## *Архив заданий*
## ОТБОРОЧНОГО ТУРА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ «ИНЖЕНЕРНАЯ АКАДЕМИЯ-2022», 9 класс

**Задача 1.** Среди школьников, побывавших на каникулах в Москве, 71% с восторгом вспоминают посещение Кремля, 68% – посещение ВДНХ. Сколько школьников с восторгом вспоминают посещение и Кремля, и ВДНХ?

*Решение.* Все школьники. побывавшие на каникулах в Москве, составляют 100%. Тогда искомое множество, которое при сложении было учтено дважды, будет составлять

$$(71\% + 68\%) - 100\% = 39\%.$$

*Ответ:* 39.

**Задача 2.** Поезд движется со скоростью 50 км/ч и имеет длину 1500 м. За сколько минут он пройдёт тоннель длиной 1 км?

*Решение.* Начало поезда должно пройти путь, равный длине тоннеля и поезда.

$$1500\ \text{м}=1{,}5\ \text{км},\ 1+1{,}5=2{,}5\ \text{км},\ 2{,}5:50=0{,}05\ \text{ч}=\frac{5}{100}\ \text{ч}=\frac{1}{20}\ \text{ч}=3\ \text{мин}.$$

*Ответ:* 3.

**Задача 3.** Записать угловой коэффициент $k$ прямой $y = kx + 4$, проходящей через точку с ординатой, равной $-11$, и абсциссой, являющейся наибольшим решением уравнения $|x-1| - 2|x-2| + 3|x-3| = 4$.

*Решение.* Решив уравнение с модулями, получаем, что наибольшим его корнем является $x = 5$. Учитывая, что значение ординаты точки, через которую проходит прямая $y = kx + 4$, равно -11, а значение абсциссы этой же точки равно 5, запишем: $-11 = 5k + 4$. Откуда получаем, что $k = -3$.

*Ответ:* -3.

**Задача 4.** Дан параллелограмм со сторонами 5 м и 10 м. Известно, что длины его диагоналей относятся как 1:3. Определить длины диагоналей параллелограмма.

*Решение.* Пусть стороны параллелограмма $a = 5$ и $b = 10$. Обозначим его диагонали через $m$ и $n$. Известно, что $m = \frac{1}{3}n$. По свойству параллелограмма: $m^2 + n^2 = 2\cdot(a^2 + b^2)$. Поэтому $\left(\frac{1}{3}n\right)^2 + n^2 = 2\cdot(5^2 + 10^2)$

$$\frac{10}{9}n^2 = 2\cdot 125,\ n = 15,\ m = \frac{1}{3}\cdot 15 = 5.$$

*Ответ:* 5, 15.

**Задача 5.** Саша и Наташа одновременно вышли из школы; длина шага Наташи равна 0,5 м, а длина шага Саши составляет 0,69 м. В первый раз их шаги совпали через 15 секунд после начала движения, а после 5 минут движения их шаги совпали первый раз в парке. Определите расстояние (в метрах) от школы до парка.

*Решение.* Разложим значение длин шагов Наташи и Саши на множители и найдем их наименьшее общее кратное (НОК). Так как 50 = 2·5·5, 69 = 3·23, то НОК (50,69) = $5^2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 23$= 3450.

Наташа сделала за 15 секунд 3450:50=69 шагов, Саша за 15 секунд сделал 3450:69 = 50 шагов.

Каждые 15 секунд Наташа и Саша проходят 3450 см = 34,5 м.

Переведём минуты в секунды: 5 минут = 300 секунд.

В этот промежуток времени совпадение шагов происходит ровно 20 раз. За 20 совпадений Наташа и Саша прошли 34,5·20 = 690 метров. Это расстояние и будет искомым между школой и парком.

*Ответ:* 690.

**Задача 6.** Вычислите $5^{22} \cdot 4^{13}$. В ответе укажите сумму цифр результата.

*Решение.* $5^{22} \cdot 4^{13} = 5^{22} \cdot \left(2^2\right)^{13} = 5^{22} \cdot 2^{26} = 5^{22} \cdot 2^{22} \cdot 2^4 = 10^{22} \cdot 2^4 = 10^{22} \cdot 16$.

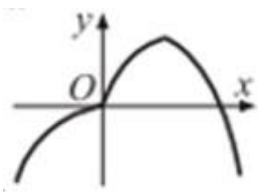
$1 + 6 + 0 + \ldots + 0 = 7$.

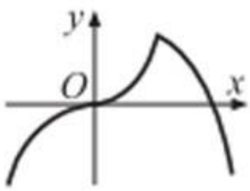
*Ответ:* 7.

