《精算学》讲义[1]

王华明[2]

[1]本讲义由陈锦功、王子颉、林嘉瑞、夏婧彤、徐婷婷等几名同学协助录入.
[2]安徽师范大学数学与统计学院, 安徽芜湖 (241003). Email:hmking@ahnu.edu.cn

序

本讲义是王华明老师在 2023-2024 年第 2 学期讲授的《精算学》课程笔记的电子版. 授课对象包括安徽师范大学 2021 级统计学专业全体同学及少数几位跨专业选课的同学. 教材选用的是北京大学出版社的《寿险精算基础》一书, 该书的作者是杨静平教授. 在此对北京大学出版社及杨静平教授表示感谢.

精算学内容

1. 你能活多久?（生存分布）
2. 你死的时候, 保险公司支付你 1 元, 这 1 元的现值为多少?（人寿保险）
3. 在你活着时, 保险公司每年支付你 1 元, 这些支付的现值是多少?（生存年金）
4. 上述的寿险与生存年金, 你该向保险公式缴纳多少保费?（保费理论）
5. 保险公司为了保证支付, 要准备多少钱?（准备金理论）

第一章　生存分布

1.1　新生儿的生存分布

一. 生存函数

设有一个新生儿, 其寿命记为 X, 则 X 是一个非负随机变量. 假设 X 为一个连续型随机变量, 其分布函数为 $F_X(x)$, 密度函数为 $f_X(x)$. 回忆一下, 我们有 $F_X(x) = \int_0^x f_X(t)dt$ 且在 $f_X(x)$ 的连续点上有

$$F'_X(x) = f_X(x).$$

如下我们总假设密度函数 $f_X(t)$ 连续.

定义 1.1. 称 $s(t) := P(X > t), t > 0$ 为 X 的生存函数.

易知

$$s(t) = 1 - F_X(t), s'(t) = -f_X(t). \tag{1.1}$$

二. 死亡力

现欲刻画一个 t 时刻还活着的个体瞬间死去的可能性, 做如下计算:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\downarrow 0}\frac{P(t < X \leq t+h|X > t)}{h} &= \lim_{h\downarrow 0}\frac{P(t < X \leq t+h)}{hP(X > t)} \\
&= \lim_{h\downarrow 0}\frac{P(X \leq t+h) - P(X \leq t)}{hP(X > t)} = \lim_{h\downarrow 0}\frac{F_X(t+h) - F_X(t)}{h}\frac{1}{1 - F_X(t)} \\
&= \frac{F'_X(t)}{1 - F_X(t)} = \frac{f_X(t)}{1 - F_X(t)} = -\frac{s'(t)}{s(t)}.
\end{aligned} \tag{1.2}$$

定义 1.2. 称 $\mu(t) := -\frac{s'(t)}{s(t)}, t \geq 0$ 为新生儿的死亡力函数.

由(1.2)中的计算可知, 死亡力 $\mu(t)$ 刻画了新生儿在 t 附近死去的"快慢".

命题 1.1. 关于 $\mu(t)$, $s(t)$ 及 $f_X(t)$ 有如下结论:

(i) $\mu(t) = -\frac{s'(t)}{s(t)} = \frac{f_X(t)}{1-F_X(t)} = \frac{f_X(t)}{s(t)}$;

(ii) $f_X(t) = \mu(t)s(t)$;

(iii) $s(t) = e^{-\int_0^t \mu(s)ds}$.

证明. (i) 和 (ii) 可由死亡力 $\mu(t)$ 的定义及 (1) 式直接得出. 现证明 (iii). 注意到 $s(0) = P(X > 0) = 1$ 及

$$\mu(t) = -\frac{s'(t)}{s(t)} = -[\ln s(t)]'.$$

所以有

$$\ln s(t) = -\int_0^t \mu(s)ds.$$

故 $s(t) = e^{-\int_0^t \mu(s)ds}$, (iii) 得证. □

注 1.1. **(a)** 由 $s(t) = e^{-\int_0^t \mu(s)\mathrm{d}s}$ 及 $\mu(t) = -\frac{s'(t)}{s(t)}$ 可知, 生存函数 $s(t)$ 与死亡力函数 $\mu(t)$ 相互唯一确定.

