Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Новосибирский государственный технический университет»

Факультет Автоматики и вычислительной техники
Кафедра Вычислительной техники

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА
Численные методы интерполяции функций

Методические указания к лабораторной работе
для студентов II курса дневного отделения АВТФ
Образовательные программы:
09.03.01 «Информатика и ВТ»;
09.03.04 «Программная инженерия»;
12.03.01 «Приборостроение»

НОВОСИБИРСК
2017

Содержание

1 Описание и варианты заданий лабораторной работы

Цели и задачи работы

1. Исследовать поведение ошибки аппроксимации табличной функции многочленом Тейлора на отрезке непрерывности [a, b] в зависимости от степени аппроксимирующего многочлена и от положения точки разложения на выбранном интервале.
2. С помощью интерполяционных многочленов Лагранжа (или Ньютона) изучить распределение ошибки глобальной интерполяции в пределах таблицы заданной функции.
3. С помощью интерполяционных многочленов Лагранжа (или Ньютона) изучить распределение ошибки глобальной интерполяции в пределах таблицы заданной функции.
4. Выяснить влияние степени многочлена на ошибку интерполирования.
5. Используя "скользящий " интерполяционный многочлен, изучить влияние степени многочлена на ошибку интерполирования в зависимости от степени многочлена.
6. Применить и сформулировать рекомендации по использованию средств МСАД для решения нелинейных уравнений.
7. Проанализировать результаты работы и сделать выводы.
   Экспериментальные данные о поведение ошибки аппроксимации табличной функции многочленом Тейлора в зависимости от степени аппроксимирующего многочлена и положения точки разложения рекомендуется свести в таблицу вида:

Таблица 1

n	**Ошибка**		
	c = a	**c = b**	**c = (a+ b)/2**
1			
2			
3			
4			

Для ручной оценки величины максимальной погрешности интерполяции для многочленов Лагранжа (Ньютона) различной степени рекомендуется используя режим трассировки графиков из опций MathCAD.

Таблица 2

степень многочлена	Максимальная ошибка	
	n = 5	n = 10
1		
2		
3		
4		
n		

Варианты контрольных заданий
В качестве аппроксимируемых функций на выбранном самостоятельно интервале непрерывности использовать левые части уравнений из таблицы вариантов задания лабораторной работы №1. Число узлов интерполяции принять равным 5 и 10.

2 Краткая теория к лабораторной работе

Можно выделить четыре способа применения методов аппроксимации, отличающихся областями их «действия».

1. ***Глобальный*** способ, в котором для всей области **Ω =[a,b]** определяется одна функция $f_g(x,c)$.

2. ***Локальный*** способ, когда функция восполняется только в окрестности некоторой точки x_i. Это восполнение обычно осуществляется на основе формулы Тейлора.

3. ***Кусочный*** способ, когда ищется одна или несколько функций $f_{ki}(x,c), i = 0,1,..$, каждая из которых является, например, многочленом степени k и имеет область определения в виде частичного отрезка $\Omega_{ki}=[x_i,x_{i+k}]$ (1≤к<n, к=1,2,..), называемого «окном» аппроксимации, которое составляет шаблон $(x_i,x_{i+1},\ldots,x_{i+k})$ Саму функцию $f_{ki}(x,c)$,построенную на одном шаблоне, обычно называют звеном.

4. **Кусочно-глобальный способ**, в котором область **Ω =[a,b]** представляется совокупностью N частичных отрезков Ω_{ki}, таких, что $\Omega = \bigcup_{i=1}^{N} \Omega_{ik}$. На первом этапе на каждом из отрезков ищется функция $f_{ki}(x,c)$ - *i*-е звено с применением кусочного способа аппроксимации. На следующем этапе производится объединение всех звеньев в одну многозвенную функцию, т.е. $f_k(x,c) = \bigcup_{i=1}^{N} f_{ki}(x,c)$. Примером такой аппроксимации является интерполяция сплайнами. В данной работе затрагиваются первые 3 способа. В следующей лабораторной работе будут рассматриваться 1 и 4 способы.

