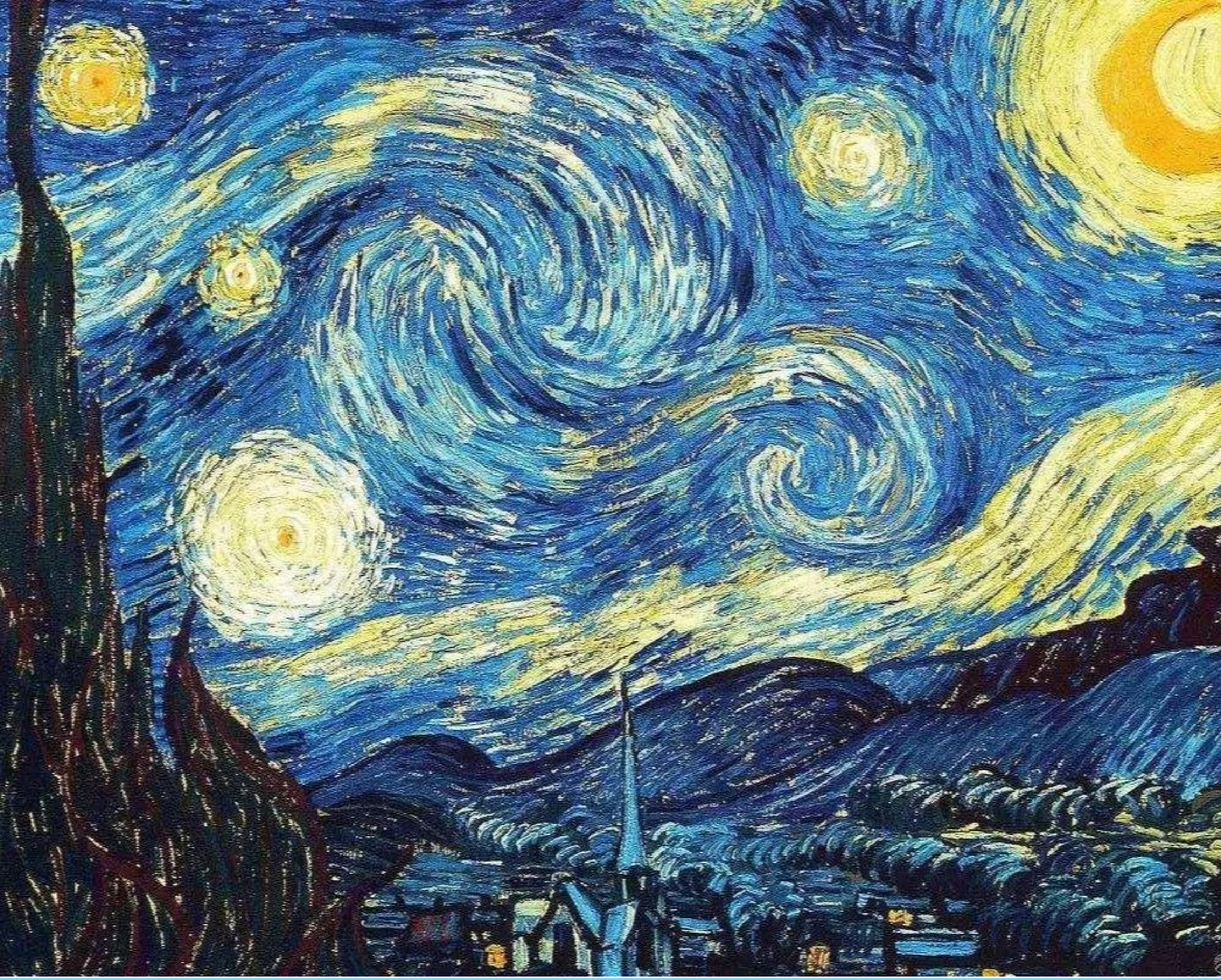
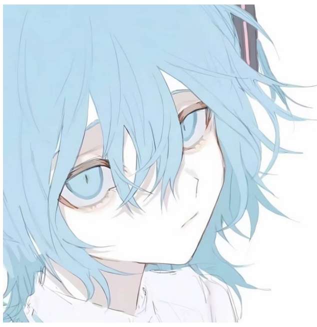


Actuarial Sciences Review

作者：Lollins
组织：安徽师范大学数学与统计学院
时间：June 24, 2024
邮箱：jieyu8258@gmail.com



唯有热爱可抵岁月长！

前言

由于 king 哥已经弄好了一份精美的精算学 pdf 电子笔记，若我再做精算学上课笔记，实乃多余。故我决定做一份精算学复习资料，主要是对精算学的一些重要知识点进行总结[1]，以便于大家复习。

随着这学期的期末考试结束，大家的大学生涯基本也算是告一段落了。愿大家都能顺利通过考试，也祝大家顺利毕业，前程似锦！

Lollins
June 24, 2024

[1]本文不涉及一些细节上证明以及推导，想了解公式由来的读者直接阅读 king 哥群里的 pdf 即可。

目录

期末复习相关内容

精算学的主要内容

1. 你能活多久?(生存分布)
2. 你死的时候, 保险公司支付你 1 元, 这 1 元的现值为多少?(人寿保险)
3. 在你活着时, 保险公司每年支付你 1 元, 这些支付的现值是多少?(生存年金)
4. 上述的寿险与生存年金, 你该向保险公司缴纳多少保费?(保费理论)
5. 保险公司为了保证支付, 要准备多少钱?(准备金理论)

题型

1. 填空题: $5 \times 3 = 15$ 分; (年金与寿险的关系, UDD 假设关系)
2. 分析题: $3 \times 7 = 21$ 分; (解释含义)
3. 解答题: $3 \times 4 = 12$ 分; (生存年金分类, 第四章与第五章的一些定义)
4. 计算题: $4 \times 10 = 40$ 分; (前四章一章一题)
5. 综合题: $1 \times 12 = 12$ 分. (重点复习第五章的例题)

注 连续分布就考指数, 离散分布就考均匀, 生死合险不考, 每年分成 m 个区间不考.

第 1 章 生存分布

1.1 新生儿的生存分布

定义 1.1 (生存函数)

称 $s(t) := P(X > t), t > 0$ 为 X 的生存函数.

