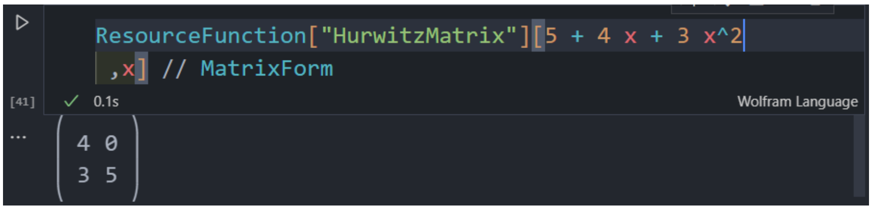


图 1.5

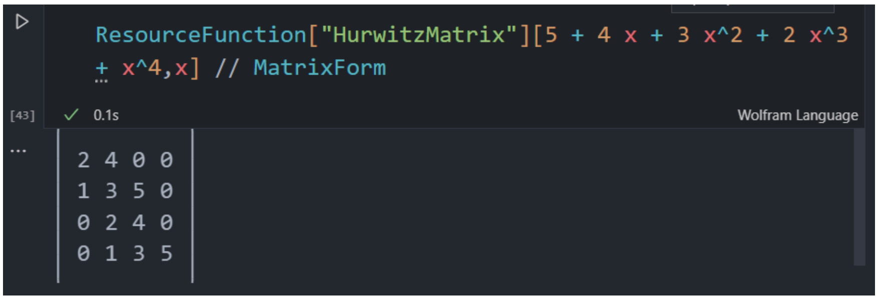


图 1.6

定理 1.2

求解 n 阶方阵的全部顺序主子式 D_i，D_i 表示矩阵的第 i 阶主子式。

1. 如果所有主子式 D_i 均为正，则系统稳定；
2. 如果存在某个主子式 D_i 为零，但其后续主子式均为正，则系统稳定；
3. 如果任意一个主子式 D_i 为负，则系统不稳定。

定理 1.3

A 为 Hurwitz Matrix 的充分必要条件为，对于 $\forall$ 正定矩阵 Q，存在满足方程

$$PA + A^T P = -Q$$

的正定矩阵 P，且 P 是方程的唯一解。

第 2 章 Convex Optimization

2.1 Convex Function

基本的定义与性质

定义 2.1 (Convex Function)

对于函数 $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，若满足 $dom(f) \subset \mathbb{R}^n$ 是凸集，$\forall t \in [0,1]$，$\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in dom(f)$，有

$$f(t\boldsymbol{x} + (1-t)\boldsymbol{y}) \leq tf(\boldsymbol{x}) + (1-t)f(\boldsymbol{y}) \tag{2.1}$$

则这个函数是一个凸函数。如果等号处处不成立，则称它是一个严格凸函数（Strictly）。♣

定义 2.2 (Concave Functions)

若 $-f$ 是一个凸函数，那么 f 所定义的函数就是凹函数。如果等号处处不成立，则称它是一个严格凹函数。♣

注 1：凸函数与凹函数不是二元对立的关系，比如 $y = ax + bx \in \mathbb{R}$，它是凸函数也是凹函数
注 2：无论是凸函数，还是凹函数，一定要求定义域为凸集。而且没有凹集的说法

定义 2.3 (First-order Characterization of Convex Functions)

如果 f 一阶可导，$dom(f)$ 是凸的，并且 $\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in dom(f)$，有

$$f(\boldsymbol{y}) \geq f(\boldsymbol{x}) + \nabla f(\boldsymbol{x})^T(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}) \tag{2.2}$$

则称它是一个凸函数。♣

其实定义2.3可以看成 $Taylor$ 公式的一阶展开。

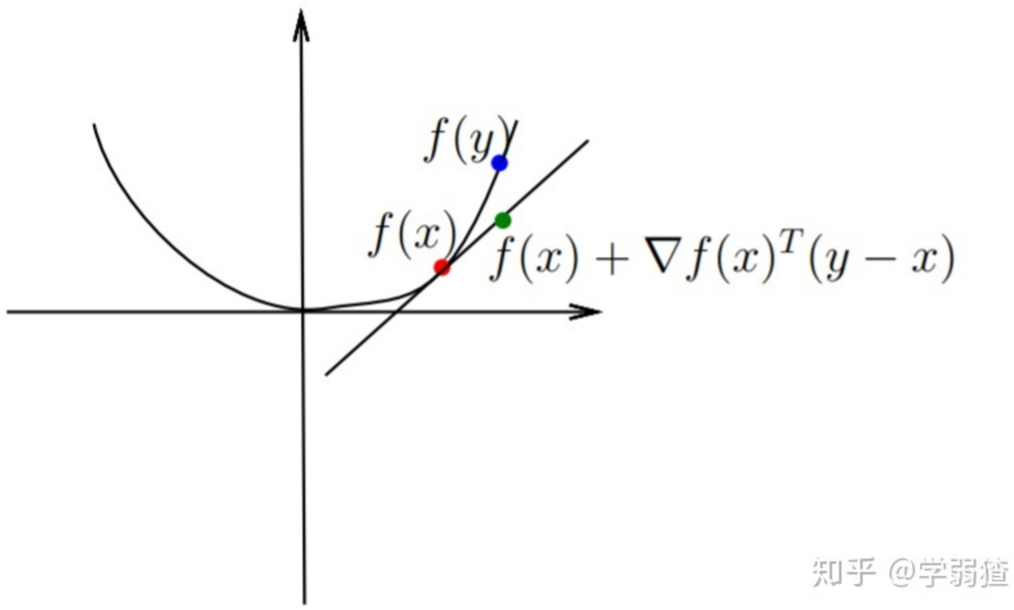


图 2.1

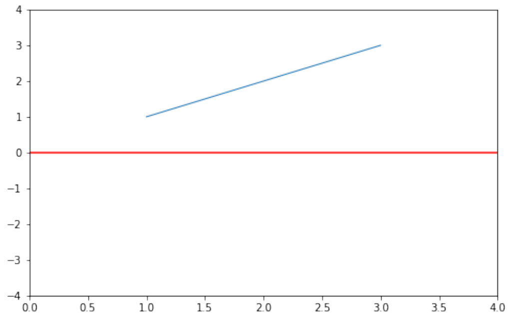
对于这个一阶条件定义，可以参照图2.1来理解。
它给了我们一个重要的启示：如果我们假设 $\nabla f(\boldsymbol{x}) = 0$，那么无论 $\boldsymbol{y}$ 是什么，都有 $f(\boldsymbol{y}) \geq f(\boldsymbol{x})$。潜在的意