(b) 一个函数 $\mu(t)$ 要作为死亡力, 必须满足以下两条:

1° $\mu(t) \geq 0$, $\forall t \geq 0$ (保证 $s(t)$ 单调递减).

2° $\int_0^\infty \mu(t)\mathrm{d}t = \infty$(保证 $s(\infty) = 0$).

例 1.1. 假设新生儿的寿命服从以 λ 为参数的指数分布, 则密度函数 $f_X(t) = \lambda e^{-\lambda x}, x > 0$. 分布函数 $F_X(t) = \int_0^t f_X(s)ds = 1 - e^{-\lambda t}, t > 0$. 生存函数 $s(t) = 1 - F_X(t) = e^{-\lambda t}, t > 0$. 故其死亡力函数为

$$\mu(t) = -\frac{s'(t)}{s(t)} = -\frac{-\lambda e^{-\lambda t}}{e^{\lambda t}} \equiv \lambda. \tag{1.3}$$

注 1.2. 由(1.3)式可知, 若新生儿寿命服从以 λ 为参数的指数分布, 则死亡力 $\mu(t) \equiv \lambda$, 和 t 无关. 这表示新生儿的死亡力在任何时候都是一样的. 也就是说, 新生儿永远年轻. 这当然与实际情况不符. 所以, 指数分布作为寿命分布是有缺陷的. 但由于指数分布的计算较为简单, 所以在理论研究中, 学者们很多时候都采用指数分布作为寿命分布.

三. 整数年龄与分数年龄

很多时候, 保险金都是在整数时刻支付的. 所以有必要研究整数年龄和分数年龄. 设 $K(0)$ 为 X 的整数部分, $S(0)$ 为 X 的分数部分. 即

$$X = K(0) + S(0).$$

记 $\mathring{e}_0 = E(X)$, 它表示新生儿的期望寿命; 记 $e_0 = E(K(0))$, 它表示期望整数寿命. 易知

$$e_0 \le \mathring{e}_0 < e_0 + 1.$$

引理 1.1. 设随机变量 X 的 n 阶矩存在, 即 $E(X^n) < \infty$, 则 $\lim_{M\to\infty} M^n s(M) = 0$.

证明. 注意到

$$E(X^n) = \int_0^\infty s^n f_X(s)ds = \int_0^M s^n f_X(s)ds + \int_M^\infty s^n f_X(s)ds. \tag{1.4}$$

因 X 的 n 阶矩存在, 故上式左右两端都是有限的. 由于 $\lim_{M\to\infty} \int_0^M s^n f_X(s)ds = E(X^n)$, 所以 $\lim_{M\to\infty} \int_M^\infty s^n f_X(s)\mathrm{d}s = 0$. 于是

$$\begin{aligned} M^n s(M) = M^n P(X > M) &= \int_M^\infty M^n f_X(s)\mathrm{d}s \\ &\le \int_M^\infty s^n f_X(s)\mathrm{d}s \to 0,\ M \to \infty. \end{aligned}$$

引理证毕. □

命题 1.2. 如下结论成立:

(1) $\mathring{e}_0 = E(X) = \int_0^\infty s(t)\mathrm{d}t$;

(2) $E(X^2) = \int_0^\infty 2ts(t)\mathrm{d}t$;

(3) $E(K(0)^2) = \sum_{n=1}^\infty (2n-1)s(n)$;

(4) $e_0 = E(K(0)) = \sum_{n=1}^\infty s(n)$.

证明. 由分部积分公式和引理 1.1可知

$$\begin{aligned}E\left(X^{n}\right) &= \int_{0}^{\infty} t^{n} \mathrm{d}F(t) = \lim_{M\to\infty} \int_{0}^{M} t^{n} \mathrm{d}F(t) = -\lim_{M\to\infty} \int_{0}^{M} t^{n} \mathrm{d}s(t) \\ &= -\lim_{M\to\infty} \left(\left[t^{n} s(t)\right]\Big|_{0}^{M} - \int_{0}^{M} n t^{n-1} s(t) \mathrm{d}t\right) \\ &= \lim_{M\to\infty}\left[-M^{n} s(M)\right] + \lim_{M\to\infty} \int_{0}^{M} n t^{n-1} s(t) \mathrm{d}t \\ &= \int_{0}^{\infty} n t^{n-1} s(t) \mathrm{d}t.\end{aligned}$$

