

《精算学》讲义¹

王华明²

¹本讲义由陈锦功、王子颢、林嘉瑞、夏婧彤、徐婷婷等几名同学协助录入.

²安徽师范大学数学与统计学院, 安徽芜湖 (241003). Email:hmking@ahnu.edu.cn

序

本讲义是王华明老师在 2023-2024 年第 2 学期讲授的《精算学》课程笔记的电子版. 授课对象包括安徽师范大学 2021 级统计学专业全体同学及少数几位跨专业选课的同学. 教材选用的是北京大学出版社的《寿险精算基础》一书, 该书的作者是杨静平教授. 在此对北京大学出版社及杨静平教授表示感谢.

精算学内容

1. 你能活多久?(生存分布)
2. 你死的时候, 保险公司支付你 1 元, 这 1 元的现值为多少?(人寿保险)
3. 在你活着时, 保险公司每年支付你 1 元, 这些支付的现值是多少?(生存年金)
4. 上述的寿险与生存年金, 你该向保险公式缴纳多少保费?(保费理论)
5. 保险公司为了保证支付, 要准备多少钱?(准备金理论)

第一章 生存分布

1.1 新生儿的生存分布

一. 生存函数

设有一个新生儿, 其寿命记为 X , 则 X 是一个非负随机变量. 假设 X 为一个连续型随机变量, 其分布函数为 $F_X(x)$, 密度函数为 $f_X(x)$. 回忆一下, 我们有 $F_X(x) = \int_0^x f_X(t)dt$ 且在 $f_X(x)$ 的连续点上有

$$F'_X(x) = f_X(x).$$

如下我们总假设密度函数 $f_X(t)$ 连续.

定义 1.1. 称 $s(t) := P(X > t), t > 0$ 为 X 的生存函数.

易知

$$s(t) = 1 - F_X(t), s'(t) = -f_X(t). \quad (1.1)$$

二. 死亡力

现欲刻画一个 t 时刻还活着的个体瞬间死去的可能性, 做如下计算:

$$\begin{aligned} \lim_{h \downarrow 0} \frac{P(t < X \leq t+h | X > t)}{h} &= \lim_{h \downarrow 0} \frac{P(t < X \leq t+h)}{hP(X > t)} \\ &= \lim_{h \downarrow 0} \frac{P(X \leq t+h) - P(X \leq t)}{hP(X > t)} = \lim_{h \downarrow 0} \frac{F_X(t+h) - F_X(t)}{h} \frac{1}{1 - F_X(t)} \\ &= \frac{F'_X(t)}{1 - F_X(t)} = \frac{f_X(t)}{1 - F_X(t)} = -\frac{s'(t)}{s(t)}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

定义 1.2. 称 $\mu(t) := -\frac{s'(t)}{s(t)}, t \geq 0$ 为新生儿的死亡力函数.

由(1.2)中的计算可知, 死亡力 $\mu(t)$ 刻画了新生儿在 t 附近死去的“快慢”.

命题 1.1. 关于 $\mu(t)$, $s(t)$ 及 $f_X(t)$ 有如下结论:

$$(i) \mu(t) = -\frac{s'(t)}{s(t)} = \frac{f_X(t)}{1-F_X(t)} = \frac{f_X(t)}{s(t)};$$

$$(ii) f_X(t) = \mu(t)s(t);$$

$$(iii) s(t) = e^{-\int_0^t \mu(s)ds}.$$

证明. (i) 和 (ii) 可由死亡力 $\mu(t)$ 的定义及 (1) 式直接得出. 现证明 (iii). 注意到 $s(0) = P(X > 0) = 1$ 及

$$\mu(t) = -\frac{s'(t)}{s(t)} = -[\ln s(t)]'.$$

所以有

$$\ln s(t) = -\int_0^t \mu(s)ds.$$

故 $s(t) = e^{-\int_0^t \mu(s)ds}$, (iii) 得证. □

注 1.1. (a) 由 $s(t) = e^{-\int_0^t \mu(s)ds}$ 及 $\mu(t) = -\frac{s'(t)}{s(t)}$ 可知, 生存函数 $s(t)$ 与死亡力函数 $\mu(t)$ 相互唯一确定.

(b) 一个函数 $\mu(t)$ 要作为死亡力, 必须满足以下两条:

1° $\mu(t) \geq 0, \forall t \geq 0$ (保证 $s(t)$ 单调递减).

2° $\int_0^\infty \mu(t)dt = \infty$ (保证 $s(\infty) = 0$).

例 1.1. 假设新生儿的寿命服从以 λ 为参数的指数分布, 则密度函数 $f_X(t) = \lambda e^{-\lambda t}, x > 0$. 分布函数 $F_X(t) = \int_0^t f_X(s)ds = 1 - e^{-\lambda t}, t > 0$. 生存函数 $s(t) = 1 - F_X(t) = e^{-\lambda t}, t > 0$. 故其死亡力函数为

$$\mu(t) = -\frac{s'(t)}{s(t)} = -\frac{-\lambda e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}} \equiv \lambda. \quad (1.3)$$

注 1.2. 由(1.3)式可知, 若新生儿寿命服从以 λ 为参数的指数分布, 则死亡力 $\mu(t) \equiv \lambda$, 和 t 无关. 这表示新生儿的死亡力在任何时候都是一样的. 也就是说, 新生儿永远年轻. 这当然与实际情况不符. 所以, 指数分布作为寿命分布是有缺陷的. 但由于指数分布的计算较为简单, 所以在理论研究中, 学者们很多时候都采用指数分布作为寿命分布.

三. 整数年龄与分数年龄

很多时候, 保险金都是在整数时刻支付的. 所以有必要研究整数年龄和分数年龄. 设 $K(0)$ 为 X 的整数部分, $S(0)$ 为 X 的分数部分. 即

$$X = K(0) + S(0).$$

记 $\dot{e}_0 = E(X)$, 它表示新生儿的期望寿命; 记 $e_0 = E(K(0))$, 它表示期望整数寿命. 易知

$$e_0 \leq \dot{e}_0 < e_0 + 1.$$

引理 1.1. 设随机变量 X 的 n 阶矩存在, 即 $E(X^n) < \infty$, 则 $\lim_{M \rightarrow \infty} M^n s(M) = 0$.

证明. 注意到

$$E(X^n) = \int_0^\infty s^n f_X(s) ds = \int_0^M s^n f_X(s) ds + \int_M^\infty s^n f_X(s) ds. \quad (1.4)$$

因 X 的 n 阶矩存在, 故上式左右两端都是有限的. 由于 $\lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^M s^n f_X(s) ds = E(X^n)$, 所以 $\lim_{M \rightarrow \infty} \int_M^\infty s^n f_X(s) ds = 0$. 于是

$$\begin{aligned} M^n s(M) &= M^n P(X > M) = \int_M^\infty M^n f_X(s) ds \\ &\leq \int_M^\infty s^n f_X(s) ds \rightarrow 0, \quad M \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

引理证毕. □

命题 1.2. 如下结论成立:

- (1) $\dot{e}_0 = E(X) = \int_0^\infty s(t) dt$;
- (2) $E(X^2) = \int_0^\infty 2ts(t) dt$;
- (3) $E(K(0)^2) = \sum_{n=1}^\infty (2n-1)s(n)$;
- (4) $e_0 = E(K(0)) = \sum_{n=1}^\infty s(n)$.

证明. 由分部积分公式和引理 1.1 可知

$$\begin{aligned}
 E(X^n) &= \int_0^\infty t^n dF(t) = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^M t^n dF(t) = - \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^M t^n ds(t) \\
 &= - \lim_{M \rightarrow \infty} ([t^n s(t)] \Big|_0^M - \int_0^M nt^{n-1}s(t)dt) \\
 &= \lim_{M \rightarrow \infty} [-M^n s(M)] + \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^M nt^{n-1}s(t)dt \\
 &= \int_0^\infty nt^{n-1}s(t)dt.
 \end{aligned}$$

故 (1) 与 (2) 得证. 下证 (3), 由离散型随机变量函数期望的计算公式, 有

$$\begin{aligned}
 E(K(0)^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 P(K(0) = k) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 [P(X \geq k) - P(X \geq k+1)] \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 s(k) - \sum_{k=0}^{\infty} k^2 s(k+1) \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 s(k) - \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^2 s(k+1) + \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1)s(k+1) \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1)s(k+1) = \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)s(n).
 \end{aligned}$$

故 (3) 得证. 类似可证 (4). □

1.2 x 岁个体的生存分布

一. x 岁个体余命的分布、密度及生存函数

为了方便, 今后将一个 x 岁还活着的个体记为 (x) . 个体 (x) 的余命记为 $T(x)$. 显然有

$$T(x) = X - x.$$

这里特别强调一下, $T(x)$ 的分布表示在已知事件 $\{X > x\}$ 发生的条件下, $X - x$ 的分布. 如果新生儿在 x 岁之前死了, 也就没有了所谓的个体 (x) , 其余命也就无从谈起.

记 $F_{T(x)}(t)$ 为 $T(x)$ 的分布函数, 则

$$\begin{aligned} F_{T(x)}(t) &= P(T(x) \leq t | X > x) = P(X - x \leq t | X > x) \\ &= \frac{P(x < X \leq t + x)}{P(X > x)} = \frac{P(X > x) - P(X > x + t)}{P(X > x)} \\ &= 1 - \frac{s(x + t)}{s(x)}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

记 $f_{T(x)}(t)$ 为 $T(x)$ 的密度函数, 则

$$f_{T(x)}(t) = F'_{T(x)}(t) = -\frac{s'(x + t)}{s(x)} = \frac{f_X(x + t)}{s(x)}. \quad (1.6)$$

定义 1.3. 称 $s_{T(x)}(t) := P(T(x) > t)$ 为个体 (x) 的生存函数.

由(1.5)可得

$$s_{T(x)}(t) = 1 - F_{T(x)}(t) = \frac{s(x + t)}{s(x)} \text{ 且 } s'_{T(x)}(t) = -f_{T(x)}(t). \quad (1.7)$$

二. x 岁个体的死亡力

为了解个体 (x) 在 $x + t$ 岁附近死去的“快慢”, 考虑极限

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0+} \frac{P(t < T(x) \leq t + \Delta t | T(x) > t)}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0+} \frac{P(t < T(x) \leq t + \Delta t)}{\Delta t P(T(x) > t)} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0+} \frac{s_{T(x)}(t) - s_{T(x)}(t + \Delta t)}{\Delta t} \frac{1}{s_{T(x)}(t)} = -\frac{s'_{T(x)}(t)}{s_{T(x)}(t)} \\ &= -\frac{\frac{s'(x+t)}{s(x)}}{\frac{s(x+t)}{s(x)}} = -\frac{s'(x+t)}{s(x+t)} = \mu(x+t). \end{aligned}$$

定义 1.4. 称 $\mu_x(t) = -\frac{s'_{T(x)}(t)}{s_{T(x)}(t)}$ 为 X 岁个体在 t 年后的死亡力函数.

命题 1.3. 我们有

- (i) $s_{T(x)}(t) = 1 - F_{T(x)}(t) = \frac{s(x+t)}{s(x)}$;
- (ii) $\mu_x(t) = \frac{f_{T(x)}(t)}{1 - F_{T(x)}(t)} = \frac{f_{T(x)}(t)}{s_{T(x)}(t)} = -\frac{s'_{T(x)}(t)}{s_{T(x)}(t)}$.
- (iii) $f_{T(x)}(t) = s_{T(x)}(t)\mu_x(t)$;

$$(iv) \mu_x(t) = \mu(x+t);$$

$$(v) s_{T(x)}(t) = e^{-\int_0^t \mu_x(s)ds} = e^{-\int_0^t \mu(x+s)ds} = e^{-\int_x^{x+t} \mu(s)ds}.$$

证明. 利用(1.5), (1.6) 和 (1.7), 很容易证明 (i), (ii), (iii). 下证 (iv). 由 (ii), (1.6) 及(1.7) 可得,

$$\mu_x(t) = \frac{f_{T(x)}(t)}{s_{T(x)}(t)} = \frac{f_X(x+t)/s(x)}{s(x+t)/s(x)} = \frac{f_X(x+t)}{s(x+t)} = \mu(x+t).$$

其中, 为了得到最后一个等号, 我们用了命题 1.1 中的第一条. (iv) 得证.

最后证明 (v). 注意到 $s_{T(x)}(0) = P(T(x) > 0) = 1$ 且由第 (ii) 条有

$$\mu_x(t) = -\frac{s'_{T(x)}(t)}{s_{T(x)}(t)} = -[\ln s_{T(x)}(t)]'.$$

故 $\ln s_{T(x)}(t) = -\int_0^t \mu_x(s)ds$. 从而 $s_{T(x)}(t) = e^{-\int_0^t \mu_x(s)ds}$. 又因为 $\mu_x(t) = \mu(x+t)$, 故

$$s_{T(x)}(t) = e^{-\int_0^t \mu_x(s)ds} = e^{-\int_0^t \mu(x+s)ds} = e^{-\int_x^{x+t} \mu(s)ds},$$

其中, 为得到最后一个等号, 我们用定积分的换元法即可. □

注 1.3. 理论上, 一个人一旦出生, 其死亡力就“注定”了. 如果他在 x 岁还活着, 在 t 年后他变为 $x+t$ 岁, 此时他的死亡力是 $\mu_x(t)$. 换一种观点, 如果站在 0 时刻 (他出生时) 看, 他在 $x+t$ 岁的死亡力应为 $\mu(x+t)$. 故有

$$\mu_x(t) = \mu(x+t).$$

例 1.2. 设新生儿的寿命服从以 $\lambda > 0$ 为参数的指数分布. 则 $s(t) = e^{-\lambda t}, t > 0$. 从而有

$$F_{T(x)}(t) = 1 - \frac{s(x+t)}{s(x)} = 1 - \frac{e^{-\lambda(x+t)}}{e^{-\lambda x}} = 1 - e^{-\lambda t} = F_X(t);$$

$$f_{T(x)}(t) = F'_{T(x)}(t) = F'_X(t) = f_X(t);$$

$$\mu_x(t) = \mu(x+t) \equiv \lambda.$$

以上计算再次表明, 在指数分布寿命假设下, 新生儿的寿命 X 与 x 岁的个体的余命 $T(x)$ 的分布相同. 进一步说明指数分布作为寿命分布是有缺陷的.

命题 1.4. $\forall u, t > 0$, 有

$$P(T(x) > t + u | T(x) > t) = P(T(x + t) > u). \quad (1.8)$$

该式的含义为: 一个 x 岁的人, 在 $x + t$ 岁还活着的条件下, 再活 u 年不死的概率与一个 $x + t$ 岁的人再 u 年内未死的概率相等.

