《精算学》讲义[1]

王华明[2]

[1]本讲义由陈锦功、王子颉、林嘉瑞、夏婧彤、徐婷婷等几名同学协助录入.

[2]安徽师范大学数学与统计学院, 安徽芜湖 (241003). Email:hmking@ahnu.edu.cn

序

本讲义是王华明老师在 2023-2024 年第 2 学期讲授的《精算学》课程笔记的电子版. 授课对象包括安徽师范大学 2021 级统计学专业全体同学及少数几位跨专业选课的同学. 教材选用的是北京大学出版社的《寿险精算基础》一书, 该书的作者是杨静平教授. 在此对北京大学出版社及杨静平教授表示感谢.

精算学内容

1. 你能活多久?(生存分布)
2. 你死的时候, 保险公司支付你 1 元, 这 1 元的现值为多少?(人寿保险)
3. 在你活着时, 保险公司每年支付你 1 元, 这些支付的现值是多少?(生存年金)
4. 上述的寿险与生存年金, 你该向保险公式缴纳多少保费?(保费理论)
5. 保险公司为了保证支付, 要准备多少钱?(准备金理论)

第一章　生存分布

1.1　新生儿的生存分布

一. 生存函数

设有一个新生儿, 其寿命记为 X, 则 X 是一个非负随机变量. 假设 X 为一个连续型随机变量, 其分布函数为 $F_X(x)$, 密度函数为 $f_X(x)$. 回忆一下, 我们有 $F_X(x) = \int_0^x f_X(t)dt$ 且在 $f_X(x)$ 的连续点上有

$$F'_X(x) = f_X(x).$$

如下我们总假设密度函数 $f_X(t)$ 连续.

定义 1.1. 称 $s(t) := P(X > t), t > 0$ 为 X 的生存函数.

易知

$$s(t) = 1 - F_X(t), s'(t) = -f_X(t). \tag{1.1}$$

二. 死亡力

现欲刻画一个 t 时刻还活着的个体瞬间死去的可能性, 做如下计算:

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\downarrow 0}\frac{P(t < X \le t+h|X > t)}{h} = \lim_{h\downarrow 0}\frac{P(t < X \le t+h)}{hP(X > t)} \\
&\quad = \lim_{h\downarrow 0}\frac{P(X \le t+h) - P(X \le t)}{hP(X > t)} = \lim_{h\downarrow 0}\frac{F_X(t+h) - F_X(t)}{h}\frac{1}{1 - F_X(t)} \\
&\quad = \frac{F'_X(t)}{1 - F_X(t)} = \frac{f_X(t)}{1 - F_X(t)} = -\frac{s'(t)}{s(t)}. \qquad (1.2)
\end{aligned}$$

定义 1.2. 称 $\mu(t) := -\frac{s'(t)}{s(t)}, t \geq 0$ 为新生儿的死亡力函数.

由(1.2)中的计算可知, 死亡力 $\mu(t)$ 刻画了新生儿在 t 附近死去的 "快慢".

命题 1.1. 关于 $\mu(t)$, $s(t)$ 及 $f_X(t)$ 有如下结论:

(i) $\mu(t) = -\frac{s'(t)}{s(t)} = \frac{f_X(t)}{1-F_X(t)} = \frac{f_X(t)}{s(t)}$;

(ii) $f_X(t) = \mu(t)s(t)$;

(iii) $s(t) = e^{-\int_0^t \mu(s)ds}$.

证明. (i) 和 (ii) 可由死亡力 $\mu(t)$ 的定义及 (1) 式直接得出. 现证明 (iii). 注意到 $s(0) = P(X > 0) = 1$ 及

$$\mu(t) = -\frac{s'(t)}{s(t)} = -[\ln s(t)]'.$$

所以有

$$\ln s(t) = -\int_0^t \mu(s)ds.$$

故 $s(t) = e^{-\int_0^t \mu(s)ds}$, (iii) 得证. □

注 1.1. **(a)** 由 $s(t) = e^{-\int_0^t \mu(s)\mathrm{d}s}$ 及 $\mu(t) = -\frac{s'(t)}{s(t)}$ 可知, 生存函数 $s(t)$ 与死亡力函数 $\mu(t)$ 相互唯一确定.

(b) 一个函数 $\mu(t)$ 要作为死亡力, 必须满足以下两条:

1° $\mu(t) \geq 0$, $\forall t \geq 0$ (保证 $s(t)$ 单调递减).

2° $\int_0^\infty \mu(t)\mathrm{d}t = \infty$(保证 $s(\infty) = 0$).

例 1.1. 假设新生儿的寿命服从以 λ 为参数的指数分布, 则密度函数 $f_X(t) = \lambda e^{-\lambda x}, x > 0$. 分布函数 $F_X(t) = \int_0^t f_X(s)ds = 1 - e^{-\lambda t}, t > 0$. 生存函数 $s(t) = 1 - F_X(t) = e^{-\lambda t}, t > 0$. 故其死亡力函数为

$$\mu(t) = -\frac{s'(t)}{s(t)} = -\frac{-\lambda e^{-\lambda t}}{e^{\lambda t}} \equiv \lambda. \tag{1.3}$$

注 1.2. 由(1.3)式可知, 若新生儿寿命服从以 λ 为参数的指数分布, 则死亡力 $\mu(t) \equiv \lambda$, 和 t 无关. 这表示新生儿的死亡力在任何时候都是一样的. 也就是说, 新生儿永远年轻. 这当然与实际情况不符. 所以, 指数分布作为寿命分布是有缺陷的. 但由于指数分布的计算较为简单, 所以在理论研究中, 学者们很多时候都采用指数分布作为寿命分布.

三. 整数年龄与分数年龄

很多时候, 保险金都是在整数时刻支付的. 所以有必要研究整数年龄和分数年龄. 设 $K(0)$ 为 X 的整数部分, $S(0)$ 为 X 的分数部分. 即

$$X = K(0) + S(0).$$

记 $\mathring{e}_0 = E(X)$, 它表示新生儿的期望寿命; 记 $e_0 = E(K(0))$, 它表示期望整数寿命. 易知

$$e_0 \le \mathring{e}_0 < e_0 + 1.$$

引理 1.1. 设随机变量 X 的 n 阶矩存在, 即 $E(X^n) < \infty$, 则 $\lim_{M\to\infty} M^n s(M) = 0$.

证明. 注意到

$$E(X^n) = \int_0^\infty s^n f_X(s) ds = \int_0^M s^n f_X(s) ds + \int_M^\infty s^n f_X(s) ds. \tag{1.4}$$

因 X 的 n 阶矩存在, 故上式左右两端都是有限的. 由于 $\lim_{M\to\infty}\int_0^M s^n f_X(s)ds = E(X^n)$, 所以 $\lim_{M\to\infty}\int_M^\infty s^n f_X(s)\mathrm{d}s = 0$. 于是

$$\begin{aligned} M^n s(M) = M^n P(X > M) &= \int_M^\infty M^n f_X(s)\mathrm{d}s \\ &\le \int_M^\infty s^n f_X(s)\mathrm{d}s \to 0,\ M \to \infty. \end{aligned}$$

引理证毕. □

命题 1.2. 如下结论成立:

(1) $\mathring{e}_0 = E(X) = \int_0^\infty s(t)\mathrm{d}t$;

(2) $E(X^2) = \int_0^\infty 2ts(t)\mathrm{d}t$;

(3) $E(K(0)^2) = \sum_{n=1}^\infty (2n-1)s(n)$;

(4) $e_0 = E(K(0)) = \sum_{n=1}^\infty s(n)$.

证明. 由分部积分公式和引理 1.1可知

$$
\begin{aligned}
E\left(X^n\right) &= \int_0^{\infty} t^n \mathrm{d}F(t) = \lim_{M\to\infty}\int_0^{M} t^n \mathrm{d}F(t) = -\lim_{M\to\infty}\int_0^{M} t^n \mathrm{d}s(t) \\
&= -\lim_{M\to\infty}\left(\left[t^n s(t)\right]\Big|_0^M - \int_0^M n t^{n-1} s(t)\mathrm{d}t\right) \\
&= \lim_{M\to\infty}\left[-M^n s(M)\right] + \lim_{M\to\infty}\int_0^M n t^{n-1} s(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\infty} n t^{n-1} s(t)\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

故 (1) 与 (2) 得证. 下证 (3), 由离散型随机变量函数期望的计算公式, 有

$$
\begin{aligned}
E(K(0)^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 P(K(0)=k) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 [P(X\geq k) - P(X\geq k+1)] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 s(k) - \sum_{k=0}^{\infty} k^2 s(k+1) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 s(k) - \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^2 s(k+1) + \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) s(k+1) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) s(k+1) = \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1) s(n).
\end{aligned}
$$

故 (3) 得证. 类似可证 (4). □

1.2 x 岁个体的生存分布

一. x 岁个体余命的分布、密度及生存函数

为了方便, 今后将一个 x 岁还活着的个体记为 (x). 个体 (x) 的余命记为 $T(x)$. 显然有

$$T(x) = X - x.$$

这里特别强调一下, $T(x)$ 的分布表示在已知事件 $\{X > x\}$ 发生的条件下, $X - x$ 的分布. 如果新生儿在 x 岁之前死了, 也就没有了所谓的个体 (x), 其余命也就无从谈起.