思是，对于驻点为 0 的 $\boldsymbol{x}$ 点，我们取到了最小值。因此正如机器学习界经常说的一句话：**当一个问题被证明是一个凸优化问题，那么基本上就可以算解决了。**

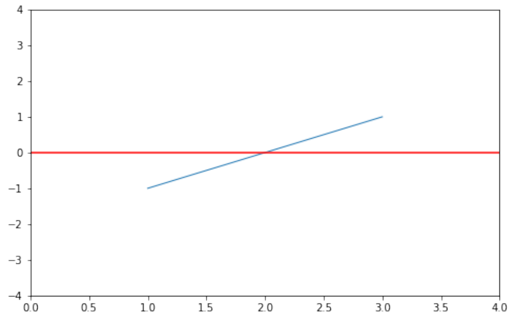
定义 2.4 (Second-order Characterization of Convex Functions)

如果 f 是二阶可微的，$dom(f)$ 是凸的，并且 $\forall x \in dom(f), \nabla^2 f(x) \succeq 0$。那么 f 就是一个凸函数。♣

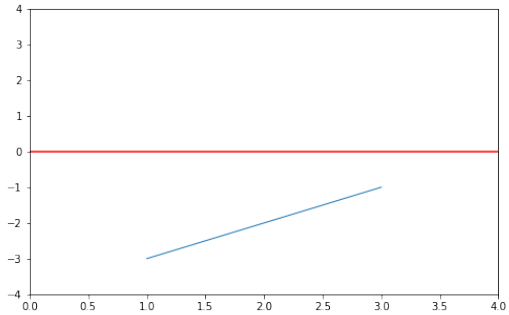
二阶导数（即 $\nabla^2 f$）是用来衡量一阶导数的变化率。考虑 $dom(f) \subset \mathbb{R}$ 的一维情况，对应 $\nabla^2 f \geq 0$ 画出 ∇f 图像的三种情况，如图2.2所示，对应的 f 图像如2.3所示，我们可以发现图2.3都为凸函数。



(a) ∇f 在 x 轴上方



(b) ∇f 穿过 x 轴



(c) ∇f 在 x 轴下方

图 2.2: ∇f 图像的三种情况

推论 2.1

如果 f 是凸函数，那么 $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$，我们有

$$(\nabla f(\boldsymbol{x}) - \nabla f(\boldsymbol{y}))^T (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \geq 0 \tag{2.3}$$

♡

证明 1、从一维的角度理解，$\nabla^2 f \geq 0 \Rightarrow \nabla f$ 为增函数，即证！

2、根据公式2.2，我们有

$$\begin{cases} f(\boldsymbol{y}) \geq f(\boldsymbol{x}) + \nabla f(\boldsymbol{x})^T (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}) \\ f(\boldsymbol{x}) \geq f(\boldsymbol{y}) + \nabla f(\boldsymbol{y})^T (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \end{cases}$$

将两式相加，即得

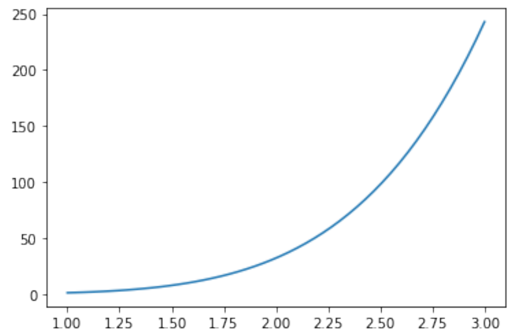
$$(\nabla f(\boldsymbol{x}) - \nabla f(\boldsymbol{y}))^T (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \geq 0$$

证毕！

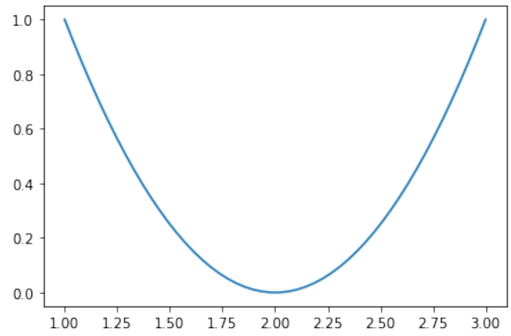
注： 如果一个函数是严格凸的，并不能推出 $\nabla^2 f > 0$，一个反例就是 $f(x) = x^4$

命题 2.1

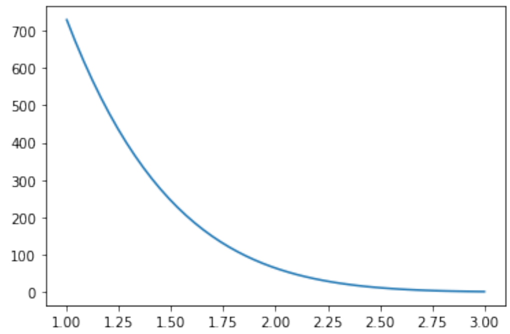
给定函数 $f(\boldsymbol{x})$，如果 $g(t) = f(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{v})$ 是一个关于 t 的凸函数，则 $f(\boldsymbol{x})$ 是凸函数。反之亦然。♠



(a) 对应 ∇f 在 x 轴上方



(b) 对应 ∇f 穿过 x 轴



(c) 对应 ∇f 在 x 轴下方

图 2.3: f 图像的三种情况

证明 这里我们仅必要性，充分性同理可以推出。根据凸函数的性质，我们可以得到

$$g(\theta t_1 + (1-\theta)t_2) \leq \theta g(t_1) + (1-\theta)g(t_2) \tag{2.4}$$