故 (1) 与 (2) 得证. 下证 (3), 由离散型随机变量函数期望的计算公式, 有

$$\begin{aligned}E(K(0)^{2}) &= \sum_{k=0}^{\infty} k^{2} P(K(0)=k) = \sum_{k=0}^{\infty} k^{2}[P(X \geq k) - P(X \geq k+1)] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} k^{2} s(k) - \sum_{k=0}^{\infty} k^{2} s(k+1) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} k^{2} s(k) - \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^{2} s(k+1) + \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) s(k+1) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) s(k+1) = \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1) s(n).\end{aligned}$$

故 (3) 得证. 类似可证 (4). □

1.2 x 岁个体的生存分布

一. x 岁个体余命的分布、密度及生存函数

为了方便, 今后将一个 x 岁还活着的个体记为 (x). 个体 (x) 的余命记为 $T(x)$. 显然有

$$T(x) = X - x.$$

这里特别强调一下, $T(x)$ 的分布表示在已知事件 $\{X > x\}$ 发生的条件下, $X - x$ 的分布. 如果新生儿在 x 岁之前死了, 也就没有了所谓的个体 (x), 其余命也就无从谈起.

记 $F_{T(x)}(t)$ 为 $T(x)$ 的分布函数, 则

$$\begin{aligned} F_{T(x)}(t) &= P(T(x) \le t|X > x) = P(X - x \le t|X > x) \\ &= \frac{P(x < X \le t + x)}{P(X > x)} = \frac{P(X > x) - P(X > x + t)}{P(X > t)} \\ &= 1 - \frac{s(x+t)}{s(x)}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

记 $f_{T(x)}(t)$ 为 $T(x)$ 的密度函数, 则

$$f_{T(x)}(t) = F'_{T(x)}(t) = -\frac{s'(x+t)}{s(x)} = \frac{f_X(x+t)}{s(x)}. \tag{1.6}$$

定义 1.3. 称 $s_{T(x)}(t) := P(T(x) > t)$ 为个体 (x) 的的生存函数.

由(1.5)可得

$$s_{T(x)}(t) = 1 - F_{T(x)}(t) = \frac{s(x+t)}{s(x)} \text{ 且 } s'_{T(x)}(t) = -f_{T(x)}(t). \tag{1.7}$$

二. x 岁个体的死亡力

为了解个体 (x) 在 $x+t$ 岁附近死去的 "快慢", 考虑极限

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \to 0+} \frac{P(t < T(x) \leqslant t + \Delta t|T(x) > t)}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t \to 0+} \frac{P(t < T(x) \leqslant t + \Delta t)}{\Delta t P(T(x) > t)} \\ = \lim_{\Delta t \to 0+} \frac{s_{T(x)}(t) - s_{T(x)}(t + \Delta t)}{\Delta t} \frac{1}{s_{T(x)}(t)} &= -\frac{s'_{T(x)}(t)}{s_{T(x)}(t)} \\ = -\frac{\frac{s'(x+t)}{s(x)}}{\frac{s(x+t)}{s(x)}} = -\frac{s'(x+t)}{s(x+t)} = \mu(x+t). \end{aligned}$$

定义 1.4. 称 $\mu_x(t) = -\frac{s'_{T(x)}(t)}{s_{T(x)}(t)}$ 为 X 岁个体在 t 年后的死亡力函数。

命题 1.3. 我们有

(i) $s_{T(x)}(t) = 1 - F_{T(x)}(t) = \frac{s(x+t)}{s(x)}$;

(ii) $\mu_x(t) = \frac{f_{T(x)}(t)}{1 - F_{T(x)}(t)} = \frac{f_{T(x)}(t)}{s_{T(x)}(t)} = -\frac{s'_{T(x)}(t)}{s_{T(x)}(t)}$.

(iii) $f_{T(x)}(t) = s_{T(x)}(t)\mu_x(t)$;

(iv) $\mu_x(t) = \mu(x+t)$;

(v) $s_{T(x)}(t) = e^{-\int_0^t \mu_x(s)ds} = e^{-\int_0^t \mu(x+s)ds} = e^{-\int_x^{x+t} \mu(s)ds}$.