记 $F_{T(x)}(t)$ 为 $T(x)$ 的分布函数, 则

$$\begin{aligned} F_{T(x)}(t) &= P(T(x) \leq t | X > x) = P(X - x \leq t | X > x) \\ &= \frac{P(x < X \leq t + x)}{P(X > x)} = \frac{P(X > x) - P(X > x + t)}{P(X > x)} \\ &= 1 - \frac{s(x+t)}{s(x)}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

记 $f_{T(x)}(t)$ 为 $T(x)$ 的密度函数, 则

$$f_{T(x)}(t) = F'_{T(x)}(t) = -\frac{s'(x+t)}{s(x)} = \frac{f_X(x+t)}{s(x)}. \tag{1.6}$$

定义 1.3. 称 $s_{T(x)}(t) := P(T(x) > t)$ 为个体 (x) 的的生存函数.

由(1.5)可得

$$s_{T(x)}(t) = 1 - F_{T(x)}(t) = \frac{s(x+t)}{s(x)} \text{ 且 } s'_{T(x)}(t) = -f_{T(x)}(t). \tag{1.7}$$

二. x 岁个体的死亡力

为了解个体 (x) 在 $x+t$ 岁附近死去的 “快慢”, 考虑极限

$$\begin{aligned} &\lim_{\Delta t \to 0+} \frac{P(t < T(x) \leqslant t + \Delta t | T(x) > t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0+} \frac{P(t < T(x) \leqslant t + \Delta t)}{\Delta t P(T(x) > t)} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0+} \frac{s_{T(x)}(t) - s_{T(x)}(t + \Delta t)}{\Delta t} \frac{1}{s_{T(x)}(t)} = -\frac{s'_{T(x)}(t)}{s_{T(x)}(t)} \\ &= -\frac{\frac{s'(x+t)}{s(x)}}{\frac{s(x+t)}{s(x)}} = -\frac{s'(x+t)}{s(x+t)} = \mu(x+t). \end{aligned}$$

定义 1.4. 称 $\mu_x(t) = -\frac{s'_{T(x)}(t)}{s_{T(x)}(t)}$ 为 X 岁个体在 t 年后的死亡力函数.

命题 1.3. 我们有

(i) $s_{T(x)}(t) = 1 - F_{T(x)}(t) = \frac{s(x+t)}{s(x)}$;

(ii) $\mu_x(t) = \frac{f_{T(x)}(t)}{1 - F_{T(x)}(t)} = \frac{f_{T(x)}(t)}{s_{T(x)}(t)} = -\frac{s'_{T(x)}(t)}{s_{T(x)}(t)}$.

(iii) $f_{T(x)}(t) = s_{T(x)}(t)\mu_x(t)$;

(iv) $\mu_x(t) = \mu(x+t)$;

(v) $s_{T(x)}(t) = e^{-\int_0^t \mu_x(s)ds} = e^{-\int_0^t \mu(x+s)ds} = e^{-\int_x^{x+t} \mu(s)ds}$.

证明. 利用(1.5), (1.6) 和 (1.7), 很容易证明 (i), (ii), (iii). 下证 (iv). 由 (ii), (1.6) 及(1.7) 可得,

$$\mu_x(t) = \frac{f_{T(x)}(t)}{s_{T(x)}(t)} = \frac{f_X(x+t)/s(x)}{s(x+t)/s(x)} = \frac{f_X(x+t)}{s(x+t)} = \mu(x+t).$$

其中, 为了得到最后一个等号, 我们用了命题 1.1 中的第一条. (iv) 得证.

最后证明 (v). 注意到 $s_{T(x)}(0) = P(T(x) > 0) = 1$ 且由第 (ii) 条有

$$\mu_x(t) = -\frac{s'_{T(x)}(t)}{s_{T(x)}(t)} = -[\ln s_{T(x)}(t)]'.$$

故 $\ln s_{T(x)}(t) = -\int_0^t \mu_x(s)ds$. 从而 $s_{T(x)}(t) = e^{-\int_0^t \mu_x(s)ds}$. 又因为 $\mu_x(t) = \mu(x+t)$, 故

$$s_{T(x)}(t) = e^{-\int_0^t \mu_x(s)ds} = e^{-\int_0^t \mu(x+s)ds} = e^{-\int_x^{x+t} \mu(s)ds},$$

其中, 为得到最后一个等号, 我们用定积分的换元法即可. □

注 1.3. 理论上, 一个人一旦出生, 其死亡力就 “注定” 了. 如果他在 x 岁还活着, 在 t 年后他变为 $x+t$ 岁, 此时他的死亡力是 $\mu_x(t)$. 换一种观点, 如果站在 0 时刻 (他出生时) 看, 他在 $x+t$ 岁的死亡力应为 $\mu(x+t)$. 故有

$$\mu_x(t) = \mu(x+t).$$

例 1.2. 设新生儿的寿命服从以 $\lambda > 0$ 为参数的指数分布. 则 $s(t) = e^{-\lambda t}, t > 0$. 从而有

$$\begin{aligned}
&F_{T(x)}(t) = 1 - \frac{s(x+t)}{s(x)} = 1 - \frac{e^{-\lambda(x+t)}}{e^{-\lambda x}} = 1 - e^{-\lambda t} = F_X(t);\\
&f_{T(x)}(t) = F'_{T(x)}(t) = F'_X(t) = f_X(t);\\
&\mu_x(t) = \mu(x+t) \equiv \lambda.
\end{aligned}$$

以上计算再次表明, 在指数分布寿命假设下, 新生儿的的寿命 X 与 x 岁的个体的余命 $T(x)$ 的分布相同. 进一步说明指数分布作为寿命分布是有缺陷的.

命题 1.4. $\forall u,t>0$, 有

$$P(T(x)>t+u|T(x)>t)=P(T(x+t)>u). \tag{1.8}$$

该式的含义为: 一个 x 岁的人, 在 $x+t$ 岁还活着的条件下, 再活 u 年不死的概率与一个 $x+t$ 岁的人再 u 年内未死的概率相等.

证明. 对 $u,t>0$, 由条件概率定义知

$$\begin{aligned}P(T(x)>t+u|T(x)>t)&=\frac{P(T(x)>t+u)}{P(T(x)>t)}=\frac{P((X-x)>t+u)}{P((X-x)>t)}\\&=\frac{P(X-(x+t)>u)}{P(X>x+t)}=P(X-(x+t)>u|X>x+t)\\&=P(T(x+t)>u)=\frac{P(T(x)>t+u)}{P(T(x)>t)}.\end{aligned}$$

命题证毕. □

注 1.4. 由(1.8)式立即可得

$$P(T(x)\le t+u|T(x)>t)=P(T(x+t)\le u). \tag{1.9}$$

例 1.3. 设新生儿的寿命服从指数分布, 参数为 λ, 则 $\mu(t)\equiv\lambda$,

$$\begin{aligned}&s(t)=e^{-\lambda t}, t>0.\\&F_{T(x)}=1-\frac{s(x+t)}{s(x)}=1-e^{-\lambda t}=F_x(t).\\&f_{T(x)}(t)=F_{T(x)}(t)=\lambda e^{-\lambda t}=f_x(t), t>0.\\&s_{T(x)}(t)=\frac{s(x+t)}{s(x)}=e^{-\lambda t}=s(t), t>0.\\&\mu_x(t)=\mu(x+t)\equiv\mu, t>0.\\&e_x=\sum_{k=1}^{\infty}{}_kp_x=\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\lambda t}=\frac{e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}}.\\&\mathring{e}_x=\int_0^{\infty}{}_tp_x dt=\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}dt=\frac{1}{\lambda}.\end{aligned}$$

显而易见, 这里的 $\mathring{e}_x$ 和 e_x 与 x 无关, 也就是说, 所有人的剩余寿命的期望都是一样的, 和他现在的年龄无关. 这进一步说明指数分布作为寿命分布是有缺陷的. 此外, 因 $\mathring{e}_x=ET(x)=\frac{1}{\lambda}$, 故指数分布的参数 λ 正好是期望寿命的倒数.

三. 一些精算学表示法

注意到 $S_{T(x)}(t)=P(T(x)>t)$ 表示个体 (x) 在 t 年后还活着的概率; 而 $F_{T(x)}(t)=P(T(x)\le t)$ 表示个体 (x) 在 t 年内死去的概率. 这些记号都很复杂, 书写比较困难. 故精算学中需引入一些简单的记号.