再由 $g(t) = f(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{v})$，带入式2.4，得

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x} + (\theta t_1 + (1-\theta)t_2)\boldsymbol{v}) &= f(\theta(\boldsymbol{x} + t_1\boldsymbol{v}) + (1-\theta)(\boldsymbol{x} + t_2\boldsymbol{v})) \\ &\leq \theta f(\boldsymbol{x} + t_1\boldsymbol{v}) + (1-\theta)f(\boldsymbol{x} + t_2\boldsymbol{v}) \end{aligned}$$

证毕！

引理 2.1

对于函数 $g_1(\boldsymbol{x}), \ldots, g_2(\boldsymbol{x})$ 都是凸的，那么它们的非负凸组合得到的函数也是凸的。对于凹函数也有类似的结论。

引理 2.2

设 $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ 是一个凸函数，那么函数 $g(\boldsymbol{x}) = \sup_{\boldsymbol{y}} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ 也是一个凸函数。

复合函数的凸性与应用

所谓的复合函数，就是形如 $f(x) = h(g(x))$，我们假设它的性质足够好，具有二阶可导性。那么我们就可以得到

$$f''(x) = h''(g(x))g'(x)^2 + h'(g(x))g''(x) \tag{2.5}$$

定理 2.1 (Rules for Composite Convex Functions)

设 f, g, h 二阶可导，且 $f(x) = h(g(x))$，那么

1.如果h为凸函数, 并且不降,g为凸函数, 那么f为凸函数.

2.如果h为凸函数, 不增, g为凹函数, 那么f为凸函数。

3.如果h为凹函数, 不降, g为凹函数, 那么f为凹函数。

4.如果h为凹函数, 不增, g为凸函数, 那么f为凹函数。

只需要将每个条件带入到 $f''(x)$ 中，观察它的正负即可验证。下面给出条件 1 的证明

$$h'' \geq 0, h' \geq 0, g'' \geq 0 \Rightarrow f'' \geq 0 \Rightarrow f\text{为凸函数}$$

幸运的是，虽然定理2.1只是一维的情况，但是其推广到多维。

强凸与强光滑性

定义 2.5 (Strong Convexity)

若函数 $f(\boldsymbol{x}) - \frac{m}{2}\|\boldsymbol{x}\|^2$ 是一个凸函数，那么 $f(\boldsymbol{x})$ 就是一个凸性量度为 m 的强凸函数。

定义2.5可以等价于公式2.6，下面给出证明

$$\begin{aligned} f(\theta \boldsymbol{x_1} + (1-\theta)\boldsymbol{x_2}) \leqslant \theta f(\boldsymbol{x_1}) + (1-\theta) f(\boldsymbol{x_2}) \\ - \frac{m}{2}\theta(1-\theta)\|\boldsymbol{x_1} - \boldsymbol{x_2}\|^2 \end{aligned} \tag{2.6}$$

证明 由于 $f(\boldsymbol{x}) - \frac{m}{2}\|\boldsymbol{x}\|^2$ 是一个凸函数，根据凸函数的性质，我们有

$$\begin{aligned} f(\theta \boldsymbol{x_1} + (1-\theta)\boldsymbol{x_2}) - \frac{m}{2}\|\theta \boldsymbol{x_1} + (1-\theta)\boldsymbol{x_2}\|^2 \leq \theta(f(\boldsymbol{x_1}) - \frac{m}{2}\|\boldsymbol{x_1}\|^2) \\ + (1-\theta)(f(\boldsymbol{x_2}) - \frac{m}{2}\|\boldsymbol{x_2}\|^2) \end{aligned} \tag{2.7}$$

其实我们只需要证明??的等式形式就行了，即证

$$\begin{aligned} &\frac{m}{2}\|\theta \boldsymbol{x_1} + (1-\theta)\boldsymbol{x_2}\|^2 - \frac{m}{2}[\theta\|\boldsymbol{x_1}\|^2 + (1-\theta)\|\boldsymbol{x_2}\|^2] \\ = &-\frac{m}{2}\theta(1-\theta)\|\boldsymbol{x_1} - \boldsymbol{x_2}\|^2 \end{aligned} \tag{2.8}$$

根据 2-范数的定义展开，得

$$\begin{aligned} \|\theta \boldsymbol{x_1} + (1-\theta)\boldsymbol{x_2}\|^2 &= \sum_{i=1}^{n}(\theta x_{1i} + (1-\theta)x_{2i})^2 \\ \|\boldsymbol{x_1}\|^2 &= \sum_{i=1}^{n} x_{1i}^2 \\ \|\boldsymbol{x_2}\|^2 &= \sum_{i=1}^{n} x_{2i}^2 \\ \|\boldsymbol{x_1} - \boldsymbol{x_2}\|^2 &= \sum_{i=1}^{n}(x_{1i} - x_{2i})^2 \end{aligned}$$

将上面得式子带入公式2.8中，证毕！

注：没有额外加标识的范数都是 2-范数。

定义 2.6 (Smoothness)

如果 $\nabla f(\boldsymbol{x})$ 满足 $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \|\nabla f(\boldsymbol{x}) - \nabla f(\boldsymbol{y})\| \leq L\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|, L > 0$，那么称它具有 L 的光滑性度量。

下面介绍一些相关的等价定理。

定理 2.2

以下几个性质是等价的：

1、 f 是强凸的，且凸性度量为 m；

2、 $(\nabla f(\boldsymbol{x}) - \nabla f(\boldsymbol{y}))^T(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \geq m\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|^2, \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$；

3、 $\nabla^2 f(\boldsymbol{x}) \succeq mI, \forall \boldsymbol{x}$

4、 $f(\boldsymbol{y}) \geq f(\boldsymbol{x}) + \nabla f(\boldsymbol{x})^T(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}) + \frac{m}{2}\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}\|^2$

