ANHUI NORMAL UNIVERSITY 1928

AHNU精算学讲义

Lectured By Prof. H.M. King

主编（排序不分先后）

王华明　王子颉　徐婷婷

陈锦功　夏婧彤　林嘉瑞

2024

前言

本讲义基于王华明老师在 2023-2024 年第二学期对安徽师范大学 2021 级统计学专业讲授的《精算学》课程。本讲义使用 LaTeX 编写，编者旨在整理课上课下相关内容。由于编者水平、时间有限，讲义中难免有谬误之处，欢迎各位发现错误和愿意提出改进建议的读者联系编者。

目录

更新日志

2024.2.28

由 H.M. King 老师领导的编写组成立，由 WZJ 和 LJR 完成了初步模板的编写。

精算学内容

1、 你能活多久?（生存分布）

2、 你死的时候，保险公司支付你 1 元，这 1 元的现值为多少?（人寿保险）

3、 在你活着时，保险公司给你 1 元，这些支付的现值是多少?（生存年金）

4、 上述的寿险与生存年金，你该交多少保费?（保费理论）

5、 为了保证支付，要准备多少钱?（准备金理论）

第一章　单生命生存模型

1.1　生存分布

1.1.1　新生儿的生存分布

1、生存函数: 设有一个新生儿，他的寿命记为 X，X 为一个非负的随机变量，以下总假设 X 为连续型随机变量。

定义 1.1.1. 设 $F_X(t)$ 是 X 的分布，$f_X(t)$ 是 X 的密度函数，$F_X(t) = \int_0^t f(s)\mathrm{d}s$，在 $F_X(t)$ 的连续点上，有 $f_X(t) = F_X'(t)$。称 $s(t) = P(X > t) = 1 - F_X(t)$ 为 X 的生存函数。

2、死亡力:

定义 1.1.2. 某人在 t 时刻死亡的可能性大小，考虑极限

$$\begin{aligned}
&\lim_{\Delta t \to 0+} \frac{P(t < X \leqslant t + \Delta t | X > t)}{\Delta t} \\
=&\lim_{\Delta t \to 0+} \frac{P(t < X \leqslant t + \Delta t)}{\Delta t P(X > t)} \\
=&\lim_{\Delta t \to 0+} \frac{F_X(t + \Delta t) - F_X(t)}{\Delta t} \frac{1}{s(t)} \\
=&\frac{F_X'(t)}{s(t)} = \frac{f_X(t)}{s(t)}
\end{aligned}$$

即 $\frac{f_X(t)}{s(t)}$ 描述了某人在 t 附近死去的"速率"。称 $\mu(t) = -\frac{s'(t)}{s(t)}$ 为新生儿在 t 处的死亡力函数。

推论 1.1.3. *a.* $\mu(t) = -\frac{s'(t)}{s(t)} = \frac{f_X(t)}{s(t)} = \frac{f_X(t)}{1-F_X(t)}$

b. $f_X(t) = \mu(t)s(t) = \mu(t)e^{-\int_0^t \mu(s)\mathrm{d}s}$

c. $s(t) = e^{-\int_0^t \mu(s)\mathrm{d}s}$

证明. $\mu(s) = -\frac{s'(s)}{s(s)} = -[\ln s(s)]'$, $\int_0^t \mu(s)\mathrm{d}s = -\ln s(t) + \ln s(0)$, 因 $s(0) = P(X > 0) = 1$, 故 $s(t) = e^{-\int_0^t \mu(s)\mathrm{d}s}$。 □

1、$s(t) = e^{-\int_0^t \mu(s)\mathrm{d}s}$, $\mu(t) = -\frac{s'(t)}{s(t)}$, 即生存函数 $s(t)$ 与死亡力函数 $\mu(t)$ 相互唯一确定。

2、一个函数 $\mu(t)$ 要作为死亡力，必须满足以下两条:

(1). $\mu(t) \geq 0$, $\forall t \geq 0$

(2). $\int_0^\infty \mu(t)\mathrm{d}t = \infty$

例 1.1.4. 设有一个新生儿的寿命 $X \sim e(\lambda)$, $f_X(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$, $F_X(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$, $s(t) = 1 - F_X(t) = e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$。

死亡力: $\mu(t) = -\frac{s'(t)}{s(t)} = \lambda$, $\forall t \geq 0$。

由此可见，指数分布的死亡力是常数，表示新生儿在任意岁数死去的可能性一样大，即新生儿永远年轻，所以指数分布作为寿命分布是不合适的。

3、**整数年龄与分数年龄**: $X = K(0) + S(0)$，$K(0)$ 为整数部分，$S(0)$ 为分数部分。记 $\mathring{e}_0 = E(X)$，它表示新生儿的期望寿命，$e_0 = E(K(0))$ 表示期望整数寿命

$$e_0 \leq \mathring{e}_0 < e_0 + 1$$

引理 1.1.5. 设随机变量 X 的 n 阶矩存在,即 $E(X^n) < \infty$,则 $\lim_{t\to\infty} t^n s(t) = 0$