定义如下几个记号:

$\mathring{1}$. 用 ${}_tp_x \overset{\text{def}}{=} P(T(x)>t)=S_{T(x)}(t)$ 表示个体 (x) 在 t 年后还活着的概率. 显然有

$$ {}_tP_x=S_{T(x)}(t)=\mathrm{e}^{-\int_0^t \mu_x(s)\mathrm{d}s}=\mathrm{e}^{-\int_0^t \mu(x+s)\mathrm{d}s}=\mathrm{e}^{-\int_x^{x+t} \mu(s)\mathrm{d}s}. $$

$\mathring{2}$. 用 ${}_tq_x \overset{\text{def}}{=} P(T(x\le t)=F_{T(x)}(t))$ 表示一个 x 岁的人在 t 年内死亡的概率. 易知

$$ {}_tp_x+{}_tq_x=1. $$

$\mathring{3}$. 用 ${}_{u|t}q_x=P(u<T(x)\le u+t)$ 表示一个 x 岁的人在 $x+u$ 岁还活着, 但在未来 t 年内死亡的概率.

命题 1.5. 如下几个结论成立:

(i) $\frac{d({}_tp_x)}{dt}=-{}_tp_x\mu_x(t)$;

(ii) $\frac{d({}_tp_x)}{dx}={}_tp_x(\mu(x)-\mu(x+t))$.

证明. (i) 注意到 ${}_tp_x=\mathrm{e}^{-\int_0^t\mu_x(s)ds}$. 故

$$ \frac{d({}_tp_x)}{dt}=\frac{d(\mathrm{e}^{-\int_0^t\mu_x(s)ds})}{dt}=\mathrm{e}^{-\int_0^t\mu_x(s)ds}(-\int_0^t\mu_x(s)ds)'_t=-{}_tp_x\mu_x(t). $$

(ii) 利用等式 ${}_tp_x=e^{-\int_x^{x+t}\mu_x(s)ds}$, 有

$$ \frac{d({}_tp_x)}{dx}=(e^{-\int_x^{x+t}\mu_x(s)ds})'=e^{-\int_x^{x+t}\mu(s)ds}(-\int_x^{x+t}\mu(s)ds)'_x={}_tp_x(\mu(x)-\mu(x+t)). $$

命题证毕. □

命题 1.6. 以下结论成立:

(1) $f_{T(x)}(t)={}_tp_x\cdot\mu_x(t)$;

(2) ${}_tp_x={}_sp_x\cdot{}_{t-s}p_{x+s}, 0\le s\le t$;

(3) ${}_{u|t}q_x={}_up_x-{}_{u+t}p_x, u,t>0$;

(4) ${}_{u|t}q_x={}_up_x\ {}_tq_{x+u}, u,t\ge 0$.

证明. (1) 是显然的, 不需证明. (2) 固定 $0 \le s \le t$, 则由条件概率性质可知

$$\begin{aligned}
{}_tp_x &= P(T(x) > t) = P(T(x) > s)P(T(x) > t|T(x) > s) \\
&= {}_sp_x P(T(x) > t + s - s|T(x) > s) \\
&= {}_sp_x P(T(x+s) > t - s) \\
&= {}_sp_x \cdot {}_{t-s}p_{x+s}.
\end{aligned}$$

(3) 对 $t, u \ge 0$, 简单计算可知

$$\begin{aligned}
{}_{u|t}q_x &= P(u < T(x) \le u + t) \\
&= P(T(x) > u) - P(T(x) > u + t) = {}_up_x - {}_{u+t}p_x.
\end{aligned}$$

(4) 固定 $t, u \ge 0$, 利用(1.11)得

$$\begin{aligned}
{}_{u|t}q_x &= P(u < T(x) \le u + t) = P(T(x) > u)P(T(x) \le u + t|T(x) > u) \\
&= {}_up_x P(T(x+u) < t) = {}_up_x\ {}_tq_{x+u}.
\end{aligned}$$

命题证毕. □

四. 个体 (x) 的整数与分数余命

类似处理新生儿的寿命一样, 可将个体 (x) 的余命 $T(x)$ 分为整数部分和小数部分. 设

$$T(x) = K(x) + S(x)$$

其中 $K(x)$ 是 $T(x)$ 的整数部分, $S(x)$ 是 $T(x)$ 的小数部分. 记

$$\mathring{e}_x \overset{\text{def}}{=} E(T(x)),\ e_x \overset{\text{def}}{=} E(K(x))$$

则简单计算可知

$$\begin{aligned}
\mathring{e}_x &= E(T(x)) = \int_0^\infty P(T(x) > t)dt = \int_0^\infty {}_tp_x dt; \\
e_x &= E(K(x)) = \sum_{k=0}^\infty kP(K(x) = k) \\
&= \sum_{k=0}^\infty k[P(T(x) \ge k) - P(T(x) \ge k + 1)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^{\infty} k_k p_x - \sum_{k=0}^{\infty} k_{k+1} p_x = \sum_{k=0}^{\infty} {}_{k+1}p_x \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} {}_k p_x. \end{aligned}$$

1.3 随机生存群

一. 模型描述

设 0 时刻系统中有 l_0 个新生儿, 他们的寿命独立同分布, 服从某分布, 生存函数为 $s(t), t \geq 0$. 记

$\mathscr{L}(x)$ 为在 x 岁还活着的总人数;

${}_t\mathscr{D}_x$ 为 $[x, x+t]$ 内死去的总人数.

设系统中初始时刻的 l_0 个人的寿命分别为 $X_1, X_2, \ , X_n$, 则他们独立同分布, 且

$$P(X_i > t) = s(t), i = 1, ..., n.$$

显然有

$$\mathscr{L}(x) = \sum_{i=1}^{l_0} I_{\{X_i \geqslant x\}}, \ {}_t\mathscr{D}_x = \sum_{i=1}^{l_0} I_{\{x \leqslant X_i < x+t\}}$$

其中 $I_A = \begin{cases} 1, & \omega \in A, \\ 0, & \omega \in A^c \end{cases}$ 为示性函数.

令

$$l_x \overset{def}{=} E\left(\mathscr{L}(x)\right), \text{ 它表示在}x\text{岁还活着的期望人数;}$$
$${}_td_x \overset{def}{=} E\left({}_t\mathscr{D}_x\right), \text{ 它表示在}[x, x+t)\text{内死去人数的期望.}$$

二. 几个结论

命题 1.7. 如下结论成立:

$$l_x = l_0 s(x), \ {}_td_x = l_x - l_{x+t}.$$

证明. 注意到 $E(1_A) = P(A)$, 所以

$$
\begin{aligned}
l_x &= E(\mathscr{L}(x)) = E(\sum_{k=1}^{l_0} I_{\{X_k>x\}}) \\
&= \sum_{k=1}^{l_0} E(I_{\{X_k>x\}}) = \sum_{k=1}^{l_0} P(X_k > x) = \sum_{k=1}^{l_0} P(X_1 > x) \\
&= l_0 P(X_1 > x) = l_0 s(x); \\
{}_t d_x &= E({}_t\mathscr{D}_t) = E(\sum_{k=1}^{l_0} I_{\{x<X_k\le x+t\}}) \\
&= \sum_{k=1}^{l_0} E(I_{\{x<X_k\le x+t\}}) = \sum_{k=1}^{l_0} P(x < X_k \le x+t) \\
&= l_0 P(x < X_1 \le x+t) = l_0[P(X_1 > x) - P(X_1 > x+t)] \\
&= l_0 s(x) - l_0 s(x+t) = l_x - l_{x+t}.
\end{aligned}
$$

引入 l_x 及 ${}_t d_x$ 的目的是为了计算生存概率 ${}_t p_x$ 与死亡概率 ${}_t q_x$.

命题 1.8. 如下结论成立:

(i) ${}_t p_x = \frac{l_{x+t}}{l_x}$, ${}_t q_x = \frac{{}_t d_x}{l_x}$, $l_{x+t} = l_x e^{-\int_x^{x+t}\mu(s)ds}$

(ii) $\frac{dl_x}{dx} = -l_x\mu(x)$, ${}_n d_x = \int_x^{x+n} l_y\mu(y)dy$.

证明. 我们先证 (i). 由 $l_x = l_0 s(x)$ 知 $s(x) = \frac{l_x}{l_0}$, 所以

$$
{}_t p_x = s_{T(x)}(t) = \frac{s(x+t)}{s(x)} = \frac{l_{x+t}/l_0}{l_x/l_0} = \frac{l_{x+t}}{l_x}.
$$

由此可推出

$$
\begin{aligned}
l_{x+t} &= l_x \cdot {}_t p_x = l_x e^{-\int_x^{x+t}\mu(s)ds}; \\
{}_t q_x &= 1 -_t p_x = 1 - \frac{l_{x+t}}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+t}}{l_x} = \frac{{}_t d_x}{l_x}.
\end{aligned}
$$

下证 (ii). 由 (i) 知,

$$
\frac{dl_x}{dx} = l_0 e^{-\int_0^x \mu(t)dt}(-\mu(x)) = l_0 s(x)(-\mu(x)) = -l_x\mu(x).
$$

由此可导出

$$
{}_n d_x = l_x - l_{x+n} = -\int_x^{x+n} \frac{d(l_y)}{dy} dy = \int_x^{x+n} l_y \mu(y) dy.
$$

命题证毕. □

补充:

$$ {}_td_x = \int_x^{x+t} l_y u(y)dy. $$

等式含义: 左端表示在 $[x, x+h]$ 内死去的人数, $u(y)dy = -\dfrac{s'(y)}{s(y)}dy = -\dfrac{d(s(y))}{s(y)} = \dfrac{s(y) - s(y+\Delta y)}{s(y)}$. 所以 $u(y)dy$ 表示一个人在 y 岁还活着的条件下, 在 $[y, y+dy]$ 内死去的概率, 于是 $l_y u(y)dy$ 表示在 $[y, y+dy]$ 内死去的人数. 对 y 积分 (求和) 可知 $\int_x^{x+t} l_y u(y)dy$ 表示在 $[x, x+t]$ 内死去的人数.