♡

注： 如果 f 是强凹函数，那么-f 为强凸函数。

定理之间的互推略过，可以参考本文的最后。

定理 2.3

以下几个性质是等价的：

1、 $\nabla f(x)$ 是 Lipschitz 连续的，且光滑性度量为 L；

2、 $(\nabla f(\boldsymbol{x}) - \nabla f(\boldsymbol{y}))^T(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \leq L\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|^2, \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$；

3、 $\nabla^2 f(\boldsymbol{x}) \preceq LI, \forall \boldsymbol{x}$

4、 $f(\boldsymbol{y}) \leq f(\boldsymbol{x}) + \nabla f(\boldsymbol{x})^T(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}) + \frac{L}{2}\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}\|^2$

♡

强凸和强光滑性是非常好的函数性质，而且就定理2.2和2.3就可以看出，它们利用了二阶信息，**对函数分别提供了一个上界和一个下界**。

本节主要参考了凸优化 | 笔记整理（2）——凸函数，强凸函数及相关拓展

第 3 章 ODE

3.1 Lyapunov Stability Analysis

What is Lyapunov Stability?

早在 1892 年，俄国有一个叫李雅普诺夫的学者发表了一篇著名的文章《运动稳定性一般》问题，建立了关于运动稳定的一般理论，光看这个文章的名字就不一般，也确实，在尔后百余年，这个理论在数学、力学和控制理论中全面开花，已经成为稳定性研究方向的基础性理论，俄罗斯人对于数学上和工程上的直觉确实令人赞叹。

图 3.1

李雅普诺夫稳定性理论研究的是在扰动下平衡点的稳定性问题，可以将问题分为以下四种情况（如图3.2所示）：

1. 如果平衡状态 $\boldsymbol{x}_e$ 受到扰动后，仍然**停留在 $\boldsymbol{x}_e$ 附近**，我们就称 $\boldsymbol{x}_e$ 在**李雅普诺夫意义下是稳定的**（Lyapunov stable）；

2. 如果平衡状态 $\boldsymbol{x}_e$ 受到扰动后，**最终都会收敛到 $\boldsymbol{x}_e$**，我们就称 $\boldsymbol{x}_e$ 在李雅普诺夫意义下是**渐进稳定的**（Asymptotically stable）；

3. 如果平衡状态 $\boldsymbol{x}_e$ 受到**任何扰动**后，**最终都会收敛到 $\boldsymbol{x}_e$**，我们就称 $\boldsymbol{x}_e$ 在李雅普诺夫意义下是**大范围内渐进稳定的**（Asymptotically stable in large）；

4. 如果平衡状态 $\boldsymbol{x}_e$ 受到**某种扰动**后，**状态开始偏离 $\boldsymbol{x}_e$**，我们就称 $\boldsymbol{x}_e$ 在李雅普诺夫意义下是**不稳定的**（Unstable）。

李雅普诺夫第二法

第二法比较天才，来源于一个朴素的想法：稳定的系统能量总是不断被耗散的，李雅普诺夫通过定义一个标量函数 $V(\boldsymbol{x})$（通常能代表广义能量）来分析稳定性。这种方法的避免了直接求解方程，也没有进行近似线性化，所以也一般称之为直接法。

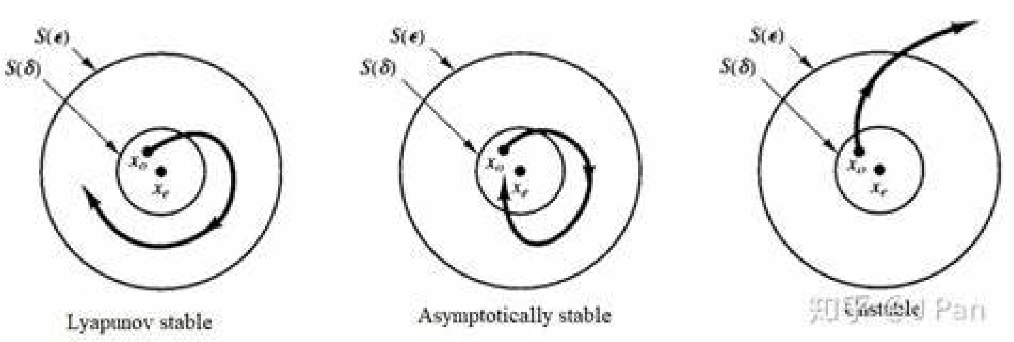


图 **3.2:** Lyapunov Stability

定理 3.1

如果标量函数 $V(\boldsymbol{x})$ 满足:

- $V(\boldsymbol{x}) = 0$ if and only if $\boldsymbol{x} = 0$
- $V(\boldsymbol{x}) > 0$ if and only if $\boldsymbol{x} \neq 0$
- $\dot{V}(\boldsymbol{x}) = \frac{d}{dt} V(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x) \leq 0$ when $\boldsymbol{x} \neq 0$

则称系统在李雅普诺夫意义下是稳定的，特别的，若 $\boldsymbol{x} \neq 0$ 时，有 $\dot{V}(\boldsymbol{x}) < 0$，则系统是渐进稳定的。 ♡

本节主要参考了如何理解李雅普诺夫稳定性分析

3.2 Exponentially Stable

定义 3.1 (Exponentially Stable)

假设稳定点 $\boldsymbol{x}^* = 0$ 为 Exponentially Stable 平衡点，那么满足存在两个正数 k 和 λ，$D = \{\boldsymbol{x} \in R^n \| \|\boldsymbol{x}\| < r\}$，$\forall t \geq t_0$，$\forall \boldsymbol{x}(t_0) \in D$，使得

$$\|\boldsymbol{x}(t)\| \leq k\|\boldsymbol{x}(t_0)\| e^{-\lambda(t-t_0)} \tag{3.1}$$

其中 λ 为指数收敛率，k 为超调量。 ♣

定理 3.2

假设 $\boldsymbol{x} = 0$ 为非线性系统 $\dot{\boldsymbol{x}} = f(\boldsymbol{x})$ 的平衡点，且 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x} = 0$ 的邻域是连续可微的。令