证明. 利用(1.5), (1.6) 和 (1.7), 很容易证明 (i), (ii), (iii). 下证 (iv). 由 (ii), (1.6) 及(1.7) 可得,

$$\mu_x(t) = \frac{f_{T(x)}(t)}{s_{T(x)}(t)} = \frac{f_X(x+t)/s(x)}{s(x+t)/s(x)} = \frac{f_X(x+t)}{s(x+t)} = \mu(x+t).$$

其中, 为了得到最后一个等号, 我们用了命题 1.1 中的第一条. (iv) 得证.

最后证明 (v). 注意到 $s_{T(x)}(0) = P(T(x) > 0) = 1$ 且由第 (ii) 条有

$$\mu_x(t) = -\frac{s'_{T(x)}(t)}{s_{T(x)}(t)} = -[\ln s_{T(x)}(t)]'.$$

故 $\ln s_{T(x)}(t) = -\int_0^t \mu_x(s)ds$. 从而 $s_{T(x)}(t) = e^{-\int_0^t \mu_x(s)ds}$. 又因为 $\mu_x(t) = \mu(x+t)$, 故

$$s_{T(x)}(t) = e^{-\int_0^t \mu_x(s)ds} = e^{-\int_0^t \mu(x+s)ds} = e^{-\int_x^{x+t} \mu(s)ds},$$

其中, 为得到最后一个等号, 我们用定积分的换元法即可. □

注 1.3. 理论上, 一个人一旦出生, 其死亡力就 “注定” 了. 如果他在 x 岁还活着, 在 t 年后他变为 $x+t$ 岁, 此时他的死亡力是 $\mu_x(t)$. 换一种观点, 如果站在 0 时刻 (他出生时) 看, 他在 $x+t$ 岁的死亡力应为 $\mu(x+t)$. 故有

$$\mu_x(t) = \mu(x+t).$$

例 1.2. 设新生儿的寿命服从以 $\lambda > 0$ 为参数的指数分布. 则 $s(t) = e^{-\lambda t}, t > 0$. 从而有

$$\begin{aligned} &F_{T(x)}(t) = 1 - \frac{s(x+t)}{s(x)} = 1 - \frac{e^{-\lambda(x+t)}}{e^{-\lambda x}} = 1 - e^{-\lambda t} = F_X(t); \\ &f_{T(x)}(t) = F'_{T(x)}(t) = F'_X(t) = f_X(t); \\ &\mu_x(t) = \mu(x+t) \equiv \lambda. \end{aligned}$$

以上计算再次表明, 在指数分布寿命假设下, 新生儿的的寿命 X 与 x 岁的个体的余命 $T(x)$ 的分布相同. 进一步说明指数分布作为寿命分布是有缺陷的.

命题 1.4. $\forall u, t > 0$, 有

$$P(T(x) > t + u | T(x) > t) = P(T(x+t) > u). \tag{1.8}$$

该式的含义为: 一个 x 岁的人, 在 $x+t$ 岁还活着的条件下, 再活 u 年不死的概率与一个 $x+t$ 岁的人再 u 年内未死的概率相等.

证明. 对 $u, t > 0$, 由条件概率定义知

$$\begin{aligned} P(T(x) > t + u | T(x) > t) &= \frac{P(T(x) > t + u)}{P(T(x) > t)} = \frac{P(X - x) > t + u}{P(X - x) > t} \\ &= \frac{P(X - (x+t) > u)}{P(X > x + t)} = P(X - (x + t > u | X > x + t)) \\ &= P(T(x+t) > u) = \frac{P(T(x) > t + u)}{P(T(x) > t)}. \end{aligned}$$

命题证毕. □

注 1.4. 由(1.8)式立即可得

$$P(T(x) \leq t + u | T(x) > t) = P(T(x+t) \leq u). \tag{1.9}$$

例 1.3. 设新生儿的寿命服从指数分布，参数为 λ，则 $\mu(t) \equiv \lambda$,

$$\begin{aligned} &s(t) = e^{-\lambda t}, t > 0. \\ &F_{T(x)} = 1 - \frac{s(x+t)}{s(x)} = 1 - e^{-\lambda t} = F_x(t). \\ &f_{T(x)}(t) = F_{T(x)}(t) = \lambda e^{-\lambda t} = f_x(t), t > 0. \\ &s_{T(x)}(t) = \frac{s(x+t)}{s(x)} = e^{-\lambda t} = s(t), t > 0. \\ &\mu_x(t) = \mu(x+t) \equiv \mu, t > 0. \\ &e_x = \sum_{k=1}^{\infty} {}_k p_x = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda t} = \frac{e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}}. \\ &\mathring{e}_x = \int_0^{\infty} {}_t p_x dt = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$