所以右端 = 左端.

1.4 生命表的元素

补充知识:

(i) 在精算学中, 若左下标是 1, 通常将其省略, 例如

$$ p_x \triangleq {}_1p_x, q_x \triangleq {}_1q_x, $$

$$ L_x \triangleq {}_1L_x, {}_{u|}q_x \triangleq {}_{u|1}q_x. $$

(ii) $a \wedge b = \min\{a, b\},\ a \vee b = \max\{a, b\},\ EX = \int_0^\infty xf(x)dx, X \geq 0.$

下面用两种方法计算 $E(X \wedge t)$.

法一:

$$
\begin{aligned}
E(X \wedge t) &= \int_0^\infty (x \wedge t) f(x)dx \\
&= \int_0^t (x \wedge t) f(x)dx + \int_t^\infty (x \wedge t) f(x)dx \\
&= \int_0^t xf(x)dx + \int_t^\infty tf(x)dx \\
&= \int_0^t xf(x)dx + tP(X > t).
\end{aligned}
$$

□

法二:

$$\begin{aligned}
E(X\wedge t) &= E[(X\wedge t)I] \\
&= E((X\wedge t)[I_{x<t}+I_{x\geq t}]) \\
&= E((X\wedge t)I_{x<t})+E((X\wedge t)I_{x\geq t}) \\
&= E(XI_{x<t})+E(tI_{x\geq t}) \\
&= \int_0^\infty xI_{x<t}f(x)dx+tE(I_{x\geq t}) \\
&= \int_0^t xf(x)dx+tP(X\geq t).
\end{aligned}$$

□

(iii) 条件数学期望. 设 A 是一个随机事件, X 为一个随机变量, 给定事件 A 的条件下, X 的条件期望定义为

$$E(X|A)\overset{def}{=}\frac{E(XI_A)}{EI_A}=\frac{E(XI_A)}{P(A)}.$$

一. ${}_tL_x$: 所有人在 $[x,x+t)$ 内活过的总时间

一个体 (x) 在 $[x,x+t)$ 内活过的总时间为 $T(x)\wedge t$, 这是因为

若 $T(x)<t$, 则 (x) 在 $[x,x+t)$ 内活过的时间 $T(x)$.

若 $T(x)\geq t$, 则 (x) 在 $[x,x+t)$ 内活过的时间 t.

又因为在 x 还活着的人有 l_x 个, 故所有人在 $[x,x+t)$ 内活的总时间为 $l_x(T(x)\wedge t)$, 记其期望为

$${}_tL_x=l_xE(T(x)\wedge t).$$

命题 1.9. 如下结论成立:

$$\begin{aligned}
{}_tL_x &= l_xE(T(x)\wedge t) \\
&= \int_0^t sl_{x+s}u(x+s)ds+tl_{x+t} \\
&= \int_0^t l_{x+s}ds
\end{aligned}$$

证明. 第一个等式是定义. 现证第二个等式. 注意到

$$\begin{aligned}
{}_tL_x &= l_x E(T(x)\wedge t)\\
&= l_x \int_0^\infty (s\wedge t)\,{}_sp_x\mu_x(s)ds\\
&= \int_0^\infty (s\wedge t) l_{x+s}\mu(x+s)ds\\
&= \int_0^t s l_{x+s}\mu(x+s)ds + \int_t^\infty t l_{x+s}\mu(x+s)ds\\
&= \int_0^t s l_{x+s}\mu(x+s)ds + t l_{x+t}\int_t^\infty \frac{l_{x+s}}{l_{x+t}}\mu(x+s)ds
\end{aligned}$$

其中,

$$\begin{aligned}
\int_t^\infty \frac{l_{x+s}}{l_{x+t}}\mu(x+s)ds &= \int_0^\infty \frac{l_{x+t+u}}{l_{x+t}}\mu(x+t+u)du\\
&= \int_0^\infty {}_up_{x+t}\mu_{x+t}(u)du\\
&= \int_0^\infty f_{T(x+t)}(u)du\\
&= 1.
\end{aligned}$$

于是, ${}_tL_x = \int_0^t s l_{x+s}\mu(x+s)ds + t l_{x+t}$. 故第二个等式成立.

下证第三个等式. 注意到

$$dl_y = -l_y\mu(y)dy$$

$$\Rightarrow dl_{x+s} = -l_{x+s}\mu(x+s)ds$$

$$\Rightarrow \int_0^t s\,dl_{x+s} = -\int_0^t s l_{x+s}\mu(x+s)ds.$$

由此可知

$$s l_{x+s}|_0^t - \int_0^t l_{x+s}ds = -\int_0^t s l_{x+s}\mu(x+s)ds.$$

所以

$$\int_0^t s l_{x+s}\mu(x+s)ds + t l_{x+t} = \int_0^t l_{x+s}ds.$$

第三个等式得证. □

表达式 $\int_0^t sl_{x+s}\mu(x+s)ds+tl_{x+t}$ 的含义如下:
一方面, 在 $x+s$ 岁活着的人有 l_{x+s} 个, 每个人在 $[x+s,x+s+ds]$ 内死去的概率为 $\mu(x+s)ds$, 所以, 在 $[x+s,x+s+ds]$ 内死去的人数为 $l_{x+s}\mu(x+s)ds$, 他们每个人在 $[x,x+t]$ 内活 s 年, 所以在 $x+s$ 岁死去的人在 $[x,x+t]$ 内活的总时间为 $sl_{x+s}\mu(x+s)ds$, 再对 s 在 $(0,t)$ 求积分 (求和) 可知, $\int_0^t sl_{x+s}\mu(x+s)ds+tl_{x+t}$ 表示在 $[x,x+t]$ 内死去的人在这段时间内活过的总时间. 另一方面在 $x+t$ 岁还活着的人有 l_{x+t}, 每个人在 $[x,x+t)$ 内活了 t 岁, 他们在 $[x,x+t)$ 内总共活了 tl_{x+t} 岁.

综合以上分析, $\int_0^t sl_{x+s}\mu(x+s)ds+tl_{x+t}$ 表示所有人在 $[x,x+t]$ 内活过的总时间, 这是一个复杂的公式, 但它有一个简单的表达 $\int_0^t l_{x+s}ds$.

二. $a(x)$: 一个 x 岁的人在 1 年内死去的条件下, 在 $[x,x+t)$ 内活过的期望时间

个体 (x) 的余命为 $T(x)$, 所以

$$a(x)=E(T(x)|T(x)\le 1).$$

命题 1.10. 以下等式成立:

$$a(x)=\frac{\int_0^1 t\,{}_tp_x u_x(t)dt}{q_x}.$$

证明. 利用条件数学期望的定义得

$$\begin{aligned}a(x)&=E(T(x)|T(x)\le 1)\\&=\frac{E(T(x)I_{\{T(x)\le 1\}})}{P(T(x)\le 1)}\\&=\frac{\int_0^\infty tI_{\{T(x)\le 1\}}f_{T(x)}(t)dt}{q_x}\\&=\frac{\int_0^\infty tI_{\{T(x)\le 1\}}\,{}_tp_x\mu_x(t)dt}{q_x}\\&=\frac{\int_0^1 t\,{}_tp_x\mu_x(t)dt}{q_x}.\end{aligned}$$

命题证毕. □

利用 $a(x)$ 可以给出 L_x 的另一个表达式.

命题 1.11. 如下等式成立:

$$L_x=d_xa(x)+l_{x+1}.$$

证明. 由 L_x 的定义可知

$$\begin{aligned}
L_x &= l_x E(T(x)\wedge 1)\\
&= l_x E(T(x)\wedge 1) I_{\{T(x)<1\}}) + l_x E(T(x)\wedge 1) I_{\{T(x)\geq 1\}})\\
&= l_x E(T(x) * I_{\{T(x)<1\}}) + l_x E(1 * I_{\{T(x)\geq 1\}})\\
&= l_x P(T(x)<1) E(T(x)|T(x)<1) + l_x P(T(x)\geq 1)\\
&= l_x q_x a(x) + l_x p_x\\
&= d_x a(x) + l_{x+1}.
\end{aligned}$$

证毕. □

表达式 $L_x = d_x a(x) + l_{x+1}$ 的含义如下:
右端的 $d_x a(x)$ 表示 $[x, x+1)$ 内死去的人在 $[x, x+1)$ 内活过的总时间. 右端的 $l_{x+1} * 1$ 表示在 $x+1$ 岁活着的 l_{x+1} 人在 $[x, x+1)$ 内活过的总时间, 所以右端表示所有人在 $[x, x+1)$ 活过的总时间, 等于左端的 L_x.

