# Exercice I

1) Supposons que $\mathbb{K}$ et $\overline{\mathbb{K}}$ soient comparables par $<$.
Deux cas possibles :

- $\overline{\mathbb{K}} < \mathbb{K}$

On sait que $\mathbb{K}$ est énumérable.
Si $\overline{\mathbb{K}} < \mathbb{K}$, alors $\overline{\mathbb{K}}$ est également énumérable

Ce qui veut dire que $\mathbb{K}$ est énumérable, co-énumérable (i.e. son complémentaire est énumérable), donc (théorème de Post) $\mathbb{K}$ est récursif

Or on sait que $\mathbb{K}$ n'est pas récursif $\Rightarrow$ contradiction

Donc $\overline{\mathbb{K}} < \mathbb{K}$ est faux

- $\mathbb{K} < \overline{\mathbb{K}}$

$\mathbb{K} < \overline{\mathbb{K}} \Leftrightarrow \exists f$ calculable, tq $x \in \mathbb{K}$ ssi $f(x) \in \overline{\mathbb{K}}$

En particulier, cela veut dire que $\overline{\mathbb{K}}$ est énumérable :
(~~car~~ on peut énumérer les $x \in \mathbb{K}$, donc les $f(x) \in \overline{\mathbb{K}}$)

Comme au point précédent, cela implique par le théorème de Post que $\mathbb{K}$ est récursif $\Rightarrow$ faux
Donc $\mathbb{K} < \overline{\mathbb{K}}$ est faux

2) Soit A énumérable par une fonction récursive totale strictement croissante $f$.

- Montrons que A est infini :

$f : \mathbb{N} \to A$ est strictement croissante et totale.
Donc en particulier $f$ est injective.
~~[illegible]~~
En effet, s'il existait $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$ tels que $f(m) = f(n)$, alors $f$ ne serait pas strictement croissante

$f$ est injective, donc $|\mathbb{N}| \leq |A|$. Comme $\mathbb{N}$ est infini, A est également infini

• Montrons que A est récursif

On peut créer un programme qui décide si $x \in A$ ou non.
L'idée est d'énumérer $f(1), f(2), \dots$
Si on tombe sur $f(y) = x$, alors $x \in A$.
Si on tombe sur $f(y) > x$, alors puisque $f$ est croissante, $\forall z > y,\ f(z) \neq x$ et on ne pourra jamais avoir $x$, donc $x \notin A$.

```
p(x) {
    for (i=0 ;; i++):
        if (f(i) == x) {
            return 1;
        }
        if (f(i) > x){
            return 0;
        }
    }
}
```

$f$ est calculable $\Rightarrow p$ calculable

$p$ termine toujours, car $(f(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante strictement de $\mathbb{N}$, donc $f(n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

$$p(x) = \begin{cases} 0 \Leftrightarrow x \notin A \\ 1 \Leftrightarrow x \in A \end{cases}$$

Exercice II

1) • Récursif ?

Oui : l'ensemble de convergence de $p : x \mapsto x$ est $\mathbb{N}$, et $\mathbb{N}$ est récursif.

• Non récursif ?

Oui : Soit $p : x \mapsto [x|x]$

$p(x)$ converge ssi $x \in \mathbb{K}$

Donc l'ensemble de convergence de $p$ est $\mathbb{K}$, non récursif

• Énumérable ? Non-énumérable.

Un ensemble de convergence est forcément énumérable.

Définition de énumérable :

A est énumérable si il existe un programme ~~dont~~ l'ensemble de convergence est A.

Donc tout ensemble de convergence est par définition énumérable

(Ex II)

2) Soit $P(f)$ la propriété définie ainsi.

$P(f)$ : " La fonction $f$ ~~est définie~~ a un ensemble de définition récursif "

A est l'ensemble des programmes dont les fonctions associées vérifient P.

A n'est pas trivial :

- $p : x \mapsto x \in A$ (ensemble de convergence $= \mathbb{N}$, récursif)
- $p : x \mapsto [x|x] \notin A$ (ens. convergence $\mathbb{K}$, non récursif)

Donc par le théorème de Rice, A n'est pas récursif

3) Je sais pas

Soit $b : x, y \mapsto$ if $[x/x]$ return $[y/y]$

On pose $f : x \mapsto S_1^1(b, x)$

- Si $x \in \mathbb{K}$, $f(x) = y \mapsto [y/y]$
  et donc $f(x)$ a pour ensemble de convergence $\mathbb{K}$, donc
  $f(x) \in \overline{A}$

- Si $x \notin \mathbb{K}$, $f(x) = \perp\!\!\!\perp$ (la fonction qui ne converge jamais)
  donc $f(x)$ a pour ensemble de convergence $\emptyset$, qui est récursif.
  Donc $f(x) \notin \overline{A}$ ($f(x) \in A$

$f$ est calculable totale car $S_1^1$ l'est, et :