推论 1.1

$s(t) = 1 - F(t), s'(t) = -f(t).$

定义 1.2 (死亡力函数)

称 $\mu(t) := -\frac{s'(t)}{s(t)}, t \geq 0$ 为新生儿的死亡力函数.

推论 1.2

关于 $\mu(t), s(t)$ 及 $f_X(t)$ 有如下结论:

1. $\mu(t) = -\frac{s'(t)}{s(t)} = \frac{f_X(t)}{1-F_X(t)} = \frac{f_X(t)}{s(t)}$;
2. $f_X(t) = \mu(t)s(t)$;
3. $s(t) = e^{-\int_0^t \mu(s)ds}$.

注

1. 由 $s(t) = e^{-\int_0^t \mu(s)\mathrm{d}s}$ 及 $\mu(t) = -\frac{s'(t)}{s(t)}$ 可知, 生存函数 $s(t)$ 与死亡力函数 $\mu(t)$ 相互唯一确定.
2. 一个函数 $\mu(t)$ 要作为死亡力, 必须满足以下两条:
   (a). $\mu(t) \geq 0, \ \forall t \geq 0$ (保证 $s(t)$ 单调递减).
   (b). $\int_0^\infty \mu(t)\mathrm{d}t = \infty$(保证 $s(\infty) = 0$).

例题 1.1 假设新生儿的寿命服从以 λ 为参数的指数分布, 则密度函数 $f_X(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \ t > 0$.

解 分布函数 $F_X(t) = \int_0^t f_X(s)ds = 1 - e^{-\lambda t}, t > 0$.

生存函数 $s(t) = 1 - F_X(t) = e^{-\lambda t}, t > 0$. 故其死亡力函数为

$$\mu(t) = -\frac{s'(t)}{s(t)} = -\frac{-\lambda e^{-\lambda t}}{e^{\lambda t}} \equiv \lambda. \tag{1.1}$$

注 由(1.1)式可知, 若新生儿寿命服从以 λ 为参数的指数分布, 则死亡力 $\mu(t) \equiv \lambda$, 和 t 无关. 这表示新生儿的死亡力在任何时候都是一样的. 也就是说, 新生儿永远年轻. 这当然与实际情况不符. 所以, 指数分布作为寿命分布是有缺陷的. 但由于指数分布的计算较为简单, 所以在理论研究中, 学者们很多时候都采用指数分布作为寿命分布.

定义 1.3 (整数年龄与分数年龄)

很多时候, 保险金都是在整数时刻支付的. 所以有必要研究整数年龄和分数年龄. 设 $K(0)$ 为 X 的整数部分, $S(0)$ 为 X 的分数部分. 即

$$X = K(0) + S(0).$$

记 $\mathring{e}_0 = E(X)$, 它表示新生儿的期望寿命; 记 $e_0 = E(K(0))$, 它表示期望整数寿命. 易知

$$e_0 \leq \mathring{e}_0 < e_0 + 1.$$

引理 1.1

设随机变量 X 的 n 阶矩存在, 即 $E(X^n) < \infty$, 则 $\lim_{M\to\infty} M^n s(M) = 0$.

推论 1.3

如下结论成立:

1. $\mathring{e}_0 = E(X) = \int_0^\infty s(t)\mathrm{d}t$;
2. $E(X^2) = \int_0^\infty 2ts(t)\mathrm{d}t$;
3. $E(K(0)^2) = \sum_{n=1}^\infty (2n-1)s(n)$;
4. $e_0 = E(K(0)) = \sum_{n=1}^\infty s(n)$.

注 $E(X^n) = \int_0^\infty nt^{n-1}s(t)\mathrm{d}t$.

1.2 x 岁个体的生存分布

定义 1.4 (x 岁个体余命的分布、密度及生存函数)

将一个 x 岁还活着的个体记为 (x). 个体 (x) 的余命记为 $T(x)$, 显然有 $T(x) = X - x$.

记 $F_{T(x)}(t)$ 为 $T(x)$ 的分布函数, $f_{T(x)}(t)$ 为 $T(x)$ 的密度函数, 则

$$F_{T(x)}(t) = 1 - \frac{s(x+t)}{s(x)}, \ f_{T(x)}(t) = -\frac{s'(x+t)}{s(x)}.$$

称 $s_{T(x)}(t) := P(T(x) > t)$ 为个体 (x) 的的生存函数.

定义 1.5 (x 岁个体的死亡力)

称 $\mu_x(t) = -\frac{s'_{T(x)}(t)}{s_{T(x)}(t)}$ 为 x 岁个体在 t 年后的死亡力函数.

推论 1.4

我们有

1. $s_{T(x)}(t) = 1 - F_{T(x)}(t) = \frac{s(x+t)}{s(x)}$;
2. $\mu_x(t) = \frac{f_{T(x)}(t)}{1-F_{T(x)}(t)} = \frac{f_{T(x)}(t)}{s_{T(x)}(t)} = -\frac{s'_{T(x)}(t)}{s_{T(x)}(t)}$.
3. $f_{T(x)}(t) = s_{T(x)}(t)\mu_x(t)$;
4. $\mu_x(t) = \mu(x+t)$;
5. $s_{T(x)}(t) = e^{-\int_0^t \mu_x(s)ds} = e^{-\int_0^t \mu(x+s)ds} = e^{-\int_x^{x+t} \mu(s)ds}$.

注 理论上, 一个人一旦出生, 其死亡力就 “注定” 了. 如果他在 x 岁还活着, 在 t 年后他变为 $x+t$ 岁, 此时他的死亡力是 $\mu_x(t)$. 换一种观点, 如果站在 0 时刻 (他出生时) 看, 他在 $x+t$ 岁的死亡力应为 $\mu(x+t)$. 故有

$$\mu_x(t) = \mu(x+t).$$

例题 1.2 设新生儿的寿命服从以 $\lambda > 0$ 为参数的指数分布. 则 $s(t) = e^{-\lambda t}, t > 0$.

解 从而有

$$\begin{aligned} F_{T(x)}(t) &= 1 - \frac{s(x+t)}{s(x)} = 1 - \frac{e^{-\lambda(x+t)}}{e^{-\lambda x}} = 1 - e^{-\lambda t} = F_X(t); \\ f_{T(x)}(t) &= F'_{T(x)}(t) = F'_X(t) = f_X(t); \\ \mu_x(t) &= \mu(x+t) \equiv \lambda. \end{aligned}$$

以上计算再次表明, 在指数分布寿命假设下, 新生儿的的寿命 X 与 x 岁的个体的余命 $T(x)$ 的分布相同. 进一步说明指数分布作为寿命分布是有缺陷的.

