

Numerical Optimization

——对书中内容的注解

Lollins

2023 年 8 月 8 日

前言

2023 年暑假，我开始阅读数值优化，书中会有一些跳步的证明，我将在这篇注解笔记中对那些证明进行步骤的完善。

Lollins

2023 年 8 月 8 日

目录

第一章 附录 A.1

1.1 P609

引理 1.1.1 (Cauchy-Schwarz Inequality). 对于 x, y 为任意向量, $A_{n \times n}$ 为正定矩阵, 满足以下的三个不等式:

$$1 \ (x'y)^2 \leq (x'x)(y'y);$$

$$2 \ (x'y)^2 \leq (x'Ax)(y'A^{-1}y);$$

$$3 \ (x'Ay)^2 \leq (x'Ax)(y'Ay).$$

证明. 1. 存在标量 a , 向量 $x + ay$, 我们有

$$\begin{aligned} \|x + ay\|^2 &= (x + ay)'(x + ay) \\ &= y'y a^2 + 2x'y a + x'x \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

即 $\Delta \leq 0$, $(2x'y)^2 - 4(x'x)(y'y) \leq 0$, 即证 $(x'y)^2 \leq (x'x)(y'y)$

2. 根据谱分解定理, 我们有 $A^{\frac{1}{2}} = \sum_{i=1}^n \sqrt{\lambda_i} e_i e_i^T$, $A^{-\frac{1}{2}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} e_i e_i^T$, 再根据 1 中的结论, 我们可以得到

$$\begin{aligned} [(A^{1/2}x)'(A^{-1/2}y)]^2 &\leq (x'A^{1/2}A^{1/2}x)(y'A^{-1/2}A^{-1/2}y) \\ &\leq (x'Ax)(y'A^{-1}y) \end{aligned}$$

3. 令 $x'Ay = (A^{1/2}x)'(A^{1/2}y)$, 再进行 2 中的步骤, 易得结论

□

好像被许凯老师骗了,发现好像不需要用 *Cauthy-Schwarz Inequality*, 用下面的这个引理就可以完成证明了。

引理 1.1.2. 对于实对称矩阵 A 和任意向量 \mathbf{x} , 我们有

$$\lambda_{\min} \leq \frac{\mathbf{x}' A \mathbf{x}}{\mathbf{x}' \mathbf{x}} \leq \lambda_{\max}$$

证明. 存在正交矩阵 T , 使得

$$T' A T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} = \Lambda$$

令 $\mathbf{x} = T \mathbf{y}$, 则

$$\frac{\mathbf{x}' A \mathbf{x}}{\mathbf{x}' \mathbf{x}} = \frac{\mathbf{y}' \Lambda \mathbf{y}}{\mathbf{y}' \mathbf{y}} = \frac{\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2}{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2}$$

即证 $\lambda_{\min} \leq \frac{\mathbf{x}' A \mathbf{x}}{\mathbf{x}' \mathbf{x}} \leq \lambda_{\max}$ □

证明书上的

$$\sigma_n(A) \|x\|^2 = \|x\|^2 / \|A^{-1}\| \leq x^T A x \leq \|A\| \|x\|^2 = \sigma_1(A) \|x\|^2. \quad (1.1)$$

证明. 1. 因为 $1/\|A^{-1}\| = \lambda_{\min}$, $\lambda_{\min} \leq \frac{\mathbf{x}' A \mathbf{x}}{\mathbf{x}' \mathbf{x}}$, 即证

$$\|x\|^2 / \|A^{-1}\| \leq \mathbf{x}' A \mathbf{x}$$

第一个不等式成立

2. 根据范数的性质, $\|\mathbf{x}' A \mathbf{x}\| \leq \|A\| \|x\|^2$ □

解. □