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}} \right|_{\boldsymbol{x}=0} \tag{3.2}$$

当且仅当 A 是 Hurwitz Matrix(见定义1.4) 时，$\boldsymbol{x} = 0$ 为非线性系统的 Exponentially Stable 平衡点。 ♡

定理 3.3 (Exponential stability theorem)

假设 $\boldsymbol{x} = 0$ 为非线性系统 $\dot{\boldsymbol{x}} = f(\boldsymbol{x}, t)$ 的 Exponentially Stable 平衡点，$\forall t \geq t_0$，$\forall \boldsymbol{x}(t_0) \in D$，存在函数 V 满足以下不等式:

$$\begin{aligned} c_1\|\boldsymbol{x}\|^2 \leq V(t, \boldsymbol{x}) \leq c_2\|\boldsymbol{x}\|^2 \\ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}} f(t, \boldsymbol{x}) \leq -c_3\|\boldsymbol{x}\|^2 \\ \left\| \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}} \right\| \leq c_4\|\boldsymbol{x}\| \end{aligned} \tag{3.3}$$

其中 c_1, c_2, c_3, c_4, 为正常数。

3.3 Gronwall-Bellman Inequality

定理 3.4 (Gronwall-Bellman Inequality)

设 $I=[a,b]$，α,β,u 为 I 上的实值函数，α,u 是 I 上的连续函数，β 是非负的。如果 u 满足

$$u(t) \leq \alpha(t)+\int_a^t \beta(s)u(s)\mathrm{d}s, \quad \forall t \in I \tag{3.4}$$

那么

$$u(t) \leq \alpha(t)+\int_a^t \alpha(s)\beta(s)\exp\left(\int_s^t \beta(r)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s, \quad t \in I \tag{3.5}$$

如果 α 是非递减函数，我们可以得到

$$u(t) \leq \alpha(t)\exp\left(\int_a^t \beta(s)\mathrm{d}s\right), \quad t \in I \tag{3.6}$$

证明 我们定义一个函数

$$v(s)=\exp\left(-\int_a^s \beta(r)\mathrm{d}r\right)\int_a^s \beta(r)u(r)\mathrm{d}r, \quad s \in I \tag{3.7}$$

求导，得

$$v'(s)=\left(\underbrace{u(s)-\int_a^s \beta(r)u(r)}_{\leq \alpha(s)}\right)\beta(s)\exp\left(-\int_a^s \beta(r)\mathrm{d}r\right), \quad s \in I \tag{3.8}$$

积分，得

$$v(t) \leq \int_a^t \alpha(s)\beta(s)\exp\left(-\int_a^s \beta(r)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s \tag{3.9}$$

再根据式3.7，得

$$\begin{aligned}\int_a^t \beta(s)u(s)\mathrm{d}s &= \exp\left(\int_a^t \beta(r)\mathrm{d}r\right)v(t) \\ &\leq \int_a^t \alpha(s)\beta(s)\exp\left(\underbrace{\int_a^t \beta(r)\mathrm{d}r-\int_a^s \beta(r)\mathrm{d}r}_{=\int_s^t \beta(r)\mathrm{d}r}\right)\mathrm{d}s\end{aligned} \tag{3.10}$$

把式3.10带入式3.4，即得式3.5。

再根据 α 为非递减函数，我们可以得到 $\alpha(s) \leq \alpha(t)$，带入式3.5，即得

$$\begin{aligned}u(t) &\leq \alpha(t)+\left(-\alpha(t)\exp\left(\int_s^t \beta(r)\mathrm{d}r\right)\right)\Bigg|_{s=a}^{s=t} \\ &= \alpha(t)\exp\left(\int_a^t \beta(r)\mathrm{d}r\right), \quad t \in I.\end{aligned}$$

即证式3.6。

证毕！

3.4 Comparison Lemma

引理 3.1 (Comparison Lemma)

考虑一个标量微分方程

$$\dot{u} = f(t, u), \quad u(t_0) = u_0 \tag{3.11}$$

对于所有 $t \geq 0$ 和所有 $u \in J \subset R$，$f(t,u)$ 对于 t 连续可微，且对于 u 是局部 Lipschitz 的。设 $[t_0, T)$(T 可以是无限的) 是解 $u(t)$ 存在的最大区间，并且假设对于所有 $t \in [t_0, T)$，有 $u(t) \in J$。设 $v(t)$ 是连续函数，其上右导数 $D^+v(t)$ 对于所有 $t \in [t_0, T)$，$v(t) \in J$ 满足微分不等式

$$D^+v(t) \leqslant f(t, v(t)), \quad v(t_0) \leqslant u_0 \tag{3.12}$$

那么，对于所有 $t \in [t_0, T)$，有 $v(t) \leq u(t)$。♡

3.5 Laplace Transform

3.5.1 Laplace Transform 概念

定义 3.2 (Laplace Transform)

给定函数 $f(t)$ 在 $t \geq 0$ 上，f 的 Laplace Transform 为 F，F 写作

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \tag{3.13}$$

其中 $s = \sigma + \omega i$，σ 和 ω 为实数，i 为虚数单位。♣

定义 3.3 (Inverse Transforms)

如果 $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$，我们称 f 为 F 的 Inverse Transforms，写作

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi i} \lim_{T \to \infty} \int_{\gamma - iT}^{\gamma + iT} e^{st} F(s) \, \mathrm{d}\, s \tag{3.14}$$

♣

3.5.2 Laplace Transform 相关公式

定理 3.5 (Laplace Transform 存在定理)

对于函数 $f(t)$ 满足下面两个条件：

- 在 $t \geq 0$ 的任何有限区间上分段连续；
- 在 $t \to +\infty$ 时，存在常数 $k > 0$ 和 c 使得 $|f(t)| \leq ke^{ct}$。

则函数 $f(t)$ 的 Laplace Transform 存在。♡

1、线性叠加性

$$\mathcal{L}\left[af\left(t\right) + bg\left(t\right)\right] = a\mathcal{L}\left[f\left(t\right)\right] + b\mathcal{L}\left[g\left(t\right)\right] \tag{3.15}$$