命题 1.1

$\forall u, t > 0$, 有

$$P(T(x) > t + u | T(x) > t) = P(T(x + t) > u). \tag{1.2}$$

该式的含义为: 一个 x 岁的人, 在 $x + t$ 岁还活着的条件下, 再活 u 年不死的概率与一个 $x + t$ 岁的人在 u 年内未死的概率相等.

注由(1.2)式立即可得

$$P(T(x) \leq t + u | T(x) > t) = P(T(x + t) \leq u). \tag{1.3}$$

例题 1.3 设新生儿的寿命服从指数分布, 参数为 λ.

解 我们有 $\mu(t) \equiv \lambda$, 且

$$s(t) = e^{-\lambda t}, t > 0.$$

$$F_{T(x)} = 1 - \frac{s(x+t)}{s(x)} = 1 - e^{-\lambda t} = F_x(t).$$

$$f_{T(x)}(t) = F'_{T(x)}(t) = \lambda e^{-\lambda t} = f_x(t), t > 0.$$

$$s_{T(x)}(t) = \frac{s(x+t)}{s(x)} = e^{-\lambda t} = s(t), t > 0.$$

$$\mu_x(t) = \mu(x + t) \equiv \mu, t > 0.$$

$$e_x = \sum_{k=1}^{\infty} {}_k p_x = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda k} = \frac{e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}}.$$

$$\mathring{e}_x = \int_0^{\infty} {}_t p_x dt = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}.$$

显而易见, 这里的 $\mathring{e}_x$ 和 e_x 与 x 无关, 也就是说, 所有人的剩余寿命的期望都是一样的, 和他现在的年龄无关. 这进一步说明指数分布作为寿命分布是有缺陷的. 此外, 因 $\mathring{e}_x = ET(x) = \frac{1}{\lambda}$, 故指数分布的参数 λ 正好是期望寿命的倒数.

命题 1.2

定义如下几个记号:

1. 用 ${}_t p_x \stackrel{\text{def}}{=} P(T(x) > t) = s_{T(x)}(t)$ 表示个体 (x) 在 t 年后还活着的概率. 显然有
$$ {}_t p_x = s_{T(x)}(t) = \mathrm{e}^{-\int_0^t \mu_x(s)\mathrm{d}s} = \mathrm{e}^{-\int_0^t \mu(x+s)\mathrm{d}s} = \mathrm{e}^{-\int_x^{x+t} \mu(s)\mathrm{d}s}.$$
2. 用 ${}_t q_x \stackrel{\text{def}}{=} P(T(x) \leq t) = F_{T(x)}(t)$ 表示一个 x 岁的人在 t 年内死亡的概率. 易知
$$ {}_t p_x + {}_t q_x = 1.$$
3. 用 ${}_{u|t} q_x \stackrel{\text{def}}{=} P(u < T(x) \leq u + t)$ 表示一个 x 岁的人在 $x + u$ 岁还活着, 但在未来 t 年内死亡的概率.

推论 1.5

如下几个结论成立:

1. $\frac{d({}_t p_x)}{dt} = -{}_t p_x \mu_x(t)$;
2. $\frac{d({}_t p_x)}{dx} = {}_t p_x(\mu(x) - \mu(x + t))$;
3. $f_{T(x)}(t) = {}_t p_x \cdot \mu_x(t)$;
4. ${}_t p_x = {}_s p_x \cdot {}_{t-s} p_{x+s}, 0 \leq s \leq t$;
5. ${}_{u|t} q_x = {}_u p_x - {}_{u+t} p_x, u, t > 0$;
6. ${}_{u|t} q_x = {}_u p_x \, {}_t q_{x+u}, u, t \geq 0$.

定义 1.6 (个体 (x) 的整数与分数余命及期望)

类似处理新生儿的寿命一样, 可将个体 (x) 的余命 $T(x)$ 分为整数部分和小数部分. 设

$$T(x) = K(x) + S(x),$$

其中 $K(x)$ 是 $T(x)$ 的整数部分, $S(x)$ 是 $T(x)$ 的小数部分. 记

$$\mathring{e}_x \overset{\text{def}}{=} E(T(x)),\ e_x \overset{\text{def}}{=} E(K(x)).$$

则简单计算可知

$$\mathring{e}_x = E(T(x)) = \int_0^{\infty} {}_tp_x dt,\ e_x = E(K(x)) = \sum_{k=1}^{\infty} {}_kp_x.$$

♣

1.3 随机生存群

定义 1.7 (模型描述)

设 0 时刻系统中有 l_0 个新生儿, 他们的寿命独立同分布, 服从某分布, 生存函数为 $s(t), t \geq 0$. 记
$\mathscr{L}(x)$ 为在 x 岁还活着的总人数;
${}_t\mathscr{D}_x$ 为 $[x, x+t]$ 内死去的总人数.
设系统中初始时刻的 l_0 个人的寿命分别为 $X_1, X_2, ..., X_n$, 则他们独立同分布, 且

$$P(X_i > t) = s(t), i = 1, ..., n.$$

显然有

$$\mathscr{L}(x) = \sum_{i=1}^{l_0} I_{\{X_i \geqslant x\}},\ {}_t\mathscr{D}_x = \sum_{i=1}^{l_0} I_{\{x \leqslant X_i < x+t\}},$$

其中 $I_A = \begin{cases} 1, & \omega \in A, \\ 0, & \omega \in A^c \end{cases}$ 为示性函数.

令

$$l_x \overset{def}{=} E(\mathscr{L}(x)),\ \text{它表示在}x\text{岁还活着的期望人数};$$

$${}_td_x \overset{def}{=} E({}_t\mathscr{D}_x),\ \text{它表示在}[x, x+t)\text{内死去人数的期望}.$$

♣

推论 1.6

如下结论成立:

1. $l_x = l_0 s(x),\ {}_td_x = l_x - l_{x+t}$;
2. ${}_tp_x = \frac{l_{x+t}}{l_x}$;
3. ${}_tq_x = \frac{{}_td_x}{l_x}$;
4. $l_{x+t} = l_x e^{-\int_x^{x+t} \mu(s) ds}$;
5. $\frac{dl_x}{dx} = -l_x \mu(x)$;
6. ${}_nd_x = \int_x^{x+n} l_y \mu(y) dy$.

