Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Новосибирский государственный технический университет»

Факультет Автоматики и вычислительной техники

Кафедра Вычислительной техники

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА
Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений

Методические указания к лабораторной работе № 7
для студентов II курса дневного отделения АВТФ
Образовательные программы:
09.03.01 «Информатика и ВТ»;
09.03.04 «Программная инженерия»;
12.03.01 «Приборостроение»

НОВОСИБИРСК
2017

Содержание

1 Описание лабораторной работы

Цель работы: На основе заданного дифференциального уравнения приобрести опыт, практические навыки численного решения ОДУ и исследования на основе вычислительных экспериментов основных свойств вычислительных процессов и результатов применения численных методов.

Задание.

Задано одно ОДУ 1-го порядка $y' = f(x, y)$ с известной функцией $f(x, y)$. Найти численное решение задачи Коши для этого уравнения на отрезке $0 \leq x \leq 1$, при $y(0) = 1$ с помощью системы MathCad, используя три разных метода:

1. Метод высокого порядка (Рунге-Кутта);
2. Метод Эйлера;
3. Неявный метод Эйлера.

Порядок решения.

По п.1 записать программу вычисления $f(x, y)$ MathCad и использовать стандартные процедуры решения ОДУ в этой системе (например, **rkadapt, rkadart, rkfixed**). Найти шаг, обеспечивающий абсолютную погрешность решения $\varepsilon \leq 0.01 \div 0.001$ при $x = 1$ и относительную погрешность $\varepsilon / y < 0.1$.

По п.2 записать формулы метода Эйлера и запрограммировать их в MathCad. Записать условия устойчивости численного решения и найти шаг, обеспечивающий устойчивость и погрешность п.1.

По п.3 записать формулы неявного метода Эйлера и запрограммировать их в MathCad. При этом для решения нелинейного уравнения на каждом шаге интегрирования использовать стандартную процедуру поиска корня вычисления уравнения в системе MathCad (root). Уменьшая шаг, найти его величину, обеспечивающую ту же погрешность, что и в п.1. Записать условие устойчивости численного решения, убедится, что они выполняются при любом шаге.

По п. 4 на метода основе Рунге-Кутта 4-го порядка решить ОДУ заданного варианта , используя стандартные процедуры решения и параметры ОДУ MathCad, затем запрограммировать соответствующий численный метод в MathCad.

Исследовать влияние шага интегрирования на точность решения, добиться получение решения с заданной точностью.

Отчет по работе.

Привести:

- общие формулы всех трех методов численного интегрирования, их конкретный вид для заданного уравнения;
- общие условия устойчивости для методов Эйлера, их конкретный вид для заданного уравнения и величину шага, обеспечивающего устойчивость;
- результаты расчета функции $f(x)$ по всем трем методам в виде таблиц и графиков;
- выводы по сравнительной величине шага, обеспечивающего заданную точность по трем методам;
- провести сравнительный анализ рассмотренных способов решения поставленной задачи и сформулировать рекомендации по их использованию.

2 Варианты контрольных заданий

Для студентов групп АВТ-*9 и *10, номера вариантов от 1 до 30 выбираются согласно номера фамилии в списке журнала контроля за посещением занятий, для студентов групп АВТ-*15, АВТ-*18 и *19 номера вариантов - от 31 до 60

Вариант	***f(x,y)***
1	$-2y+27y^2-x^2y$
2	$3y+26y^3-xy^2$
3	$-4y+25y^2+x^2y^2$
4	$5y-24y^3-x^3y$
5	$-6y+23y^2-xy^3$
6	$7y+22y^3+x^3y^3$
7	$-8y+21y^2-x^2y^3$
8	$9y-20y^3-x^3y^2$
9	$-10y+19y^2+x^2y$
10	$11y+18y^3-xy^2$
11	$-12y+17y^2-x^3y$
12	$13y-16y^3+xy^3$
13	$-14y+15y^2-x^2y^3$
14	$15y+14y^3-x^3y^2$
15	$-16y+13y^2+xy$
16	$17y-12y^3-x^3y^3$
17	$-18y+11y^2-xy^3$
18	$19y+10y^3+x^3y$