显而易见, 这里的 $\mathring{e}_x$ 和 e_x 与 x 无关, 也就是说, 所有人的剩余寿命的期望都是一样的, 和他现在的年龄无关. 这进一步说明指数分布作为寿命分布是有缺陷的. 此外, 因 $\mathring{e}_x = ET(x) = \frac{1}{\lambda}$, 故指数分布的参数 λ 正好是期望寿命的倒数.

三. 一些精算学表示法

注意到 $S_{T(x)}(t)=P(T(x)>t)$ 表示个体 (x) 在 t 年后还活着的概率; 而 $F_{T(x)}(t)=P(T(x)\le t)$ 表示个体 (x) 在 t 年内死去的概率. 这些记号都很复杂, 书写比较困难. 故精算学中需引入一些简单的记号.

定义如下几个记号:

$\mathring{1}$. 用 ${}_tp_x \overset{\text{def}}{=} P(T(x)>t)=S_{T(x)}(t)$ 表示个体 (x) 在 t 年后还活着的概率. 显然有

$$ {}_tP_x=S_{T(x)}(t)=\mathrm{e}^{-\int_0^t\mu_x(s)\mathrm{d}s}=\mathrm{e}^{-\int_0^t\mu(x+s)\mathrm{d}s}=\mathrm{e}^{-\int_x^{x+t}\mu(s)\mathrm{d}s}. $$

$\mathring{2}$. 用 ${}_tq_x \overset{\text{def}}{=} P(T(x\le t)=F_{T(x)}(t))$ 表示一个 x 岁的人在 t 年内死亡的概率. 易知

$$ {}_tp_x+{}_tq_x=1. $$

$\mathring{3}$. 用 ${}_{u|t}q_x=P(u<T(x)\le u+t)$ 表示一个 x 岁的人在 $x+u$ 岁还活着, 但在未来 t 年内死亡的概率.

命题 1.5. 如下几个结论成立:

(i) $\frac{d({}_tp_x)}{dt}=-{}_tp_x\mu_x(t)$;

(ii) $\frac{d({}_tp_x)}{dx}=-{}_tp_x(\mu(x)-\mu(x+t))$.

证明. (i) 注意到 ${}_tp_x=\mathrm{e}^{-\int_0^t\mu_x(s)ds}$. 故

$$ \frac{d({}_tp_x)}{dt}=\frac{d(\mathrm{e}^{-\int_0^t\mu_x(s)ds})}{dt}=\mathrm{e}^{-\int_0^t\mu_x(s)ds}(-\int_0^t\mu_x(s)ds)'_t=-{}_tp_x\mu_x(t). $$

(ii) 利用等式 ${}_tp_x=e^{-\int_x^{x+t}\mu_x(s)ds}$, 有

$$ \frac{d({}_tp_x)}{dx}=(e^{-\int_x^{x+t}\mu_x(s)ds})'=e^{-\int_x^{x+t}\mu(s)ds}(-\int_x^{x+t}\mu(s)ds)'_x=-{}_tp_x(\mu(x)-\mu(x+t)). $$

命题证毕. □

命题 1.6. 以下结论成立:

(1) $f_{T(x)}(t)={}_t\,p_x*\mu_x(t)$;

(2) ${}_tp_x={}_sp_x\cdot{}_{t-s}p_{x+s},0\le s\le t$;

(3) ${}_{u|t}q_x={}_u\,p_x-{}_{u+t}\,p_x,u,t>0$;

(4) ${}_{u|t}q_x={}_u\,p_{x}{}_tq_{x+u},u,t\ge 0$.