♡

注 下面我们分析等式 ${}_td_x = \int_x^{x+t} l_y u(y) dy$ 的含义.

等式左端 ${}_td_x$ 表示在 $[x, x+t]$ 内死去的人数. 现分析右端. 注意到

$$\mu(y)dy = -\frac{s'(y)}{s(y)}dy = -\frac{ds(y)}{s(y)} = \frac{s(y) - s(y+\Delta y)}{s(y)}.$$

所以 $\mu(y)dy$ 表示一个人在 y 岁还活着的条件下, 在 $[y, y+dy]$ 内死去的概率, 于是 $l_y\mu(y)dy$ 表示在 $[y, y+dy]$ 内死去的人数. 对 y 积分可知, 等式右端的 $\int_x^{x+t} l_y\mu(y)dy$ 表示在 $[x, x+t]$ 内死去的人数. 所以右端等于左端.

1.4 生命表的元素

命题 1.3

在精算学的诸多记号中, 若左下标是 1, 通常将其省略, 所以我们有

$$p_x \triangleq {}_1p_x,\ q_x \triangleq {}_1q_x,$$
$$L_x \triangleq {}_1L_x,\ {}_{u|}q_x \triangleq {}_{u|1}q_x.$$

命题 1.4

记 $a \wedge b = \min\{a, b\}$, $a \vee b = \max\{a, b\}$, $EX = \int_0^\infty xf(x)dx, X \geq 0$. 计算可得

$$E(X \wedge t) = \int_0^t xf(x)dx + tP(X > t).$$

定义 1.8 (条件数学期望)

设 A 是一个随机事件, X 为一个随机变量, 给定事件 A 的条件下, X 的条件期望定义为

$$E(X|A) \overset{def}{=} \frac{E(XI_A)}{EI_A} = \frac{E(XI_A)}{P(A)}.$$

可以类似条件概率的定义理解条件期望的定义.

定义 1.9

${}_tL_x$: 所有人在 $[x, x+t)$ 内活过的总时间, 记作 ${}_tL_x = l_xE(T(x) \wedge t)$.

推论 1.7

如下结论成立:

$$\begin{aligned}
{}_tL_x &= l_xE(T(x) \wedge t) \\
&= \int_0^t sl_{x+s}u(x+s)ds + tl_{x+t} \\
&= \int_0^t l_{x+s}ds
\end{aligned}$$

注 表达式 $\int_0^t sl_{x+s}\mu(x+s)ds + tl_{x+t}$ 的含义如下:

一方面, 在 $x+s$ 岁活着的人有 l_{x+s} 个, 每个人在 $[x+s, x+s+ds]$ 内死去的概率为 $\mu(x+s)ds$, 所以, 在 $[x+s, x+s+ds]$ 内死去的人数为 $l_{x+s}\mu(x+s)ds$, 他们每个人在 $[x, x+t]$ 内活 s 年, 所以在 $x+s$ 岁死去的人在 $[x, x+t]$ 内活的总时间为 $sl_{x+s}\mu(x+s)ds$, 再对 s 在 $(0, t)$ 求积分 (求和) 可知, $\int_0^t sl_{x+s}\mu(x+s)ds$ 表示在 $[x, x+t]$ 内死去的人在这段时间内活过的总时间.

另一方面, 在 $x+t$ 岁还活着的人有 l_{x+t} 个, 他们每个人在 $[x, x+t)$ 内活了 t 岁, 故他们在 $[x, x+t)$ 内总共活了 tl_{x+t} 岁.

综合以上分析, $\int_0^t sl_{x+s}\mu(x+s)ds + tl_{x+t}$ 表示所有人在 $[x, x+t]$ 内活过的总时间, 这是一个复杂的公式, 但它有一个简单的表达 $\int_0^t l_{x+s}ds$.

定义 1.10

$a(x)$: 一个 x 岁的人在 1 年内死去的条件下, 在 $[x, x+1)$ 内活过的期望时间, 记作 $a(x) = E(T(x)|T(x) \leq 1)$.

推论 1.8

以下等式成立:

1. $a(x) = \dfrac{\int_0^1 t_t p_x u_x(t)dt}{q_x}$;
2. $L_x = d_x a(x) + l_{x+1}$.

注 表达式 $L_x = d_x a(x) + l_{x+1}$ 的含义如下:

等式右端的 $d_x a(x)$ 表示 $[x, x+1)$ 内死去的人在 $[x, x+1)$ 内活过的总时间. 右端的 $l_{x+1} \times 1$ 表示在 $x+1$ 岁活着的 l_{x+1} 人在 $[x, x+1)$ 内活过的总时间. 所以, 右端表示所有人在 $[x, x+1)$ 活过的总时间, 正好等于左端的 L_x.

命题 1.5

1. 中心死亡率: ${}_n m_x = \dfrac{{}_n q_x}{\int_0^n {}_t p_x dt} = \dfrac{{}_n d_x}{{}_n L_x}$;
2. $T_x \triangleq \int_0^\infty l_{x+s} ds = {}_\infty L_x$, T_x 表示所有人在 $[x, \infty)$ 内活过的总时间;
3. $Y_x \triangleq \int_0^\infty T_{x+s} ds$.

1.5 分数年龄上的死亡假设

定义 1.11 (死亡力均匀分布假设 (UDD 假设))

若 x 为非负整数, $s(t)$ 是生存函数, 若 $\forall t \in [0, 1)$, 都有

$$s(x+t) = (1-t)s(x) + ts(x+1). \tag{1.4}$$

称在 $[x, x+1)$ 上, 死亡力均匀分布假设成立.

推论 1.9

设 $[x, x+1)$ 上 UDD 假设成立, 则有以下结论:

1. $l_{x+t} = (1-t)l_x + tl_{x+1}, t \in [0, 1)$;
2. ${}_t d_x = td_x, t \in [0, 1)$;
3. ${}_t q_x = tq_x, t \in [0, 1)$;
4. $f_{T(x)}(t) = q_x, t \in [0, 1)$;
5. $\mu_x(t) = \frac{q_x}{1-tq_x}$.