三. $_nm_x = \frac{_nq_x}{\int_0^n {_tp_x} dt}$(中心死亡率)

命题 1.12. 如下结论成立:

$$_nm_x = \frac{_nd_x}{_nL_x}.$$

证明. 简单计算可得

$$_nm_x = \frac{_nq_x}{\int_0^n {_tp_x} dt} = \frac{_nd_x / l_x}{\int_0^n \frac{l_{x+t}}{l_x} dt} = \frac{_nd_x}{_nL_x}.$$

命题证毕. □

四. $T_x \triangleq \int_0^\infty l_{x+s} ds = {_\infty L_x}$

显而易见, 表示所有人在 $[x, \infty)$ 内活过的总时间.

五. $Y_x \triangleq \int_0^\infty T_{x+s} ds$

生命表中包含 $q_x, l_x, d_x, L_x, T_x, \mathring{e}_0$ 等元素. 总的来说, 利用生命表可以计算出生存概率 $_kp_x$, 死亡概率 $_kq_x$、 $_{k|j}q_x$ 等.

1.5 分数年龄上的死亡假设

一. 为什么引入分数年龄死亡力假设?

${}_kP_x=\frac{l_{x+k}}{l_x}$, 若 k 为整数, 可查生命表计算 ${}_kP_x$, 例如: ${}_2P_{20}=\frac{l_{22}}{l_{20}}$.

但如果 k 不是整数, 例如: ${}_{2.5}P_{20}=\frac{l_{22.5}}{20}$, 求 $l_{22.5}$ 的值. 发现无法查表得出. 则可以令 $T(x)=K(x)+S(x)$, 其中 K(x) 是整数部分, S(x) 是分数部分.

关于 S(x) 服从的分布可以满足以下两个假设:

(i) 死亡力均匀分布假设 $S(x)\sim U(0,1)$

(ii) 常数死亡力假设.

二. 死亡力均匀分布假设 (UDD 假设)

(i) 定义: 若 x 为非负整数, $s(t)$ 是生存函数, 若 $\forall t\in[0,1)$, 都有:

$$s(x+t)=(1-t)s(x)+ts(x+1). \tag{1.10}$$

称在 $[x,x+1)$ 上, 死亡力均匀分布假设成立.

(ii) 设 $[x,x+1)$ 上 UDD 假设成立, 则有以下结论:

$\mathring{1}$. $l_{x+t}=(1-t)l_x+tl_{x+1},t\in[0,1)$.

证明.

$$\begin{aligned}l_{x+t}&=l_0s(x+t)\\&=l_0(1-t)s(x)+l_0ts(x+1)\\&=(1-t)l_x+tl_{x+1}.\end{aligned}$$

证毕. □

$\mathring{2}$. ${}_td_x=td_x,t\in[0,1)$.

证明.

$$\begin{aligned}{}_td_x&=l_x-l_{x+t}\\&=l_x-(1-t)l_x-tl_{x+t}\\&=t(l_x-l_{x+1})=td_x.\end{aligned}$$

证毕. □

$\mathring{3}$. ${}_tq_x = tq_x, t \in [0,1)$.

证明.

$$ {}_tq_x = \frac{{}_td_x}{l_x} = \frac{td_x}{l_x} = tq_x. $$

证毕. □

$\mathring{4}$. $f_{T(x)}(t) = q_x, t \in [0,1)$.

该结论可以反映均匀分布.

证明.

$$ f_{t(x)}(t) = \frac{d({}_tq_x)}{dt} = \frac{d(tq_x)}{dt} = q_x. $$

证毕. □

$\mathring{5}$. $\mu_x(t) = \frac{q_x}{1-tq_x}$

证明.

$$ \mu_x(t) = \frac{f_{t(x)(t)}}{S_{T(x)}(t)} = \frac{q_x}{{}_tp_x} = \frac{q_x}{1 -_t q_x} = \frac{q_x}{1-tq_x}. $$

证毕. □

(iii)

命题 1.13. 已知在每一年龄年上 UDD 假设成立, 则 $K(x)$ 与 $S(x)$ 相互独立, 且 $S(x)$ 服从 $[0,1]$ 上的均匀分布.

证明. 考虑条件概率 $P(S(x) \le t \mid K(x) = k)$, 有

$$ \begin{aligned} P(S(x) \le t \mid K(x) = k) &= \frac{P(S(x) \le t, K(x) = k)}{P(K(x) = k)} \\ &= \frac{{}_{k|t}q_x}{{}_{k|}q_x} = \frac{{}_kp_x\ {}_tq_{x+k}}{{}_kq_x\ q_{x+k}} = \frac{{}_tq_{x+k}}{q_{x+k}} = t. \end{aligned} $$

因此, $K(x)$ 与 $S(x)$ 相互独立, 且 $S(x)$ 服从 $[0,1]$ 上的均匀分布.

证毕. □

(iv)

命题 1.14. 在每一年龄年 UDD 假设成立时, 有

$$\mathring{e}_x = e_x + \frac{1}{2}$$

$$\mathrm{Var}(T) = \mathrm{Var}(K) + \frac{1}{12}$$

证明. 根据命题 1.13 的结果, 知 $K(x)$ 与 $S(x)$ 相互独立, 且 $S(x)$ 服从 $[0,1]$ 上的均匀分布, 因此有

$$\begin{aligned}\mathring{e}_x &= E(K(x)+S(x)) \\ &= E(K(x)) + E(S(x)) \\ &= e_x + \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(T(x)) &= \mathrm{Var}(K(x)+S(x)) \\ &= \mathrm{Var}(K(x)) + \mathrm{Var}(S(x)) \\ &= \mathrm{Var}(K(x)) + \frac{1}{12}.\end{aligned}$$

证毕. □

三. 常数死亡力假设

(i) 定义: 设 x 为整数, 若 $\forall t \in [0,1)$, 有

$$\ln s(x+t) = (1-t)\ln s(x) + t\ln s(x+1). \tag{1.11}$$

则称生存函数在年龄段 $[x, x+1)$ 满足**常数死亡力假设**.

(ii)

命题 1.15. 设在年龄段 $[x, x+1)$ 常数死亡力假设成立, 则对 $t \in (0,1)$, 有

1̊. 期望生存人数满足

$$\ln l_{x+t} = (1-t)\ln l_x + t\ln l_{x+1};$$

证明. 因 $l_x = l_0 s(x)$, 所以由公式 (1.11), 知

$$\ln\frac{l_{x+t}}{l_0} = (1-t)\ln\frac{l_x}{l_0} + t\ln\frac{l_{x+1}}{l_0}.$$

所以 $\ln l_{x+t} = (1-t)\ln l_x + t\ln l_{x+1}$, 证毕. □

$\mathring{2}$. 死亡力为常数, 即

$$\mu_x(t) = -\ln p_x \triangleq \mu;$$

证明. 对公式 (1.11) 取指数

$$\begin{aligned}
&s(x+t) = s(x)^{1-t} s(x+1)^t \\
\Longleftrightarrow & {}_{x+t}p_0 = {}_xp_0^{1-t}\,{}_{x+1}p_0^t \\
\Longleftrightarrow & {}_xp_0\,{}_tp_x = {}_xp_0\ p_x^t \\
\Longleftrightarrow & {}_tp_x = p_x^t \\
\Longleftrightarrow & e^{-\int_0^t \mu_x(s)ds} = e^{-\int_0^t -\ln p_x ds}
\end{aligned}$$

可证 $\mu_x(t) = -\ln p_x$. □

$\mathring{3}$.

$$l_{x+t} = l_x e^{-\mu t},\ {}_tq_x = 1 - p_x^t,\ f_{T(x)}(t) = -p_x^t \ln p_x.$$

证明.

$$\begin{aligned}
&l_{x+t} = l_x e^{-\int_x^{x+t}\mu(s)ds} = l_x e^{-\mu t}; \\
&{}_tq_x = 1 - {}_tp_x = 1 - p_x^t = 1 - e^{t\ln p_x} = 1 - e^{-\mu t}; \\
&f_{T(x)}(t) = {}_tp_x \mu_x(t) = p_x^t \mu = \mu e^{-\mu t}.
\end{aligned}$$

. □

例 1.4. 设 $S(x) = 1 - \frac{x}{12},\ 0 \le x \le 12$, l_0 个个体相互独立, 生存函数都是 $S(x)$. 问:

(1) 求 $({}_3\mathscr{D}_0,\ {}_3\mathscr{D}_3,\ {}_3\mathscr{D}_6,\ {}_3\mathscr{D}_9)$ 的联合分布;

(2) 求这四个随机变量的期望和方差;

(3) 求它们两两之间的相关系数.