证明. (1) 是显然的, 不需证明. (2) 固定 $0 \leq s \leq t$, 则由条件概率性质可知

$$\begin{aligned} {}_tp_x &= P(T(x) > t) = P(T(x) > s)P(T(x) > t|T(x) > s) \\ &= {}_sp_x P(T(x) > t + s - s|T(x) > s) \\ &= {}_sp_x P(T(x+s) > t - s) \\ &= {}_sp_x \cdot {}_{t-s}p_{x+s}. \end{aligned}$$

(3) 对 $t, u \geq 0$, 简单计算可知

$$\begin{aligned} {}_{u|t}q_x &= P(u < T(x) \leq u + t) \\ &= P(T(x) > u) - P(T(x) > u + t) = {}_up_x - {}_{u+t}p_x. \end{aligned}$$

(4) 固定 $t, u \geq 0$, 利用(1.9)得

$$\begin{aligned} {}_{u|t}q_x &= P(u < T(x) \leq u + t) = P(T(x) > u)P(T(x) \leq u + t|T(x) > u) \\ &= {}_up_x P(T(x+u) < t) = {}_up_{x t}q_{x+u}. \end{aligned}$$

命题证毕. □

四. 个体 (x) 的整数与分数余命

类似处理新生儿的寿命一样, 可将个体 (x) 的余命 $T(x)$ 分为整数部分和小数部分. 设

$$T(x) = K(x) + S(x)$$

其中 $K(x)$ 是 $T(x)$ 的整数部分, $S(x)$ 是 $T(x)$ 的小数部分. 记

$$\mathring{e}_x \stackrel{\text{def}}{=} E(T(x)),\ e_x \stackrel{\text{def}}{=} E(K(x))$$

则简单计算可知

$$\begin{aligned} \mathring{e}_x &= E(T(x)) = \int_0^\infty P(T(x) > t)dt = \int_0^\infty {}_tp_x dt; \\ e_x &= E(K(x)) = \sum_{k=0}^\infty kP(K(x) = k) \\ &= \sum_{k=0}^\infty k[P(T(x) \geq k) - P(T(x) \geq k+1)] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{\infty} k_k p_x - \sum_{k=0}^{\infty} k_{k+1} p_x = \sum_{k=0}^{\infty} {}_{k+1} p_x \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} {}_k p_x .
\end{aligned}
$$

1.3　随机生存群

一. 模型描述

设 0 时刻系统中有 l_0 个新生儿, 他们的寿命独立同分布, 服从某分布, 生存函数为 $s(t), t \geq 0$. 记

$\mathscr{L}(x)$ 为在 x 岁还活着的总人数;

${}_t\mathscr{D}_x$ 为 $[x, x+t]$ 内死去的总人数.

设系统中初始时刻的 l_0 个人的寿命分别为 $X_1, X_2, ..., X_n$, 则他们独立同分布, 且

$$P(X_i > t) = s(t), i = 1, ..., n.$$

显然有

$$\mathscr{L}(x) = \sum_{i=1}^{l_0} I_{\{X_i \geqslant x\}},\ {}_t\mathscr{D}_x = \sum_{i=1}^{l_0} I_{\{x \leqslant X_i < x+t\}}$$

其中 $I_A = \begin{cases} 1, & \omega \in A, \\ 0, & \omega \in A^c \end{cases}$ 为示性函数.

令

$$l_x \stackrel{def}{=} E\left(\mathscr{L}(x)\right),\ \text{它表示在}x\text{岁还活着的期望人数;}$$
$${}_t d_x \stackrel{def}{=} E\left({}_t\mathscr{D}_x\right),\ \text{它表示在}[x, x+t)\text{内死去人数的期望.}$$

二. 几个结论

命题 1.7. 如下结论成立:

$$l_x = l_0 s(x),\ {}_t d_x = l_x - l_{x+t}.$$

证明. 注意到 $E(I_A)=P(A)$, 所以

$$\begin{aligned}
l_x &= E(\mathscr{L}(x)) = E(\sum_{k=0}^{l_0} I_{\{x_k>x\}}) \\
&= \sum_{k=0}^{l_0} E(I_{\{x_k>x\}}) = \sum_{k=1}^{l_0} P(X_k>x) = \sum_{k=1}^{l_0} P(X_1>x) \\
&= l_0 P(X_1>x) = l_0 s(x); \\
{}_t d_x &= E({}_t\mathscr{D}_t) = E(\sum_{k=1}^{l_0} I_{\{x<x_k\le x+t\}}) \\
&= \sum_{k=1}^{l_0} E(I_{\{x<x_k\le x+t\}}) = \sum_{k=1}^{l_0} E(x<x_k\le x+t) \\
&= l_0 P(x<X_1\le x+t) = l_0[P(X_1>x)-P(X_1>x+t)] \\
&= l_0 s(x) - l_0 s(x+t) = l_x - l_{x+t}.
\end{aligned}$$