2.1 Постановка задачи интерполяции

Пусть задана совокупность *узлов интерполяции* или *сетка* на некотором отрезке $[a, b]$. В простейшем случае сетка — равномерная, т.е. расстояние между соседними узлами одинаково. В дальнейшем также рассмотрим неравномерные сетки.

1. Совокупность узлов $\{t_n\}_{n=0}^{N},\ t_n = a + n\tau,\ \tau = (b-a)/N,\ t \in [a,b]$. Примечание. Для большинства сформулированных ниже утверждений требование того, что сетка равномерная, не является обязательным, почти все утверждения легко доказываются для любой сетки, важно только чтобы среди узлов не было совпадающих.

2. Сеточная проекция функции $f(t)$ на $[a, b]$, т.е. таблица $f_n = \{f(t_n)\}_{n=0}^{N}$; эту таблицу задает оператор ограничения на сетку или рестрикции (от английского *restriction*) **R**.

Задача состоит в том, чтобы по таблице $\{f_n\}$ восстановить непрерывную функцию. Обозначим ее через $F(t)$. Разумеется, она отличается от исходной функции $f(t)$, причем такое восстановление неоднозначно и осуществляется оператором интерполяции **I**. Сама функция $F(t)$ называется интерполирующей или интерполянтом. Необходимо оценить потерю информации при действии этого оператора, т. е. величину $|f(t) - F(t)|$, зависящую от типа оператора интерполяции и свойств $f(t)$, в частности, ее гладкости. Таким образом, имеем схему:

$$f(t) \underset{\mathbf{R}}{\rightarrow} \{f_n\}_{n=0}^{N} \underset{\mathbf{I}}{\rightarrow} F(t).$$

Если необходимо восстановить значение функции между узлами сетки, говорят о задаче *интерполяции*, если вне отрезка $[a,b]$ — то о задаче *экстраполяции*.

Иногда у нас нет никакой априорной информации о непрерывной функции , а есть только функция заданная таблично. Например, при обработке результатов эксперимента.

2.2 Интерполяция обобщенными полиномами

Для того чтобы функция (*обобщенный полином*) $F(t) = \sum_{n=0}^{N} u_n \varphi_n(t)$ была интерполирующей, необходимо выполнение условий:

$F(t_k) = f_k, \; k = 0 \div N,$ где f_k — значения функции в точках интерполяции. Для вычисления коэффициентов обобщенного полинома получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} u_0 \cdot \varphi_0(t_0) + u_1 \cdot \varphi_1(t_0) + \ldots + u_N \cdot \varphi_N(t_0) = f_0, \\ u_0 \cdot \varphi_0(t_1) + u_1 \cdot \varphi_1(t_1) + \ldots + u_N \cdot \varphi_N(t_1) = f_1, \\ \ldots \\ u_0 \cdot \varphi_0(t_N) + u_1 \cdot \varphi_1(t_N) + \ldots + u_N \cdot \varphi_N(t_N) = f_N, \end{cases}$$

или в векторной форме

$\mathbf{Au} = \mathbf{f}$,

где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \varphi_0(t_0) & \varphi_1(t_0) & \ldots & \varphi_N(t_0) \\ \varphi_0(t_1) & \varphi(t_1) & \ldots & \varphi_N(t_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_0(t_N) & \varphi_1(t_N) & \ldots & \varphi_N(t_N) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_0 & u_1 & \ldots & u_N \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_0 & f_1 & \ldots & f_N \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

Теорема

Для того чтобы решение задачи интерполяции существовало и было единственным, необходимо и достаточно, чтобы система базисных функций $\varphi_n(t_k)$ была линейно независима.