解. 易知 l_0 个人的寿命 $X_1, X_2, ..., X_{l_0} \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} U[0,12]$. 且随机变量满足

$${}_3\mathscr{D}_0 = \sum_{k=1}^{l_0} I_{\{0 \le x_k \le 3\}}$$

$${}_3\mathscr{D}_3 = \sum_{k=1}^{l_0} I_{\{3 \le x_k \le 6\}}$$

$$
{}_3\mathscr{D}_6 = \sum_{k=1}^{l_0} I_{\{6\le x_k\le 9\}}
$$

$$
{}_3\mathscr{D}_9 = \sum_{k=1}^{l_0} I_{\{9\le x_k\le 12\}}
$$

(1) 令事件 $A=\{{}_3\mathscr{D}_0=k_1,\ {}_3\mathscr{D}_3=k_2,\ {}_3\mathscr{D}_6=k_3,\ {}_3\mathscr{D}_9=k_4\}$, 若事件 A 发生, 则认为在 l_0 中, 有 k_1 人在 $[0,3]$ 死亡; 有 k_2 人在 $[3,6]$ 死亡; 有 k_3 人在 $[6,9]$ 死亡; 有 k_4 人在 $[9,12]$ 死亡. 其中 $k_1+k_2+k_3+k_4=l_0$. 从 $k_1+k_2+k_3+k_4$ 个人中, 选出 k_1 个人在 $[0,3]$ 内死亡, 有 $C_{k_1+k_2+k_3+k_4}^{k_1}$ 种选法; 从 $k_2+k_3+k_4$ 个人中, 选出 k_2 个人在 $[3,6]$ 内死亡, 有 $C_{k_2+k_3+k_4}^{k_2}$ 种选法; 从 k_3+k_4 个人中, 选出 k_3 个人在 $[6,9]$ 内死亡, 有 $C_{k_3+k_4}^{k_3}$ 种选法... 以此推出:

$$
P(A)=\frac{(k_1+k_2+k_3+k_4)!}{k_1!k_2!k_3!k_4!}\cdot {}_3q_0^{k_1}\cdot {}_{3|3}q_0^{k_2}\cdot {}_{6|3}q_0^{k_3}\cdot {}_{9|3}q_0^{k_4}
$$

(2) 对于一个二项分布 $B(n,p)$, 其期望 $E[X]=np$, 方差 $\mathrm{Var}(X)=np(1-p)$.

因此, 对于每个随机变量 ${}_3\mathscr{D}_k$:

期望:

$$
E({}_3\mathscr{D}_k)=\frac{l_0}{4};
$$

方差:

$$
\mathrm{Var}({}_3\mathscr{D}_k)=l_0\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{3l_0}{16}.
$$

(3) 以 ${}_3\mathscr{D}_0$, ${}_3\mathscr{D}_3$ 的相关系数为例:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Cov}({}_3\mathscr{D}_0,\ {}_3\mathscr{D}_3) &= E({}_3\mathscr{D}_0\ {}_3\mathscr{D}_3)-E({}_3\mathscr{D}_0)E({}_3\mathscr{D}_3)\\
&= E(\sum_{k=1}^{l_0} I_{\{0\le x_k\le 3\}}\cdot\sum_{j=1}^{l_0} I_{\{3\le x_j\le 6\}})-(\frac{l_0}{4})^2\\
&= \sum_{k=1}^{l_0}\sum_{j\ne k} E(I_{\{0\le x_k\le 3\}}\cdot I_{\{3\le x_k\le 6\}})-(\frac{1}{4}l_0)^2\\
&= \frac{l_0(l_0-1)}{16}-\frac{l_0^2}{16}\\
&= -\frac{l_0}{16}.
\end{aligned}
$$

(对于 $\sum_{k=1}^{l_0}\sum_{j\neq k}E(I_{\{0\le x_k\le 3\}}\cdot I_{\{3\le x_k\le 6\}})=\frac{l_0(l_0-1)}{16}$ 的理解: 其中 $\sum_{k=1}^{l_0}\sum_{j\neq k}=l_0(l_0-1)$, 而 $p(I_{c\le x_k\le c+3})=\frac{1}{4}$, 故 $I_{0\le x_k\le 3}$ 与 $I_{3\le x_k\le 6}$ 同时取 1 的概率为 $\frac{1}{16}$.)

求出协方差即可求相关系数:

$$\begin{aligned}\rho({}_3\mathscr{D}_0,\ {}_3\mathscr{D}_3)&=\frac{\mathrm{Cov}({}_3\mathscr{D}_0,\ {}_3\mathscr{D}_3)}{\sqrt{D({}_3\mathscr{D}_0)}\cdot\sqrt{D({}_3\mathscr{D}_3)}}\\&=\frac{-\frac{l_0}{16}}{\sqrt{\frac{3}{16}l_0\cdot\frac{3}{16}l_0}}\\&=-\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

可以推出两两之间所有相关系数皆为 $-\frac{1}{3}$. □

1.6 作业

作业 1.1. 设某人现年 20 岁, 假设他的余命 $T(20)$ 服从 $[0,60]$ 上的均分分布, 求 $F_{T(20)}(t)$, $f_{T(20)}(t)$, $\mu_{20}(t)$, $s_{T(20)}(t)$.

作业 1.2. 设 $\mu(t)=\frac{1}{(t+e)(\ln(t+e))^a},t\ge 0$. 讨论 a 取何值时, $\mu(t)$ 可作为死亡力函数, 并求出 $s_{T(x)}(t)$, $f_{T(x)}(t)$.

作业 1.3. 假设新生儿的寿命为 X, 死亡力为 $\mu(t)=\frac{a}{(t+1)},t\ge 0,a>0$. 讨论 a 何值时, $D(X)$ 存在并求出 $D(X)$.

作业 1.4. 证明: $\frac{d}{dx}\mathring{e}_x=\mathring{e}_x\mu(x)-1$.

作业 1.5. 设系统中有 l_0 个新生儿, 它们的寿命独立同分布, 生存函数为

$$s(t)=1-\frac{t}{16},0\le t\le 16.$$

证明

$$({}_4\mathscr{D}_0,{}_4\mathscr{D}_4,{}_4\mathscr{D}_8,{}_4\mathscr{D}_{12})$$

服从多项分布, 并计算 (1) 每个随机变量的期望; (2) 每个随机变量的方差; (3) 每两个随机变量的相关系数; (4) 对你计算所得的结果进行简要分析.

作业 1.6. 你现在多少岁? 请根据 303 页的附表 2.1(男生用)、307 页附表 2.2(女生用) 计算你 80 岁还活着的概率.

作业 1.7. i 为复利率, $v=\frac{1}{1+i}$ 为贴现因子, $\delta=\ln(1+i)$ 为利息力.

(1) 设 $\mu_x(t)\equiv\mu=0.05, \delta\equiv 0.04$, 求: $E(v^{T(x)}); D(v^{T(x)}); E(\int_0^{T(x)} v^t dt); D(\int_0^{T(x)} v^t dt)$;

(2) 设 UDD 成立, 求证: $E(v^{T(x)})=\frac{i}{\delta}E(v^{K(x)+1})$.

第二章　人寿保险

2.1　人寿保险概述

一. 人寿保险关心的问题

1. 支付条件, 支付的时刻 (保险金).
2. 支付保险金的现值 Z 是多少?
3. 保险金的精算现值 EZ.
4. 风险度量 DZ.
5. 精算现值 EZ, DZ 的性质.

二. 人寿保险的分类

$$\text{人寿保险}\begin{cases}\text{生存保险}\\ \text{生死合险}\\ \text{死亡保险}\begin{cases}\text{定期死亡保险}\\ \text{终身死亡保险}\\ \text{延期死亡保险}\begin{cases}\text{延期定期死亡保险}\\ \text{延期终身死亡保险}\end{cases}\end{cases}\end{cases}$$

2.2　生存保险

一. 支付方式与支付条件

若被保险人在 n 年内死亡 (即 $T(x) < n$), 则不予任何支付; 若他在 n 年内未死 (即 $T(x) \geqslant n$), 则在 n 时刻支付他 1 元保险金.

