数学分析

作者：Lollins

时间：December 19, 2023

改变人生的事情，你必须冒险；意义非凡的事情，大多碰巧发生；不重要的事，才有周全的计划。

前言

2023/8/17，发现用 LaTeX 做笔记还挺舒服的，以前喜欢用 iPad，觉得手写的东西记得还牢固。但是 iPad 电池有问题，而且自己字写的好丑，不想用 iPad 了。LaTeX 的格式真没话说，用起来很舒服。

这篇文章我来写一点关于数学分析中，可能被我遗忘掉了的知识点。

本笔记主要参考中科大程艺老师的《数学分析讲义》。

Lollins

December 19, 2023

目录

第 1 章 极限

第 2 章 单变量函数的连续性

第 3 章 单变量函数的微分学

第 4 章 不定积分

第 5 章 单变量函数的积分学

5.1 变上限积分

定理 5.1

对于函数 $I(x)=\int_0^{g(x)} f(t)dt$，我们有 $I'(x)=g'(x)f(x)$

第 6 章 常微分方程初步

第 7 章 无穷级数

第 8 章 空间解析几何

第 9 章 多变量函数的微分学

9.1 方向导数与梯度

定义 9.1 (叉乘)

对于向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，定义叉乘为

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}\mathbf{i}+\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix}\mathbf{j}+\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\mathbf{k}$$

♣

定义 9.2 (方向导数)

对于 $\boldsymbol{e}=\boldsymbol{i}\ cos\alpha+\boldsymbol{j}\ sin\alpha, f(x,y)$，如果极限

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x+t\cos\alpha, y+t\sin\alpha)-f(x,y)}{t} \tag{9.1}$$

存在，那么称极限值为 f 在点 (x,y) 沿方向 $\boldsymbol{e}$ 的方向导数，记为 $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e}}(x,y)$。

♣

定理 9.1

设 $f(x,y)$ 是平面区域 D 上的可微函数，则 $f(x,y)$ 在 D 上任何一点沿方向 $\boldsymbol{e}=\boldsymbol{i}\ cos\alpha+j\ sin\alpha$ 的方向导数都存在，而且有

$$\frac{\partial f}{\partial e}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}sin\alpha \tag{9.2}$$

♡

定义 9.3 (梯度)

对于 $\boldsymbol{e}=\boldsymbol{i}\ cos\alpha+\boldsymbol{j}\ sin\alpha, f(x,y)$，记

$$\mathrm{grad}f=\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} \tag{9.3}$$

为 f 在点 (x,y) 处的梯度。

♣

因此函数沿任何方向的方向导数为该方向与函数的梯度的内积 (θ 为 $\mathrm{grad}f$和e 之间的夹角)，即

$$\frac{\partial f}{\partial e}=\mathrm{grad}f\cdot e=|\mathrm{grad}f||e|cos\theta \tag{9.4}$$

第 10 章 多变量函数的重积分

第 11 章 曲线积分和曲面积分

11.1 数量场在曲线上的积分

定理 11.1

设 L 是空间上的一条光滑曲线，其参数方程表示为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k} \quad t\in[\alpha,\beta] \tag{11.1}$$

$\phi(x,y,z)$ 在 L 上连续，则 $\phi(x,y,z)$ 在曲线 L 上可积，且

$$\begin{aligned}\int_L \phi(x,y,z)\mathrm{d}s&=\int_\alpha^\beta \phi(x(t),y(t),z(t))|\boldsymbol{r}'(t)|\mathrm{d}t\\&=\int_\alpha^\beta \phi(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x''^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

♡

例题 11.1 求曲线积分 $\int_L xyds$。其中 L 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 在第一象限上的弧段。

解 L 的方程可写为

$$x=a\cos\theta,\quad y=b\sin\theta,\quad 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},$$

所以

$$\begin{aligned}\int_L xy\mathrm{d}s&=ab\int_0^{\pi/2}\cos\theta\sin\theta\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta\\&=\frac{ab}{2}\int_0^{\pi/2}\sqrt{b^2+(a^2-b^2)\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\sin^2\theta\\&=\frac{ab}{3(a^2-b^2)}\left(b^2+(a^2-b^2)\sin^2\theta\right)^{3/2}\Big|_0^{\pi/2}\\&=\frac{ab(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}\end{aligned}$$

11.2 数量场在曲面上的积分

定理 11.2

设 S 是一张有界的光滑曲面，$\varphi(x,y,z)$ 是定义在 S 上的数量场，且在 S 上连续。设曲面的参数方程为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)=x(u,v)\boldsymbol{i}+y(u,v)\boldsymbol{j}+z(u,v)\boldsymbol{k},\quad (u,v)\in D, \tag{11.2}$$