易证，跳过证明。

2、微分性质

$$\mathcal{L}\left[f^{(n)}\left(t\right)\right] = s^n \mathcal{L}\left[f\left(t\right)\right] - s^{n-1} f\left(0\right) - s^{n-2} f'\left(0\right) - \ldots - f^{(n-1)}\left(0\right) \tag{3.16}$$

证明

$$\mathcal{L}\left[f^{(n)}(t)\right]=\int_0^{\infty} f^{(n)}(t)\, e^{-st} dt$$

分部积分，得

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} f^{(n)}(t)\, e^{-st} dt &= \int_0^{\infty} e^{-st} df^{(n-1)}(t) \\ &= -f^{(n-1)}(0)+s\int_0^{\infty} f^{(n-1)}(t) e^{-st} dt \\ &= -f^{(n-1)}(0)+s\mathcal{L}[f^{(n-1)}(t)]\end{aligned}$$

递推，即得式3.16。

3、积分性质

$$\mathcal{L}\left[\underbrace{\int_0^t dt\int_0^t dt\ldots\int_0^t}_{n重} f(t)\, dt\right]=\frac{1}{s^n}\mathcal{L}\left[f(t)\right] \tag{3.17}$$

证明 令 $F(t)=\underbrace{\int_0^t dt\int_0^t dt\ldots\int_0^t}_{n重} f(t)\, dt$，则式3.17可以写成 $\mathcal{L}[F(t)]=\frac{1}{s^n}\mathcal{L}[F^n(t)]$，其中 $F(0)=F^{(1)}(0)=$ ... $=F^{(n-1)}(0)=0$。

带入式3.16，即证。

4、相似性质

$$\mathcal{L}[f(at)]=\frac{1}{a}F(\frac{s}{a}) \tag{3.18}$$

相似性质又称为尺度变换，使用 Laplace Transform 展开，易证。

5、平移延迟

$$\mathcal{L}[f(t-\tau)]=e^{-\tau s}F(s) \tag{3.19}$$

使用 Laplace Transform 展开，再使用换元法，易证。

6、位移性质

$$\mathcal{L}[e^{at}f(t)]=F(s-a) \tag{3.20}$$

使用 Laplace Transform 展开，易证。

7、卷积定理

定义 3.4 (卷积)

$$f(t)*g(t)=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \tag{3.21}$$

♣

根据上面卷积的定义，我们可以得到

$$\mathcal{L}\left[f(t)*g(t)\right]=\mathcal{L}\left[f(t)\right]\cdot\mathcal{L}\left[g(t)\right] \tag{3.22}$$

证明 令 $u = t - \tau$，

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[f\left(t\right) * g\left(t\right)\right] &= \int_0^\infty dt \int_0^t e^{-st} f(\tau) g(t-\tau) d\tau \\
&= \int_{-\tau}^\infty du \int_0^t e^{-s(u+\tau)} f(\tau) g(u) d\tau \\
&= \mathcal{L}\left[f\left(t\right)\right] \cdot \mathcal{L}\left[g\left(t\right)\right]
\end{aligned}
$$

上面的证明有点问题，哪天有时间我再改改，证明参考图3.3。

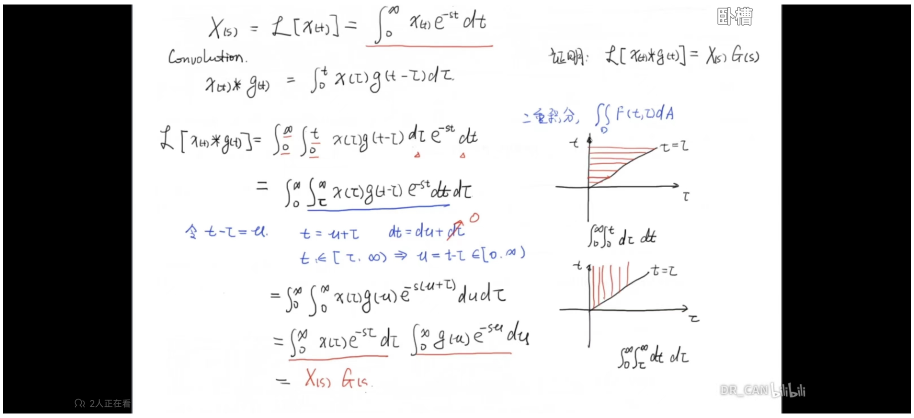


图 3.3

3.5.3 几个常用的 Laplace Transform

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{L}\left[1\right] = \frac{1}{s} \\
&\mathcal{L}\left[e^{at}\right] = \frac{1}{s-a} \\
&\mathcal{L}\left[t^n e^{at}\right] = \frac{\Gamma(n+1)}{(s-a)^{n+1}} \{n > -1\} \\
&\mathcal{L}\left[t^n\right] = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}} \{n > -1\} \\
&\mathcal{L}\left[\sin at\right] = \frac{a}{s^2+a^2} \\
&\mathcal{L}\left[\cos at\right] = \frac{s}{s^2+a^2} \\
&\mathcal{L}\left[\sin \mathrm{h}at\right] = \frac{a}{s^2-a^2} \\
&\mathcal{L}\left[\cos \mathrm{h}at\right] = \frac{s}{s^2-a^2} \\
&\mathcal{L}\left[t \sin at\right] = \frac{2as}{\left(s^2+a^2\right)^2} \\
&\mathcal{L}\left[t \cos at\right] = \frac{s^2-a^2}{\left(s^2+a^2\right)^2}
\end{aligned}
$$

3.6 Barbarlat's Lemma

定理 3.6 (Theorem 1)

- $t \geq 0$ 时 f 一致连续；
- $\lim_{t\to+\infty}\int_0^t f(\tau)d\tau$ 存在且有限；

那么我们可以得到 $\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$。♡

定理 3.7 (Theorem 2)