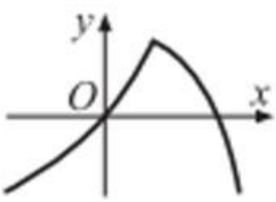
**Задача 7.**

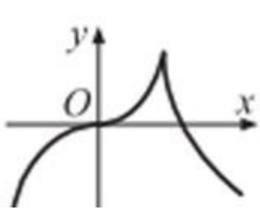
На рисунке 

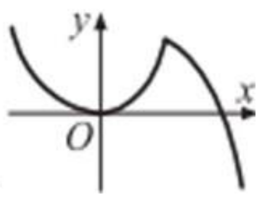
изображен график функции $y = f(x)$. На одном из рисунков ниже изображен график функции $y = xf(x)$. На каком (из а, б, в, г, д)?

а) 


б) 


в) 


г) 


д) 

*Решение.* Рассматривая графики функций

$y=-ax,\ y=-ax^2,\ a\in R,\ a>0$ на промежутке $(-\infty;0]$;

$y=bx,\ y=bx^2,\ b\in R,\ b>0$ на промежутке $\left(0;\dfrac{c}{b+d}\right]$;

$y=c-dx,\ y=cx-dx^2,\ c\in R,\ d\in R,\ c>0,\ d>0$ на промежутке $\left(\dfrac{c}{b+d};+\infty\right)$, получим график рисунка б.

*Ответ:* б.

**Задача 8.** Лаборант для опыта использовал 1 мл 12% раствора щёлочи, после чего долил вместо него столько же воды в ёмкость. Затем ещё раз отлил 1 мл полученного раствора, вместо которого снова долил 1 мл воды. В ёмкости оказался 3% щелочной раствор. Определить объём используемой для опыта ёмкости (в мл).

*Решение.* Пусть объём ёмкости – $x$ мл. Концентрация в ней щёлочи составляла $0{,}12x$ и воды $0{,}88x$.

Отлили 1 мл, и щёлочи стало $0{,}12x-0{,}12$. Долили воды, и содержание щёлочи в 1 мл нового раствора стало $\dfrac{0{,}12x-0{,}12}{x}$.

После следующей процедуры щёлочи останется

$$\frac{(0{,}12x-0{,}12)-(0{,}12x-0{,}12)}{x},$$ что составит 3%.

Тогда $(0{,}12x-0{,}12)-\dfrac{(0{,}12x-0{,}12)}{x}=0{,}03x$.

Получим уравнение $3x^2-8x+4=0$, решая которое найдём два корня $x=\dfrac{2}{3}$ и $x=2$. Первый корень не удовлетворяет смыслу задачи, так как объём ёмкости больше 1 мл. Поэтому объём ёмкости составляет 2 мл.

*Ответ:* 2.

**Задача 9.** Найти сумму

$$\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\ldots+\frac{1}{600}$$

*Решение.* $\dfrac{1}{20}+\dfrac{1}{30}+\dfrac{1}{42}+\ldots+\dfrac{1}{600}=\dfrac{1}{4\cdot5}+\dfrac{1}{5\cdot6}+\dfrac{1}{6\cdot7}+\ldots+\dfrac{1}{24\cdot25}=$

$$=\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{7}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{24}-\frac{1}{25}\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{25}=\frac{21}{100}=0{,}21.$$

*Ответ:* 0,21.

**Задача 10.** Решите уравнение $(x^2+5x-3)^2=10x^3+29x^2-30x$.

*Решение.* Запишем данное уравнение в виде

$$(x^2+5x-3)^2=10x(x^2+5x-3)-21x^2$$

Пусть $x^2+5x-3=y$, тогда получим $y^2-10xy-21x^2=0$.

Решим данное уравнение второй степени относительно переменной $y$, получим $y_1 = 3x,\ \ y_2 = 7x.$

Учитывая подстановку $x^2 + 5x - 3 = y$ и значения $y_1 = 3x,\ \ y_2 = 7x$, приходим к двум квадратным уравнениям: $x^2 + 2x - 3 = 0,\ x^2 - 2x - 3 = 0.$

Решая их, находим корни исходного уравнения:

$$x_1 = -3,\ \ x_2 = 1,\ x_3 = 3,\ \ x_4 = -1.$$

*Ответ:* -3,-1,1,3.

## ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ТУРА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ «ИНЖЕНЕРНАЯ АКАДЕМИЯ-2022», 9 класс

**Задача 1.** Укажите последнюю цифру числа $2023^{2022}$.

*Решение 1.* Последняя цифра числа $2023^{2022}$ совпадает с последней цифрой числа $3^{2022}$:

$$2023^1 = 2023, 3^1 = 3,\ 2023^2 = 2023 \cdot 2023, 3^2 = 9,$$

$$2023^3 = 2023^2 \cdot 2023, 3^3 = 27,\ 2023^4 = 2023^3 \cdot 2023, 3^4 = 81,\ \ldots .$$

Запишем последние цифры начальных степеней 3: 3, 9, 7, 1, 3, 9, … . Как видно, через четыре цифры идет повторение.