Вариант	***f(x,y)***
31	$-18y+11y^2-xy^3$
32	$19y+10y^3+x^3y$
33	$-20y+8y^2-xy^2$
34	$21y-9y^3-x^2y$
35	$-22y+5y^2+x^3y^2$
36	$23y+7y^3-x^2y^3$
37	$-24y+7y^2-x^3y$
38	$25y-4y^3+2xy^2$
39	$-26y+4y^2-x^3y^2$
40	$27y+3y^2-2x^2y^3$
41	$-28y+2y^2+2x^2y^3$
42	$29y-3y^3-2xy^2$
43	$-30y+4y^2-x^3y$
44	$31y+5y^3+x^2y^2$
45	$-32y+5y^2-2x^3y^3$
46	$33y-8y^3+2xy^3$
47	$-32y+9y^2-2x^2y$
48	$-18y+12y^2-2xy^3$

19	$-20y+9y^2-xy^2$	49	$19y+6y^3+x^3y$
20	$21y-8y^3-x^2y$	50	$11y+18y^3-2xy^2$
21	$-22y+7y^2+x^3y^2$	51	$-12y+17y^2-2x^3y$
22	$23y+6y^3-x^2y^3$	52	$13y-16y^3+2xy^3$
23	$-24y+5y^2-x^3y$	53	$-14y+15y^2-2x^2y^3$
24	$25y-4y^3+xy^2$	54	$15y+14y^3-2xy$
25	$-26y+3y^2-x^3y^2$	55	$-16y+13y^2+2xy$
26	$27y+2y^2-x^2y^3$	56	$17y-12y^3-2x^3y^3$
27	$-28y+y^2+x^2y^3$	57	$-18y+11y^2-2xy^3$
28	$29y-2y^3-xy^2$	58	$19y+10y^3+2x^3y$
29	$-30y+3y^2-x^3y$	59	$-20y+9y^2-2xy^2$
30	$31y+4y^3+x^2y^2$	60	$21y-8y^3-2x^2y$

3 Краткая теория к лабораторной работе

Описание основных положений рассматриваемых далее численных методов решений ОДУ будет иллюстрироваться на примере решения уравнения $y'=-ay$, $y(0)=1$. Точное решение уравнения известно: $y=e^{-ax}$.

Абсолютную погрешность расчета d_{k+1} на $(k+1)$-м шаге можно представить в виде суммы трех слагаемых

$$d_{k+1}=d1_{k+1}+d2_{k+1}+gd_k,$$

где $d1_{k+1}$ - погрешность метода, на $(k+1)$-м шаге, $d2_{k+1}$ - погрешность исходных данных и округления на $(k+1)$-м шаге, а последнее слагаемое учитывает перенос суммарной погрешности предыдущего шага на данный шаг с некоторым множителем g (коэффициент усиления погрешности), зависящем от метода расчета. Величина g характеризует устойчивость метода при выбранном шаге h.

Если $|g|\le 1$, то погрешность d_k не усиливается, метод устойчив. Если же $|g|>1$, то происходит усиление погрешности и метод неустойчив при выбранном шаге h.

3.1 Метод Эйлера

Численное решение ОДУ по методу Эйлера определяется формулами:

$$y_{k+1} = y_k + f\left(x_k, y_k\right)h, \qquad \text{т.к. } f(x,y) = -ay \text{, то}$$

$$y_{k+1} = y_k - ay_k h = y_k\left(1-ah\right).$$

Для примера ОДУ можно выразить y_k через $y(0)$:

$$y_k = y(0)\left(1-ah\right)^k.$$

Формулу $y_{k+1} = y_k + f\left(x_k, y_k\right)h$ можно рассматривать как начало ряда Тейлора для функции $y(x+h) = y(x) + h \cdot y'(x) + \ldots$, т.к. $y' = f$ по определению ОДУ. Отбрасывание старших производных означает линейную интерполяцию для $y(x)$ на шаге.

Эту же формулу легко получить из геометрической интерпретации производной . Значения $y(x)$ на шаге и $tg(a) = y'$ для наклона касательной показаны на рис.1. Очевидно, что метод Эйлера использует на шаге значение $y' = const$, и это значение равно производной в левой точке шага.