$\lim_{t\to+\infty} V$ 收敛，且 $\dot{V}$ 一致连续，那么 $\lim_{t\to+\infty}\dot{V} = 0$。♡

定理 3.8 (Theorem 3)

$\lim_{t\to+\infty} V$ 收敛，且 $\ddot{V}$ 有界，那么 $\lim_{t\to+\infty}\dot{V} = 0$ ♡

定理 3.9 (Theorem 4(Lyapunov-Like Lemma))

- $V(t,x)$ 有下界；
- $\dot{V}(t,x)$ 半负定；
- $\dot{V}(t,x)$ 一致连续；

那么 $\lim_{t\to+\infty}\dot{V} = 0$。♡

第 4 章 Calculus

4.1 矩阵与范数求导

4.1.1 梯度

定理 4.1

假设 $\mathbf{x}$ 为 n 维向量，在微分多元函数时经常使用以下规则:

1、 对于所有 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$，都有 $\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^\top$

2、 对于所有 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times m}$，都有 $\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{x}^\top\mathbf{A} = \mathbf{A}$

3、 对于所有 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$，都有 $\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{x}^\top\mathbf{A}\mathbf{x} = (\mathbf{A} + \mathbf{A}^\top)\mathbf{x}$

4、 $\nabla_{\mathbf{x}}\|\mathbf{x}\|^2 = \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{x}^\top\mathbf{x} = 2\mathbf{x}$

♡

同样，对于任何矩阵 $\mathbf{X}$，都有 $\nabla_{\mathbf{X}}\|\mathbf{X}\|_F^2 = 2\mathbf{X}$。正如我们之后将看到的，梯度对于设计深度学习中的优化算法有很大用处。

4.1.2 矩阵微分

推论 4.1

假设 $\mathbf{x}$ 是 t 的函数，则

$$\frac{d(\mathbf{x}^T A\mathbf{x})}{dt} = (d\mathbf{x})^T A\mathbf{x} + \mathbf{x}^T A(d\mathbf{x}) \tag{4.1}$$

♡

4.2 向量函数的 $Taylor$ 公式

对于向量 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x_0}$ 和标量函数 $f(\boldsymbol{x})$，我们有

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x_0}) + (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0})^T \nabla f(\boldsymbol{x_0}) + \cdots \tag{4.2}$$

4.3 数量函数对向量的导数

定义 4.1

设 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_3)^T, f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, x_2, ..., x_3)$ 是以向量 $\boldsymbol{x}$ 为自变量的数量函数，即为 n 元函数，则规定数量函数 $f(\boldsymbol{x})$ 对于向量 $\boldsymbol{x}$ 的导数为

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} = \left(\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1}, \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_n}\right)^T \tag{4.3}$$

♣

第 5 章 Game Theorem

第 6 章 Advanced Algebra

6.1 Gerschgorin Circle Theorem—特征值估计

定理 6.1 (圆盘第一定理)

设 A 是 n 阶复矩阵，$A=(a_{ij})_{n\times n}$，则 A 的特征值 z 在复平面上的下列圆盘（又称戈式圆盘）中：

$$|z-a_{ii}|\leq R_i, i=1,2,\dots,n$$

其中 R_i 为 A 的第 i 行元素去掉 a_{ii} 后的绝对值之和，即

$$R_i=\sum_{j\neq i}^{n}|a_{ij}|=|a_{i1}|+\cdots+|a_{i,i-1}|+|a_{i,i+1}|+\cdots+|a_{in}|$$

♡

引理 6.1

设

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

是 n 次复系数多项式，则 $f(x)$ 的 n 个根 $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ 都是 $a_n,a_{n-1},\dots a_1,a_0$ 的连续函数。

♡

定理 6.2 (圆盘第二定理)

设矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 的 n 戈氏圆盘分成若干个连通区域，若其中一个连通区域含有 k 个戈氏圆盘，则有且只有 k 个特征值落在这个连通区域内（若两个戈氏圆盘重合，需计重数；又若特征值为重根，也计重数）。

♡

本节主要参考了特征值的估计——圆盘定理（Gerschgorin（戈氏）圆盘第一定理） 和特征值的估计——圆盘定理（Gerschgorin（戈氏）圆盘第二定理），在文章中会有具体的证明。

6.2 Jordan Form

定义 6.1 (Jordan Form)

矩阵 J 除了主对角线和主对角线上方元素之外，其余都是 0，且主对角线上方的对角线的系数若不为 0 只能为 1 。且这 1 的左方和下方的系数（都在主对角线上）有相同的值。

$$J=\mathrm{Diag}(J_1,J_2,\dots,J_r)=\begin{pmatrix}\boxed{J_1} & 0 & \dots & 0\\ 0 & \boxed{J_2} & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \dots & 0 & \boxed{J_r}\end{pmatrix}\tag{6.1}$$

其中 $J_1,J_2,\dots,J_r$ 为 Jordan Block。易知对角矩阵是一种特殊的 Jordan 标准型矩阵。

♣

定义 6.2 (Jordan Block)

形如矩阵 $J(\lambda,t)$ 的形式被称为 Jordan Block。

$$J(\lambda,t)=\begin{pmatrix}\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 1 & \lambda & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \lambda\end{pmatrix}_{(t\times t)} \tag{6.2}$$

♣

例题 6.1 对于矩阵 J，它的 Jordan Block 为 $\begin{bmatrix}1\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}2\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}4 & 1\\ 0 & 4\end{bmatrix}$。

$$J=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 4 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$$

6.3 矩阵特征值不等式

定理 6.3

对于任意向量 $\boldsymbol{x}$ 和实对称矩阵 A，我们有

$$\lambda_{\min}(A)\le\frac{x^TAx}{x^Tx}\le\lambda_{\max}(A) \tag{6.3}$$

♡

证明 存在正交矩阵 T，满足

$$T^TAT=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

令 $\boldsymbol{x}=T\boldsymbol{y}$，我们可以得到

$$\frac{x^TAx}{x^Tx}=\frac{y^T\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}y}{y^Ty}=\frac{\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2}{y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2}$$