$2022 : 4 = 505$ (остаток 2).

Поэтому последней цифрой числа $2023^{2022}$ будет 9.

*Решение 2.* Пусть $2023^{2022}$ – число.

Посмотрим на последние цифры степеней числа 3:

$3^1 = \underline{3}$

$3^2 = \underline{9}$

$3^3 = 2\underline{7}$

$3^4 = 8\underline{1}$

$3^5 = 24\underline{3}$

$3^6 = 72\underline{9}$

$3^7 = 218\underline{7}$

$3^8 = 656\underline{1}$

Наблюдается закономерность: через каждые 4 степени тройки последние цифры получаемых чисел совпадают. Если степень чётная, то число будет оканчиваться на 9 или 1.

2022 – чётное число. Чтобы число оканчивалось на 1, показатель степени должен нацело делиться на 4.

$2022 : 4 = 505{,}5$. Следовательно, число не может оканчиваться на 1.

Поэтому оно оканчивается на 9.

*Ответ:* 9.

**Задача 2.** В саду растут маргаритки и примулы, причём маргариток вдвое больше, чем примул. Других цветов в саду нет. Трое школьников сосчитали количество цветов. У первого получилось 38, у второго - 42, у третьего - 40 цветов. Известно, что одному из детей удалось сосчитать правильно. Сколько в саду маргариток?

*Решение 1.* Так как маргариток вдвое больше, чем примул, то маргаритки составляют две одинаковые части, а примулы - одну часть от общего количества цветов. Следовательно, все цветы в саду условно можно разбить на 3 одинаковые части. Поэтому количество цветов должно делиться на 3. Среди итогов подсчёта цветов школьниками число, делящееся на 3, только одно - 42. Это результат второго школьника. Разделим это количество на три (т.к. всего имеем 3 условные части): $42:3=14$. Маргаритки составляют две такие части, поэтому $14\cdot 2=28$. Таким образом, в саду 28 маргариток.

*Решение 2.* Пусть $m$ – количество маргариток, $p$ – количество примул, $n$ – количество цветов в саду.

$m+p=n$, так как других цветов в саду больше нет.

$m=2p$ - по условию. $2p+p=n$, $3p=n$, $p\in N$, $n\in N$.

Следовательно, $n$ делится на 3. Тогда, по условию, подходит лишь один из предложенных вариантов – 42.

Так как $m=2p$, то $n=m+p=m+\frac{m}{2}=\frac{3m}{2}$.

Так как $n=42$, то $42=\frac{3m}{2}$, $m=28$.

Итак, количество маргариток в саду равно 28.

*Ответ:* 28.

**Задача 3.** Решить уравнение $7\left(x+\frac{1}{x}\right)-2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=9$.

*Решение 1.* ОДЗ: $x\neq 0$.

Пусть $x+\frac{1}{x}=t$. Тогда $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=t^2$, $x^2+2+\frac{1}{x^2}=t^2$, $x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$.

С учётом замены имеем: $7t-2\left(t^2-2\right)=9$. Решая полученное уравнение, находим корни, равные 1 и 2,5.

Уравнение $x+\frac{1}{x}=1$ не имеет действительных корней. Решениями уравнения $x+\frac{1}{x}=2{,}5$ являются числа 0,5 и 2.

*Решение 2.* ОДЗ: $x\neq 0$.

$$7x+\frac{7}{x}-2x^2-\frac{2}{x^2}-9=0,\ \frac{7x^3+7x-2x^4-2-9x^2}{x^2}=0.$$

Умножая обе части уравнения на $x^2\neq 0$, получим

$$7x^3+7x-2x^4-2-9x^2=0.$$

$$-2x^4+x^3+6x^3-3x^2-6x^2+3x+4x-2=0,$$

$$\left(-2x^4+x^3\right)+\left(6x^3-3x^2\right)+\left(-6x^2+3x\right)+\left(4x-2\right)=0,$$
$$-x^3(2x-1)+3x^2(2x-1)-3x(2x-1)+2(2x-1)=0,$$
$$-(2x-1)\left(x^3-3x^2+3x-2\right)=0,$$
$$-(2x-1)\left((x-1)^3-1\right)=0.$$

$2x-1=0$, $x=0{,}5$ или $(x-1)^3-1=0$, $(x-1)^3=1$, $x-1=1$, $x=2$.

*Ответ:* 0,5; 2.