证明.

$$
\begin{aligned}
&t^n s(t) = t^n P(X > t) \\
&= \int_t^{\infty} t^n f_X(s) \mathrm{d}s \\
&\leq \int_t^{\infty} s^n f_X(s) \mathrm{d}s \to 0
\end{aligned}
$$

□

推论 1.1.6. *a.* $\mathring{e}_0 = E(X) = \int_0^{\infty} s(t) \mathrm{d}t$

b. $E(X^2) = \int_0^{\infty} 2ts(t) \mathrm{d}t$

c. $E(K(0)^2) = \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1) s(n)$

d. $E(K(0)) = \sum_{n=1}^{\infty} s(n)$

证明.

$$
\begin{aligned}
E\left(X^n\right) &= \int_0^{\infty} t^n \mathrm{d}F(t) = \lim_{M \to \infty} \int_0^M t^n \mathrm{d}F(t) = -\lim_{M \to \infty} \int_0^M t^n \mathrm{d}s(t) \\
&= -\lim_{M \to \infty} \left([t^n s(t)] \Big|_0^M - \int_0^M n t^{n-1} s(t) \mathrm{d}t \right) \\
&= \lim_{M \to \infty} [-M^n s(M)] + \lim_{M \to \infty} \int_0^M n t^{n-1} s(t) \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\infty} n t^{n-1} s(t) \mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

a,b 即证。

$$\begin{aligned}
E(K(0)^2) &= \sum_{K=0}^{\infty} K^2 P(K(0)=K) \\
&= \sum_{K=0}^{\infty} K^2 [P(X \geq K) - P(X \geq K+1)] \\
&= \sum_{K=0}^{\infty} K^2 s(K) - \sum_{K=0}^{\infty} K^2 s(K+1) \\
&= \sum_{K=0}^{\infty} (2K+1) s(K+1) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1) s(n)
\end{aligned}$$

c 即证。同理可证 d。 □

1.1.2 X 岁个体的生存分布

一个 X 岁还活着的个体记为 (X)，(X) 的余命记为 $T(X)$，$T(X)$ 的分布表示在已知 $\{X \geq x\}$ 的条件下，$T(X) = X - x$。

记 $F_{T(x)}$ 为 $T(X)$ 的分布函数，则

$$\begin{aligned}
F_{T(X)}(t) = P(T(X) \leq t | X \geq x) = P(X - x \leq t | X \geq x) &= \frac{P(X \leq t+x, X \geq x)}{P(X \geq x)} \\
= \frac{P(X > x) - P(X > x+t)}{P(X > t)} = 1 - \frac{s(x+t)}{s(x)}
\end{aligned}$$

记 $f_{T(X)}(t)$ 为 $T(X)$ 的密度函数，则

$$f_{T(X)}(t) = F'_{T(X)}(t) = -\frac{s'(x+t)}{s(x)} = \frac{f_X(x+t)}{s(x)}$$

记 $s_{T(X)}(t) = 1 - F_{T(X)}(t) = \frac{s(x+t)}{s(x)}$ 为 $T(X)$ 的生存函数。

个体 (X) 的死亡力为

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\Delta t\to 0+}\frac{P(t<T(x)\leqslant t+\Delta t|T(x)>t)}{\Delta t}\\
=&\lim_{\Delta t\to 0+}\frac{P(t<T(x)\leqslant t+\Delta t)}{\Delta t P(T(x)>t)}\\
=&\lim_{\Delta t\to 0+}\frac{s_{T(x)}(t)-s_{T(X)}(t+\Delta t)}{\Delta t}\frac{1}{s_{T(x)}(t)}\\
=&-\frac{s'_{T(x)}(t)}{s_{T(x)}(t)}=-\frac{\frac{s'(x+t)}{s(x)}}{\frac{s(x+t)}{s(x)}}\\
=&-\frac{s'(x+t)}{s(x+t)}=\mu(x+t)
\end{aligned}
$$

定义 1.1.7. 称 $\mu_x(t)=-\frac{s'_{T(x)}(t)}{s_{T(x)}(t)}$ 为 X 岁个体在 t 年后的死亡力函数。

推论 1.1.8. *a.* $\mu_x(t)=\mu(x+t)$，表示 x 岁的个体在 t 年后的死亡力等于新生儿在 $x+t$ 年后的死亡力。

b. $f_{T(x)}(t)=s_{T(x)}\mu_x(t)$

c. $s_{T(x)}(t)=e^{-\int_0^t\mu_x(s)\mathrm{d}s}=e^{-\int_0^t\mu(x+s)\mathrm{d}s}=e^{-\int_x^{x+t}\mu(s)\mathrm{d}s}$