命题 1.6

在 UDD 假设之下, 我们有如下两个命题:

1. 已知在每一年龄年上 UDD 假设成立, 则 $K(x)$ 与 $S(x)$ 相互独立, 且 $S(x)$ 服从 $[0, 1]$ 上的均匀分布;
2. 在每一年龄年 UDD 假设成立时, 有
$$\mathring{e}_x = e_x + \frac{1}{2},\ D(T(x)) = D(K(x)) + \frac{1}{12}.$$

定义 1.12 (常数死亡力假设)

设 x 为整数, 若 $\forall t \in [0, 1)$ 有

$$\ln s(x+t) = (1-t)\ln s(x) + t\ln s(x+1). \tag{1.5}$$

则称生存函数在年龄段 $[x, x+1)$ 满足常数死亡力假设.

推论 1.10

设在年龄段 $[x,x+1)$ 常数死亡力假设成立, 则对 $t\in(0,1)$, 有

1. 期望生存人数满足 $\ln l_{x+t}=(1-t)\ln l_x+t\ln l_{x+1}$;
2. 死亡力为常数, 即 $\mu_x(t)=-\ln p_x\triangleq\mu$;
3. $l_{x+t}=l_xe^{-\mu t}$, ${}_tq_x=1-p_x^t$, $f_{T(x)}(t)=-p_x^t\ln p_x$.

例题 1.4 设 $S(x)=1-\frac{x}{12}$, $0\le x\le 12$, l_0 个个体相互独立, 生存函数都是 $S(x)$.

(1) 求 $({}_3\mathscr{D}_0,\ {}_3\mathscr{D}_3,\ {}_3\mathscr{D}_6,\ {}_3\mathscr{D}_9)$ 的联合分布;

(2) 求这四个随机变量的期望和方差;

(3) 求它们两两之间的相关系数.

解 易知 l_0 个人的寿命 $X_1,X_2,...,X_{l_0}\overset{\text{i.i.d.}}{\sim}U[0,12]$. 且随机变量满足

$${}_3\mathscr{D}_0=\sum_{k=1}^{l_0}I_{\{0\le X_k\le 3\}},\ {}_3\mathscr{D}_3=\sum_{k=1}^{l_0}I_{\{3\le X_k\le 6\}},\ {}_3\mathscr{D}_6=\sum_{k=1}^{l_0}I_{\{6\le X_k\le 9\}},\ {}_3\mathscr{D}_9=\sum_{k=1}^{l_0}I_{\{9\le X_k\le 12\}}.$$

(1) 令事件 $A=\{{}_3\mathscr{D}_0=k_1,\ {}_3\mathscr{D}_3=k_2,\ {}_3\mathscr{D}_6=k_3,\ {}_3\mathscr{D}_9=k_4\}$, 若事件 A 发生, 则在 l_0 个人中, 有 k_1 人在 $[0,3]$ 内死亡; 有 k_2 人在 $[3,6]$ 内死亡; 有 k_3 人在 $[6,9]$ 内死亡; 有 k_4 人在 $[9,12]$ 内死亡, 其中 $k_1+k_2+k_3+k_4=l_0$. 从 $k_1+k_2+k_3+k_4$ 个人中, 选出 k_1 个人在 $[0,3]$ 内死亡, 有 $C_{k_1+k_2+k_3+k_4}^{k_1}$ 种选法; 从 $k_2+k_3+k_4$ 个人中, 选出 k_2 个人在 $[3,6]$ 内死亡, 有 $C_{k_2+k_3+k_4}^{k_2}$ 种选法; 从 k_3+k_4 个人中, 选出 k_3 个人在 $[6,9]$ 内死亡, 有 $C_{k_3+k_4}^{k_3}$ 种选法. 于是

$$P(A)=\frac{(k_1+k_2+k_3+k_4)!}{k_1!k_2!k_3!k_4!}\cdot{}_3q_0^{k_1}\cdot{}_{3|3}q_0^{k_2}\cdot{}_{6|3}q_0^{k_3}\cdot{}_{9|3}q_0^{k_4}.$$

(2) 对于一个二项分布 $B(n,p)$, 其期望 $E[X]=np$, 方差 $\text{Var}(X)=np(1-p)$.

因此, 对于每个随机变量 ${}_3\mathscr{D}_k$ 有

期望

$$E({}_3\mathscr{D}_k)=\frac{l_0}{4};$$

方差

$$\text{Var}({}_3\mathscr{D}_k)=l_0\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{3l_0}{16}.$$

(3) 以 ${}_3\mathscr{D}_0$, ${}_3\mathscr{D}_3$ 的相关系数为例:

$$\begin{aligned}\text{Cov}({}_3\mathscr{D}_0,\ {}_3\mathscr{D}_3)&=E({}_3\mathscr{D}_0\ {}_3\mathscr{D}_3)-E({}_3\mathscr{D}_0)E({}_3\mathscr{D}_3)\\&=E(\sum_{k=1}^{l_0}I_{\{0\le X_k\le 3\}}\cdot\sum_{j=1}^{l_0}I_{\{3\le X_j\le 6\}})-(\frac{l_0}{4})^2\\&=\sum_{k=1}^{l_0}\sum_{j\ne k}E(I_{\{0\le X_k\le 3\}}\cdot I_{\{3\le X_j\le 6\}})-(\frac{l_0}{4})^2\\&=\frac{l_0(l_0-1)}{16}-\frac{l_0^2}{16}=-\frac{l_0}{16}.\end{aligned}$$

(对于 $\sum_{k=1}^{l_0}\sum_{j\ne k}E(I_{\{0\le x_X\le 3\}}\cdot I_{\{3\le X_j\le 6\}})=\frac{l_0(l_0-1)}{16}$ 的理解: 其中 $\sum_{k=1}^{l_0}\sum_{j\ne k}1=l_0(l_0-1)$, 而 $p(I_{c\le X_i\le c+3})=\frac{1}{4}$, 故 $I_{0\le X_k\le 3}$ 与 $I_{3\le X_j\le 6}$ 同时取 1 的概率为 $\frac{1}{16}$.)

求出协方差后即可求相关系数:

$$\begin{aligned}\rho({}_3\mathscr{D}_0,\ {}_3\mathscr{D}_3)&=\frac{\text{Cov}({}_3\mathscr{D}_0,\ {}_3\mathscr{D}_3)}{\sqrt{D({}_3\mathscr{D}_0)}\cdot\sqrt{D({}_3\mathscr{D}_3)}}\\&=\frac{-\frac{l_0}{16}}{\sqrt{\frac{3}{16}l_0\cdot\frac{3}{16}l_0}}\\&=-\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

类似计算可知, 两两之间所有相关系数皆为 $-\frac{1}{3}$.