引入 l_x 及 ${}_t d_x$ 的目的是为了计算生存概率 ${}_t p_x$ 与死亡概率 ${}_t q_x$.

命题 1.8. 如下结论成立:

(i) ${}_t p_x = \frac{l_{x+t}}{l_x}$, ${}_t q_x = \frac{{}_t dx}{l_x}$, $l_{x+t} = l_x e^{-\int_x^{x+t}\mu(s)ds}$

(ii) $\frac{dl_x}{dx} = -l_x\mu(x)$, ${}_n d_x = \int_x^{x+n} l_x\mu(t)dy$.

证明. 我们先证 (i). 由 $l_x = l_0 s(x)$ 知 $s(x)=\frac{l_x}{l_0}$, 所以

$$ {}_t p_x = s_{T(x)}(t) = \frac{s(x+t)}{s(x)} = \frac{l_{x+t}/l_0}{l_x/l_0} = \frac{l_{x+t}}{l_x}. $$

由此可推出

$$\begin{aligned}
l_{x+t} &= l_x \cdot {}_t p_x = l_x e^{-\int_x^{x+t}\mu(s)ds}; \\
{}_t q_x &= 1 -_t p_x = 1 - \frac{l_{x+t}}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+t}}{l_x} = \frac{{}_t d_x}{l_x}.
\end{aligned}$$

下证 (ii). 由 (i) 知,

$$ \frac{dl_x}{dx} = l_0 e^{-\int_0^x \mu(t)dt}(-\mu(x)) = l_0 s(x)(-\mu(x)) = -l_x\mu(x). $$

由此可导出

$$ {}_n d_x = l_x - l_{x+n} = -\int_x^{x+n} \frac{d(l_y)}{dy}dy = \int_x^{x+n} l_x\mu(t)dy. $$

命题证毕.

1.4 作业

作业 1.1. 设某人现年 20 岁, 假设他的余命 $T(20)$ 服从 $[0,60]$ 上的均分分布, 求 $F_{T(20)}(t)$, $f_{T(20)}(t)$, $\mu_{20}(t)$, $s_{T(20)}(t)$.

作业 1.2. 设 $\mu(t)=\frac{1}{(t+e)(\ln(t+e))^a}, t\geq 0$. 讨论 a 取何值时, $\mu(t)$ 可作为死亡力函数, 并求出 $s_{T(x)}(t)$, $f_{T(x)}(t)$.

作业 1.3. 假设新生儿的寿命为 X, 死亡力为 $\mu(t)=\frac{a}{(t+1)}, t\geq 0, a>0$. 讨论 a 何值时, $D(X)$ 存在并求出 $D(X)$.

作业 1.4. 证明: $\frac{d}{dx}\mathring{e}_x=\mathring{e}_x\mu(x)-1$.

作业 1.5. 设系统中有 l_0 个新生儿, 它们的寿命独立同分布, 生存函数为

$$s(t)=1-\frac{t}{16}, 0\leq t\leq 16.$$

证明

$$({}_4\mathscr{D}_0, {}_8\mathscr{D}_4, {}_{12}\mathscr{D}_8, {}_{16}\mathscr{D}_{12}),$$

服从多项分布, 并计算 (1), 每个随机变量的期望; (2) 每个随机变量的方差; (3) 每两个随机变量的相关系数; (4) 对你计算所得的结果进行简要分析.

作业 1.6. 你现在多少岁? 请根据 303 页的附表 2.1(男生用)、307 页附表 2.2(女生用) 计算你 80 岁还活着的概率.

参考文献

[1] 杨静平/编著: 《寿险精算基础》, 北京大学出版社, 2002.

[2] 吴岚, 黄海, 何洋波/编著: 《金融数学引论》第二版, 北京大学出版社, 2013.