Теорема (доказывается в курсе линейной алгебры)

Для того чтобы система функций $\varphi_n(t_k)$ была линейной независимой в точках t_0, …, t_n, необходимо и достаточно, чтобы определитель матрицы Грамма

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} * \mathbf{A} = \begin{pmatrix} (\varphi_0, \varphi_0) & (\varphi_0, \varphi_1) & \ldots & (\varphi_0, \varphi_N) \\ (\varphi_1, \varphi_0) & (\varphi_1, \varphi_1) & \ldots & (\varphi_1, \varphi_N) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (\varphi_N, \varphi_0) & (\varphi_N, \varphi_1) & \ldots & (\varphi_N, \varphi_N) \end{pmatrix}$$

был отличен от нуля. Здесь каждый элемент матрицы Грамма имеет вид

$$\gamma_{jk} = (\varphi_k, \varphi_j) = \sum_{i=0}^{N} \varphi_k(t_i) \cdot \varphi_j(t_i).$$

В случае, если система функций $\{\varphi_j\}_0^N$ ортогональна на множестве точек $\{t_j\}_0^N$, решение задачи интерполяции значительно упрощается (напомним, что система функций $\{\varphi_j\}_0^N$ является ортогональной на множестве точек $\{t_j\}_0^N$, если $(\varphi_k, \varphi_j) = 0$ при $k \neq j$ и $(\varphi_k, \varphi_j) \neq 0$ при $k = j$ для всех $k = 0,1,\ldots,N$; $j = 0,1,\ldots,n$).

Дело в том, что матрица Грамма для ортогональной системы функций диагональна, и ее определитель отличен от нуля (всякая ортогональная система функций заведомо линейно независима). Линейная система уравнений представляется как $\mathbf{A}^*\mathbf{Au} = \mathbf{A}^*\mathbf{f}$, или $\mathbf{Cu} = \mathbf{b}$, где $\mathbf{C} = \mathbf{A}^*\mathbf{A}$, $\mathbf{b} = \mathbf{A}^*\mathbf{f}$ — вектор, а ее решение в случае $\mathbf{A}^*\mathbf{A} = \mathbf{E}$ есть $\mathbf{u} = \mathbf{A}^*\mathbf{f}$.

Примером ортогональной системы являются показательные функции $e^{2\pi i k t_j}$ на множестве точек $t_j = j/N$, $j = 0,1,\ldots,N$ (на отрезке [0, 1]).

2.3 Полиномиальная (алгебраическая) интерполяция

Самый простой способ выбора базиса из линейно независимых функций — взять степени независимой переменной (степенной базис). Такая интерполяция носит название алгебраической интерполяции. В этом случае $(u_k(t) = t^k)$ СЛАУ для определения коэффициентов интерполяционного полинома имеет вид

$$\begin{cases} u_0 + u_1 t_0 + \ldots + u_N t_0^N = f_0, \\ u_0 + u_1 t_1 + \ldots + u_N t_1^N = f_1, \\ \ldots \\ u_0 + u_1 t_N + \ldots + u_N t_N^N = f_N, \end{cases}$$

а ее определитель

$$\det \begin{pmatrix} 1 & t_0 & t_0^2 & \ldots \\ 1 & t_1 & t_1^2 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & t_N & t_N^2 & \ldots \end{pmatrix} = \prod_{i \neq j}^{N} (t_i - t_j), \;\; 0 \leq j < i \leq N,$$

отличен от нуля, если узлы интерполяции попарно различны. Это известный из курса линейной алгебры определитель Вандермонда.

Таким образом, доказано, что решение задачи алгебраической интерполяции всегда существует и единственно.

Мы, таким образом, доказали следующую **теорему о существовании и единственности решения задачи алгебраической интерполяции.**.

Пусть заданы узлы $\{t_n\}_{n=0}^N$, $t_n = a + n\tau$, $\tau = (b-a)/N$, $t \in [a, b]$. Среди узлов интерполяции нет совпадающих. Заданы также значения функции в этих узлах. Тогда существует единственный многочлен степени не выше N, принимающий в заданных узлах заданные значения.

Прямое решение этой системы никогда не используется в практических вычислениях. При больших N система для определения коэффициентов интерполяции оказывается *плохо обусловленной*.

Однако решение этой задачи можно построить другим способом.

$$L_N(t) = \sum_{n=0}^{N} f_n \cdot \varphi_n^N(t),$$

где $\varphi_n^N(t) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq n}}^{N} \dfrac{t - t_j}{t_n - t_i}$ — базисные функции, являющиеся полиномами степени N, каждый из которых сопоставлен со своим узлом сетки так, что $\varphi_n^N(t_k) = \delta_k^n$. Заметим, что правильнее было бы писать, $L_N(t, \{t_n\}, \{f_n\})$, т.е. интерполянт зависит от t, сетки и сеточной функции. Такой вид записи алгебраического интерполяционного полинома не единственен. Выписанный полином называется интерполяционным полиномом *в форме Лагранжа*. Он удобен для теоретического рассмотрения, но на практике часто оказывается более удобной другая форма представления — полином *в форме Ньютона*, о котором речь пойдет ниже.