第 2 章 人寿保险

2.1 人寿保险概述

$$
\text{人寿保险}\begin{cases}\text{生存保险}\\ \text{生死合险}\\ \text{死亡保险}\begin{cases}\text{定期死亡保险}\\ \text{终身死亡保险}\\ \text{延期死亡保险}\begin{cases}\text{延期定期死亡保险}\\ \text{延期终身死亡保险}\end{cases}\end{cases}\end{cases}
$$

2.2 生存保险

定义 2.1 (支付现值)

若被保险人在 n 年内死亡 (即 $T(x) < n$), 则不予任何支付;

若他在 n 年内未死 (即 $T(x) \geqslant n$), 则在 n 时刻支付他 1 元保险金.

若 $T(x) < n$, 则 $Z = 0$; 若 $T(x) \geqslant n$, 则 $Z = 1 \cdot \nu^n = \nu^n$, 其中贴现因子 $\nu = \frac{1}{i+1}$.

即 $Z = \nu^n I_{\{T(x)\geqslant n,\}}$.

♣

命题 2.1 (精算现值与方差)

1. $E(Z) = \nu^n \cdot {}_np_x = A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}} = {}_nE_x$;
2. $EZ^2 = E\left(\left[\nu^n I_{\{T(x)\geqslant n\}}\right]^2\right) = E\left(\nu^{2n} I_{\{T(x)\geqslant n\}}\right) = \nu^{2n} \cdot {}_np_x$;
3. $DZ = EZ^2 - (EZ)^2 = \nu^{2n} \cdot {}_np_x \cdot {}_nq_x$.

♠

推论 2.1 (精算现值的性质)

$\forall 0 \leqslant k \leqslant n$, 有

1. ${}_nE_x = {}_kE_x \cdot {}_{n-k}E_{x+k}$;
2. $(1+i)^k \cdot l_x \cdot {}_nE_x = l_{x+k} \cdot {}_{n-k}E_{x+k}$.

♡

注 等式 $(1+i)^k \cdot l_x \cdot {}_nE_x = l_{x+k} \cdot {}_{n-k}E_{x+k}$ 的含义如下:

在 0 时刻, l_x 个人各自买了一份 n 年期的生存保险, 保费总额为 $l_x \cdot {}_nE_x$, k 年后, 这笔钱的积累值为 $(1+i)^k \cdot l_x \cdot {}_nE_x$, 若此时保险公司破产不干了, 他分给在 k 时刻还活着的 l_{x+k} 个人每人 ${}_{n-k}E_{x+k}$ 元, 这正好够每个人去重新买一份 $n-k$ 年期的生存保险.

2.3 n 年期 (定期) 死亡保险

2.3.1 死亡立即支付的 n 年期定期寿险

定义 2.2 (支付现值)

若 (x) 在 n 年内死亡 (即 $T(x) < n$), 则在 $T(x)$ 时刻支付 1 元保险金;
若 (x) 在 n 年内未死 (即 $T(x) \geqslant n$), 则不予支付.
若 $T(x) < n$, 则 $Z = \nu^{T(x)}$; 若 $T(x) \geqslant n$, 则 $Z = 0$.
所以 $Z = \nu^{T(x)} I_{\{T(x)<n\}}$.

命题 2.2 (精算现值与方差)

1. $E(Z) = \int_0^n \nu^t \cdot {}_tp_x \cdot \mu_x(t)dt = \int_0^n e^{-\delta t} \cdot {}_tp_x \cdot \mu_x(t)dt = \overline{A}^{1}_{x:\overline{n|}}$;
2. $DZ = {}^2\overline{A}^{1}_{x:\overline{n|}} - (\overline{A}^{1}_{x:\overline{n|}})^2 = \overline{A}^{1}_{x:\overline{n|}}@2\delta - (\overline{A}^{1}_{x:\overline{n|}}@\delta)^2$.

注 记 ${}^j\overline{A}^{1}_{x:\overline{n|}} = \int_0^\infty e^{-j\delta t} \cdot {}_tp_x \cdot \mu_x(t)dt$, ${}^j\overline{A}^{1}_{x:\overline{n|}}@\delta = \overline{A}^{1}_{x:\overline{n|}}@j\delta$.

推论 2.2 (精算现值的性质)

$\forall 0 \leqslant k \leqslant n$, 有

1. $\overline{A}^{1}_{x:\overline{n|}} = \overline{A}^{1}_{x:\overline{k|}} + {}_kE_x \cdot \overline{A}^{1}_{x+k:\overline{n-k|}}$;
2. $l_x \cdot \overline{A}^{1}_{x:\overline{n|}} = \int_0^n \nu^t \cdot l_{x+t} \cdot \mu_x(t)dt$.

注 等式 $l_x \cdot \overline{A}^{1}_{x:\overline{n|}} = \int_0^n \nu^t \cdot l_{x+t} \cdot \mu_x(t)dt$ 的含义如下::

$\mu_x(t)dt$ 表示在 $[x+t, x+t+dt]$ 内死去的概率, 所以 $l_{x+t}\mu_x(t)dt$ 表示在 $[x+t, x+t+dt]$ 内死去的人数, 在这期间内死去的人每人支付 1 元保险金, 共 $l_{x+t}\mu_x(t)dt$ 元, 这些钱的现值为 $\nu^t l_{x+t}\mu_x(t)dt$, 于是 $\int_0^n \nu^t l_{x+t}\mu_x(t)dt$ 表示在 $[x, x+n]$ 内死去的人领取的保险的总现值, 这些钱应等于初始时刻的 l_x 个人的保费总额 $l_x\overline{A}^{1}_{x:\overline{n|}}$.

例题 2.1 假设死亡力 $\mu(t) \equiv \mu$, 利息力为 δ, 个体 (x) 投了一个 n 年期寿险, 计算精算现值及支付现值的方差.

