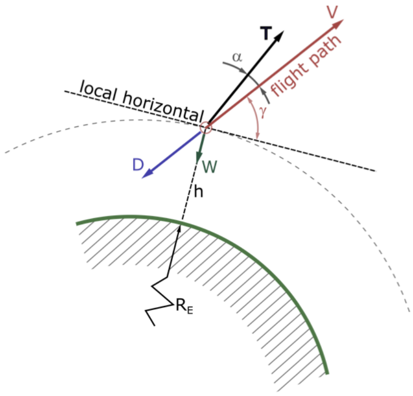
Praktikumsaufgabe Raketen-Flugsimulator

Lorenz Saalmann (8104072)

Grundlagen der Raumfahrt, WS 24/25
Sebastian Karl, Martin Grabe

1.5 Typical ascent trajectory

The equations of motion for a point-mass in 2D assuming a non-rotating Earth are:



forces	
aerodyn. drag:	$D = c_D q A$
Weight, grav. force:	$W = mg$
Circular horizon:	$\dot{\gamma} = \omega = v_T/R = v\cos(\gamma)/(h + R_E)$
Nomenclature	
γ:	flight path angle
α:	Thrust vector angle
$q = \rho v^2/2$:	dynamic pressure
h, R_E:	altitude and earth radius
v:	flight velocity
ρ:	atmospheric density
A:	aerodyn. reference Area
c_D:	drag coefficient
m:	vehicle mass

Table 3: Force balance during ascent flight

From this, the force balance in flight direction is:

$$m\dot{v} = T\cos(\alpha) - D - W sin(\gamma) \tag{1.18}$$

The force balance normal to the flight direction including contribution to $\dot{\gamma}$ due to the change of the local horizon with tangential displacement is:

$$m\dot{v}_\perp = mv\dot{\gamma} = -W\cos(\gamma) + mv\frac{v\cos(\gamma)}{R_E + h} + T\sin(\alpha) \tag{1.19}$$

from this, the equations of motion (for a non-rotating reference frame) are:

$$\begin{aligned} \dot{v} &= \frac{1}{m}\left[T\cos(\alpha) - D - mg\sin(\gamma)\right] \\ \dot{\gamma} &= \frac{1}{v}\left[\cos(\gamma)\left(-g + \frac{v^2}{Re + h}\right) + \frac{T}{m}\sin(\alpha)\right] \end{aligned} \tag{1.20}$$

Abbildung 1: Herleitung der Bewegungsgleichungen für den Raketenflug aus dem Vorlesungsskript

1 Raketen-Flugsimulator

Zunächst soll ein Programm zur Lösung der vereinfachten Bewegungsgleichungen für den Aufstieg einer zweistufigen Rakete geschrieben werden. Dafür wurden die Bewegungsgleichungen (1.20) aus Abbildung 1 verwendet. Für eine Abschätzung des Luftwiderstands wurde folgender exponentieller Zusammenhang verwendet:

$$\rho(h) = 1.2\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\exp\left(-1.244268\cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^{-1}\cdot h\right) \tag{1}$$

Die effektive Querschnittsfläche soll $A = 15\,\mathrm{m}^2$ betragen, der Widerstandsbeiwert ist $C_D = 1$. Weiterhin soll die Abnahme der Erdanziehungskraft mit der Flughöhe berücksichtigt werden. Der Zielorbit kann mit einem TVC erreicht werden, bei dem der Schubvektor zwischen einer Flughöhe von 250 und 3000 m um 3° ausgelenkt wird.

