Numerical Optimization
——对书中内容的注解

Lollins

2023 年 12 月 14 日

前言

2023 年暑假，我开始阅读数值优化，书中会有一些跳步的证明，我将在这篇注解笔记中对那些证明进行步骤的完善。

Lollins

2023 年 12 月 14 日

目录

第一章　附录 A.1

1.1　P609

引理 1.1.1 (Cauthy-Schwarz Inequality). 对于 x,y 为任意向量，$A_{n\times n}$ 为正定矩阵，满足以下的三个不等式：

1 $(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y})^2 \leq (\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x})(\boldsymbol{y}'\boldsymbol{y})$;

2 $(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y})^2 \leq (\boldsymbol{x}'A\boldsymbol{x})(\boldsymbol{y}'A^{-1}\boldsymbol{y})$;

3 $(\boldsymbol{x}'A\boldsymbol{y})^2 \leq (\boldsymbol{x}'A\boldsymbol{x})(\boldsymbol{y}'A\boldsymbol{y})$.

证明. **1.** 存在标量 a，向量 $\boldsymbol{x}+a\boldsymbol{y}$，我们有

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x}+a\boldsymbol{y}\|^2 &= (\boldsymbol{x}+a\boldsymbol{y})'(\boldsymbol{x}+a\boldsymbol{y}) \\ &= \boldsymbol{y}'\boldsymbol{y}a^2 + 2\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}a + \boldsymbol{x}'\boldsymbol{x} \\ &\geq 0\end{aligned}$$

即 $\Delta \leq 0$，$(2\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y})^2 - 4(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x})(\boldsymbol{y}'\boldsymbol{y}) \leq 0$，即证 $(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y})^2 \leq (\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x})(\boldsymbol{y}'\boldsymbol{y})$

2. 根据谱分解定理，我们有 $A^{\frac{1}{2}} = \Sigma_{i=1}^{n}\sqrt{\lambda_i}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_i^T$，$A^{-\frac{1}{2}} = \Sigma_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_i^T$，再根据 **1** 中的结论，我们可以得到

$$\begin{aligned}[(A^{1/2}\boldsymbol{x})'(A^{-1/2}\boldsymbol{y})]^2 &\leq (\boldsymbol{x}'A^{1/2}A^{1/2}\boldsymbol{x})(\boldsymbol{y}'A^{-1/2}A^{-1/2}\boldsymbol{y}) \\ &\leq (\boldsymbol{x}'A\boldsymbol{x})(\boldsymbol{y}'A^{-1}\boldsymbol{y})\end{aligned}$$

3. 令 $\boldsymbol{x}'A\boldsymbol{y} = (A^{1/2}\boldsymbol{x})'(A^{1/2}\boldsymbol{y})$，再进行 **2** 中的步骤，易得结论 □

好像被许凯老师骗了,发现好像不需要用 $Cauthy-SchwarzInequality$,用下面的这个引理就可以完成证明了。

引理 1.1.2. 对于实对称矩阵 A 和任意向量 $\boldsymbol{x}$，我们有

$$\lambda_{min} \leq \frac{\boldsymbol{x}'A\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}} \leq \lambda_{max}$$

证明. 存在正交矩阵 T，使得

$$T'AT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} = \Lambda$$

令 $\boldsymbol{x} = T\boldsymbol{y}$，则

$$\frac{\boldsymbol{x}'A\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}} = \frac{\boldsymbol{y}'\Lambda\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{y}'\boldsymbol{y}} = \frac{\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2}{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2}$$

即证 $\lambda_{min} \leq \frac{\boldsymbol{x}'A\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}} \leq \lambda_{max}$ □

证明书中的

$$\sigma_n(A)\|x\|^2 = \|x\|^2/\|A^{-1}\| \leq x^T Ax \leq \|A\|\|x\|^2 = \sigma_1(A)\|x\|^2. \tag{1.1}$$

证明. **1.** 因为 $1/\|A^{-1}\| = \lambda_{min}$，$\lambda_{min} \leq \frac{\boldsymbol{x}'A\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}}$，即证

$$\|x\|^2/\|A^{-1}\| \leq \boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}$$

第一个不等式成立

2. 根据范数的性质，$\|\boldsymbol{x}'A\boldsymbol{x}\| \leq \|A\|\|x\|^2$ □

解. □