二. 支付现值 Z

若 $T(x) < n$, 则 $Z = 0$; 若 $T(x) \geqslant n$, 则 $Z = 1 \cdot v^n = v^n$, 其中贴现因子 $v = \frac{1}{i+1}$

即 $Z = v^n I_{\{T(x) \geqslant n\}} = \begin{cases} v^n, if\ T(x) \geqslant n \\ 0, if\ T(x) < n \end{cases}$

三. 精算现值 EZ

$$E(Z) = E\left(v^n I_{\{T(x) \geqslant n\}}\right) = v^n E\left(I_{\{T(x) \geqslant n\}}\right) = v^n P(T(x) \geqslant n) = v^n \cdot {}_n p_x \tag{2.1}$$

n 年期生存保险的精算现值记为 $A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}}$ 或 ${}_nE_x$

所以 $A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}} \equiv {}_nE_x = v^n \cdot {}_n p_x$

四. 二阶矩

$$E\left(Z^2\right) = E\left(\left[v^n I_{\{T(x) \geqslant n\}}\right]^2\right) = E\left(v^{2n} I_{\{T(x) \geqslant n\}}\right) = v^{2n} \cdot {}_n p_x$$
$$DZ = EZ^2 - (EZ)^2 = v^{2n} \cdot {}_n p_x \cdot {}_n q_x$$

命题 2.1. $\forall 0 \leqslant k \leqslant n$, 有

$${}_nE_x = {}_kE_x \cdot {}_{n-k}E_{x+k} \tag{2.2}$$

$$(1+i)^k \cdot l_x \cdot {}_nE_x = l_{x+k} \cdot {}_{n-k}E_{x+k} \tag{2.3}$$

证明.

$${}_nE_x = v^n \cdot {}_n p_x = v^k \cdot v^{n-k} \cdot {}_k p_x \cdot {}_{n-k} p_{x+k} = {}_k E_x \cdot {}_{n-k}E_{x+k}$$

由 (2.1) 和 (2.2) 可知,

$${}_nE_x = v^k \cdot {}_k p_x \cdot {}_{n-k}E_{x+k} = (\frac{1}{i+1})^k \cdot \frac{l_{x+k}}{l_x} \cdot {}_{n-k}E_{x+k}$$

即 $(1+i)^k \cdot l_x \cdot {}_nE_x = l_{x+k} \cdot {}_{n-k}E_{x+k}$. □

注 2.1. 等式 $(1+i)^k \cdot l_x \cdot {}_nE_x = l_{x+k} \cdot {}_{n-k}E_{x+k}$ 的含义是:

在 0 时刻, l_x 个人各自买了一份 n 年期的生存保险, 保费总额为 $l_x \cdot {}_nE_x$, k 年后, 这笔钱的积累值为 $(1+i)^k \cdot l_x \cdot {}_nE_x$, 若此时保险公司破产不干了, 他分给在 k 时刻还活着的 l_{x+k} 个人每人 ${}_{n-k}E_{x+k}$ 元, 这正好够每个人去重新买一份 $n-k$ 年期的生存保险.

2.3 n 年期 (定期) 死亡保险

一个个体 (x) 投了一份 n 年期死亡保险, 约定: 若 (x) 在 n 年内死亡, 则在其死亡时刻立刻支付 1 元保险金或在其死亡年末支付 1 元保险金.

死亡立即支付——连续型

死亡年末支付——离散型

一. 死亡立即支付的 n 年期定期寿险

1. 支付方式和条件

若 (x) 在 n 年内死亡 (即 $T(x) < n$), 则在 $T(x)$ 时刻支付 1 元保险金;

若 (x) 在 n 年内未死 (即 $T(x) \geqslant n$), 则不予支付.

2. 支付现值 Z

若 $T(x) < n$, 则 $Z = v^{T(x)}$; 若 $T(x) \geqslant n$, 则 $Z = 0$.

所以 $Z = v^{T(x)} I_{\{T(x)<n\}}$

3. n 年期定期寿险的精算现值记为 $\overline{A}^{1}_{x:\overline{n}|}$

注 2.2. 符号 $\overline{A}^{1}_{x:\overline{n}|}$ 中, 上划线表示死亡立即支付 (连续型), 1 表示保险金为 1 元, x 表示保险人为 x 岁, n 表示 n 年期死亡保险.

$$\overline{A}^{1}_{x:\overline{n}|} = EZ = E\left(v^{T(x)} I_{\{T(x)<n\}}\right) = \int_0^{\infty} v^t I_{\{T(x)<n\}} \cdot f_{T(x)}(t)dt$$

$$= \int_0^n v^t \cdot {}_tp_x \cdot \mu_x(t)dt = \int_0^n e^{-\delta t} \cdot {}_tp_x \cdot \mu_x(t)dt$$

命题 2.2. $\forall 0 \leqslant k \leqslant n$, 有

$$\overline{A}^1_{x:\overline{n}|} = \overline{A}^1_{x:\overline{k}|} + {}_kE_x \cdot \overline{A}^1_{x+k:\overline{n-k}|} \tag{2.4}$$

$$l_x \cdot \overline{A}^1_{x:\overline{n}|} = \int_0^n v^t \cdot l_{x+t} \cdot \mu_x(t)dt \tag{2.5}$$

证明. (2.4)

$$\begin{aligned}\overline{A}^1_{x:\overline{n}|} &= \int_0^n v^t \cdot {}_tp_x \cdot \mu_x(t)dt = \int_0^k v^t \cdot_t p_x \cdot \mu_x(t)dt + \int_k^n v^t \cdot_t p_x \cdot \mu_x(t)dt \\ &= \overline{A}^1_{x:\overline{k}|} + \int_0^{n-k} v^{t+k} \cdot_{t+k} p_x \cdot \mu_{x+k}(t)dt = \overline{A}^1_{x:\overline{k}|} + \int_0^{n-k} v^k \cdot v^t_t p_x \cdot {}_tp_{x+k}\mu_{x+k}(t)dt \\ &= \overline{A}^1_{x:\overline{k}|} + v^k \cdot {}_kp_x \int_0^{n-k} v^t \cdot {}_tp_{x+k}\mu_{x+k}(t)dt = \overline{A}^1_{x:\overline{k}|} +_k E_x \cdot \overline{A}^1_{x+k:\overline{n-k}|}\end{aligned}$$

(2.5)

$$\overline{A}^1_{x:\overline{n}|} = \int_0^n v^t \cdot {}_tp_x \cdot \mu_x(t)dt = \int_0^n v^t \cdot \frac{l_{x+t}}{l_x} \cdot \mu_x(t)dt$$

所以 $l_x \cdot \overline{A}^1_{x:\overline{n}|} = \int_0^n v^t \cdot l_{x+t} \cdot \mu_x(t)dt.$ □

注 2.3. 等式 (2.5) 的含义:

$\mu_x(t)dt$ 表示在 $[x+t.x+t+dt]$ 内死去的概率, 所以 $l_{x+t}\mu_x(t)dt$ 表示在 $[x+t, x+t+dt]$ 内死去的人数, 在这期间内死去的人每人支付 1 元保险金, 共 $l_{x+t}\mu_x(t)dt$ 元, 这些钱的现值为 $v^t l_{x+t}\mu_x(t)dt$, 于是 $\int_0^n v^t l_{x+t}\mu_x(t)dt$ 表示在 $[x, x+n]$ 内死去的人领取的保险的总现值, 这些钱应等于初始时刻的 l_x 个人的保费总额 $l_x\overline{A}^1_{x:\overline{n}|}$, 即 $l_x \cdot \overline{A}^1_{x:\overline{n}|} = \int_0^n v^t \cdot l_{x+t} \cdot \mu_x(t)dt$

5. Z **的方差** DZ

记: ${}^j\overline{A}^1_{x:\overline{n}|} = \int_0^\infty e^{-j\delta t} \cdot {}_tp_x \cdot \mu_x(t)dt$, 它表示在计算 $\overline{A}^1_{x:\overline{n}|}$ 的过程中, 将 δ 换成 $j\delta$ 后的值 (${}^j\overline{A}^1_{x:\overline{n}|}@\delta = \overline{A}^1_{x:\overline{n}|}@j\delta$)

$$\begin{aligned}E(Z^2) &= E((v^{T(x)}I_{T(x)<n})^2) = E(v^{2T(x)}I_{T(x)<n}) \\ &= E(e^{-2\delta T(x)}I_{T(x)<n}) = \int_0^\infty e^{-\delta t}I_{t<n}f_{T(x)}(t)dt\end{aligned}$$

$$= \int_0^n e^{-2\delta t} {}_tp_x \mu_x(t) dt = {}^2\overline{A}^{1}_{x:\overline{n}|}$$

于是 $DZ = EZ^2 - (EZ)^2 = {}^2\,\overline{A}^{1}_{x:\overline{n}|} - (\overline{A}^{1}_{x:\overline{n}|})^2 = \overline{A}^{1}_{x:\overline{n}|}@2\delta - (\overline{A}^{1}_{x:\overline{n}|}@\delta)^2$

例 2.1. 假设死亡力 $\mu(t) \equiv \mu$, 利息力为 δ, 个体 (x) 投了一个 n 年期寿险, 计算精算现值及支付现值的方差.

解.

$$\begin{aligned}
\overline{A}^{1}_{x:\overline{n}|} &= \int_0^n e^{-\delta t} {}_tp_x \mu_x(t) dt \\
&= \int_0^n e^{-\delta t} \cdot e^{-\int_x^{x+t} \mu ds} \mu dt \\
&= \int_0^n e^{-\delta t} \cdot e^{-\mu t} \mu dt \\
&= \frac{\mu}{\mu+\delta} \left(1 - e^{-(\mu+\delta)n}\right)
\end{aligned}$$

$${}^2\overline{A}^{1}_{x:\overline{n}|} = \frac{\mu}{\mu+2\delta} \left(1 - e^{-(\mu+2\delta)n}\right)$$

$$DZ = {}^2\overline{A}^{1}_{x:\overline{n}|} - (\overline{A}^{1}_{x:\overline{n}|})^2 = \frac{\mu}{\mu+2\delta} \left(1 - e^{-(\mu+2\delta)n}\right) - \left(\frac{\mu}{\mu+\delta} \left(1 - e^{-(\mu+\delta)n}\right)\right)^2$$

□

二. 死亡年末支付的 n 年期定期寿险

1. 支付方式和条件

若个体 (x) 在 n 年内死亡, 则在其死亡年末支付 1 元; 若个体 (x) 在 n 年内未死, 则不予支付.