Das Programm wurde in Python umgesetzt. Es besteht im Wesentlichen aus drei Skripten:

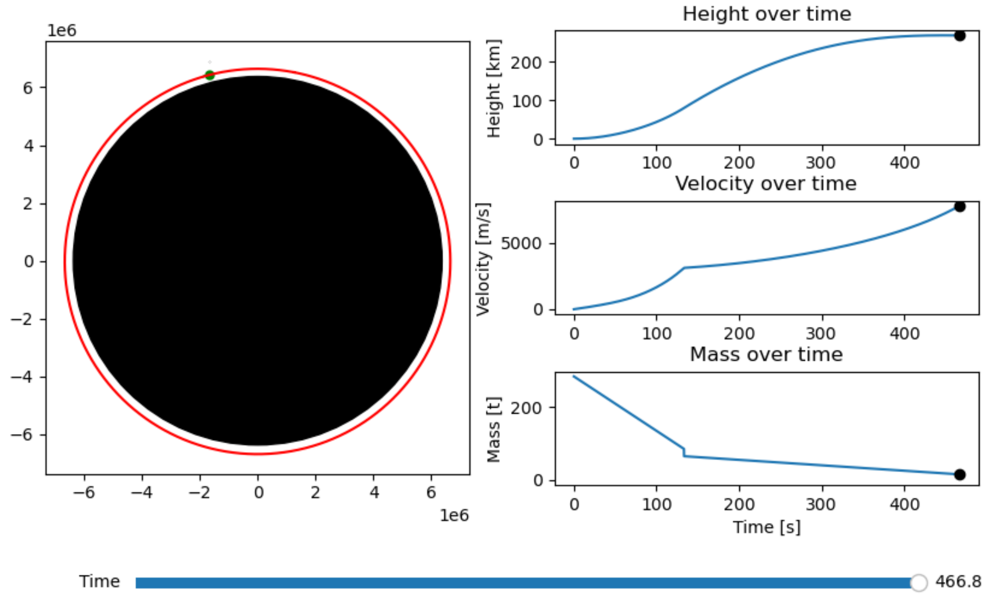


Abbildung 2: Beispielhafte Ausgabe des Raketen-Flugsimulators

main.py ist der Startpunkt des Programms, *flight-sim.py* simuliert die Differentialgleichungen iterativ und *plotter.py* stellt die Ergebnisse graphisch dar. Die Ausgabe des Programms ist in Abbildung 1 zu sehen. Hier sind auch die Geschwindigkeit, die Flughöhe und die Masse über die Zeit dargestellt. Zusätzlich wurde der Flugbahnwinkel der Rakete über der Zeit in Abbildung 1 dargestellt.

1.1 Weitere Aufgaben

3. **Wie viel Treibstoff ist beim Erreichen des Orbits noch übrig?**
   Beim Erreichen des Zielorbits ist kein Treibstoff mehr übrig.

4. **Wie hoch sind Gravitations- und aerodynamische Verluste und wie hoch ist der ge-**

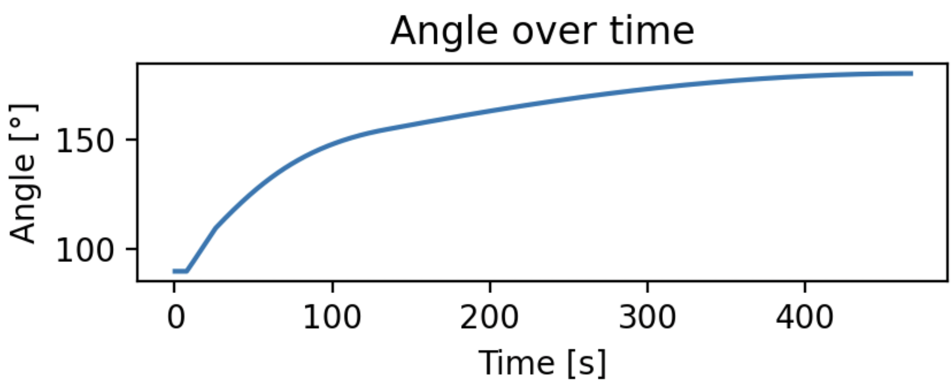


Abbildung 3: Flugbahnwinkel der Rakete über der Zeit

samte Antriebsbedarf Δv?
Um die Gravitations- und aerodynamischen Verluste zu berechnen, werden in der Simulation die Terme $g \sin \gamma$ und D/m mit dem Zeitschritt Δt multipliziert und aufsummiert, wobei das vereinfachte Modell die Beschleunigung g und den Widerstand D abhängig von Höhe und Geschwindigkeit approximiert. Der gesamte Antriebsbedarf Δv beträgt 9.36 km/s. Der Verlust durch Gravitation summiert sich zu 1.4 km/s und der Verlust durch den Luftwiderstand zu 195 m/s.