2.4 Оценка погрешности интерполяции по остаточному члену

Введем понятие остаточного члена интерполяции для оценки погрешности

$R_N(t) = f(t) - L_N(t)$. (2)

Теорема. Пусть функция $f(t)$ имеет на отрезке $[a, b]$ $N + 1$ ограниченную производную. Тогда $R_N(t) = \dfrac{1}{(N+1)!}\prod\limits_{j=0}^{N}(t-t_j)\cdot f^{(N+1)}(\xi)$, где $\xi \in [a,b]$.

Доказательство

Рассмотрим функцию

$$\psi(x) = f(x) - L_N(x) - R_N(t)\frac{(x-t_0)(x-t_1)\dots(x-t_N)}{(t-t_0)(t-t_1)\dots(t-t_N)},$$

имеющую, по крайней мере, $N + 1$ производную. По условию, эту производную имеет $f(x)$, а два остальных выражения – полиномы.

$\psi(x)$ на $[a, b]$ имеет, по крайней мере, $N + 2$ нуля.

Их можно указать. Точки $x = t_n$ ($n = 0, \dots, N$) — нули, поскольку $f(t_n) = L(t_n)$, а последнее слагаемое обращается в них в нуль. $N + 2$ нулем является точка $x = \xi$ в силу определения остаточного члена. Далее, поскольку между каждыми двумя нулями непрерывно дифференцируемой функции имеется хотя бы один нуль ее производной (теорема Ролля), на $[a, b]$ имеется хотя бы $N + 1$ нуль производной ψ'. Применяя это рассуждение к ψ'', ψ''', … можно показать, что существует точка $\xi \in [\grave{a}, b]$, такая, что $\psi^{(N+1)}(\xi) = 0$.

Вычислим $N + 1$ производную правой части выражения для $F(x)$ с учетом того, что $L^{(N+1)} = 0$. Кроме того, в точке ξ

$$\psi^{(N+1)}(\xi) = f^{(N+1)}(\xi) - L^{(N+1)}(\xi) - \frac{d^{N+1}}{dx^{N+1}}\left[R_N(t)\cdot\frac{(x-t_0)\dots(x-t_N)}{(t-t_0)\dots(t-t_N)}\right]_{\xi},$$

$$L^{(N+1)}(\xi) = 0; \quad \Psi^{(N+1)}(\xi) = 0;$$

$\dfrac{d^{N+1}}{dx^{N+1}}\left[\dfrac{(x-t_0)\dots(x-t_N)}{(t-t_N)\dots(t-t_N)}\right]\Bigg|_{x=\xi} = \dfrac{(N+1)!}{\prod\limits_{j=0}^{N}(t-t_j)}$. Тогда $f^{(N+1)}(\xi) - R_N(t)\cdot\dfrac{(N+1)!}{\prod\limits_{j=0}^{N}(t-t_j)} = 0,$ откуда получим выражение для $R_N(t)$:

$$R_N(t) = \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!}\prod_{j=0}^{N}(t-t_j).$$

Рассмотрим некоторые важные следствия этой теоремы.

Следствие (точность интерполяции на равномерной сетке).

Положим, что $t_n = n\tau$, $\tau = (b-a)/N$, $t \in [a,b]$, — сетка равномерная. В этом случае имеет место оценка

$$|R_N(t)| \le \frac{\tau^{N+1}}{N+1}C, \quad C = \max_{t\in[a,b]}\left|f^{(N+1)}(t)\right|.$$

Доказательство. Пусть $t = t_k + \alpha\tau$, $\alpha \in [0,1]$, $k = 0,1,\dots,N-1$.