证明. 对 $u, t > 0$, 由条件概率定义知

$$\begin{aligned} P(T(x) > t + u | T(x) > t) &= \frac{P(T(x) > t + u)}{P(T(x) > t)} = \frac{P((X - x) > t + u)}{P((X - x) > t)} \\ &= \frac{P(X - (x + t) > u)}{P(X > x + t)} = P(X - (x + t) > u | X > x + t) \\ &= P(T(x + t) > u) = \frac{P(T(x) > t + u)}{P(T(x) > t)}. \end{aligned}$$

命题证毕. □

注 1.4. 由(1.8)式立即可得

$$P(T(x) \leq t + u | T(x) > t) = P(T(x + t) \leq u). \quad (1.9)$$

例 1.3. 设新生儿的寿命服从指数分布, 参数为 λ , 则 $\mu(t) \equiv \lambda$,

$$\begin{aligned} s(t) &= e^{-\lambda t}, t > 0. \\ F_{T(x)} &= 1 - \frac{s(x + t)}{s(x)} = 1 - e^{-\lambda t} = F_x(t). \\ f_{T(x)}(t) &= F_{T(x)}(t) = \lambda e^{-\lambda t} = f_x(t), t > 0. \\ s_{T(x)}(t) &= \frac{s(x + t)}{s(x)} = e^{-\lambda t} = s(t), t > 0. \\ \mu_x(t) &= \mu(x + t) \equiv \mu, t > 0. \\ e_x &= \sum_{k=1}^{\infty} k p_x = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda k} = \frac{e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}}. \\ \dot{e}_x &= \int_0^{\infty} t p_x dt = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$

显而易见, 这里的 \dot{e}_x 和 e_x 与 x 无关, 也就是说, 所有人的剩余寿命的期望都是一样的, 和他现在的年龄无关. 这进一步说明指数分布作为寿命分布是有缺陷的. 此外, 因 $\dot{e}_x = ET(x) = \frac{1}{\lambda}$, 故指数分布的参数 λ 正好是期望寿命的倒数.

三. 一些精算学表示法

注意到 $S_{T(x)}(t) = P(T(x) > t)$ 表示个体 (x) 在 t 年后还活着的概率; 而 $F_{T(x)}(t) = P(T(x) \leq t)$ 表示个体 (x) 在 t 年内死去的概率. 这些记号都很复杂, 书写比较困难. 故精算学中需引入一些简单的记号.

定义如下几个记号:

1. 用 ${}_t p_x \stackrel{\text{def}}{=} P(T(x) > t) = S_{T(x)}(t)$ 表示个体 (x) 在 t 年后还活着的概率. 显然有

$${}_t p_x = S_{T(x)}(t) = e^{-\int_0^t \mu_x(s) ds} = e^{-\int_0^t \mu(x+s) ds} = e^{-\int_x^{x+t} \mu(s) ds}.$$

2. 用 ${}_t q_x \stackrel{\text{def}}{=} P(T(x) \leq t) = F_{T(x)}(t)$ 表示一个 x 岁的人在 t 年内死亡的概率. 易知

$${}_t p_x + {}_t q_x = 1.$$

3. 用 ${}_u|_t q_x = P(u < T(x) \leq u+t)$ 表示一个 x 岁的人在 $x+u$ 岁还活着, 但在未来 t 年内死亡的概率.

命题 1.5. 如下几个结论成立:

- (i) $\frac{d({}_t p_x)}{dt} = -{}_t p_x \mu_x(t);$
(ii) $\frac{d({}_t p_x)}{dx} = {}_t p_x (\mu(x) - \mu(x+t)).$

证明. (i) 注意到 ${}_t p_x = e^{-\int_0^t \mu_x(s) ds}$. 故

$$\frac{d({}_t p_x)}{dt} = \frac{d(e^{-\int_0^t \mu_x(s) ds})}{dt} = e^{-\int_0^t \mu_x(s) ds} (-\int_0^t \mu_x(s) ds)'_t = -{}_t p_x \mu_x(t).$$

- (ii) 利用等式 ${}_t p_x = e^{-\int_x^{x+t} \mu_x(s) ds}$, 有

$$\frac{d({}_t p_x)}{dx} = (e^{-\int_x^{x+t} \mu_x(s) ds})'_x = e^{-\int_x^{x+t} \mu(s) ds} (-\int_x^{x+t} \mu(s) ds)'_x = {}_t p_x (\mu(x) - \mu(x+t)).$$

命题证毕. □

命题 1.6. 以下结论成立:

- (1) $f_{T(x)}(t) = {}_t p_x \cdot \mu_x(t);$
(2) ${}_t p_x = {}_s p_x \cdot {}_{t-s} p_{x+s}, 0 \leq s \leq t;$
(3) ${}_u|_t q_x = {}_u p_x - {}_{u+t} p_x, u, t > 0;$
(4) ${}_u|_t q_x = {}_u p_x {}_t q_{x+u}, u, t \geq 0.$

证明. (1) 是显然的, 不需证明. (2) 固定 $0 \leq s \leq t$, 则由条件概率性质可知

$$\begin{aligned} {}_t p_x &= P(T(x) > t) = P(T(x) > s)P(T(x) > t|T(x) > s) \\ &= {}_s p_x P(T(x) > t + s - s|T(x) > s) \\ &= {}_s p_x P(T(x + s) > t - s) \\ &= {}_s p_x \cdot {}_{t-s} p_{x+s}. \end{aligned}$$

(3) 对 $t, u \geq 0$, 简单计算可知

$$\begin{aligned} {}_{u|t} q_x &= P(u < T(x) \leq u + t) \\ &= P(T(x) > u) - P(T(x) > u + t) = {}_u p_x - {}_{u+t} p_x. \end{aligned}$$

(4) 固定 $t, u \geq 0$, 利用(1.11)得

$$\begin{aligned} {}_{u|t} q_x &= P(u < T(x) \leq u + t) = P(T(x) > u)P(T(x) \leq u + t|T(x) > u) \\ &= {}_u p_x P(T(x + u) < t) = {}_u p_x {}_t q_{x+u}. \end{aligned}$$

命题证毕. □

四. 个体 (x) 的整数与分数余命

类似处理新生儿的寿命一样, 可将个体 (x) 的余命 $T(x)$ 分为整数部分和小数部分. 设

$$T(x) = K(x) + S(x)$$

其中 $K(x)$ 是 $T(x)$ 的整数部分, $S(x)$ 是 $T(x)$ 的小数部分. 记

$$\dot{e}_x \stackrel{\text{def}}{=} E(T(x)), \quad e_x \stackrel{\text{def}}{=} E(K(x))$$

则简单计算可知

$$\begin{aligned} \dot{e}_x &= E(T(x)) = \int_0^\infty P(T(x) > t) dt = \int_0^\infty {}_t p_x dt; \\ e_x &= E(K(x)) = \sum_{k=0}^\infty k P(K(x) = k) \\ &= \sum_{k=0}^\infty k [P(T(x) \geq k) - P(T(x) \geq k + 1)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{\infty} k_k p_x - \sum_{k=0}^{\infty} k_{k+1} p_x = \sum_{k=0}^{\infty} k_{k+1} p_x \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} k p_x.
\end{aligned}$$

1.3 随机生存群

一. 模型描述

设 0 时刻系统中有 l_0 个新生儿, 他们的寿命独立同分布, 服从某分布, 生存函数为 $s(t), t \geq 0$. 记

$\mathcal{L}(x)$ 为在 x 岁还活着的总人数;

${}_t\mathcal{D}_x$ 为 $[x, x+t]$ 内死去的总人数.

设系统中初始时刻的 l_0 个人的寿命分别为 X_1, X_2, \dots, X_n , 则他们独立同分布, 且

$$P(X_i > t) = s(t), i = 1, \dots, n.$$

显然有

$$\mathcal{L}(x) = \sum_{i=1}^{l_0} I_{\{X_i \geq x\}}, \quad {}_t\mathcal{D}_x = \sum_{i=1}^{l_0} I_{\{x \leq X_i < x+t\}}$$

其中 $I_A = \begin{cases} 1, & \omega \in A, \\ 0, & \omega \in A^c \end{cases}$ 为示性函数.

令

$l_x \stackrel{\text{def}}{=} E(\mathcal{L}(x))$, 它表示在 x 岁还活着的期望人数;

${}_td_x \stackrel{\text{def}}{=} E({}_t\mathcal{D}_x)$, 它表示在 $[x, x+t]$ 内死去人数的期望.

二. 几个结论

命题 1.7. 如下结论成立:

$$l_x = l_0 s(x), \quad {}_td_x = l_x - l_{x+t}.$$

证明. 注意到 $E(1_A) = P(A)$, 所以

$$\begin{aligned}
 l_x &= E(\mathcal{L}(x)) = E\left(\sum_{k=1}^{l_0} I_{\{X_k > x\}}\right) \\
 &= \sum_{k=1}^{l_0} E(I_{\{X_k > x\}}) = \sum_{k=1}^{l_0} P(X_k > x) = \sum_{k=1}^{l_0} P(X_1 > x) \\
 &= l_0 P(X_1 > x) = l_0 s(x); \\
 {}_t d_x &= E({}_t \mathcal{D}_t) = E\left(\sum_{k=1}^{l_0} I_{\{x < X_k \leq x+t\}}\right) \\
 &= \sum_{k=1}^{l_0} E(I_{\{x < X_k \leq x+t\}}) = \sum_{k=1}^{l_0} P(x < X_k \leq x+t) \\
 &= l_0 P(x < X_1 \leq x+t) = l_0 [P(X_1 > x) - P(X_1 > x+t)] \\
 &= l_0 s(x) - l_0 s(x+t) = l_x - l_{x+t}.
 \end{aligned}$$

引入 l_x 及 ${}_t d_x$ 的目的是为了计算生存概率 ${}_t p_x$ 与死亡概率 ${}_t q_x$.

命题 1.8. 如下结论成立:

- (i) ${}_t p_x = \frac{l_{x+t}}{l_x}$, ${}_t q_x = \frac{{}_t d_x}{l_x}$, $l_{x+t} = l_x e^{-\int_x^{x+t} \mu(s) ds}$
- (ii) $\frac{dl_x}{dx} = -l_x \mu(x)$, ${}_n d_x = \int_x^{x+n} l_y \mu(y) dy$.

证明. 我们先证 (i). 由 $l_x = l_0 s(x)$ 知 $s(x) = \frac{l_x}{l_0}$, 所以

$${}_t p_x = s_{T(x)}(t) = \frac{s(x+t)}{s(x)} = \frac{l_{x+t}/l_0}{l_x/l_0} = \frac{l_{x+t}}{l_x}.$$

由此可推出

$$\begin{aligned}
 l_{x+t} &= l_x \cdot {}_t p_x = l_x e^{-\int_x^{x+t} \mu(s) ds}, \\
 {}_t q_x &= 1 - {}_t p_x = 1 - \frac{l_{x+t}}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+t}}{l_x} = \frac{{}_t d_x}{l_x}.
 \end{aligned}$$

下证 (ii). 由 (i) 知,

$$\frac{dl_x}{dx} = l_0 e^{-\int_0^x \mu(t) dt} (-\mu(x)) = l_0 s(x) (-\mu(x)) = -l_x \mu(x).$$

由此可导出

$${}_n d_x = l_x - l_{x+n} = - \int_x^{x+n} \frac{d(l_y)}{dy} dy = \int_x^{x+n} l_y \mu(y) dy.$$

命题证毕. □

补充:

$${}_t d_x = \int_x^{x+t} l_y u(y) dy.$$

等式含义: 左端表示在 $[x, x+h]$ 内死去的人数, $u(y)dy = -\frac{s'(y)}{s(y)}dy = -\frac{d(s(y))}{s(y)} = \frac{s(y) - s(y+\Delta y)}{s(y)}$. 所以 $u(y)dy$ 表示一个人在 y 岁还活着的条件下, 在 $[y, y+dy]$ 内死去的概率, 于是 $l_y u(y)dy$ 表示在 $[y, y+dy]$ 内死去的人数. 对 y 积分 (求和) 可知 $\int_x^{x+t} l_y u(y)dy$ 表示在 $[x, x+t]$ 内死去的人数.

所以右端 = 左端.

1.4 生命表的元素

补充知识:

(i) 在精算学中, 若左下标是 1, 通常将其省略, 例如

$$p_x \triangleq {}_1p_x, q_x \triangleq {}_1q_x,$$

$$L_x \triangleq {}_1L_x, {}_uq_x \triangleq {}_u|1q_x.$$

(ii) $a \wedge b = \min\{a, b\}$, $a \vee b = \max\{a, b\}$, $EX = \int_0^\infty xf(x)dx$, $X \geq 0$.

下面用两种方法计算 $E(X \wedge t)$.

法一:

$$\begin{aligned} E(X \wedge t) &= \int_0^\infty (x \wedge t)f(x)dx \\ &= \int_0^t (x \wedge t)f(x)dx + \int_t^\infty (x \wedge t)f(x)dx \\ &= \int_0^t xf(x)dx + \int_t^\infty tf(x)dx \\ &= \int_0^t xf(x)dx + tP(X > t). \end{aligned}$$

□

法二:

$$\begin{aligned}
 E(X \wedge t) &= E[(X \wedge t)I] \\
 &= E((X \wedge t)[I_{x < t} + I_{x \geq t}]) \\
 &= E((X \wedge t)I_{x < t}) + E((X \wedge t)I_{x \geq t}) \\
 &= E(XI_{x < t}) + E(tI_{x \geq t}) \\
 &= \int_0^\infty xI_{x < t}f(x)dx + tE(I_{x \geq t}) \\
 &= \int_0^t xf(x)dx + tP(X \geq t).
 \end{aligned}$$

□

(iii) 条件数学期望. 设 A 是一个随机事件, X 为一个随机变量, 给定事件 A 的条件下, X 的条件期望定义为

$$E(X|A) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{E(XI_A)}{EI_A} = \frac{E(XI_A)}{P(A)}.$$

一. ${}_tL_x$: 所有人在 $[x, x+t)$ 内活过的总时间

一个体 (x) 在 $[x, x+t)$ 内活过的总时间为 $T(x) \wedge t$, 这是因为

若 $T(x) < t$, 则 (x) 在 $[x, x+t)$ 内活过的时间 $T(x)$.

若 $T(x) \geq t$, 则 (x) 在 $[x, x+t)$ 内活过的时间 t .