5. **Verifizieren Sie ihre Lösung für den gesamten Antriebsbedarf Δv mithilfe der Ziolkowski-Gleichung.**
Die Ziolkowski-Gleichung lautet:

$$\Delta v = c \ln \left(\frac{m_0}{m_f} \right), \tag{2}$$

wobei c die Austrittsgeschwindigkeit des Treibstoffs ist und m_0 und m_f die Masse der Rakete zu Beginn und am Ende des Flugs sind. Weil die Rakete zweistufig ist, wird die Gleichung für jede Stufe separat berechnet:

$$\Delta v_0 = c_0 \ln \left(\frac{m_0}{m_{f0}} \right) = 3.5 \text{ km/s} \ln \left(\frac{285 \text{ t}}{85 \text{ t}} \right) = 4234.43 \text{ m/s} \tag{3}$$

und

$$\Delta v_1 = c_1 \ln \left(\frac{m_0}{m_{f0}} \right) = 3.5 \text{ km/s} \ln \left(\frac{65 \text{ t}}{15 \text{ t}} \right) = 5132.18 \text{ m/s.} \tag{4}$$

Der gesamte Antriebsbedarf beträgt also $\Delta v = \Delta v_0 + \Delta v_1 = 9366.61$ m/s, was mit dem Wert aus der Simulation übereinstimmt.

6. **Berechnen Sie die maximal mögliche Oberflächentemperatur der Raketenspitze während des Fluges**
Die maximal mögliche Oberflächentemperatur der Raketenspitze kann errechnet werden, indem die aerothermodynamische Aufheizung mittels der Sutton-Graves-Gleichung berechnet wird und mit der abgestrahlten Wärmeleistung nach Stefan-Boltzmann gleichgesetzt wird. Die Sutton-Graves-Gleichung lautet:

$$q_{in} = k \sqrt{\frac{\rho}{R_n}} v^3. \tag{5}$$

Dabei ist q_S der Wärmestrom, $k = 1.7415 \times 10^{-4} \text{kg}^{1/2}$ / m auf der Erde, ρ die Dichte der Atmosphäre, R_n der effektive Radius der Raketenspitze und v die Geschwindigkeit der Rakete. Der effektive Radius der Raketenspitze beträgt $R_n = 0.5$ m. Die abgestrahlte Wärmeleistung nach Stefan-Boltzmann ist:

$$q_{out} = \varepsilon \sigma (T_{Wand}^4 - T_{Umgebung}^4), \tag{6}$$

wobei $\varepsilon = 0.8$ der Emissionsgrad der Raketenspitze ist, $\sigma = 5.67 \times 10^{-8}$ W/m^{2}K^4 die Stefan-Boltzmann-Konstante und $T_{Umgebung} = 293$ K (20°C) die Umgebungstemperatur. Um die maximale Temperatur zu berechnen, werden die beiden Gleichungen gleichgesetzt und nach T_{Wand} aufgelöst, da sich die Raketenspitze so lange aufheizt, bis der

