假设条件如下：

1. f 为二阶连续可微函数，且 ∇f 为全局 Lipschitz 的；
2. 拓扑结构为有向强连通图；
3. ∇f 为强凸函数；
4. $\nabla_{ij}^2 f_i(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2 f_i(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j}$ 是有界的；
5. 误差 $d(t)$ 是有界的。

令 $\beta_i \geq |d_i(t)|, \dot{\varrho}_i(t) = -\alpha_i \varrho_i(t), \varrho_i > 0, \alpha_i > 0$，且

$$\xi_i(t) = \frac{s_i(t)}{|s_i(t)| + \varrho_i(t)}$$

算法设计如下：

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{v}} = -\tau \mathbf{k}\mathbf{s} - [\beta_i \xi_i(t)]_{vec} + \mathbf{d}(t) \\ \mathbf{s} = \mathbf{v} + [\nabla_i f_i(\mathbf{y}_i)]_{vec} \\ \dot{\mathbf{y}} = -\theta\bar{\theta}(\mathcal{L} \otimes \mathbf{I}_{N \times N} + \mathcal{A}_q)\tilde{\mathbf{y}} \end{cases}$$

选取 Lyapunov 函数为

$$V(t) = \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{x}}^T\tilde{\mathbf{x}} + \frac{1}{2}\mathbf{s}^T\mathbf{s} + \tilde{\mathbf{y}}^T P \tilde{\mathbf{y}} + \sum_{i=1}^{N} \frac{\beta_i}{\alpha_i}\varrho_i(t)$$

证明如下：

$$\begin{aligned}\dot{V} \leq & -m\|\tilde{\mathbf{x}}\|^2-\tau\lambda_{\min}(\mathbf{k})\|\mathbf{s}\|^2 \\ & -(\theta\lambda_{\min}(Q)-2\sqrt{N}\|P\|\max_{i\in\mathcal{V}}\{l_i\})\|\tilde{\mathbf{y}}\|^2 \\ & +(\max_{i\in\mathcal{V}}\{l_i\}+2N\|P\|\max_{i\in\mathcal{V}}\{l_i\})\|\tilde{\mathbf{x}}\|\|\tilde{\mathbf{y}}\| \\ & +(2\sqrt{N}\|P\|+\theta L_1)\|\tilde{\mathbf{y}}\|\|\mathbf{s}\|+\|\tilde{\mathbf{x}}\|\|\mathbf{s}\| \\ & -\sum_{i=1}^{N}\frac{(\beta_i-|d_i(t)|)|s_i(t)|(|s_i(t)|+\varrho_i(t))+\beta_i\varrho_i^2(t)}{|s_i(t)|+\varrho_i(t)} \\ \leq & -\lambda_{\min}(F)\|\mathbf{E}_1\|^2-\tau\lambda_{\min}(\mathbf{k})\|\mathbf{s}\|^2 \\ & +(1+2\sqrt{N}\|P\|+\theta L_1)\|\mathbf{E}_1\|\|\mathbf{s}\|\end{aligned}$$

其中 $F=\begin{bmatrix} m & a \\ a & \theta\lambda_{\min}(Q)-2\sqrt{N}\|P\|\max_{i\in\mathcal{V}}\{l_i\}\end{bmatrix}$, $\mathbf{E}=[\tilde{\mathbf{x}}^T,\tilde{\mathbf{y}}^T]$, $a=-\frac{\max_{i\in\mathcal{V}}\{l_i\}+2N\|P\|\max_{i\in\mathcal{V}}\{l_i\}}{2}$, 当 $\theta>\frac{(\max_{i\in\mathcal{V}}\{l_i\}+2N\|P\|\max_{i\in\mathcal{V}}(l_i\})^2}{4m\lambda_{\min}(Q)}+\frac{2\sqrt{N}\|P\|\max_{i\in\mathcal{V}}\{l_i\}}{\lambda_{\min}(Q)}$, 则 $\lambda_{min}(F)>0$。令 $\bar{H}(\mathbf{y})=[h_{ij}]$, 在 $i=j$ 时, 我们有 $h_{ii}=[\nabla_{i1}^2 f_i(\mathbf{y}_i),\nabla_{i2}^2 f_i(\mathbf{y}_i),\ldots,\nabla_{iN}^2 f_i(\mathbf{y}_i)]$, $\nabla_{ij}^2 f_i(\mathbf{y}_i)=\frac{\partial^2 f_i(\mathbf{x})}{\partial x_i\partial x_i}|_{\mathbf{x}=\mathbf{y}_i}$, 否则 $h_{ij}=\mathbf{0}_N^T$, L_1 满足 $\|\bar{H}(\mathbf{y})\|\|\bar{\boldsymbol{\theta}}(\mathcal{L}\otimes\mathbf{I}_{N\times N}+\mathcal{A}_q)\|\leq L_1$。

因此

$$\dot{V}(t)\leq-\lambda_{\min}(G)\|\mathbf{E}\|^2$$

其中 $G=\begin{bmatrix}\lambda_{\min}(F) & -\frac{1+2\sqrt{N}\|P\|+\theta L_1}{2} \\ -\frac{1+2\sqrt{N}\|P\|+\theta L_1}{2} & \tau\lambda_{\min}(\mathbf{k})\end{bmatrix}$, $\mathbf{E}=[\tilde{\mathbf{x}}^T,\tilde{\mathbf{y}}^T,\tilde{\mathbf{s}}^T]$, 当 $\tau>\frac{(1+2\sqrt{N}\|P\|+\theta L_1)^2}{4\lambda_{\min}(F)\lambda_{\min}(\mathbf{k})}$, 则 $\lambda_{min}(G)>0$。