Тогда $t - t_n = k\tau + \alpha\tau - n\tau = (k + \alpha - n)\tau$; откуда $\prod\limits_{n=0}^{N}(t-t_n) = \tau^{N+1}\prod\limits_{n=0}^{N}(k+\alpha-n)$. Можно показать, что $\prod\limits_{n=0}^{N}|k+\alpha-n| \le N!$. Остаточный член оценивается следующим образом:

$R_N(t) = \dfrac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!}\prod\limits_{n=0}^{N}(t-t_n)$, поэтому с учетом приведенных оценок получим

$|R_N(t)| \le \dfrac{\tau^{N+1}}{N+1}\max\limits_{\xi\in[a,b]}\left|f^{(N+1)}(\xi)\right|$.

Рассмотрим, как ведет себя оценка в задаче *экстраполяции* при удалении точки t от интервала $[t_0, t_N]$.

При $t \in [t_N, t_N + \tau]$ имеем $|R_N(t)| \le \tau^{N+1} \cdot \max\limits_{\xi \in [t_0,\, t_N+\tau]} \left| f^{(N+1)}(\xi) \right|$, поскольку $\prod\limits_{n=0}^{N+1} |k + \alpha - n| \le (N+1)!$

При $t \in [t_N + \tau, t_N + 2\tau]$ $|R_N(t)| \le (N+2)\tau^{N+1} \max\limits_{\xi \in [t_0,\, t_N+2\tau]} \left| f^{(N+1)}(\xi) \right|$, так как $\prod\limits_{n=0}^{N+2} |(k + \alpha - n)| \sim (N+2)!$

При $t \in [t_N + 2\tau,\ t + 3\tau]$ $|R_N(t)| \le \dfrac{(N+2)(N+3)}{2!} \tau^{N+1} \max\limits_{\xi \in [t_0,\, t_N+3\tau]} \left| f^{(N+1)}(\xi) \right|$, и так далее.

Видно, что ошибка экстраполяции растет быстро, но не сразу: экстраполяция допустима на интервалах ~$O(\tau)$.

Другое следствие из доказанной теоремы об остаточном члене интерполяции.

Теорема. Пусть функция $f(t)$ определена на $[a, b]$ и имеет непрерывную производную порядка p+1 на этом отрезке. Пусть задана сетка $\{t_n\}_{n=0}^{N}, t_n = a + n\tau, \quad \tau = (b-a)/N$, $t \in [a, b]$. ($N>p$). Для вычисления производных

$$\frac{d^q}{dx^q} f(t) \quad 1 \le q \le p$$

Можно воспользоваться приближенным равенством, положив

$$\frac{d^q}{dx^q} f(t) \approx \frac{d^q}{dx^q} P_N(t), \quad 1 \le q \le p$$

При этом погрешность будет удовлетворять неравенству

$$\max \left| \frac{d^q}{dx^q} f(t) - \frac{d^q}{dx^q} P_N(t) \right| \le \frac{\max \left| f^{(p+1)}(t) \right|}{(p+1-q)!} (b-a)^{p+1-q}$$

Таким образом, мы получили еще один способ построения формул численного дифференцирования – вычисление производных интерполяционного полинома.

2.5 Интерполяционный полином в форме Ньютона

Пусть задана табличная функция. Построим таблицу *разделенных разностей*

x	f			
x_0 x_1 x_2 … … x_N	f_0 f_1 f_2 … … f_N	$f(x_0, x_1)$ $f(x_1, x_2)$ $f(x_{N-1}, x_N)$	$f(x_0, x_1, x_2)$ $f(x_{N-2}, x_{N-1}, x_N)$	$f(x_0, x_1, \dots, x_N)$

Введем обозначение $f(x_i, x_j) = \dfrac{f_i - f_j}{x_i - x_j}$, $i \ne j$ разделенная разность (или разностное отношение) первого порядка. Очевидно, что $f(x_i, x_j) = f(x_j, x_i)$

Вычислим все разностные отношения первого порядка по 2-м первым точкам (разделенные разности). Определим рекуррентно разделенные разности более высокого порядка.

$$f(x_i, x_j, \dots, x_l) = \frac{f(x_i, x_j, \dots, x_k) - f(x_j, \dots, x_k)}{x_i - x_l}$$

Теперь можно построить всю таблицу разделенных разностей.