放缩，即得

$$\lambda_{min}(A)\frac{y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2}{y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2}\le\frac{x^TAx}{x^Tx}\le\lambda_{max}(A)\frac{y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2}{y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2}$$

证毕！

附录 A [1]

A.1 Terminology

1. penetration:n. 渗透
2. exploit:vt. 利用
3. utilize:vt. 利用
4. asynchronous:adj. 异步的
5. payoff:n. 收益
6. saddle poiont:n. 鞍点
7. permutation:n. 排列
8. consensus:n. 一致
9. protocol:n. 协议
10. collaboratively:adv. 合作的
11. convergence:n. 收敛
12. adoption:n. 采用
13. successively:n. 相继的
14. auxiliary:adj. 辅助的

A.2 式 (8) 中的 Hurwitz Matrix

试证明 $-(L \otimes I_{N\times N} + B_0)$ 是 Hurwitz Matrix

证明 对角线上的元素为 $-a_i - \sum_{j=1}^{N} a_{ij}, R_i = \sum_{j=1}^{N} |a_{ij}|$，根据定理6.1，我们可以得到

$$\lambda_i \leq -a_i - \sum_{j=1}^{N} a_{ij} + R_i = -a_i \leq 0$$

特征值都小于等于 0，故其为 Hurwitz Matrix。

A.3 式 (11) 的强凹函数不等式

如果 f 是强凹函数，那么-f 就是一个强凸函数，再根据定理2.2 中的第 2 个性质，即毕!

A.4 线性化式 (19)

我们取 $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0} \to 0$，根据公式4.2，我们有

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_i(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} &= \frac{\partial f_i(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_i} + (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*)^T (\frac{\partial \frac{\partial f_i(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_i}}{\partial \boldsymbol{x}}) \\ &= (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*)^T (\frac{\partial \frac{\partial f_i(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_i}}{\partial \boldsymbol{x}})\end{aligned}$$

证毕!

A.5 式 (20) 中 $\overline{k}B$is Hurwitz

根据定理6.1，我们知道

$$|\lambda_i - \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_i^2}| \le R_i$$

即

$$\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_i^2} - R_i \le \lambda_i \le \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_i^2} + R_i$$

而

$$|\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_i^2}| > |R_i|, \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_i^2} < 0$$

所以 $\lambda_i < 0$，$i = 1, 2, \ldots, N$，证毕!

A.6 式 (20) 中的 x^* 指数稳定

根据定理3.2即得。

A.7 式 (21)

根据定理3.3可得，其中，因为论文是时不变系统，所以第二个公式没有对 t 求导。

A.8 推导出式 (28)

已知 $V = cW_1(\mathrm{x}) + (1-c)\bar{\mathrm{y}}^T P_1 \bar{\mathrm{y}}$，试证明 $\bar{c}_1||\mathbf{z}||^2 \le V \le \bar{c}_2||\mathbf{z}||^2$，再证明 $||\mathbf{z}(t)|| \le \sqrt{\frac{\bar{c}_2}{\bar{c}_1}} e^{-\frac{\delta\lambda_{\min}(B_1)}{2\bar{c}_2}t}||\mathbf{z}(0)||$。

证明 先证明第一个式子不等式左边，结合式 (21) 的第一个式子

$$\begin{aligned}\|V\| &\ge cc_1||\mathbf{x} - \mathbf{x}^*||^2 + (1-c)\lambda_{min}(P)\|\boldsymbol{\overline{y}}\|^2 \\ &\ge \bar{c}_1\|\boldsymbol{z}\|^2(\text{注}\|\boldsymbol{z}\|^2 = ||\mathbf{x} - \mathbf{x}^*||^2 + \|\boldsymbol{\overline{y}}\|^2)\end{aligned}$$

同理，不等式右边也成立。

再证第二个不等式，

$$\begin{aligned}\dot{V} &\le \bar{c}_2||\dot{\mathbf{z}}||^2 \\ &\le -\delta\lambda_{\min}(B_1)||\mathbf{z}||^2\end{aligned}$$

积分，即得 $||\mathbf{z}(t)|| \le \sqrt{\frac{\bar{c}_2}{\bar{c}_1}} e^{-\frac{\delta\lambda_{\min}(B_1)}{2\bar{c}_2}t}||\mathbf{z}(0)||$

证毕!

附录 B [2]

B.1 式 (20) 中的 r_0 取值

如图B.1所示，考虑一个不等式 $A \leq f(x) \leq B$，其中 $A(2,4), B(8,9)$，那么对于 $x_1, x_2 \in [2,8]$，我们都有 $\frac{f(x_1)}{f(x_2)} \leq \frac{B}{A}$。所以，我们有 $\frac{V(t_1)}{V(t_2)} \leq r_0$。

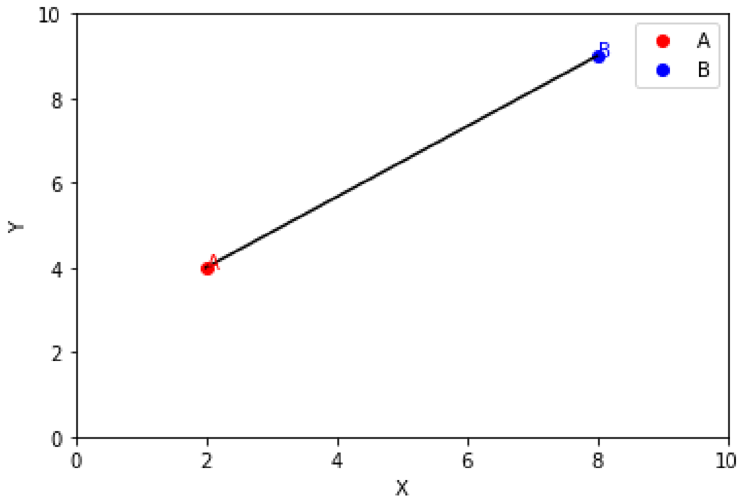


图 B.1