又因为在 x 还活着的人有 l_x 个, 故所有人在 $[x, x+t)$ 内活的总时间为 $l_x(T(x) \wedge t)$, 记其期望为

$${}_tL_x = l_x E(T(x) \wedge t).$$

命题 1.9. 如下结论成立:

$$\begin{aligned}
 {}_tL_x &= l_x E(T(x) \wedge t) \\
 &= \int_0^t sl_{x+s}u(x+s)ds + tl_{x+t} \\
 &= \int_0^t l_{x+s}ds
 \end{aligned}$$

证明. 第一个等式是定义. 现证第二个等式. 注意到

$$\begin{aligned}
 {}_tL_x &= l_x E(T(x) \wedge t) \\
 &= l_x \int_0^\infty (s \wedge t) {}_s p_x \mu_x(s) ds \\
 &= \int_0^\infty (s \wedge t) l_{x+s} \mu(x+s) ds \\
 &= \int_0^t s l_{x+s} \mu(x+s) ds + \int_t^\infty t l_{x+s} \mu(x+s) ds \\
 &= \int_0^t s l_{x+s} \mu(x+s) ds + t l_{x+t} \int_t^\infty \frac{l_{x+s}}{l_{x+t}} \mu(x+s) ds
 \end{aligned}$$

其中,

$$\begin{aligned}
 \int_t^\infty \frac{l_{x+s}}{l_{x+t}} \mu(x+s) ds &= \int_0^\infty \frac{l_{x+t+u}}{l_{x+t}} \mu(x+t+u) du \\
 &= \int_0^\infty u p_{x+t} \mu_{x+t}(u) du \\
 &= \int_0^\infty f_{T(x+t)}(u) du \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

于是, ${}_tL_x = \int_0^t s l_{x+s} \mu(x+s) ds + t l_{x+t}$. 故第二个等式成立.

下证第三个等式. 注意到

$$\begin{aligned}
 dl_y &= -l_y \mu(y) dy \\
 \Rightarrow dl_{x+s} &= -l_{x+s} \mu(x+s) ds \\
 \Rightarrow \int_0^t s dl_{x+s} &= - \int_0^t s l_{x+s} \mu(x+s) ds.
 \end{aligned}$$

由此可知

$$s l_{x+s} \Big|_0^t - \int_0^t l_{x+s} ds = - \int_0^t s l_{x+s} \mu(x+s) ds.$$

所以

$$\int_0^t s l_{x+s} \mu(x+s) ds + t l_{x+t} = \int_0^t l_{x+s} ds.$$

第三个等式得证. □

表达式 $\int_0^t s l_{x+s} \mu(x+s) ds + t l_{x+t}$ 的含义如下:

一方面, 在 $x+s$ 岁活着的人有 l_{x+s} 个, 每个人在 $[x+s, x+s+ds]$ 内死去的概率为 $\mu(x+s)ds$, 所以, 在 $[x+s, x+s+ds]$ 内死去的人数为 $l_{x+s}\mu(x+s)ds$, 他们每个人在 $[x, x+t]$ 内活 s 年, 所以在 $x+s$ 岁死去的人在 $[x, x+t]$ 内活的总时间为 $s l_{x+s}\mu(x+s)ds$, 再对 s 在 $(0, t)$ 求积分 (求和) 可知, $\int_0^t s l_{x+s}\mu(x+s)ds + t l_{x+t}$ 表示在 $[x, x+t]$ 内死去的人在这段时间内活过的总时间. 另一方面在 $x+t$ 岁还活着的人有 l_{x+t} , 每个人在 $[x, x+t]$ 内活了 t 岁, 他们在 $[x, x+t]$ 内总共活了 $t l_{x+t}$ 岁.

综合以上分析, $\int_0^t s l_{x+s}\mu(x+s)ds + t l_{x+t}$ 表示所有人在 $[x, x+t]$ 内活过的总时间, 这是一个复杂的公式, 但它有一个简单的表达 $\int_0^t l_{x+s} ds$.

二. $a(x)$: 一个 x 岁的人在 1 年内死去的条件下, 在 $[x, x+t]$ 内活过的期望时间

个体 (x) 的余命为 $T(x)$, 所以

$$a(x) = E(T(x)|T(x) \leq 1).$$

命题 1.10. 以下等式成立:

$$a(x) = \frac{\int_0^1 t {}_t p_x \mu_x(t) dt}{q_x}.$$

证明. 利用条件数学期望的定义得

$$\begin{aligned} a(x) &= E(T(x)|T(x) \leq 1) \\ &= \frac{E(T(x)I_{\{T(x) \leq 1\}})}{P(T(x) \leq 1)} \\ &= \frac{\int_0^\infty t I_{\{T(x) \leq 1\}} f_{T(x)}(t) dt}{q_x} \\ &= \frac{\int_0^\infty t I_{\{T(x) \leq 1\}} {}_t p_x \mu_x(t) dt}{q_x} \\ &= \frac{\int_0^1 t {}_t p_x \mu_x(t) dt}{q_x}. \end{aligned}$$

命题证毕. □

利用 $a(x)$ 可以给出 L_x 的另一个表达式.

命题 1.11. 如下等式成立:

$$L_x = d_x a(x) + l_{x+1}.$$

证明. 由 L_x 的定义可知

$$\begin{aligned}
 L_x &= l_x E(T(x) \wedge 1) \\
 &= l_x E(T(x) \wedge 1) I_{\{T(x) < 1\}} + l_x E(T(x) \wedge 1) I_{\{T(x) \geq 1\}} \\
 &= l_x E(T(x) * I_{\{T(x) < 1\}}) + l_x E(1 * I_{\{T(x) \geq 1\}}) \\
 &= l_x P(T(x) < 1) E(T(x) | T(x) < 1) + l_x P(T(x) \geq 1) \\
 &= l_x q_x a(x) + l_x p_x \\
 &= d_x a(x) + l_{x+1}.
 \end{aligned}$$

证毕. □

表达式 $L_x = d_x a(x) + l_{x+1}$ 的含义如下:

右端的 $d_x a(x)$ 表示 $[x, x+1)$ 内死去的人在 $[x, x+1)$ 内活过的总时间. 右端的 $l_{x+1} * 1$ 表示在 $x+1$ 岁活着的 l_{x+1} 人在 $[x, x+1)$ 内活过的总时间, 所以右端表示所有人在 $[x, x+1)$ 活过的总时间, 等于左端的 L_x .

$$\text{三. } {}_n m_x = \frac{{}_n q_x}{\int_0^n {}_t p_x dt} \text{ (中心死亡率)}$$

命题 1.12. 如下结论成立:

$${}_n m_x = \frac{{}_n d_x}{{}_n L_x}.$$

证明. 简单计算可得

$${}_n m_x = \frac{{}_n q_x}{\int_0^n {}_t p_x dt} = \frac{{}_n d_x / l_x}{\int_0^n \frac{l_{x+t}}{l_x} dt} = \frac{{}_n d_x}{{}_n L_x}.$$

命题证毕. □

$$\text{四. } T_x \triangleq \int_0^\infty l_{x+s} ds = {}_\infty L_x$$

显而易见, 表示所有人在 $[x, \infty)$ 内活过的总时间.

$$\text{五. } Y_x \triangleq \int_0^\infty T_{x+s} ds$$

生命表中包含 $q_x, l_x, d_x, L_x, T_x, e_0$ 等元素. 总的来说, 利用生命表可以计算出生存概率 ${}_k p_x$, 死亡概率 ${}_k q_x$ 、 ${}_k | j q_x$ 等.

1.5 分数年龄上的死亡假设

一. 为什么引入分数年龄死亡力假设?

${}_kP_x = \frac{l_{x+k}}{l_x}$, 若 k 为整数, 可查生命表计算 ${}_kP_x$, 例如: ${}_2P_{20} = \frac{l_{22}}{l_{20}}$.

但如果 k 不是整数, 例如: ${}_{2.5}P_{20} = \frac{l_{22.5}}{l_{20}}$, 求 $l_{22.5}$ 的值. 发现无法查表得出. 则可以令 $T(x) = K(x) + S(x)$, 其中 $K(x)$ 是整数部分, $S(x)$ 是分数部分.

关于 $S(x)$ 服从的分布可以满足以下两个假设:

(i) 死亡力均匀分布假设 $S(x) \sim U(0, 1)$

(ii) 常数死亡力假设.

二. 死亡力均匀分布假设 (UDD 假设)

(i) 定义: 若 x 为非负整数, $s(t)$ 是生存函数, 若 $\forall t \in [0, 1)$, 都有:

$$s(x+t) = (1-t)s(x) + ts(x+1). \quad (1.10)$$

称在 $[x, x+1)$ 上, 死亡力均匀分布假设成立.

(ii) 设 $[x, x+1)$ 上 UDD 假设成立, 则有以下结论:

1. $l_{x+t} = (1-t)l_x + tl_{x+1}, t \in [0, 1)$.

证明.

$$\begin{aligned} l_{x+t} &= l_0 s(x+t) \\ &= l_0 (1-t)s(x) + l_0 ts(x+1) \\ &= (1-t)l_x + tl_{x+1}. \end{aligned}$$

证毕. □

2. ${}_td_x = td_x, t \in [0, 1)$.

证明.

$$\begin{aligned} {}_td_x &= l_x - l_{x+t} \\ &= l_x - (1-t)l_x - tl_{x+1} \\ &= t(l_x - l_{x+1}) = td_x. \end{aligned}$$

证毕. □

3. ${}_tq_x = tq_x, t \in [0, 1)$.

证明.

$${}_tq_x = \frac{{}_td_x}{l_x} = \frac{td_x}{l_x} = tq_x.$$

证毕. □

4. $f_{T(x)}(t) = q_x, t \in [0, 1)$.

该结论可以反映均匀分布.

证明.

$$f_{t(x)}(t) = \frac{d({}_tq_x)}{dt} = \frac{d(tq_x)}{dt} = q_x.$$

证毕. □

5. $\mu_x(t) = \frac{q_x}{1-tq_x}$

证明.

$$\mu_x(t) = \frac{f_{t(x)}(t)}{S_{T(x)}(t)} = \frac{q_x}{{}_tp_x} = \frac{q_x}{1-tq_x} = \frac{q_x}{1-tq_x}.$$

证毕. □

(iii)

命题 1.13. 已知在每一年龄年上 UDD 假设成立, 则 $K(x)$ 与 $S(x)$ 相互独立, 且 $S(x)$ 服从 $[0, 1]$ 上的均匀分布.

证明. 考虑条件概率 $P(S(x) \leq t \mid K(x) = k)$, 有

$$\begin{aligned} P(S(x) \leq t \mid K(x) = k) &= \frac{P(S(x) \leq t, K(x) = k)}{P(K(x) = k)} \\ &= \frac{k|tq_x}{k|q_x} = \frac{k p_x tq_{x+k}}{k q_x q_{x+k}} = \frac{tq_{x+k}}{q_{x+k}} = t. \end{aligned}$$

因此, $K(x)$ 与 $S(x)$ 相互独立, 且 $S(x)$ 服从 $[0, 1]$ 上的均匀分布.

证毕. □

(iv)

命题 1.14. 在每一年龄年 UDD 假设成立时, 有

$$\dot{e}_x = e_x + \frac{1}{2}$$

$$\text{Var}(T) = \text{Var}(K) + \frac{1}{12}$$

证明. 根据命题 1.13 的结果, 知 $K(x)$ 与 $S(x)$ 相互独立, 且 $S(x)$ 服从 $[0, 1]$ 上的均匀分布, 因此有

$$\begin{aligned}\dot{e}_x &= E(K(x) + S(x)) \\ &= E(K(x)) + E(S(x)) \\ &= e_x + \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned}\text{Var}(T(x)) &= \text{Var}(K(x) + S(x)) \\ &= \text{Var}(K(x)) + \text{Var}(S(x)) \\ &= \text{Var}(K(x)) + \frac{1}{12}.\end{aligned}$$

证毕. □

三. 常数死亡力假设

(i) 定义: 设 x 为整数, 若 $\forall t \in [0, 1)$, 有

$$\ln s(x+t) = (1-t) \ln s(x) + t \ln s(x+1). \quad (1.11)$$

则称生存函数在年龄段 $[x, x+1)$ 满足**常数死亡力假设**.

(ii)

命题 1.15. 设在年龄段 $[x, x+1)$ 常数死亡力假设成立, 则对 $t \in (0, 1)$, 有

1. 期望生存人数满足

$$\ln l_{x+t} = (1-t) \ln l_x + t \ln l_{x+1};$$

证明. 因 $l_x = l_0 s(x)$, 所以由公式 (1.11), 知

$$\ln \frac{l_{x+t}}{l_0} = (1-t) \ln \frac{l_x}{l_0} + t \ln \frac{l_{x+1}}{l_0}.$$

所以 $\ln l_{x+t} = (1-t) \ln l_x + t \ln l_{x+1}$, 证毕. □

2. 死亡力为常数, 即

$$\mu_x(t) = -\ln p_x \stackrel{\Delta}{=} \mu;$$

证明. 对公式 (1.11) 取指数

$$\begin{aligned} s(x+t) &= s(x)^{1-t} s(x+1)^t \\ \iff {}_{x+t}p_0 &= {}_x p_0^{1-t} {}_{x+1}p_0^t \\ \iff {}_x p_0 {}_t p_x &= {}_x p_0 {}_t p_x^t \\ \iff {}_t p_x &= p_x^t \\ \iff e^{-\int_0^t \mu_x(s) ds} &= e^{-\int_0^t -\ln p_x ds} \end{aligned}$$

可证 $\mu_x(t) = -\ln p_x$. □

3.

$$l_{x+t} = l_x e^{-\mu t}, \quad {}_t q_x = 1 - p_x^t, \quad f_{T(x)}(t) = -p_x^t \ln p_x.$$

证明.

$$\begin{aligned} l_{x+t} &= l_x e^{-\int_x^{x+t} \mu(s) ds} = l_x e^{-\mu t}; \\ {}_t q_x &= 1 - {}_t p_x = 1 - p_x^t = 1 - e^{t \ln p_x} = 1 - e^{-\mu t}; \\ f_{T(x)}(t) &= {}_t p_x \mu_x(t) = p_x^t \mu = \mu e^{-\mu t}. \end{aligned}$$

□

例 1.4. 设 $S(x) = 1 - \frac{x}{12}$, $0 \leq x \leq 12$, l_0 个个体相互独立, 生存函数都是 $S(x)$. 问:

- (1) 求 $({}_3\mathcal{D}_0, {}_3\mathcal{D}_3, {}_3\mathcal{D}_6, {}_3\mathcal{D}_9)$ 的联合分布;
- (2) 求这四个随机变量的期望和方差;
- (3) 求它们两两之间的相关系数.