$x \in \mathbb{K} \Leftrightarrow f(x) \in \overline{A}$

Donc $\mathbb{K} < \overline{A}$

5) Je sais pas

Exercice III

1) On montre la propriété suivante (équivalente) :

$$T \not\models \varphi \iff T \cup \{\neg\varphi\} \not\models \varphi \wedge \neg\varphi$$

- Supposons que $T \not\models \varphi$

  Alors il existe un modèle $M$ de $T$ dans lequel $\varphi$ est fausse (ie, $M \not\models \varphi$, ou encore $M \models \neg\varphi$)

  $M \models T$ et $M \models \neg\varphi$, donc $M$ est aussi un modèle de $T \cup \{\neg\varphi\}$

  Et dans $M$, $M \not\models \varphi$, donc $M \not\models \varphi \wedge \neg\varphi$

  Il existe donc un modèle de $T \cup \{\neg\varphi\}$ dans lequel $\varphi \wedge \neg\varphi$ est fausse

  Donc cela veut dire que $T \cup \{\neg\varphi\} \not\models \varphi \wedge \neg\varphi$

(Ex III, 1))

- Supposons que $T \cup \{\neg f\} \nvdash f \wedge \neg f$

Il existe donc un modèle $M$ de $T \cup \{\neg f\}$, dans lequel $f \wedge \neg f$ est fausse.

Puisque $M \models T \cup \{\neg f\}$, on a $M \models \neg f$, ie $M \not\models f$

~~$M \not\models f \wedge \neg f$, cela veut dire qu'on a forcément $M \not\models f$~~

$M$ est un modèle de $T \cup \{\neg f\}$, donc a fortiori est un modèle de $T$.

Il existe donc un modèle de $T$ dans lequel $f$ est fausse, donc on a :

$$T \nvdash f$$

On a donc montré :

$$T \nvdash f \Leftrightarrow T \cup \{\neg f\} \nvdash f \wedge \neg f$$

ce qui est équivalent à :

$$T \vdash f \Leftrightarrow T \cup \{\neg f\} \vdash f \wedge \neg f$$

2) Soit $T$ une théorie cohérente.

Alors $T$ admet un modèle $M$.

Dans $M$, il y a deux possibilités :
soit $M \models \varphi$, soit $M \models \neg \varphi$

- Si $M \models \varphi$, alors $M \models T \cup \{\varphi\}$, et ~~M~~ $M$ est un modèle de $T \cup \{\varphi\}$, et donc $T \cup \{\varphi\}$ est cohérente

- Si $M \models \neg\varphi$, alors $M \models T \cup \{\neg\varphi\}$, et donc $T \cup \{\neg \varphi\}$ est cohérente.

Dans tous les cas, au moins l'une des deux extensions $T \cup \{\varphi\}$ ou $T \cup \{\neg\varphi\}$ est cohérente

Exercice IV

1) Lemme de codage :

Il existe une formule $\varphi(a, x, t, y)$ telle que :

$\varphi(a, x, t, y)$ est vraie ssi $step(a, x, t) = y$

On définit la formule $f(x)$ comme suit :

$$f(x) = \exists y \exists t, (y \neq 0) \wedge \varphi(x, 0, t, y)$$

Ainsi, $f(x)$ est vraie ssi $[x|0]\downarrow$

2) Supposons que le contraire soit vrai, à savoir qu'il n'existe pas de $a$ tel que $T \nvdash f(a)$ et $T \nvdash \neg f(a)$

Cela voudrait dire que pour tout programme $x$, on a soit une preuve (finie) de $[x|0]\downarrow$, soit une preuve (finie) de $[x|0]\uparrow$

Ce qui signifie que ~~de~~ l'on peut toujours dire en temps fini si $[x|0]\downarrow$, et donc que l'ensemble $\{x, [x|0]\downarrow\}$ est récursif.

Or (cf cours), on sait qu'il n'est pas récursif $\Rightarrow$ contradiction

Cela veut dire qu'il existe $a$ tel que $T \nvdash f(a)$ et $T \nvdash \neg f(a)$

3) $T$ est cohérente, donc admet des modèles.
$T \nvdash f(a_0)$ et $T \nvdash \neg f(a_0)$, donc cela veut dire qu'il existe des modèles de $T$ dans lesquels $[a_0|0]\downarrow$, et des modèles dans lesquels $[a_0|0]\uparrow$

En particulier, on peut tout à fait choisir un modèle dans lequel $[a_0|0]\downarrow$

4) On a utilisé la cohérence de $T$ pour justifier de l'existence de modèles dans lesquels $f(a_0)$ ou $\neg f(a_0)$ est vraie.

Si $T$ n'était pas cohérente, $T$ n'aurait aucun modèle, et alors on ne pourrait pas choisir un modèle qui rend $[a_0 | 0] \downarrow$ vrai.

5) La démo exacte est dans le cours