解 由于死亡力是一个常数, 所以

$$\begin{aligned}\overline{A}^{1}_{x:\overline{n|}} &= \int_0^n e^{-\delta t}{}_tp_x\mu_x(t)dt = \int_0^n e^{-\delta t} \cdot e^{-\int_x^{x+t}\mu ds}\mu dt \\ &= \int_0^n e^{-\delta t} \cdot e^{-\mu t}\mu dt = \frac{\mu}{\mu+\delta}\left(1 - e^{-(\mu+\delta)n}\right).\end{aligned}$$

进而有

$${}^2\overline{A}^{1}_{x:\overline{n|}} = \frac{\mu}{\mu+2\delta}\left(1 - e^{-(\mu+2\delta)n}\right).$$

于是

$$\begin{aligned}DZ &= {}^2\overline{A}^{1}_{x:\overline{n|}} - (\overline{A}^{1}_{x:\overline{n|}})^2 \\ &= \frac{\mu}{\mu+2\delta}\left(1 - e^{-(\mu+2\delta)n}\right) - \left(\frac{\mu}{\mu+\delta}\left(1 - e^{-(\mu+\delta)n}\right)\right)^2.\end{aligned}$$

2.3.2 死亡年末支付的 n 年期定期寿险

定义 2.3 (支付现值)

若个体 (x) 在 n 年内死亡, 则在其死亡年末支付 1 元;
若个体 (x) 在 n 年内未死, 则不予支付.
$Z = \nu^{K(x)+1} I_{\{T(x)<n\}}$.

命题 2.3 (精算现值与方差)

1. $E(Z)=\sum_{k=0}^{n-1}\nu^{k+1}{}_{k|}q_x=A^1_{x:\overline{n}|}$;
2. $DZ={}^2A^1_{x:\overline{n}|}-(A^1_{x:\overline{n}|})^2$, 其中 ${}^2A^1_{x:\overline{n}|}=\sum_{k=0}^{n-1}\nu^{2(k+1)}{}_{k|}q_x$.

推论 2.3 (精算现值的性质)

$\forall\, 0\le m\le n$, 有 $A^1_{x:\overline{n}|}=A^1_{x:\overline{m}|}+{}_mE_x\cdot A^1_{x+m:\overline{n-m}|}$.

注意到当 $m=1$ 时, $A^1_{x:\overline{1}|}=\nu q_x$, ${}_1E_x=\nu p_x$, 立即可得

1. $A^1_{x:\overline{n}|}=\nu q_x+\nu p_x\cdot A^1_{x:\overline{n-1}|}$;
2. $(1+i)l_xA^1_{x:\overline{n}|}=d_x+l_{x+1}A^1_{x+1:\overline{n-1}|}$.

注 等式 $(1+i)l_xA^1_{x:\overline{n}|}=d_x+l_{x+1}A^1_{x+1:\overline{n-1}|}$ 的含义如下:

此式的左端表示在 0 时刻, l_x 个人各自买了一份 n 年期的死亡保险, 保费总额为 $l_xA^1_{x:\overline{n}|}$. 一年后, 这笔钱的积累值为 $(1+i)l_xA^1_{x:\overline{n}|}$. 右端表示, 在 $[0,1]$ 之间有 d_x 个人死去, 保险公司需给他们每人 1 元, 共 d_x 元. 若此时保险公司破产不干了, 他分给在 1 时刻还活着的 l_{x+1} 个人每人 $A^1_{x+1:\overline{n-1}|}$ 元, 这正好够每个人去重新买一份 $n-1$ 年期的死亡保险. 所以保险公司一年后的支出总额为 $d_x+l_{x+1}A^1_{x+1:\overline{n-1}|}$, 正好等于保险公司收到总保费在一年后的累计值. 所以左端等于右端.

例题 2.2 设一个 20 岁的人买了一份 10 年期的死亡保险, 设其余命 $T(20)$ 服从 $[0,80]$ 上的均匀分布, $i=0.05$, 保险金死亡年末支付 10 万元.

解 支付现值

$$Z=\nu^{K(20)+1}I_{T(20)<10}\cdot 100000,$$

精算现值

$$\begin{aligned}E(Z)&=100000\cdot A^1_{20:\overline{10}|}\\&=100000\cdot\sum_{k=0}^{9}\nu^{k+1}\cdot{}_{k|}q_{20}\\&\approx 9652.1687.\end{aligned}$$

命题 2.4 (死亡年末支付与死亡立即支付的关系)

设死亡力均匀分布假设成立, 则 $\overline{A}^1_{x:\overline{n}|}=\frac{i}{\delta}A^1_{x:\overline{n}|}$.

2.4 终身死亡保险

2.4.1 死亡后立即支付的终身死亡保险

定义 2.4 (支付现值)

在个体 (x) 死亡时刻立刻支付 1 元保险金, $Z=\nu^{T(x)}$.

命题 2.5 (精算现值与方差)

1. $E(Z)=\int_0^\infty \nu^t{}_tp_x\mu_x(t)\mathrm{d}t=\overline{A}_x$;
2. $DZ={}^2\overline{A}_x-(\overline{A}_x)^2$, 其中 ${}^2\overline{A}_x=\int_0^\infty \nu^{2t}{}_tp_x\mu_x(t)\mathrm{d}t$.

推论 2.4 (精算现值的性质)

1. 对 $n \geq 1$, 有 $\overline{A}_x = \overline{A}^1_{x:\overline{n}|} + {}_nE_x \cdot \overline{A}_{x+n}$;
2. $\frac{d\overline{A}_x}{dx} = \delta\overline{A}_x + \mu(x)(\overline{A}_x - 1)$.

♡

例题 2.3 设死亡力为 μ, 利息力为 δ, 个体 (x) 投了一份死亡立即支付的终身寿险, 求 $\overline{A}_x, {}^2\overline{A}_x$ 和给付现值 Z 的方差 $D(Z)$.

解

$$
\begin{aligned}
\overline{A}_x &= \int_0^\infty e^{-\delta t} \cdot {}_tp_x \cdot \mu_x(t)dt \\
&= \int_0^\infty e^{-\delta t} \cdot e^{-\int_x^{x+t} \mu(s)ds} \cdot \mu_x(t)dt \\
&= \int_0^\infty e^{-\delta t} \cdot e^{-\int_x^{x+t} uds} \cdot \mu dt \\
&= \int_0^\infty e^{-\delta t} \cdot e^{-ut} \cdot \mu dt \\
&= \frac{\mu}{\delta + \mu}, \\
{}^2\overline{A}_x &= \frac{\mu}{2\delta + \mu}, \\
DZ &= {}^2\overline{A}_x - (\overline{A}_x)^2 = \frac{\mu}{2\delta + \mu} - (\frac{\mu}{\delta + \mu})^2.
\end{aligned}
$$

2.4.2 死亡年末支付的终身寿险

定义 2.5 (支付现值)

在个体 (x) 死亡的年末, 保险人支付 1 元保险金, $Z = \nu^{K(x)+1}$.