解. 易知 l_0 个人的寿命 $X_1, X_2, \dots, X_{l_0} \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} U[0, 12]$. 且随机变量满足

$${}_3\mathcal{D}_0 = \sum_{k=1}^{l_0} I_{\{0 \leq x_k \leq 3\}}$$

$${}_3\mathcal{D}_3 = \sum_{k=1}^{l_0} I_{\{3 \leq x_k \leq 6\}}$$

$${}_3\mathcal{D}_6 = \sum_{k=1}^{l_0} I_{\{6 \leq x_k \leq 9\}}$$

$${}_3\mathcal{D}_9 = \sum_{k=1}^{l_0} I_{\{9 \leq x_k \leq 12\}}$$

(1) 令事件 $A = \{{}_3\mathcal{D}_0 = k_1, {}_3\mathcal{D}_3 = k_2, {}_3\mathcal{D}_6 = k_3, {}_3\mathcal{D}_9 = k_4\}$, 若事件 A 发生, 则认为在 l_0 中, 有 k_1 人在 $[0, 3]$ 死亡; 有 k_2 人在 $[3, 6]$ 死亡; 有 k_3 人在 $[6, 9]$ 死亡; 有 k_4 人在 $[9, 12]$ 死亡. 其中 $k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = l_0$. 从 $k_1 + k_2 + k_3 + k_4$ 个人中, 选出 k_1 个人在 $[0, 3]$ 内死亡, 有 $C_{k_1+k_2+k_3+k_4}^{k_1}$ 种选法; 从 $k_2 + k_3 + k_4$ 个人中, 选出 k_2 个人在 $[3, 6]$ 内死亡, 有 $C_{k_2+k_3+k_4}^{k_2}$ 种选法; 从 $k_3 + k_4$ 个人中, 选出 k_3 个人在 $[6, 9]$ 内死亡, 有 $C_{k_3+k_4}^{k_3}$ 种选法... 以此推出:

$$P(A) = \frac{(k_1 + k_2 + k_3 + k_4)!}{k_1!k_2!k_3!k_4!} \cdot {}_3q_0^{k_1} \cdot {}_{3|3}q_0^{k_2} \cdot {}_{6|3}q_0^{k_3} \cdot {}_{9|3}q_0^{k_4}$$

(2) 对于一个二项分布 $B(n, p)$, 其期望 $E[X] = np$, 方差 $\text{Var}(X) = np(1 - p)$.

因此, 对于每个随机变量 ${}_3\mathcal{D}_k$:

期望:

$$E({}_3\mathcal{D}_k) = \frac{l_0}{4};$$

方差:

$$\text{Var}({}_3\mathcal{D}_k) = l_0 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3l_0}{16}.$$

(3) 以 ${}_3\mathcal{D}_0, {}_3\mathcal{D}_3$ 的相关系数为例:

$$\begin{aligned} \text{Cov}({}_3\mathcal{D}_0, {}_3\mathcal{D}_3) &= E({}_3\mathcal{D}_0 {}_3\mathcal{D}_3) - E({}_3\mathcal{D}_0)E({}_3\mathcal{D}_3) \\ &= E\left(\sum_{k=1}^{l_0} I_{\{0 \leq x_k \leq 3\}} \cdot \sum_{j=1}^{l_0} I_{\{3 \leq x_j \leq 6\}}\right) - \left(\frac{l_0}{4}\right)^2 \\ &= \sum_{k=1}^{l_0} \sum_{j \neq k} E(I_{\{0 \leq x_k \leq 3\}} \cdot I_{\{3 \leq x_k \leq 6\}}) - \left(\frac{1}{4}l_0\right)^2 \\ &= \frac{l_0(l_0 - 1)}{16} - \frac{l_0^2}{16} \\ &= -\frac{l_0}{16}. \end{aligned}$$

(对于 $\sum_{k=1}^{l_0} \sum_{j \neq k} E(I_{\{0 \leq x_k \leq 3\}} \cdot I_{\{3 \leq x_k \leq 6\}}) = \frac{l_0(l_0-1)}{16}$ 的理解: 其中 $\sum_{k=1}^{l_0} \sum_{j \neq k} = l_0(l_0-1)$, 而 $p(I_{c \leq x_k \leq c+3}) = \frac{1}{4}$, 故 $I_{0 \leq x_k \leq 3}$ 与 $I_{3 \leq x_k \leq 6}$ 同时取 1 的概率为 $\frac{1}{16}$.)

求出协方差即可求相关系数:

$$\begin{aligned} \rho({}_3\mathcal{D}_0, {}_3\mathcal{D}_3) &= \frac{\text{Cov}({}_3\mathcal{D}_0, {}_3\mathcal{D}_3)}{\sqrt{D({}_3\mathcal{D}_0)} \cdot \sqrt{D({}_3\mathcal{D}_3)}} \\ &= \frac{-\frac{l_0}{16}}{\sqrt{\frac{3}{16}l_0} \cdot \sqrt{\frac{3}{16}l_0}} \\ &= -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

可以推出两两之间所有相关系数皆为 $-\frac{1}{3}$. □

1.6 作业

作业 1.1. 设某人现年 20 岁, 假设他的余命 $T(20)$ 服从 $[0, 60]$ 上的均匀分布, 求 $F_{T(20)}(t)$, $f_{T(20)}(t)$, $\mu_{20}(t)$, $s_{T(20)}(t)$.

作业 1.2. 设 $\mu(t) = \frac{1}{(t+e)(\ln(t+e))^a}$, $t \geq 0$. 讨论 a 取何值时, $\mu(t)$ 可作为死亡力函数, 并求出 $s_{T(x)}(t)$, $f_{T(x)}(t)$.

作业 1.3. 假设新生儿的寿命为 X , 死亡力为 $\mu(t) = \frac{a}{(t+1)}$, $t \geq 0$, $a > 0$. 讨论 a 何值时, $D(X)$ 存在并求出 $D(X)$.

作业 1.4. 证明: $\frac{d}{dx} \dot{e}_x = \dot{e}_x \mu(x) - 1$.

作业 1.5. 设系统中有 l_0 个新生儿, 它们的寿命独立同分布, 生存函数为

$$s(t) = 1 - \frac{t}{16}, 0 \leq t \leq 16.$$

证明

$$({}_4\mathcal{D}_0, {}_4\mathcal{D}_4, {}_4\mathcal{D}_8, {}_4\mathcal{D}_{12})$$

服从多项分布, 并计算 (1) 每个随机变量的期望; (2) 每个随机变量的方差; (3) 每两个随机变量的相关系数; (4) 对你计算所得的结果进行简要分析.

作业 1.6. 你现在多少岁? 请根据 303 页的附表 2.1(男生用)、307 页附表 2.2(女生用) 计算你 80 岁还活着的概率.

作业 1.7. i 为复利率, $v = \frac{1}{1+i}$ 为贴现因子, $\delta = \ln(1+i)$ 为利息力.

(1) 设 $\mu_x(t) \equiv \mu = 0.05, \delta \equiv 0.04$, 求: $E(v^{T(x)}); D(v^{T(x)}); E(\int_0^{T(x)} v^t dt); D(\int_0^{T(x)} v^t dt);$

(2) 设 UDD 成立, 求证: $E(v^{T(x)}) = \frac{i}{\delta} E(v^{K(x)+1})$.

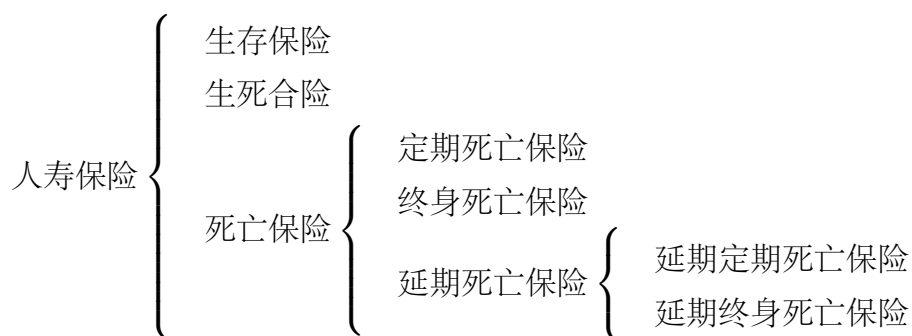
第二章 人寿保险

2.1 人寿保险概述

一. 人寿保险关心的问题

1. 支付条件, 支付的时刻 (保险金).
2. 支付保险金的现值 Z 是多少?
3. 保险金的精算现值 EZ .
4. 风险度量 DZ .
5. 精算现值 EZ , DZ 的性质.

二. 人寿保险的分类



2.2 生存保险

一. 支付方式与支付条件

若被保险人在 n 年内死亡 (即 $T(x) < n$), 则不予任何支付;

若他在 n 年内未死 (即 $T(x) \geq n$), 则在 n 时刻支付他 1 元保险金.

二. 支付现值 Z

若 $T(x) < n$, 则 $Z = 0$; 若 $T(x) \geq n$, 则 $Z = 1 \cdot v^n = v^n$, 其中贴现因子 $v = \frac{1}{1+i}$

$$\text{即 } Z = v^n I_{\{T(x) \geq n\}} = \begin{cases} v^n, & \text{if } T(x) \geq n \\ 0, & \text{if } T(x) < n \end{cases}$$

三. 精算现值 EZ

$$E(Z) = E(v^n I_{\{T(x) \geq n\}}) = v^n E(I_{\{T(x) \geq n\}}) = v^n P(T(x) \geq n) = v^n \cdot {}_n p_x$$

n 年期生存保险的精算现值记为 $A_{x:\overline{n}|}$ 或 ${}_n E_x$

$$\text{所以 } A_{x:\overline{n}|} = {}_n E_x = v^n \cdot {}_n p_x$$

四. 二阶矩

$$E(Z^2) = E([v^n I_{\{T(x) \geq n\}}]^2) = E(v^{2n} I_{\{T(x) \geq n\}}) = v^{2n} \cdot {}_n p_x$$

$$DZ = EZ^2 - (EZ)^2 = v^{2n} \cdot {}_n p_x \cdot {}_n q_x$$

命题 2.1. $\forall 0 \leq k \leq n$, 有

$${}_n E_x = {}_k E_x \cdot {}_{n-k} E_{x+k} \quad (2.1)$$

$$(1+i)^k \cdot l_x \cdot {}_n E_x = l_{x+k} \cdot {}_{n-k} E_{x+k} \quad (2.2)$$

证明.

$${}_n E_x = v^n \cdot {}_n p_x = v^k \cdot v^{n-k} \cdot {}_k p_x \cdot {}_{n-k} p_{x+k} = {}_k E_x \cdot {}_{n-k} E_{x+k}$$

由 (2.1) 和 (2.2) 可知,

$${}_n E_x = v^k \cdot {}_k p_x \cdot {}_{n-k} E_{x+k} = \left(\frac{1}{1+i}\right)^k \cdot \frac{l_{x+k}}{l_x} \cdot {}_{n-k} E_{x+k}$$

$$\text{即 } (1+i)^k \cdot l_x \cdot {}_n E_x = l_{x+k} \cdot {}_{n-k} E_{x+k}.$$

□

注 2.1. 等式 $(1+i)^k \cdot l_x \cdot {}_nE_x = l_{x+k} \cdot {}_{n-k}E_{x+k}$ 的含义是:

在 0 时刻, l_x 个人各自买了一份 n 年期的生存保险, 保费总额为 $l_x \cdot {}_nE_x$, k 年后, 这笔钱的积累值为 $(1+i)^k \cdot l_x \cdot {}_nE_x$, 若此时保险公司破产不干了, 他分给在 k 时刻还活着的 l_{x+k} 个人每人 ${}_{n-k}E_{x+k}$ 元, 这正好够每个人去重新买一份 $n-k$ 年期的生存保险.

2.3 n 年期 (定期) 死亡保险

一个个体 (x) 投了一份 n 年期死亡保险, 约定: 若 (x) 在 n 年内死亡, 则在其死亡时刻立刻支付 1 元保险金或在其死亡年末支付 1 元保险金.

死亡立即支付——连续型

死亡年末支付——离散型

一. 死亡立即支付的 n 年期定期寿险

1. 支付方式和条件

若 (x) 在 n 年内死亡 (即 $T(x) < n$), 则在 $T(x)$ 时刻支付 1 元保险金;

若 (x) 在 n 年内未死 (即 $T(x) \geq n$), 则不予支付.

2. 支付现值 Z

若 $T(x) < n$, 则 $Z = v^{T(x)}$; 若 $T(x) \geq n$, 则 $Z = 0$.

所以 $Z = v^{T(x)} I_{\{T(x) < n\}}$

3. n 年期定期寿险的精算现值记为 $\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1$

注 2.2. 符号 $\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1$ 中, 上划线表示死亡立即支付 (连续型), 1 表示保险金为 1 元, x 表示保险人为 x 岁, n 表示 n 年期死亡保险.

$$\begin{aligned}\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 &= EZ = E(v^{T(x)} I_{\{T(x) < n\}}) = \int_0^n v^t I_{\{t < n\}} \cdot f_{T(x)}(t) dt \\ &= \int_0^n v^t \cdot {}_t p_x \cdot \mu_x(t) dt = \int_0^n e^{-\delta t} \cdot {}_t p_x \cdot \mu_x(t) dt\end{aligned}$$

命题 2.2. $\forall 0 \leq k \leq n$, 有

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 = \bar{A}_{x:\overline{k}|}^1 + {}_k E_x \cdot \bar{A}_{x+k:\overline{n-k}|}^1 \quad (2.3)$$

$$l_x \cdot \bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 = \int_0^n v^t \cdot l_{x+t} \cdot \mu_x(t) dt \quad (2.4)$$

证明. (2.3)

$$\begin{aligned} \bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 &= \int_0^n v^t \cdot {}_t p_x \cdot \mu_x(t) dt = \int_0^k v^t \cdot {}_t p_x \cdot \mu_x(t) dt + \int_k^n v^t \cdot {}_t p_x \cdot \mu_x(t) dt \\ &= \bar{A}_{x:\overline{k}|}^1 + \int_0^{n-k} v^{t+k} \cdot {}_{t+k} p_x \cdot \mu_{x+k}(t) dt = \bar{A}_{x:\overline{k}|}^1 + \int_0^{n-k} v^k \cdot v^t {}_k p_x \cdot {}_t p_{x+k} \mu_{x+k}(t) dt \\ &= \bar{A}_{x:\overline{k}|}^1 + v^k \cdot {}_k p_x \int_0^{n-k} v^t \cdot {}_t p_{x+k} \mu_{x+k}(t) dt = \bar{A}_{x:\overline{k}|}^1 + {}_k E_x \cdot \bar{A}_{x+k:\overline{n-k}|}^1 \end{aligned}$$

(2.4)

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 = \int_0^n v^t \cdot {}_t p_x \cdot \mu_x(t) dt = \int_0^n v^t \cdot \frac{l_{x+t}}{l_x} \cdot \mu_x(t) dt$$

$$\text{所以 } l_x \cdot \bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 = \int_0^n v^t \cdot l_{x+t} \cdot \mu_x(t) dt. \quad \square$$

注 2.3. 等式 (2.5) 的含义:

$\mu_x(t)dt$ 表示在 $[x+t, x+t+dt]$ 内死去的概率, 所以 $l_{x+t}\mu_x(t)dt$ 表示在 $[x+t, x+t+dt]$ 内死去的人数, 在这期间内死去的人每人支付 1 元保险金, 共 $l_{x+t}\mu_x(t)dt$ 元, 这些钱的现值为 $v^t l_{x+t}\mu_x(t)dt$, 于是 $\int_0^n v^t l_{x+t}\mu_x(t)dt$ 表示在 $[x, x+n]$ 内死去的人领取的保险的总现值, 这些钱应等于初始时刻的 l_x 个人的保费总额 $l_x \bar{A}_{x:\overline{n}|}^1$, 即 $l_x \cdot \bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 = \int_0^n v^t \cdot l_{x+t} \cdot \mu_x(t) dt$

5. Z 的方差 DZ

记: ${}^j \bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 = \int_0^\infty e^{-j\delta t} \cdot {}_t p_x \cdot \mu_x(t) dt$, 它表示在计算 $\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1$ 的过程中, 将 δ 换成 $j\delta$ 后的值 (${}^j \bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 @ \delta = \bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 @ j\delta$)

$$\begin{aligned} E(Z^2) &= E((v^{T(x)} I_{T(x)<n})^2) = E(v^{2T(x)} I_{T(x)<n}) \\ &= E(e^{-2\delta T(x)} I_{T(x)<n}) = \int_0^\infty e^{-2\delta t} I_{t<n} f_{T(x)}(t) dt \\ &= \int_0^n e^{-2\delta t} {}_t p_x \mu_x(t) dt = {}^2 \bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 \end{aligned}$$

$$\text{于是 } DZ = EZ^2 - (EZ)^2 = {}^2 \bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 - (\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1)^2 = \bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 @ 2\delta - (\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 @ \delta)^2$$

例 2.1. 假设死亡力 $\mu(t) \equiv \mu$, 利息力为 δ , 个体 (x) 投了一个 n 年期寿险, 计算精算现值及支付现值的方差.