2. 支付现值 Z

$$Z = v^{K(x)+1} I_{\{T(x)<n\}}$$

3. 精算现值记为 $A^1_{x:\overline{n}|}$

它的分布列如下,

Z	v^1	v^2	v^3	$\cdots$	v^n
概率	q_x	${}_{1\|}q_x$	${}_{2\|}q_x$	$\cdots$	${}_{n-1\|}q_x$

$P(K \le T(x) < K+1) = {}_{k|}q_x$, 故 $A^1_{x:\overline{n}|} = E(Z) = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}{}_{k|}q_x$

4. Z **的方差** DZ

$$DZ = {}^2A^1_{x:\overline{n}|} - (A^1_{x:\overline{n}|})^2$$

其中 ${}^2A^1_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{2(k+1)}{}_{k|}q_x$

5. 几个性质:

(i) $A^1_{x:\overline{n}|} = A^1_{x:\overline{m}|} + {}_mE_x \cdot A^1_{x+m:\overline{n-m}|}$,$\forall\ 0 \le m \le n$

特别地, 当 $m=1$ 时, $A^1_{x:\overline{1}|} = vq_x$, $E_x = vp_x$.

(ii) $A^1_{x:\overline{n}|} = vq_x + vp_x \cdot A^1_{x:\overline{n-1}|}$

(iii) $(1+i)l_xA^1_{x:\overline{n}|} = d_x + l_{x+1}A^1_{x+1:\overline{n-1}|}$

证明. 对于 $0 \le m \le n$, 有

$$\begin{aligned} A^1_{x:\overline{n}|} &= \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}{}_{k|}q_x \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} v^{k+1}{}_{k|}q_x + \sum_{k=m}^{n-1} v^{k+1}{}_{k|}q_x \\ &= A^1_{x:\overline{m}|} + v^m{}_mp_x \sum_{k=0}^{n-m-1} v^{k+1}{}_{k|}q_{x+m} \\ &= A^1_{x:\overline{m}|} + {}_mE_xA^1_{x+m:\overline{n-m}|} \end{aligned}$$

□

等式 $(1+i)l_xA^1_{x:\overline{n}|} = d_x + l_{x+1}A^1_{x+1:\overline{n-1}|}$ 的含义:

此式的左端表示在 0 时刻, l_x 个人各自买了一份 n 年期的死亡保险, 保费总额为 $l_x A^1_{x:\overline{n}|}$. 一年后, 这笔钱的积累值为 $(1+i)l_x A^1_{x:\overline{n}|}$. 在 $[0,1]$ 之间有 d_x 个人死去, 保险公司需给他们每人 1 元, 共 d_x 元. 若此时保险公司破产不干了, 他分给在 1 时刻还活着的 l_{x+1} 个人每人 $A^1_{x+1:\overline{n-1}|}$ 元, 这正好够每个人去重新买一份 $n-1$ 年期的死亡保险.

例 2.2 (均匀分布). 设一个 20 岁的人买了一份 10 年期的死亡保险, 设其余命 $T(20)$ 服从 $[0,80]$ 上的均匀分布, $i=0.05$, 保险金死亡年末支付 10 万元, 则支付现值

$$Z = v^{K(20)+1} I_{T(20)<10} \cdot 100000$$

精算现值

$$\begin{aligned} E(Z) &= 100000 \cdot A^1_{20:\overline{10}|} \\ &= 100000 \cdot \sum_{k=0}^{9} v^{k+1} \cdot {}_{k|}q_{20} \\ &\approx 9652.1687 \end{aligned}$$

三. 死亡年末支付与死亡立即支付的关系

命题 2.3. 设死亡力均匀分布假设成立, 则 $\overline{A}^1_{x:\overline{n}|} = \frac{i}{\delta} A^1_{x:\overline{n}|}$

证明.

$$\begin{aligned} \overline{A}^1_{x:\overline{n}|} &= E\big(v^{T(x)} \cdot I_{T(x)<n}\big) \\ &= E\big(v^{K(x)+1} \cdot I_{T(x)<n} \cdot v^{S(x)-1}\big) \\ &= E\big(v^{K(x)+1} \cdot I_{T(x)<n}\big) E\big(\cdot v^{S(x)-1}\big) \\ &= A^1_{x:\overline{n}|} \cdot \int_0^1 e^{-\delta(s-1)} \cdot 1 ds \\ &= \frac{i}{\delta} A^1_{x:\overline{n}|} \end{aligned}$$

□

2.4 终身死亡保险

一. 死亡后立即支付的终身死亡保险

1. 支付方式与支付条件:

在个体 (x) 死亡时刻立刻支付 1 元保险金.

2. 支付现值 Z:

$Z = v^{T(x)}$

3. 精算现值用 $\overline{A}_x$ 表示

$$\overline{A}_x = E(Z) = \int_0^\infty v^t {}_tp_x \mu_x(t) \mathrm{d}t.$$

4. Z 的方差 DZ

$E(Z^2) = \int_0^\infty v^{2t} {}_tp_x \mu_x(t) \mathrm{d}t = {}^2\overline{A}_x$, 故

$$DZ = E(Z^2) - E(Z)^2 = {}^2\overline{A}_x - (\overline{A}_x)^2$$

5. 几个性质:

(i) $\overline{A}_x = \overline{A}^1_{x:\overline{n}|} + {}_nE_x \cdot \overline{A}_{x+n}$

(ii) $\frac{d\overline{A}_x}{dx} = \delta \overline{A}_x + \mu(x)(\overline{A}_x - 1)$

证明. (i)

$$\begin{aligned}
\overline{A}_x &= E(v^{T(x)}) \\
&= E(v^{T(x)} I_{T(x)\le n}) + E(v^{T(x)} I_{T(x)>n}) \\
&= \overline{A}^1_{x:\overline{n}|} + \int_n^\infty v^t {}_tp_x \mu_x(t) \mathrm{d}t \\
&= \overline{A}^1_{x:\overline{n}|} + v^n \cdot {}_np_x \int_0^\infty v^t {}_tp_{x+n} \mu_{x+n}(t) \mathrm{d}t \\
&= \overline{A}^1_{x:\overline{n}|} + {}_nE_x \cdot \overline{A}_{x+n}
\end{aligned}$$

(ii) 已知 $\overline{A}_x = \int_0^\infty e^{-\delta t} {}_tp_x \mu_x(t) \mathrm{d}t$, $\frac{d_tp_x}{dt} = -{}_tp_x \mu_x(t)$, 故

$$\overline{A}_x = -\int_0^\infty e^{-\delta t} \mathrm{d}({}_tp_x) = -e^{-\delta t} {}_tp_x |_0^\infty - \int_0^\infty \delta e^{-\delta t} {}_tp_x \mathrm{d}t = 1 - \delta \int_0^\infty e^{-\delta t} {}_tp_x \mathrm{d}t$$

所以

$$
\begin{aligned}
\frac{d\overline{A}_x}{dx} &= -\delta \int_0^\infty e^{-\delta t} \frac{d_t p_x}{dx} \mathrm{d}t \\
&= -\delta \int_0^\infty e^{-\delta t} {}_t p_x (\mu(x) - \mu(x+t)) \mathrm{d}t \\
&= -\delta \mu(x) \int_0^\infty e^{-\delta t} {}_t p_x \mathrm{d}t + \delta \int_0^\infty e^{-\delta t} {}_t p_x \mu_x(t) \mathrm{d}t \\
&= \delta \overline{A}_x + \mu(x)(\overline{A}_x - 1)
\end{aligned}
$$

□

2.5 作业

作业 2.1. 解释等式 $l_x \overline{A}^{1}_{x:\overline{n}|} = l_x \overline{A}^{1}_{x:\overline{k}|} + v^k l_{x+k} \overline{A}^{1}_{x+k:\overline{n-k}|}$ 的含义.

作业 2.2. 你现在多少岁, 是男生还是女生? 设你现在投 1 份 5 年期定期寿险, 保险金为 10 万元, 利率 $i = 0.05$, 求该保险的精算现值和支付现值的方差.(注: 保险金为年末支付.)

作业 2.3. 已知 $\mu = 0.04$, $\delta = 0.05$, 对于死亡立即支付的寿险, 求精算现值, ${}^2\overline{A}_x$ 和支付现值的方差.

参考文献

[1] 杨静平/编著: 《寿险精算基础》, 北京大学出版社, 2002.

[2] 吴岚, 黄海, 何洋波/编著: 《金融数学引论》第二版, 北京大学出版社, 2013.