♣

命题 2.6 (精算现值与方差)

1. $E(Z) = \sum_{k=0}^\infty \nu^{k+1}{}_{k|}q_x = A_x$;
2. $DZ = {}^2\overline{A}_x - (\overline{A}_x)^2$, 其中 ${}^2\overline{A}_x = \int_0^\infty \nu^{2t}{}_tp_x\mu_x(t)\mathrm{d}t$.

♠

推论 2.5 (精算现值的性质)

1. $A_x = A^1_{x:\overline{n}|} + {}_nE_x \cdot A_{x+n}$;
2. $A_x = \nu q_x + \nu p_x \cdot A_{x+1}$;
3. $(1+i)A_x = q_x + p_x \cdot A_{x+1}$;
4. $(1+i)l_xA_x = d_x + l_{x+1} \cdot A_{x+1}$;
5. $l_xA_x = \sum_{k=0}^\infty \nu^{k+1} \cdot d_{x+k}$.

♡

命题 2.7

在 UDD 假设之下, 有 $\overline{A}_x = \frac{i}{\delta}A_x$.

♠

2.5 生死合险 (两全保险)

2.6 延期终身死亡保险

2.6.1 死亡立即支付的延期终身死亡保险

2.7 将每年分为 m 个区间, 在死亡区间末支付 1 元的终身死亡保险

2.8 变额人寿保险

第 3 章 生存年金

在本章最后一章节给出了各种生存年金的定义公式及精算现值, 故在前面几个章节仅给出一些命题与性质.

3.1 期初生存年金

3.1.1 终身期初生存年金

推论 3.1

因为 $Z=\ddot{a}_{\overline{K(x)+1}|}=\frac{1-\nu^{K(x)+1}}{d}$, 所以 $\ddot{a}_x=EZ=E(\ddot{a}_{\overline{K(x)+1}|})=E(\frac{1-\nu^{K(x)+1}}{d})$. 故 $\ddot{a}_x=\frac{1-E(\nu^{K(x)+1})}{d}=\frac{1-A_x}{d}$. 于是如下等式成立,

$$A_x+d\ddot{a}_x=1.$$

3.2 期末生存年金

3.3 每年分成 m 个区间的生存年金

3.4 连续生存年金

3.5 小结

3.5.1 生存年金小结

	期初生存年金	期末生存年金	连续生存年金
终身	$\ddot{a}_{\overline{K(x)+1}|}=\sum_{j=0}^{K(x)}\nu^j$	$a_{\overline{K(x)}|}=\sum_{j=1}^{K(x)}\nu^j$	$\bar{a}_{\overline{T(x)}|}=\int_0^{T(x)}\nu^t dt$
n 年期	$\ddot{a}_{\overline{(K(x)+1)\wedge n}|}=\sum_{j=0}^{K(x)\wedge(n-1)}\nu^j$	$a_{\overline{K(x)\wedge n}|}=\sum_{j=1}^{K(x)\wedge n}\nu^j$	$\bar{a}_{\overline{T(x)\wedge n}|}=\int_0^{T(x)\wedge n}\nu^t dt$
延期 n 年	$\ddot{a}_{\overline{(K(x)+1)}|}-\ddot{a}_{\overline{(K(x)+1)\wedge n}|}$	$a_{\overline{K(x)}|}-a_{\overline{K(x)\wedge n}|}$	$\bar{a}_{\overline{T(x)}|}-\bar{a}_{\overline{T(x)\wedge n}|}$
n 年期确定性	$\ddot{a}_{\overline{(K(x)+1)\vee n}|}$	$a_{\overline{K(x)\vee n}|}$	$\bar{a}_{\overline{T(x)\vee n}|}$

3.5.2 生存年金精算现值小结

	期初生存年金	期末生存年金	连续生存年金
终身	$\ddot{a}_x=\sum_{j=0}^{\infty}\nu_j^j p_x$	$a_x=\ddot{a}_x-1=\sum_{j=1}^{\infty}\nu^j{}_jp_x$	$\bar{a}_x=\int_0^{\infty}\nu^t{}_tp_x dt$
n 年期	$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}=\sum_{j=0}^{n-1}\nu^j{}_jp_x$	$a_{x:\overline{n}|}=\sum\limits_{j=1}^{n}\nu^j{}_jp_x$ $=\ddot{a}_{x:\overline{n}|}-1+\nu^n{}_np_x$	$\bar{a}_{x:\overline{n}|}=\int_0^n\nu^t{}_tp_x dt$
延期 n 年	${}_{n\vert}\ddot{a}_x=\ddot{a}_x-\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ $={}_nE_x\ddot{a}_{x+n}$ $=\sum\limits_{j=n}^{\infty}\nu^j{}_jp_x$	${}_{n\vert}a_x=a_x-a_{x:\overline{n}|}$ $={}_nE_xa_{x+n}$ $=\sum\limits_{j=n+1}^{\infty}\nu^j{}_jp_x$	${}_{n\vert}\bar{a}_x=\int_n^{\infty}\nu^t{}_tp_x dt$ $=\bar{a}_x-\bar{a}_{x:\overline{n}|}$ $={}_nE_x\bar{a}_{x+n}$
n 年期确定型	$\ddot{a}_{\overline{x:\overline{n}}|}={}_{n\vert}\ddot{a}_x+\ddot{a}_{\overline{n}|}$	$a_{\overline{x:\overline{n}}|}=a_{\overline{n}|}+{}_{n\vert}a_x$	$\bar{a}_{\overline{x:\overline{n}}|}={}_{n\vert}\bar{a}_x+\bar{a}_{\overline{n}|}$

第 4 章 净保费理论

4.1 平衡准则

4.2 趸交净保费

4.3 完全连续险种的年均衡净保费

4.4 完全离散险种的年均衡净保费

第 5 章 净准备金理论

5.1 确定净准备金的准则

5.2 完全连续险种在平衡准则下的净准备金

5.3 完全离散险种的净准备金