解.

$$\begin{aligned}\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 &= \int_0^n e^{-\delta t} {}_t p_x \mu_x(t) dt \\ &= \int_0^n e^{-\delta t} \cdot e^{-\int_x^{x+t} \mu ds} \mu dt \\ &= \int_0^n e^{-\delta t} \cdot e^{-\mu t} \mu dt \\ &= \frac{\mu}{\mu + \delta} (1 - e^{-(\mu + \delta)n})\end{aligned}$$

$${}^2\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 = \frac{\mu}{\mu + 2\delta} (1 - e^{-(\mu + 2\delta)n})$$

$$DZ = {}^2\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 - (\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1)^2 = \frac{\mu}{\mu + 2\delta} (1 - e^{-(\mu + 2\delta)n}) - \left(\frac{\mu}{\mu + \delta} (1 - e^{-(\mu + \delta)n}) \right)^2$$

□

二. 死亡年末支付的 n 年期定期寿险

1. 支付方式和条件

若个体 (x) 在 n 年内死亡, 则在其死亡年末支付 1 元; 若个体 (x) 在 n 年内未死, 则不予支付.

2. 支付现值 Z

$$Z = v^{K(x)+1} I_{\{T(x) < n\}}$$

3. 精算现值记为 $\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1$

它的分布列如下,

Z	v^1	v^2	v^3	\dots	v^n
概率	q_x	${}_1 q_x$	${}_2 q_x$	\dots	${}_{n-1} q_x$

$P(K(x) \leq T(x) < K(x) + 1) = {}_k|q_x$, 故 $A_{x:\overline{n}|}^1 = E(Z) = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} {}_k|q_x$

4. Z 的方差 DZ

$$DZ = {}^2A_{x:\overline{n}|}^1 - (A_{x:\overline{n}|}^1)^2$$

其中 ${}^2A_{x:\overline{n}|}^1 = \sum_{k=0}^{n-1} v^{2(k+1)} {}_k|q_x$

5. 几个性质:

(i)

$$A_{x:\overline{m}|}^1 = A_{x:\overline{m}|}^1 + {}_mE_x \cdot A_{x+m:\overline{n-m}|}^1, \forall 0 \leq m \leq n \quad (2.5)$$

特别地, 当 $m = 1$ 时, $A_{x:\overline{1}|}^1 = vq_x$, $E_x = vp_x$.

(ii)

$$A_{x:\overline{n}|}^1 = vq_x + vp_x \cdot A_{x:\overline{n-1}|}^1 \quad (2.6)$$

(iii)

$$(1+i)l_x A_{x:\overline{n}|}^1 = d_x + l_{x+1} A_{x+1:\overline{n-1}|}^1 \quad (2.7)$$

证明. (2.5)

对于 $0 \leq m \leq n$, 有

$$\begin{aligned} A_{x:\overline{n}|}^1 &= \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} {}_k|q_x \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} v^{k+1} {}_k|q_x + \sum_{k=m}^{n-1} v^{k+1} {}_k|q_x \\ &= A_{x:\overline{m}|}^1 + v^m {}_mp_x \sum_{k=0}^{n-m-1} v^{k+1} {}_k|q_{x+m} \\ &= A_{x:\overline{m}|}^1 + {}_mE_x A_{x+m:\overline{n-m}|}^1 \end{aligned}$$

□

等式 $(1+i)l_x A_{x:\overline{n}}^1 = d_x + l_{x+1} A_{x+1:\overline{n-1}}^1$ 的含义:

此式的左端表示在 0 时刻, l_x 个人各自买了一份 n 年期的死亡保险, 保费总额为 $l_x A_{x:\overline{n}}^1$. 一年后, 这笔钱的积累值为 $(1+i)l_x A_{x:\overline{n}}^1$. 在 $[0, 1]$ 之间有 d_x 个人死去, 保险公司需给他们每人 1 元, 共 d_x 元. 若此时保险公司破产不干了, 他分给在 1 时刻还活着的 l_{x+1} 个人每人 $A_{x+1:\overline{n-1}}^1$ 元, 这正好够每个人去重新买一份 $n-1$ 年期的死亡保险.

例 2.2 (均匀分布). 设一个 20 岁的人买了一份 10 年期的死亡保险, 设其余命 $T(20)$ 服从 $[0, 80]$ 上的均匀分布, $i = 0.05$, 保险金死亡年末支付 10 万元, 则支付现值

$$Z = v^{K(20)+1} I_{T(20) < 10} \cdot 100000$$

精算现值

$$\begin{aligned} E(Z) &= 100000 \cdot A_{20:\overline{10}}^1 \\ &= 100000 \cdot \sum_{k=0}^9 v^{k+1} \cdot {}_k|q_{20} \\ &\approx 9652.1687 \end{aligned}$$

三. 死亡年末支付与死亡立即支付的关系

命题 2.3. 设死亡力均匀分布假设成立, 则 $\overline{A}_{x:\overline{n}}^1 = \frac{i}{\delta} A_{x:\overline{n}}^1$.

证明.

$$\begin{aligned} \overline{A}_{x:\overline{n}}^1 &= E(v^{T(x)} \cdot I_{T(x) < n}) \\ &= E(v^{K(x)+1} \cdot I_{T(x) < n} \cdot v^{S(x)-1}) \\ &= E(v^{K(x)+1} \cdot I_{T(x) < n}) E(v^{S(x)-1}) \\ &= A_{x:\overline{n}}^1 \cdot \int_0^1 e^{-\delta(s-1)} \cdot 1 ds \\ &= \frac{i}{\delta} A_{x:\overline{n}}^1 \end{aligned}$$

□

2.4 终身死亡保险

一. 死亡后立即支付的终身死亡保险

1. 支付方式与支付条件:

在个体 (x) 死亡时刻立刻支付 1 元保险金.

2. 支付现值 Z :

$$Z = v^{T(x)}.$$

3. 精算现值用 \bar{A}_x 表示

$$\bar{A}_x = E(Z) = \int_0^\infty v^t {}_t p_x \mu_x(t) dt.$$

4. Z 的方差 DZ

$$E(Z^2) = \int_0^\infty v^{2t} {}_t p_x \mu_x(t) dt = {}^2\bar{A}_x, \text{ 故 } DZ = E(Z^2) - E(Z)^2 = {}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2$$

5. 几个性质:

(i)

$$\bar{A}_x = \bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 + {}_n E_x \cdot \bar{A}_{x+n} \quad (2.8)$$

(ii)

$$\frac{d\bar{A}_x}{dx} = \delta \bar{A}_x + \mu(x)(\bar{A}_x - 1) \quad (2.9)$$

证明. (2.8)

$$\begin{aligned} \bar{A}_x &= E(v^{T(x)}) \\ &= E(v^{T(x)} I_{T(x) \leq n}) + E(v^{T(x)} I_{T(x) > n}) \\ &= \bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 + \int_n^\infty v^t {}_t p_x \mu_x(t) dt \\ &= \bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 + v^n \cdot {}_n p_x \int_0^\infty v^t {}_t p_{x+n} \mu_{x+n}(t) dt \end{aligned}$$

$$= \bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 + {}_nE_x \cdot \bar{A}_{x+n}$$

(2.9)

已知 $\bar{A}_x = \int_0^\infty e^{-\delta t} {}_t p_x \mu_x(t) dt$, $\frac{d {}_t p_x}{dt} = -{}_t p_x \mu_x(t)$, 故

$$\bar{A}_x = - \int_0^\infty e^{-\delta t} d({}_t p_x) = -e^{-\delta t} {}_t p_x \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \delta e^{-\delta t} {}_t p_x dt = 1 - \delta \int_0^\infty e^{-\delta t} {}_t p_x dt$$

所以

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{A}_x}{dx} &= -\delta \int_0^\infty e^{-\delta t} \frac{d {}_t p_x}{dx} dt \\ &= -\delta \int_0^\infty e^{-\delta t} {}_t p_x (\mu(x) - \mu(x+t)) dt \\ &= -\delta \mu(x) \int_0^\infty e^{-\delta t} {}_t p_x dt + \delta \int_0^\infty e^{-\delta t} {}_t p_x \mu_x(t) dt \\ &= \delta \bar{A}_x + \mu(x)(\bar{A}_x - 1) \end{aligned}$$

□

例 2.3. 设死亡力为 u , 利息力为 δ , 个体 (x) 投了一份死亡立即支付的终身寿险, 求 \bar{A}_x , ${}^2\bar{A}_x$ 和给付现值 Z 的方差 $D(Z)$.

解.

$$\begin{aligned} \bar{A}_x &= \int_0^\infty e^{-\delta t} \cdot {}_t p_x \cdot u_x(t) dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\delta t} \cdot e^{-\int_x^{x+t} u(s) ds} \cdot u_x(t) dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\delta t} \cdot e^{-\int_x^{x+t} u ds} \cdot u dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\delta t} \cdot e^{-ut} \cdot u dt \\ &= \frac{u}{\delta + u} \\ {}^2\bar{A}_x &= \frac{u}{2\delta + u} \\ DZ &= {}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2 = \frac{u}{2\delta + u} - \left(\frac{u}{\delta + u}\right)^2 \end{aligned}$$

□

二. 死亡年末支付的终身寿险

1. 支付方式:

在个体 (x) 死亡的年末, 保险人支付 1 元保险金.

2. 支付现值 Z :

$$Z = v^{K(x)+1}.$$

3. 精算现值 A_x :

$$\begin{aligned} A_x &= E(Z) = E(v^{K(x)+1}) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} P(K(x) = k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} P(k \leq T(x) < k+1) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} {}_k|q_x \end{aligned}$$

4. 性质:

(i)

$$A_x = A_{x:\overline{n}|}^1 + {}_nE_x \cdot A_{x+n} \quad (2.10)$$

(ii)

$$A_x = vq_x + vp_x \cdot A_{x+1} \quad (2.11)$$

(iii)

$$(1+i)A_x = q_x + p_x \cdot A_{x+1} \quad (2.12)$$

(iv)

$$(1+i)l_x A_x = d_x + l_{x+1} \cdot A_{x+1} \quad (2.13)$$

(v)

$$l_x A_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \cdot d_{x+k} \quad (2.14)$$

证明. (2.14)

因为 ${}_k|q_x = \frac{d_{x+k}}{l_x}$, 所以

$$\begin{aligned} A_x &= \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} {}_k|q_x \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \frac{d_{x+k}}{l_x} \end{aligned}$$

即

$$l_x A_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \cdot d_{x+k}$$

□

5. A_x 与 \bar{A}_x 的关系:在 UDD 假设之下, 有 $\bar{A}_x = A_x \frac{i}{\delta}$.

证明.

$$\begin{aligned} \bar{A}_x &= E(v^{T(x)}) \\ &= E(v^{K(x)+S(x)}) \\ &= E(v^{K(x)+1} \cdot v^{S(x)-1}) \\ &= E(v^{K(x)+1}) \cdot E(v^{S(x)-1}) \\ &= A_x \cdot \frac{i}{\delta} \end{aligned}$$

□

2.5 生死合险 (两全保险)

一. 死亡后立即支付的生死合险

1. 支付方式与支付时刻:

若个体 (x) 在 n 年内死亡 $(T(x) < n)$, 则保险人在其死亡时立即支付 1 元保险金;

若个体 (x) 在 n 年内未死 $(T(x) \geq n)$, 则在 n 时刻支付他 1 元保险金.

故支付时刻为: $T(x) \wedge n = \min\{T(x), n\}$.

2. 支付现值 Z :

$$\begin{aligned} Z &= v^{T(x) \wedge n} \\ &= v^{T(x) \wedge n} \cdot I_{\{T(x) < n\}} + v^{T(x) \wedge n} \cdot I_{\{T(x) \geq n\}} \\ &= v^{T(x)} \cdot I_{\{T(x) < n\}} + v^n \cdot I_{\{T(x) \geq n\}} \\ &= Z_1(n\text{年期定期寿险的支付现值}) + Z_2(n\text{年期生存保险的支付现值}) \end{aligned}$$

3. 精算现值 $\bar{A}_{x:\overline{n}|}$:

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|} = E(Z) = E(Z_1) + E(Z_2) = \bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 + \bar{A}_{x:\overline{n}|}^{\cdot 1}$$

4. 生死合险特征:

保险公司推出生死合险的原因是为了降低风险, 理由如下:

$$\begin{aligned} D(Z) &= D(Z_1 + Z_2) \\ &= D(Z_1) + D(Z_2) + 2Cov(Z_1, Z_2) \\ &= D(Z_1) + D(Z_2) + 2(E(Z_1 Z_2) - E(Z_1)E(Z_2)) \\ &= D(Z_1) + D(Z_2) - 2E(Z_1)E(Z_2) \\ &= D(Z_1) + D(Z_2) - 2\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 \cdot \bar{A}_{x:\overline{n}|}^{\cdot 1} \\ &< D(Z_1) + D(Z_2) \end{aligned}$$

故一份生死合险的风险小于一份生存保险与一份定期死亡保险的风险之和.