则 $\varphi(x,y,z)$ 在 S 上可积，为

$$\begin{aligned}\iint_S \varphi(x,y,z)\mathrm{d}S&=\iint_D \varphi(x(u,v),y(u,v),z(u,v))|\boldsymbol{r}'_u\times\boldsymbol{r}'_v|\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\&=\iint_D \varphi(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{EG-F^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{r}'_u\times\boldsymbol{r}'_v$ 为向量叉乘 (参考定义9.1)，以及

$$\begin{aligned}E&=r'^2_u=x'_u+y'_u+z'_u,\\G&=r'^2_v=x'^2_v+y'_v+z'_v,\\F&=r'_u\cdot r'_v=x'_ux'_v+y'_uy'_v+z'_uz'_v\end{aligned}$$

♡

例题 11.2 设 S 是第一卦限的球面，$x^2+y^2+z^2=R^2\,(x\geqslant0,y\geqslant0,z\geqslant0)$，计算曲面积分 $\iint_S(x^2+y^2)dS$。

解 将球面 S 表示为参数方程

$$x=R\sin\theta\cos\varphi, y=R\sin\theta\sin\varphi, z=R\cos\theta,$$

则 θ,φ 的变化范围是平面 $O'\theta\varphi$ 上的矩形 D'

$$0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},\quad 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},$$

所以

$$\begin{aligned}\iint_S(x^2+y^2)\mathrm{d}S&=\iint_{D'}R^2\sin^2\theta\cdot R^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\\&=R^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\mathrm{d}\theta\\&=\frac{1}{3}\pi R^4\end{aligned}$$

11.3 向量场在曲线上的积分

11.3.1 向量场在曲线上积分的定义和计算

定理 11.3

设向量场 $\boldsymbol{v}=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$ 在区域 D 上连续，曲线 $L_{AB}\subset D$ 具有参数方程表示

$$L_{AB}:\quad \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k},\quad \alpha\leqslant t\leqslant\beta, \tag{11.3}$$

且有连续的导函数，参数 t 是正向参数，则向量场在 L_{AB} 上可积，且可化为下列定积分

$$\begin{aligned}\int_{L_{AB}}v\cdot\mathrm{d}r&=\int_\alpha^\beta v(r(t))\cdot r'(t)\mathrm{d}t\\&=\int_\alpha^\beta(Px'(t)+Qy'(t)+Rz'(t))\mathrm{d}t\end{aligned}\tag{11.4}$$

例题 11.3 计算曲线积分 $\int_L xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y$, L 是三角形 OAB 的正向周界 (如图11.1)，其中 $A(1,0),B(1,2),O(0,0)$。

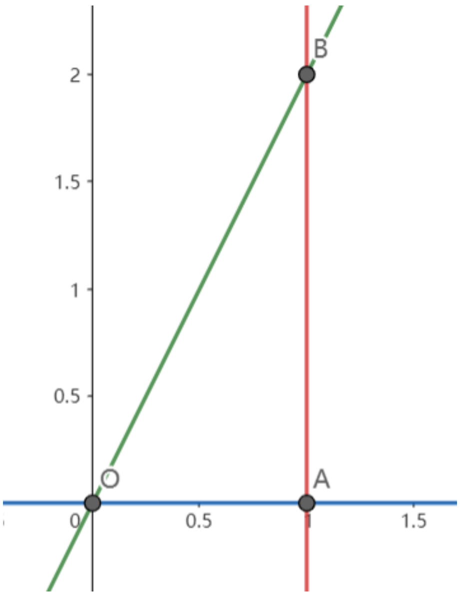

图 11.1

解 因为

$$\int_L xy\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y = \int_{L_1} xy\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y + \int_{L_2} xy\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y + \int_{L_3} xy\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y,$$

在 L_1 上，$y=0, dy=0, x$ 是参变量，$0 \le x \le 1$，所以

$$\int_{L_1} xy\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y = \int_0^1 x \cdot 0\mathrm{d}x = 0;$$

在 L_2 上，$x=1, dx=0, y$ 是参变量，$0 \le y \le 2$，所以

$$\int_{L_2} xy\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y = \int_0^2 1 \cdot \mathrm{d}y = 2;$$

在 L_3 上，$y=2x, 0 \le x \le 1, x$ 是参变量，所以

$$\int_{L_3} xy\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y = \int_1^0 x \cdot 2x\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}(2x) = -\frac{4}{3}$$

从而算得

$$\int_L xy\,\mathrm{d}\,x + x^2\,\mathrm{d}\,y = \frac{2}{3}$$

11.3.2 Green 定理

定理 11.4 ((Green))

设 D 是有限条逐段光滑的封闭曲线 L 围成的平面闭区域（因此 $L = \partial D$），$\boldsymbol{v} = P(x,y)\boldsymbol{i} + Q(x,y)\boldsymbol{j}$ 是 D 上光滑向量场，则

$$\oint_{\partial D} P\,\mathrm{d}\,x + Q\,\mathrm{d}\,y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y, \tag{11.5}$$

其中曲线积分的方向为 $L = \partial D$ 的逆时针方向。上述公式称之为 **Green** 公式。♡

11.4 向量场在曲面上的积分

第 12 章 Fourier 分析

第 13 章 反常积分和含参变量积分

第 14 章 实属理论

第 15 章 连续性与收敛性

第 16 章 度量空间的连续函数

第 17 章 映射的微分

第 18 章 Riemann 积分