$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{\left(\frac{f_0 - f_1}{x_0 - x_1} - \frac{f_1 - f_2}{x_1 - x_2}\right)}{(x_0 - x_2)}$$

Предположим, что сетка равномерная, т.е. $x_k = x_0 + kh$

$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{f_0 - 2f_1 + f_2}{2h^2}$$

Если мы вычислим вторую производную в точке x_1

$$f''(x_1) \approx \frac{f_0 - 2f_1 + f_2}{h^2}$$

Разделенная разность 2-ого порядка, то она будет аппроксимировать производную 2 порядка с точностью до числового множителя $\cdot \frac{1}{2}$. Если аналогично рассуждать дальше, то разделенная разность порядка *k* будет аппроксимировать соответствующую производную с точностью до числового множителя $\frac{1}{k!}$.

По данным на сетке наибольший порядок разности, которую возможно вычислить $f(x_0, x_1, \dots, x_N)$ — разделенная разность N -ого порядка.

Определим $P^N(x) = f_0 + f(x_0, x_1)(x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1) + \dots$

$$+ f(x_0, x_1, \dots, x_N)(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{N-1}),$$

Проверим, что этот полином является интерполяционным, проверяется по методу математической индукции. Надо проверить совпадения интерполяционного полинома и функции в узлах интерполяции.

$$f_0 + \frac{f_0 - f_1}{x_0 - x_1}(x_1 - x_0) = f_0 - f_0 + f_1 = f_1$$

Проверим дальше, устанавливается совпадение:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2$$

Интерполяционный полином в форме Ньютона играет примерно ту же роль, что и формула Тейлора в математическом анализе.

При больших степенях полином Ньютона становится вычислительно неустойчивым, увеличивается ошибка округления (так же, как и полином в форме Лагранжа).

3 Вопросы самоконтроля

1. Понятие непрерывной и точечной аппроксимации
2. Что такое интерполяция?
3. Понятие глобальной и кусочной интерполяции.
4. Применение ряда Тейлора для аппроксимации функции.
5. Как связана степень интерполяционного многочлена с количеством узлов интерполяции?
6. Что такое узлы интерполяции, способы задания и влияние их на точность приближения функций?
7. В чем заключается определение интерполирующего многочлена?

8. Как построить интерполяционный многочлен Лагранжа?
9. Что такое конечная разность первого (n-го) порядка? Как она находится?
10. Интерполяционная формула Ньютона для равноотстоящих узлов.
11. Как оценивается погрешность метода интерполирования с помощью формул Ньютона (Лагранжа)?
12. Что значит «интерполирование вперед», «интерполирование назад»?
13. Как ведет себя погрешность приближения таблично заданной функции методом интерполирования?
14. Как обосновывается существование и единственность интерполяционного многочлена?
15. Построение сглаживающего многочлена и его отличие от интерполяционного.
16. Как распределяется ошибка интерполирования в пределах таблицы при глобальной интерполяции?
17. Как изменяется ошибка интерполирования внутри таблицы с ростом степени многочлена? Как она ведет себя на концах таблицы?
18. Как следует организовать построение интерполяционного многочлена при локальной интерполяции, чтобы минимизировать ошибку?

Литература

1. Латыпов И.И. Численные методы. Лабораторный практикум: Учебное пособие для студентов физико-математического факультета по основам численных методов. Книга 1.– Бирск: Бирск.гос.соц.-пед.акад., 2007. – 94 с.

2. **Исаков В.Б. Элементы численных методов:** Учебное пособие. - М.: Академия, 2003.- 192 с. :ил.

3. Поршнев С. В., Беленкова И. В.
Численные методы на базе Mathcad. СПб.; БХВ-Петербург, 2005. 464 с: ил.

Приложение.

П1 Файл с примером выполнения задания лабораторной работы и применения средств MathCad для решения задач аппроксимации функций (Пример выполнения ЛабРаб 4.xmcd)

П2 Файлы MathCad-программ с примерами различных методов интерполяции и способов их реализации в папке «ДопПримеры к ЛабРаб 4»