5. 性质:

对 $\forall 0 \leq m \leq n$, 有

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|} = \bar{A}_{x:\overline{m}|}^1 + {}_mE_x \bar{A}_{x+m:\overline{n-m}|} \quad (2.15)$$

证明.

$$\begin{aligned}
 \bar{A}_{x:\overline{n}|} &= \bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 + \bar{A}_{x:\overline{n}|}^{\cdot 1} \\
 &= \bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 + {}_mE_x \bar{A}_{x+m:\overline{n-m}|}^1 + {}_mE_x \cdot {}_{n-m}E_{x+m} \\
 &= \bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 + {}_mE_x (\bar{A}_{x+m:\overline{n-m}|}^1 + A_{x+m:\overline{n-m}|}^{\cdot 1}) \\
 &= \bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 + {}_mE_x \cdot \bar{A}_{x+m:\overline{n-m}|}
 \end{aligned}$$

□

二. 死亡年末支付的生死合险

$$\{T(x) < n\} = \{K(x) < n\} = \{K(x) + 1 \leq n\}$$

$$\{T(x) \geq n\} = \{K(x) \geq n\} = \{K(x) + 1 > n\}$$

1. 支付方式:

若个体 (x) 在 n 年内死亡 (即 $T(x) < n$), 在死亡年末支付 1 元;

若个体 (x) 在 n 年后还活着 (即 $T(x) \geq n$), 则在 n 时刻支付 1 元.

2. 支付现值 Z :

若 $T(x) < n (\Leftrightarrow K(x) < n \Leftrightarrow K(x) + 1 \leq n)$, 则支付时刻为 $K(x) + 1$;

若 $T(x) \geq n (\Leftrightarrow K(x) + 1 > n)$, 则支付时刻为 n .

所以支付时刻为 $(K(x) + 1) \wedge n = \min\{K(x) + 1, n\}$, 支付额为 1 元, 于是支付现值为:

$$\begin{aligned}
 Z &= v^{(K(x)+1) \wedge n} \\
 &= v^{(K(x)+1) \wedge n} \cdot I_{\{T(x) < n\}} + v^{(K(x)+1) \wedge n} \cdot I_{\{T(x) \geq n\}} \\
 &= v^{(K(x)+1)} \cdot I_{\{T(x) < n\}} + v^n \cdot I_{\{T(x) \geq n\}} \\
 &= Z_1(n\text{年期定期寿险的支付现值}) + Z_2(n\text{年期生存保险的支付现值})
 \end{aligned}$$

3. 精算现值 $A_{x:\overline{n}|}$:

$$A_{x:\overline{n}|} = E(Z) = E(Z_1) + E(Z_2) = A_{x:\overline{n}|}^1 + A_{x:\overline{n}|}^{\cdot 1}$$

4. 方差:

$$D(Z) = D(Z_1) + D(Z_2) - 2A_{x:\overline{n}|}^1 \cdot A_{x:\overline{n}|}^{\cdot 1}$$

5. 性质:

(i)

$$A_{x:\overline{n}|} = A_{x:\overline{m}|}^1 + {}_mE_x A_{x+m:\overline{n-m}|} \quad (2.16)$$

(ii)

$$A_{x:\overline{n}|} = vq_x + vp_x A_{x+1:\overline{n-1}|} \quad (2.17)$$

(iii)

$$(1+i)l_x A_{x:\overline{n}|} = d_x + l_{x+1} A_{x+1:\overline{n-1}|} \quad (2.18)$$

6. $\overline{A}_{x:\overline{n}|}$ 与 $A_{x:\overline{n}|}$ 的关系:

在 UDD 假设之下, 有

$$\overline{A}_{x:\overline{n}|} = A_{x:\overline{n}|}^1 \frac{i-\delta}{\delta} + A_{x:\overline{n}|} \quad (2.19)$$

证明. (2.19)

$$\begin{aligned} \overline{A}_{x:\overline{n}|} &= \overline{A}_{x:\overline{n}|}^1 + A_{x:\overline{n}|}^{\cdot 1} \\ &= \frac{i}{\delta} A_{x:\overline{n}|}^1 + A_{x:\overline{n}|}^{\cdot 1} \\ &= \frac{i}{\delta} A_{x:\overline{n}|}^1 - A_{x:\overline{n}|}^1 + A_{x:\overline{n}|}^1 + A_{x:\overline{n}|}^{\cdot 1} \\ &= \frac{i-\delta}{\delta} A_{x:\overline{n}|}^1 + A_{x:\overline{n}|} \end{aligned}$$

□

2.6 延期终身死亡保险

一. 死亡后立即支付的延期终身死亡保险

1. 支付方式与支付条件:

若个体 (x) 在 m 年内死亡 (即 $T(x) < m$), 则不予任何支付;

若个体 (x) 在 m 年后还活着 (即 $T(x) \geq m$), 则在死亡时立即支付 1 元保险金.

2. 支付现值 Z :

$$Z = v^{T(x)} \cdot I_{\{T(x) \geq m\}}$$

3. 精算现值 ${}_m|\bar{A}_x$:

$$\begin{aligned} {}_m|\bar{A}_x &= E(Z) \\ &= E(v^{T(x)} \cdot I_{\{T(x) \geq m\}}) \\ &= \int_0^\infty v^t \cdot I_{\{t \geq m\}} \cdot {}_t p_x \cdot u_x(t) dt \\ &= \int_m^\infty v^t \cdot {}_t p_x \cdot u_x(t) dt \\ &= \int_m^\infty e^{-\delta t} \cdot {}_t p_x \cdot u_x(t) dt \end{aligned}$$

记

$${}_m^2\bar{A}_x = \int_m^\infty e^{-2\delta t} \cdot {}_t p_x \cdot u_x(t) dt$$

4. 方差:

$$\begin{aligned} D(Z) &= E(Z^2) - (E(Z))^2 \\ &= E(v^{2T(x)} \cdot I_{\{T(x) \geq m\}}) - ({}_m|\bar{A}_x)^2 \\ &= \int_m^\infty e^{-2\delta t} \cdot {}_t p_x \cdot u_x(t) dt - ({}_m|\bar{A}_x)^2 \\ &= {}_m^2\bar{A}_x - ({}_m|\bar{A}_x)^2 \end{aligned}$$

5. 性质:

$${}_m|\bar{A}_x = {}_mE_x \cdot \bar{A}_{x+m} \quad (2.20)$$

证明.

$$\begin{aligned} {}_m|\bar{A}_x &= \int_m^\infty v^t \cdot {}_t p_x \cdot u_x(t) dt \\ &= \int_0^\infty v^{t+m} \cdot {}_{t+m} p_x \cdot u_x(t+m) dt \\ &= v^m {}_m p_x \int_0^\infty v^t \cdot {}_t p_{x+m} \cdot u_{x+m}(t) dt \\ &= {}_mE_x \cdot \bar{A}_{x+m} \end{aligned}$$

□

变形: $(1+i)^m \cdot l_x \cdot {}_m|\bar{A}_x = l_{x+m} \cdot \bar{A}_{x+m}$.

二. 死亡年末支付的延期 m 年的终身寿险

1. 支付方式:

若 $T(x) \geq m$, 则在死亡年末支付 1 元;

若 $T(x) < m$, 则不予任何支付.

2. 支付额现值 Z :

$$Z = v^{K(x)+1} \cdot I_{\{T(x) \geq m\}}$$

3. 精算现值用 ${}_m|A_x$ 表示

$$\begin{aligned} {}_m|A_x &= E(Z) \\ &= E(v^{K(x)+1} I_{\{T(x) \geq m\}}) \\ &= E(v^{K(x)+1} I_{\{K(x) \geq m\}}) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} I_{\{k \geq m\}} P(K(x) = k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} {}_k|q_x \cdot I_{\{k \geq m\}} \\
&= \sum_{k=m}^{\infty} v^{k+1} {}_k|q_x
\end{aligned}$$

4. 性质:

$${}_m|A_x = {}_mE_x A_{x+m} \quad (2.21)$$

证明.

$$\begin{aligned}
{}_m|A_x &= \sum_{k=m}^{\infty} v^{k+1} {}_k|q_x \\
&= \sum_{s=0}^{\infty} v^{s+m+1} {}_{s+m}|q_x \\
&= v^m {}_m p_x \sum_{s=0}^{\infty} v^{s+1} {}_s|q_{x+m} \\
&= {}_mE_x A_{x+m}
\end{aligned}$$

□

三. 延期 m 年的 n 年期定期寿险

1. 死亡立即支付:

$$\begin{aligned}
Z &= v^{T(x)} I_{\{m \leq T(x) \leq m+n\}} \\
{}_m|\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 &= E(Z) = \int_m^{m+n} v^t {}_t p_x \mu_x(t) dt \\
{}_m|\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 &= {}_mE_x \cdot \bar{A}_{x+m:\overline{n}|}^1
\end{aligned}$$

2. 死亡年末支付:

$$\begin{aligned}
Z &= v^{K(x)+1} I_{\{m \leq T(x) \leq m+n\}} = v^{K(x)+1} I_{\{m \leq K(x) \leq m+n\}} \\
{}_m|A_{x:\overline{n}|}^1 &= E(Z) = \sum_{k=m}^{m+n-1} v^{k+1} {}_k|q_x \\
{}_m|A_{x:\overline{n}|}^1 &= {}_mE_x \cdot A_{x+m:\overline{n}|}^1
\end{aligned}$$

2.7 将每年分为 m 个区间, 在死亡区间来支付 1 元的终身死亡保险

$T(x) = K(x) + S(x)$, $S(x)$ 掉在 m 个小区间的哪一个之中?

$0 \leq S(x) < 1, 0 \leq mS(x) < m$, 令 $J(x) = [mS(x)]$, 它表示 $mS(x)$ 的整数部分, 于是有 $0 \leq J(x) \leq m-1$, 易知 $J(x) \leq mS(x) < J(x) + 1$. 从而 $\frac{J(x)}{m} \leq S(x) < \frac{J(x)+1}{m}$, $K(x) + \frac{J(x)}{m} \leq K(x) + S(x) < K(x) + \frac{J(x)+1}{m}$.

1. 即 $K(x) + \frac{J(x)}{m} \leq T(x) < K(x) + \frac{J(x)+1}{m}$

2. 支付额现值:

$$Z = v^{K(x) + \frac{J(x)+1}{m}}$$

3. 精算现值: 用 $A_x^{(m)}$ 表示

$$\begin{aligned} A_x^{(m)} &= E(Z) \\ &= E\left(v^{K(x) + \frac{J(x)+1}{m}}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{m-1} v^{k + \frac{j+1}{m}} P(K(x) = k, J(x) = j) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{m-1} v^{k + \frac{j+1}{m}} P\left(k + \frac{j}{m} \leq T(x) < k + \frac{j+1}{m}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{m-1} v^{k + \frac{j+1}{m}} {}_{k + \frac{j+1}{m} | \frac{1}{m}} q_x \end{aligned}$$

4. 在 UDD 假设下, $A_x^{(m)}$ 与 \bar{A}_x , A_x 之间的关系:

命题 2.4. 在 UDD 假设下, $K(x)$ 与 $J(x)$ 独立, 且 $P(J(x) = j) = \frac{1}{m}$, $j = 0, \dots, m-1$.

证明. 在 UDD 假设下, $K(x)$ 与 $S(x)$ 独立, 且 $S(x) \sim U(0, 1)$, 所以 $K(x)$ 与 $[mS(x)] = J(x)$ 独立. 又因 $S(x) \sim U(0, 1)$, 所以 $J(x)$ 取 $0, 1, \dots, m-1$ 的概率相同, 皆为 $\frac{1}{m}$. \square

命题 2.5. 在 UDD 假设下, $A_x^{(m)} = \frac{i}{i^{(m)}} A_x$, $\lim_{m \rightarrow \infty} A_x^{(m)} = \bar{A}_x$, 其中 $i^{(m)}$ 为每年换算 m 次的年名义利率, $i^{(m)} = m[(1+i)^{\frac{1}{m}} - 1]$

证明. $A_x^{(m)} = E(v^{K(x)+\frac{J(x)+1}{m}})$, 利用上一题, 有:

$$\begin{aligned}
 A_x^{(m)} &= E(v^{K(x)+1} \cdot v^{\frac{J(x)+1}{m}-1}) \\
 &= E(v^{K(x)+1}) \cdot E(v^{\frac{J(x)+1}{m}-1}) \\
 &= A_x \cdot \sum_{j=0}^{m-1} v^{\frac{j+1}{m}} \cdot \frac{1}{m} \\
 &= A_x \cdot \frac{1}{m} \cdot v^{\frac{1}{m}-1} \cdot \sum_{j=0}^{m-1} v^{\frac{j}{m}} \\
 &= A_x \cdot \frac{1}{m} \cdot v^{\frac{1}{m}-1} \cdot \frac{1 - (v^{\frac{1}{m}})^m}{1 - (v^{\frac{1}{m}})} \\
 &= A_x \cdot \frac{1}{m} \cdot \left(\frac{1}{1+i}\right)^{\frac{1}{m}-1} \cdot \frac{\frac{1}{1+i}}{1 - \left(\frac{1}{1+i}\right)^{\frac{1}{m}}} \\
 &= A_x \frac{1}{m} \cdot \left(\frac{1}{1+i}\right)^{\frac{1}{m}} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{1+i}\right)^{\frac{1}{m}}} \\
 &= A_x \cdot \frac{1}{m[(1+i)^{\frac{1}{m}} - 1]} \\
 &= A_x \cdot \frac{i}{i^{(m)}}
 \end{aligned}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} A_x^{(m)} = \lim_{m \rightarrow \infty} A_x \cdot \frac{1}{i^{(m)}} = \frac{1}{\delta} A_x = \bar{A}_x$$

$$i^{(m)} = m[(1+i)^{\frac{1}{m}} - 1] = m(e^{\frac{1}{m}\delta} - 1) \sim m \cdot \frac{\delta}{m} = \delta$$

□

2.8 变额人寿保险

一. 离散型

1. 支付额与支付方式:

在死亡年度末支付 $b_{K(x)+1}$ 元保险金.

2. 支付额现值为:

$$Z = b_{K(x)+1}v^{(K(x)+1)}$$

3. 精算现值:

$$E(Z) = E(b_{K(x)+1}v^{K(x)+1}) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{k+1}v^{k+1}{}_k|q_x$$

4. 当 $b_{K(x)+1} = K(x) + 1$ 时, 得到标准递增的死亡年末支付的终身寿险

(1) 支付额现值: $E(Z) = (K(x) + 1)v^{K(x)+1}$

(2) 精算现值记为 IA_x :

$$\begin{aligned} IA_x &= \sum_{k=0}^{\infty} b_{k+1}v^{k+1}{}_k|q_x \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)v^{k+1}{}_k|q_x \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^k v^{k+1} \right) {}_k|q_x \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{k=j}^{\infty} v^{k+1} {}_k|q_x \right) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} {}_j|A_x \end{aligned}$$

即

$$IA_x = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)v^{k+1}{}_k|q_x = \sum_{j=0}^{\infty} {}_j|A_x$$

二. 连续型

1. 支付额与支付方式:

在死亡时立即支付 $b_{T(x)}$ 元保证金.