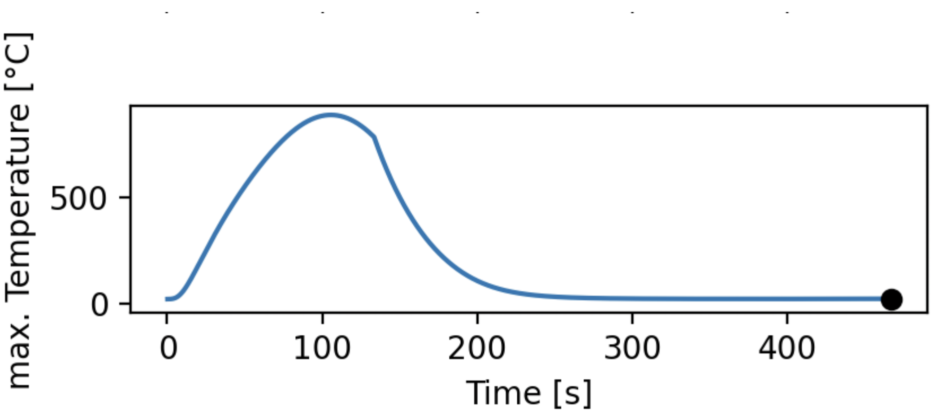


Abbildung 4: Maximale Temperatur der Raketenspitze über der Zeit

abgestrahlte Wärmestrom gleich der aerothermodynamische Aufheizung ist. Folgende Gleichung ergibt sich:

$$T_{Wand} = \left(\frac{k\sqrt{\frac{\rho}{R_n}}v^3}{\varepsilon\sigma} + T_{Umgebung}^4 \right)^{1/4} . \tag{7}$$

Wenn man während der Simulation die Geschwindigkeit der Rakete und die Atmosphärendichte einsetzt, erhält man den in Abbildung 6 dargestellten Verlauf für die maximale Temperatur über der Zeit. Das Maximum beträgt ca. 890°C.

7. **Berechnen Sie die optimale Stufung für diese Raketenkonfiguration (gleiche Startmasse, gleicher Strukturindex). Wie hoch ist die potentielle Steigerung der Nutzlast?**

Wie in der Vorlesung gezeigt, ist eine optimale Stufung bei gleichem spezifischem Impuls aller Stufen dann gegeben, wenn das Masseverhältnis der Start- zu Endmassen aller Stufen gleich ist. Folgende Gleichung beschreibt die Masse der Nutzlast m_p in Abhängigkeit von der Startmasse M_0, der Austrittsgeschwindigkeit u_e, so wie dem benötigten Δv und dem Strukturindex N_s unter dieser Vorraussetzung:

$$\frac{m_p}{M_0} = \left[\frac{(1-\varepsilon)\exp\left(\frac{\Delta v}{u_e N_s}\right)}{1-\varepsilon\exp\left(\frac{\Delta v}{u_e N_s}\right)} \right]^{-N_s} . \tag{8}$$

ε ist der Strukturindex, also das Verhältnis von Strukturmasse zur Summe von Struktur und Treibstofmasse einer Stufe. Die Nutzlast kann bei einer festen Startmasse von 285 t, einem Strukturindex von $\frac{1}{11}$ und einem Δv von 9366 m/s auf 10.142 t erhöht werden.

Wenn statt dem Δv ein Zielorbit vorgegeben ist, kann nicht mehr einfach die Nutzlast berechnet werden, da die benötigte Geschwindigkeitsänderung von der Rakete abhängt. Für diesen Fall wird eine Abschätzung der Nutzlast über den nicht verwendeten Treibstoff gemacht.

Die optimale Stufung für die Konfiguration mit einer 10t Nutzlast ist in der folgenden Tabelle dargestellt:

Stufe	Strukturmasse [t]	Treibstoffmasse [t]	ε	Payload [t]
1	21.05	210.5	3.83	
2	3.95	39.5	3.83	10

Diese wurde numerisch ermittelt. Nun muss für die neue Raketenkonfiguration ein neues Flugprofil gefunden werden. Dafür wurde die Simulation so angepasst, dass es möglich ist den Antrieb auszuschalten und für ein Zirkularisierungsmanöver ernuet anzuschalten. So effizienter ein nahezu kreisförmiger Orbit gefunden werden. Mit einer TVC von 8.4° zwischen 1 km und 9.25 km konnte ein Orbit mit einer Apoapsis von ca. 300 km und einer Periapsis von 270 km erreicht werden, indem ein Zirkularisierungsmanöver durchgeführt wird. Die Nutzlast plus dem übrigen Treibstoff beträgt dann ca. 11.1 t. Mit diesem Wert könnte man nun iterativ die optimale Stufung finden, im Rahmen dieses Praktikums soll aber nur eine Iteration durchgeführt werden.