2. 支付现值:

$$Z = b_{T(x)} v^{T(x)}$$

3. 精算现值:

$$E(Z) = E(b_{T(x)} v^{T(x)}) = \int_0^\infty b_t v^t {}_tP_x \mu_x(t) dt$$

$$E(Z^2) = E(b_{T(x)}^2 v^{2T(x)}) = \int_0^\infty (b_t v^t)^2 {}_tP_x \mu_x(t) dt$$

4. 若 $b_T(x) = \sum_{k=0}^\infty (k+1) I_{\{k \leq T(x) < k+1\}}$, 即在第 $(k+1)$ 年死亡, 则死亡时立即支付 $k+1$ 元, 则得到标准递增的死亡立即支付的终身寿险.

(1) 支付额现值:

$$Z = b_{T(x)} v^{T(x)} = \sum_{k=0}^\infty (k+1) I_{\{k \leq T(x) \leq k+1\}} \cdot v^{T(x)}$$

(2) 精算现值用 $(\bar{IA})_x$.

$$\begin{aligned} (\bar{IA})_x &= E(Z) \\ &= E \left(\sum_{k=0}^\infty (k+1) I_{\{k \leq T(x) \leq k+1\}} \cdot v^{T(x)} \right) \\ &= \sum_{k=0}^\infty (k+1) E \left(v^{T(x)} I_{\{k \leq T(x) \leq k+1\}} \right) \\ &= \sum_{k=0}^\infty (k+1) \int_k^{k+1} v^t {}_tP_x \mu_x(t) dt \end{aligned}$$

5. 当 $b_T(x) = T(x)$ 时, 得到连续递增的死亡立即支付的终身寿险

(1) 支付现值

$$Z = b_{T(x)} v^{T(x)} = T(x) v^{T(x)}$$

(2) 精算现值用 $(\bar{I}\bar{A})_x$ 表示

$$\begin{aligned}(\bar{I}\bar{A})_x &= \int_0^\infty tv^t \cdot {}_t p_x \cdot u_x(t) dt \\&= \int_0^\infty \left(\int_0^t 1 ds \right) tv^t \cdot {}_t p_x \cdot u_x(t) dt \\&= \int_0^\infty \left(\int_s^\infty tv^t \cdot {}_t p_x \cdot u_x(t) dt \right) ds \\&= \int_0^\infty {}_s | \bar{A}_x ds\end{aligned}$$

2.9 作业

作业 2.1. 解释等式 $l_x \bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 = l_x \bar{A}_{x:\overline{k}|}^1 + v^k l_{x+k} \bar{A}_{x+k:\overline{n-k}|}^1$ 的含义.

作业 2.2. 你现在多少岁, 是男生还是女生? 设你现在投 1 份 5 年期定期寿险, 保险金为 10 万元, 利率 $i = 0.05$, 求该保险的精算现值和支付现值的方差.(注: 保险金为年末支付.)

作业 2.3. 已知 $\mu = 0.04$, $\delta = 0.05$, 对于死亡立即支付的寿险, 求精算现值, ${}^2\bar{A}_x$ 和支付现值的方差.

作业 2.4. 解释 $(1+i)A_x = q_x + p_x A_{x+1}$ 的含义.

作业 2.5. 个体 (x) 投了一份三年期寿险保险金死亡年末支付, 已知 $q_{x+k} = 0.02(k+1)$, $k = 0, 1, 2$, $i = 0.06$, 求该保险的精算现值 $A_{x:\overline{3}|}^1$, 及支付现值的方差.

作业 2.6. 设个体 (x) 买了一份 10 年期死亡定期寿险, 支付现值为 $Z_1 = v^{T(x)} I_{\{T(x) < 10\}}$ 和 1 份延期 10 年的死亡终身寿险, 支付现值为 $Z_2 = v^{T(x)} I_{\{T(x) \geq 10\}}$.

设 $u = 0.02$, $\delta = 0.08$, 求该保险的精算现值 $\bar{A}_{x:\overline{10}|}^1$, ${}_{10|}\bar{A}_x$, $D(Z_1)$, $D(Z_2)$, $Cov(Z_1, Z_2)$.

作业 2.7. 设个体 (x) 买了一份特殊寿险, 死亡立即支付保险金 $b_{T(x)} = e^{0.03T(x)}$. 设死亡力 $\mu = 0.02$, 利息力 $\delta = 0.08$.

(1) 求给付额现值 Z ;

(2) 求精算现值 $E(Z)$;

(3) 求 $D(Z)$.

作业 2.8. 设某人生日正好是 1 月 1 日, 在他满 50 周岁生日那天, 他上某保险公司购买一份终身的养老保险. 保单约定从他满 60 周岁开始, 只要他活着, 每年生日那

天他就会去保险公司, 保险公司支付他 10000 元养老金, 直到他死亡为止 (注: 他如果死亡了, 再也不会出现在保险公司, 保险公司也就不用给钱了). 假设他的余命 $T(50)$ 服从 $[0, 50]$ 上的均匀分布, 利率 $i = 0.05$.

- (1) 写出保险公司所有支付额的总现值 Z ;
- (2) 求出精算现值 $E(Z)$ (注: 直观上 $E(Z)$ 就是他在购买养老保险时应该交的保费);
- (3) 求 $D(Z)$.

第三章 生存年金

3.1 期初生存年金

一. 期初年金

1. n 年期期初年金

$$\text{现值 } \ddot{a}_{\overline{n}|} = 1 + v + v^2 + \dots + v^{n-1} = \frac{1-v^n}{1-v} = \frac{1-v^n}{d}$$

其中, $d = 1 - v = 1 - \frac{1}{1+i} = \frac{i}{1+i}$, 为贴现率.

2. 永久期初年金

$$\text{现值 } a_{\infty|} = 1 + v + v^2 + \dots + v^n + \dots = \frac{1}{1-v} = \frac{1}{d}$$

二. 终身期初生存年金

1. 支付方式

只要 (x) 活着, 则每年年初支付 1 元; 若 (x) 已近死亡, 则停止支付.

2. 最后支付时刻为 $K(x)$

3. 支付额总现值

$$Z = 1 + v + v^2 + \dots + v^{K(x)} = \ddot{a}_{\overline{K(x)+1}|} = \sum_{j=0}^{K(x)} v^j$$

4. 精算现值用 \ddot{a}_x 表示

$$\begin{aligned}
\ddot{a}_x &= E(\ddot{a}_{\overline{K(x)+1}|}) = E\left(\sum_{j=0}^{K(x)} v^j\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{j=0}^k v^j P(K(x) = k) \right] \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} v^j \left[\sum_{k=j}^{\infty} P(K(x) = k) \right] \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} v^j P(K(x) \geq j) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} v^j {}_jP_x
\end{aligned}$$

因为 $Z = \ddot{a}_{\overline{K(x)+1}|} = \frac{1-v^{K(x)+1}}{d}$, 所以 $\ddot{a}_x = EZ = E(\ddot{a}_{\overline{K(x)+1}|}) = E\left(\frac{1-v^{K(x)+1}}{d}\right)$.

所以 $\ddot{a}_{\overline{K(x)+1}|} = \frac{1-E(v^{K(x)+1})}{d} = \frac{1-A_x}{d}$.

5. 终身初期死亡生存年金和死亡年末支付的终身寿险之间的关系

$$A_x + d\ddot{a}_x = 1$$

6. 支付现值 Z 的方差

$$DZ = D(\ddot{a}_{\overline{K(x)+1}|}) = D\left(\frac{1-v^{K(x)+1}}{d}\right) = \frac{D(v^{K(x)+1})}{d^2} = \frac{{}^2A_x - (A_x)^2}{d^2}$$

三. n 年期初生存年金

1. 支付方式

若个体 (x) 在 n 年内死亡, 则在他活着时, 每年年初支付 1 元; 若 (x) 在 n 年内未死, 则每年年初支付 1 元, 直到第 n 年.

2. 支付额总现值 Z

$$(1) T(x) < n, (\text{即 } K(x) + 1 \leq n), Z = \ddot{a}_{\overline{K(x)+1}|}$$

$$(2) T(x) \geq n, (\text{即 } K(x) + 1 > n), Z = \ddot{a}_{\overline{n}|}$$

$$\text{所以 } Z = \ddot{a}_{\overline{(K(x)+1) \wedge n}|} = 1 + v + v^2 + \dots + v^{(K(x)+1) \wedge n}$$

3. 精算现值用 $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ 表示

$$\begin{aligned} \ddot{a}_{x:\overline{n}|} &= E(\ddot{a}_{\overline{(K(x)+1) \wedge n}|}) = E\left(\sum_{j=0}^{K(x) \wedge (n-1)} v^j\right) \\ &= E\left(\sum_{j=0}^{\infty} v^j I_{\{j \leq K(x) \wedge (n-1)\}}\right) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} v^j E(I_{\{j \leq K(x)\}} I_{\{j \leq (n-1)\}}) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} v^j P(T(x) \geq j) = \sum_{j=0}^{n-1} v^j p_x \end{aligned}$$

4. $A_{x:\overline{n}|}$ 与 $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ 的关系

$$(1) d\ddot{a}_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|} = 1$$

$$(2) D(\ddot{a}_{\overline{(K(x)+1) \wedge n}|}) = \frac{{}^2A_{x:\overline{n}|} - (A_{x:\overline{n}|})^2}{d^2}$$

证明. $Z = \ddot{a}_{\overline{(K(x)+1) \wedge n}|} = \frac{1 - v^{(K(x)+1) \wedge n}}{d}, v^{(K(x)+1) \wedge n}$ 是 n 年期生死合险的支付现值

(1)

所以有 $\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{1 - A_{x:\overline{n}|}}{d}$, 得证

(2)

$$D(\ddot{a}_{\overline{(K(x)+1) \wedge n}|}) = D\left(\frac{1 - v^{(K(x)+1) \wedge n}}{d}\right) = \frac{D(v^{(K(x)+1) \wedge n})}{d^2} = \frac{{}^2A_{x:\overline{n}|} - (A_{x:\overline{n}|})^2}{d^2}$$

□

$$5. \ddot{a}_x = \ddot{a}_{x:\overline{n}|} + {}_nE_x \ddot{a}_{x+n}$$

证明.

$$\begin{aligned} \ddot{a}_x &= \sum_{j=0}^{\infty} v^j \cdot {}_j p_x \\ &= \ddot{a}_{x:\overline{n}|} + \sum_{j=n}^{\infty} v^j \cdot {}_j p_x \\ &= \ddot{a}_{x:\overline{n}|} + v^n \cdot {}_n p_x \sum_{j=0}^{\infty} v^j \cdot {}_j p_{x+n} \\ &= \ddot{a}_{x:\overline{n}|} + {}_nE_x \ddot{a}_{x+n} \end{aligned}$$

得证. □

$$6. l_x \ddot{a}_x = l_x \ddot{a}_{x:\overline{n}|} + v^n l_{x+n} \ddot{a}_{x+n}$$

该等式的含义：左端表示初始时刻有 l_x 个 (x) 岁的个体，各买一份终身期初生存年金，保险公司共收到保费 $l_x \ddot{a}_x$ 元，右端表示在收到保费后，保险公司将其中的 $l_x \ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ 为 l_x 为 l_x 个人各买一份 n 年期期初生存年金，保证 n 年内死去的人可以领到年金，剩余的部分拿去投资，在第 n 年末，还有 l_{x+n} 个人活着，保险公司给他们每人买一份终身期初生存年金，共需 $l_{x+n} \ddot{a}_{x+n}$ 元，总现值保险公司收入的现值应等于支出的总现值，即推出该公式。

注 3.1. 现行的养老保险其实就是保费分期缴纳的延期终身期初生存年金。

四. 延期 n 年的终身期初生存年金

1. 支付方式

若个体 (x) 在 n 年内死亡，即 $T(x) < n$ ($\iff K(x) + 1 \leq n$)，则不予任何支付，若 (x) 在 n 年内未死，则从第 $n+1$ 年年初开始，只要他还活着，每年初支付 1 元。

2. 支付现值 Z

$$Z = \begin{cases} 0, & K(x) + 1 \leq n \\ \sum_{j=n}^{K(x)} v^j, & K(x) + 1 > n. \end{cases}$$

当 $K(x) + 1 > n$ 时, $Z = \sum_{j=n}^{K(x)} v^j = \sum_{j=0}^{K(x)} v^j - \sum_{j=0}^{n-1} v^j = \ddot{a}_{\overline{K(x)+1}|} - \ddot{a}_{\overline{n}|}$, 故 $Z = \ddot{a}_{\overline{K(x)+1}|} - \ddot{a}_{\overline{(K(x)+1) \wedge n}|}$

3. 精算现值用 ${}_n|\ddot{a}_x$ 表示

$$\begin{aligned} {}_n|\ddot{a}_x &= E(Z) = E(\ddot{a}_{\overline{K(x)+1}|} - \ddot{a}_{\overline{(K(x)+1) \wedge n}|}) \\ &= \ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{j=0}^{\infty} v^j {}_j p_x - \sum_{j=0}^{n-1} v^j {}_j p_x \\ &= \sum_{j=n}^{\infty} v^j {}_j p_x = {}_n E_x \ddot{a}_{x+n} \end{aligned}$$

注 3.2. ${}_n|\ddot{a}_x = \ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = {}_n E_x \ddot{a}_{x+n} = \sum_{j=n}^{\infty} v^j {}_j p_x$.

五. n 年期确定型生存年金 (期初)

1. 支付方式

若个体 (x) 在 n 年内死亡, 即 $T(x) < n$ ($\iff K(x) + 1 \leq n$), 则从第 1 年到第 n 年, 每年初支付 1 元; 若 (x) 在 n 年内未死, 即 $K(x) + 1 > n$, 则只要他活着, 每年初支付 1 元.

2. 支付现值

$$Z = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{n}|}, & K(x) + 1 \leq n \\ \ddot{a}_{\overline{K(x)+1}|}, & K(x) + 1 > n \end{cases} = \ddot{a}_{\overline{(K(x)+1) \vee n}|}, \text{ 其中 } a \vee b = \max\{a, b\}.$$

3. 精算现值用 $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ 表示

$$\begin{aligned} \ddot{a}_{x:\overline{n}|} &= E(\ddot{a}_{\overline{(K(x)+1) \vee n}|}) = E(\ddot{a}_{\overline{K(x)+1}|} - \ddot{a}_{\overline{(K(x)+1) \wedge n}|} + \ddot{a}_{\overline{n}|}) = {}_n|\ddot{a}_x + \ddot{a}_{\overline{n}|} \\ \ddot{a}_{x:\overline{n}|} &= {}_n|\ddot{a}_x + \ddot{a}_{\overline{n}|} = \sum_{j=n}^{\infty} v^j {}_j p_x + \sum_{j=0}^{n-1} v^j \end{aligned}$$

3.2 期末生存年金

一. 终身期末生存年金

1. 支付方式

只要 (x) 还活着, 则每年末支付 1 元.

2. 支付现值

$$Z = a_{\overline{K(x)}} = v + v^2 + \dots + v^{K(x)} = \sum_{j=1}^{K(x)} v^j = \sum_{j=0}^{K(x)} v^j - 1 = \ddot{a}_{\overline{K(x)+1}} - 1$$

3. 精算现值

$$a_x = E(\ddot{a}_{K(x)+1}) - 1 = \ddot{a}_x - 1$$

二. n 年期期末生存年金

1. 支付方式

若 $T(x) < n$ ($K(x) < n$), 则只要 (x) 活着, 每年末支付 1 元, 若 $T(x) \geq n$ ($K(x) \geq n$), 则前 n 年每年末支付 1 元.

$$Z = \begin{cases} v + v^2 + \dots + v^{K(x)} = a_{\overline{K(x)}}, & \text{若 } K(x) < n \\ v + v^2 + \dots + v^n = a_{\overline{n}}, & \text{若 } K(x) \geq n \end{cases}, \text{ 所以 } Z = a_{\overline{K(x) \wedge n}}$$

3. 精算现值

$$\begin{aligned} a_{x:\overline{n}|} &= E(Z) = E\left(a_{\overline{K(x) \wedge n}}\right) \\ &= E\left(\sum_{j=0}^{K(x) \wedge n} v^j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} v^j I_{\{j \leq (K(x) \wedge n)\}} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} v^j I_{\{j \leq K(x)\}} I_{\{j \leq n\}} = \sum_{j=1}^n v^j E(I_{\{j \leq K(x)\}}) \\ &= \sum_{j=1}^n v^j P(K(x) \geq j) \\ &= \sum_{j=1}^n v^j {}_j p_x. \end{aligned}$$

$$a_{x:\overline{n}|} = \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - 1 + v^n {}_n p_x$$

三. 延期 n 年的终身期末生存年金

1. 支付方式

若 $T(x) < n$ ($K(x) < n$), 则不予任何支付, 若 $T(x) \geq n$ ($K(x) \geq n$), 则从第 $n+1$ 年开始, 每年年末支付 1 元, 直到死亡.

2. 支付现值

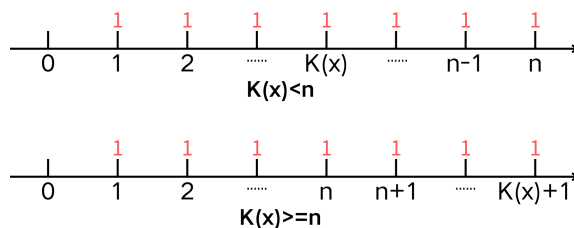
$$Z = \begin{cases} 0, & \text{若 } K(x) < n \\ a_{\overline{K(x)}|} - a_{\overline{n}|}, & \text{若 } K(x) \geq n \end{cases}, \text{ 所以 } Z = a_{\overline{K(x)}|} - a_{\overline{K(x) \wedge n}|}$$

3. 精算现值

$$\begin{aligned} {}_n|a_x &= E(Z) = E\left(a_{\overline{K(x)}|} - a_{\overline{K(x) \wedge n}|}\right) \\ &= a_x - a_{x:\overline{n}|} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} v^j {}_j p_x - \sum_{j=1}^n v^j {}_j p_x \\ &= \sum_{j=n+1}^{\infty} v^j {}_j p_x \\ &= {}_nE_x a_{x+n}. \end{aligned}$$

四. n 年期确定型终身期末生存年金

1. 支付方式



2. 支付现值

$$Z = \begin{cases} a_{\overline{n}|}, & \text{若 } K(x) < n \\ a_{\overline{K(x)}|}, & \text{若 } K(x) \geq n \end{cases}, \text{ 所以 } Z = a_{\overline{K(x) \vee n}|}$$

易知: $a_{\overline{K(x) \vee n}|} + a_{\overline{K(x) \wedge n}|} = a_{\overline{K(x)}|} + a_{\overline{n}|}$

3. 精算现值

$$\begin{aligned} a_{\overline{x:\overline{n}}|} &= E(a_{\overline{K(x) \vee n}|}) \\ &= a_{\overline{n}|} + E(a_{\overline{K(x)}|} - a_{\overline{K(x) \wedge n}|}) \\ &= a_{\overline{n}|} + n|a_x. \end{aligned}$$

3.3 每年分成 m 个区间的生存年金¹

一. 每年分成 m 个区间, 每个区间支付 $\frac{1}{m}$ 元的年金

1. 期初支付

$$\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{1}{m} + \frac{1}{m}v^{\frac{1}{m}} + \dots + \frac{1}{m}v^{\frac{mn-1}{m}} = \frac{1}{m} \cdot \frac{1-v^n}{1-v^{\frac{1}{m}}} = \frac{1-v^n}{d^{(m)}}$$

其中 $d^{(m)} = m(1-v^{\frac{1}{m}})$.

2. 期末支付

$$a_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{1}{m}v^{\frac{1}{m}} + \frac{1}{m}v^{\frac{2}{m}} + \dots + \frac{1}{m}v^{\frac{mn}{m}} = \frac{1}{m} \cdot \left(\frac{1}{1+i}\right)^{\frac{1}{m}} \cdot \frac{1-v^n}{1-v^{\frac{1}{m}}} = \frac{1-v^n}{i^{(m)}}$$

其中 $i^{(m)} = m[(1+i)^{\frac{1}{m}} - 1]$.

二. 每年分成 m 次支付的终身起初生存年金

¹ 本节内容在考试中不涉及计算.

$$J(x) = [mS(x)] \Rightarrow K(x) + \frac{J(x)}{m} \leq T(x) < K(x) + \frac{J(x)+1}{m}$$

1. 支付方式

将每年划分为 m 个等长小区间, 只要 (x) 活着, 则每期期初支付 $\frac{1}{m}$ 元.

2. 支付现值

$$Z = \frac{1}{m}(1 + v^{\frac{1}{m}} + v^{\frac{2}{m}} + \dots + v^{K(x) + \frac{J(x)}{m}}) = \ddot{a}_{\overline{K(x) + \frac{J(x)+1}{m}}|}^{(m)} = \frac{1 - v^{K(x) + \frac{J(x)+1}{m}}}{d^{(m)}}$$

3. 精算现值

$$\begin{aligned} \ddot{a}_{\overline{m}|}^{(m)} &= E\left(\ddot{a}_{\overline{K(x) + \frac{J(x)+1}{m}}|}^{(m)}\right) \\ &= E\left(\frac{1}{m} \sum_{j=0}^{mK(x) + J(x)} (v^{\frac{1}{m}})^j\right) \\ &= \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{\infty} v^{\frac{j}{m}} P\left(K(x) + \frac{J(x)}{m} \geq \frac{j}{m}\right) \\ &= \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{\infty} v^{\frac{j}{m}} P\left(T(x) \geq \frac{j}{m}\right) = \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{\infty} v^{\frac{j}{m}} {}_j p_x \end{aligned}$$

4. $\ddot{a}_{\overline{x}|}^{(m)}$ 与 $A_{\overline{x}|}^{(m)}$ 的关系

$$d^{(m)} \ddot{a}_{\overline{x}|}^{(m)} + A_{\overline{x}|}^{(m)} = 1$$

证明. 由 $\ddot{a}_{\overline{x}|}^{(m)} = E\left(\frac{1 - v^{K(x) + \frac{J(x)+1}{m}}}{d^{(m)}}\right) = \frac{1 - A_x^{(m)}}{d^{(m)}}$

□

三. 每年分成 m 次支付的终身期末生存年金

1. 支付方式

每年等分为 m 个区间, 只要 (x) 还活着, 每个区间末支付 $\frac{1}{m}$ 元.

2. 支付现值

$$Z = \frac{1}{m} \left(v^{\frac{1}{m}} + v^{\frac{2}{m}} + \dots + v^{K(x) + \frac{J(x)}{m}} \right) = \ddot{a}_x^{(m)} \frac{1}{K(x) + \frac{J(x)+1}{m}} - \frac{1}{m}$$

3. 精算现值

$$a_x^{(m)} = \ddot{a}_x^{(m)} - \frac{1}{m}$$

4. $a_x^{(m)}$ 与 $A_x^{(m)}$ 的关系

$$i^{(m)} a_x^{(m)} + \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right) A_x^{(m)} = 1$$

5. 在 UDD 假设下, 如何计算 $\ddot{a}_x^{(m)}$

根据公式 $d^{(m)} a_x^{(m)} + A_x^{(m)} = 1$, $A_x^{(m)} = \frac{i}{i^{(m)}} A_x$, $d\ddot{a}_x + A_x = 1$, 可以推得 $\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{id}{i^{(m)}d^{(m)}} \ddot{a}_x - \frac{i-i^{(m)}}{i^{(m)}d^{(m)}}$

3.4 连续生存年金

一. 连续年金

设年金函数 (年金的支付速率) 为 $f(t)$, 则在 $[t, t+dt]$ 内支付的额度为 $f(t)dt$, 其现值为 $v^t f(t)dt$, 所以在 $[0, n]$ 内支付的总现值为 $\int_0^n v^t f(t)dt$. 特别地, 若 $f(t) \equiv 1$, 则 $\bar{a}_n = \frac{1-v^n}{\delta}$.

一. 连续的终身生存年金 (以下总假定年金支付速率为 1)

1. 支付方式

年金连续支付, 直到 (x) 死亡.

2. 支付现值

最后支付时刻为 $T(x)$, 所以 $Z = \bar{a}_{\overline{T(x)}|} = \int_0^{T(x)} v^t dt = \frac{1-v^{T(x)}}{\delta}$.

3. 精算现值

$$\begin{aligned}
\bar{a}_x &= E(\bar{a}_{\overline{T(x)}|}) = E\left(\int_0^{T(x)} v^t dt\right) \\
&= E\left(\int_0^\infty v^t I_{\{t \leq T(x)\}} dt\right) \\
&= \int_0^\infty v^t P(t \leq T(x)) dt \\
&= \int_0^\infty v^t {}_t p_x dt
\end{aligned}$$

4. \bar{a}_x 与 \bar{A}_x 的关系

(i) $\delta \bar{a}_x + \bar{A}_x = 1$

(ii) $D(\bar{a}_{\overline{T(x)}|}) = \frac{{}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2}{\delta^2}$

证明. (i) $\bar{a}_x = E(\bar{a}_{\overline{T(x)}|}) = E\left(\frac{1-v^{T(x)}}{\delta}\right) = \frac{1-\bar{A}_x}{\delta}$

(ii) $D(\bar{a}_{\overline{T(x)}|}) = D\left(\frac{1-v^{T(x)}}{\delta}\right) = \frac{D(v^{T(x)})}{\delta^2} = \frac{{}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2}{\delta^2}$ □

例 3.1. 设死亡力为 μ , 利息力为 δ , 求 $\bar{a}_x, \bar{A}_x, D(\bar{a}_{\overline{T(x)}|})$.

解. $\bar{a}_x = \int_0^\infty v^t {}_t p_x dt = \int_0^\infty e^{-\delta t} e^{-\int_0^t \mu(s) ds} dt = \int_0^\infty e^{-\mu t} e^{-\delta t} dt = \frac{1}{\mu + \delta}$

$$\bar{A}_x = \int_0^\infty v^t {}_t p_x \mu(t) dt = \int_0^\infty e^{-\delta t} e^{-\int_0^t \mu(s) ds} \mu dt = \int_0^\infty e^{-\mu t} e^{-\delta t} \mu dt = \frac{\mu}{\mu + \delta}$$

$${}^2A_x = \frac{\mu}{\mu + 2\delta}, \text{ 故 } D(\bar{a}_{\overline{T(x)}|}) = \frac{{}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2}{\delta^2} = \frac{1}{\delta^2} \left[\frac{\mu}{\mu + 2\delta} - \left(\frac{\mu}{\mu + \delta}\right)^2 \right]$$
 □

5. 性质

$$\frac{d}{dx} \bar{a}_x = (\mu(x) + \delta) \bar{a}_x - 1$$

证明.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} \bar{a}_x &= \frac{d}{dx} \left(\int_0^\infty v^t {}_t p_x dt \right) \\
&= \int_0^\infty v^t {}_t p_x (\mu(x) - \mu(x+t)) dt \\
&= \mu(x) \int_0^\infty v^t {}_t p_x dt - \int_0^\infty v^t {}_t p_x \mu(t) dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \mu(x)\bar{a}_x - \bar{A}_x = \mu(x)\bar{a}_x - (1 - \delta\bar{a}_x) \\
 &= (\mu(x) + \delta)\bar{a}_x - 1
 \end{aligned}$$

□

3.5 作业

作业 3.1.

$${}_n|\ddot{a}_x = {}_nE_x\ddot{a}_{x+n}$$

证明并解释等式

$$l_x \cdot {}_n|\ddot{a}_x = v^n l_{x+n} \ddot{a}_{x+n}$$

的含义.

作业 3.2. 已知: $\ddot{a}_{50} = 13.2688$, $\ddot{a}_{52} = 12.8876$, $l_{50} = 8950900$, $l_{52} = 8840768$, $i = 0.06$. 求: ${}_2|\ddot{a}_{50}$, ${}_2|a_{50}$, $\ddot{a}_{50:\overline{2}|}$, $a_{50:\overline{2}|}$.

作业 3.3. 设某人生日正好是 1 月 1 日, 在他满 50 周岁生日那天, 他上某保险公司购买一份终身的养老保险. 保单约定从他满 60 周岁开始, 只要他活着, 每年生日那天他就会去保险公司, 保险公司支付他 10000 元养老金, 直到他死亡为止 (注: 他如果死亡了, 再也不会出现在保险公司, 保险公司也就不用给钱了). 假设他的余命 $T(50)$ 服从 $[0, 50]$ 上的均匀分布, 利率 $i = 0.05$.

(1) 写出保险公司所有支付额的总现值 Z ;

(2) 求出精算现值 $E(Z)$ (注: 直观上 $E(Z)$ 就是他在购买养老保险时应该交的保费);

(3) 求 $D(Z)$.

作业 3.4. 某人现年 20 岁, 利率 $i = 0.05$, 设他的余命 $T(20)$ 服从 $[0, 70]$ 上的均分分布, 他购买一份连续的终身生存年金, 设年金的支付速率 $f(t) \equiv 1$.

(1) 写出该年金的支付现值 Z ;

(2) 计算精算现值 $E(Z)$;

(3) 求支付现值 Z 的方差 $D(Z)$.

参考文献

- [1] 杨静平/编著:《寿险精算基础》,北京大学出版社,2002.
- [2] 吴岚,黄海,何洋波/编著:《金融数学引论》第二版,北京大学出版社,2013.

附录 A 利息理论基础知识

A.1 利率的基本概念

一. 利率的定义

设年利率为 i , m 为正整数.

贴现因子记为 v , 定义为 $v = \frac{1}{1+i}$.

贴现率记为 d , 定义为 $d = 1 - v = i$.

利息力记为 δ , 定义为 $\delta = \ln(1 + i)$.

名义利率记为 $i^{(m)}$, 定义为 $i^{(m)} = m[(1 + i)^{\frac{1}{m}} - 1]$.

名义贴现率记为 $d^{(m)}$, 定义为 $d^{(m)} = m[1 - (1 - d)^{\frac{1}{m}}]$.