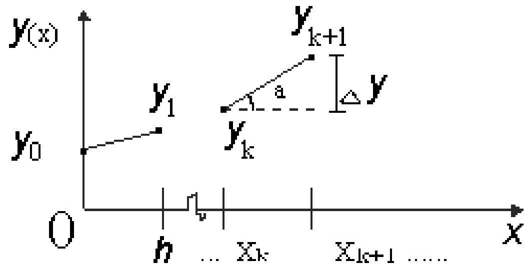


Рис.1. Значения $y(x)$ на шагах по методу Эйлера.

Для метода Эйлера можно получить, что коэффициент усиления погрешности

$$g = 1 + h\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Условие устойчивости $|g| \le 1$. Для рассматриваемого уравнения:

$$g = 1 + h\frac{\partial f}{\partial y} = 1 - ah$$

Для нарастающих решений $a < 0$, $|g| > 1$, абсолютная погрешность нарастает, но не быстрее самого решения, так что относительная погрешность не возрастает.

Пусть например, известна погрешность d_1 в начальном условии, а $d1_k = 0$, $d2_k = 0$. Тогда

$$d_k = gd_{k-1} = g^2 d_{k-2} = \ldots g^k d_0 = \left(1-ah\right)^k d_0,$$

и относительная погрешность постоянна:

$$\frac{d_k}{y_k} = \frac{\left(1-ah\right)^k}{\left(1-ah\right)^k}\frac{d_0}{y(0)} = \frac{d_0}{y(0)}.$$

Для убывающих решений $a > 0$ и $|g| \le 1$ при $0 \le ah \le 2$, т.е. $h \le \frac{2}{a}$ - это условие при котором получается устойчивое решение.

Пусть $a = 20$.

Если $h = 0.2$, $ah = 4$, то $y_k = y(0)(1-4)^k = y(0)(-3)^k$ - получается неверное неустойчивое решение;

Если $h = 0.05$, $ah = 1$, то $y_k = y(0)(1-1)^k = 0$ - решение устойчивое, но неверное, т.к. шаг велик;

Если $h = 0.01$, $ah = 0.2$, то $y_k = y(0)(1-0.2)^k = y(0)(0.8)^k$

и т.д., решение приближается к экспоненте.

3.2 Неявный метод Эйлера

Формула численного решения по неявному методу Эйлера:

$$y_{k+1} = y_k + f(x_{k+1}, y_{k+1})h.$$

Для заданного ОДУ она приводит к линейному уравнению относительно y_{k+1}:

$y_{k+1} = y_k - ay_{k+1}h$, которое решается относительно y_{k+1}:

$$y_{k+1} = \frac{y_k}{1+ah}$$

$$y_k = y(0)\frac{1}{(1+ah)^k}.$$

Для заданного простейшего ОДУ полученное решение позволяет выразить y_k через начальное значение $y(0)$.

Коэффициент усиления погрешности для неявного метода Эйлера определяется соотношением:

$$g = \frac{1}{1-h\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{1}{1+ah}.$$

Условие устойчивости $|g| \le 1$, для нарастающих решений $a < 0$ и получаем следующие значения g при разных шагах:

$1 \le g < \infty$ при $0 \le |a|h \le 1$, $|g| > 1$ - решение неустойчивое;

$-\infty < g < -1$ при $1 \le |a|h < 2$, $|g| > 1$ - решение неустойчивое;

$-1 \le g \le 0$ при $2 \le |a|h < \infty$, $|g| \le 1$, - решение устойчивое, но шаг слишком велик,

$$h \ge \frac{2}{a}.$$

Устойчивость есть, но локальная, погрешность очень большая. Поэтому берем малый шаг, когда $ah \to 0$, $g \to 1$. В этом случае решение формально неустойчиво, но абсолютная погрешность нарастает не быстрее решения.

$$d_k = g^k d_0 = \frac{1}{(1+ah)^k}, \quad \frac{d_k}{y_k} = \frac{d_0}{y(0)}$$

Для убывающих решений $a > 0$ при любых шагах $g < 1$ и метод устойчив.

Если $h = 0.2$, $a = 20$, то $y_k = y(0)\dfrac{1}{5^k}$;

Если $h = 0.05$, $a = 20$, то $y_k = y(0)\dfrac{1}{2^k}$;

Если $h = 0.01$, $a = 20$, то $y_k = y(0)\dfrac{1}{1.2^k}$ и т.д.

3.3 Метод Рунге-Кутта

3.3.1 Метод Рунге-Кутта 2-ого порядка (модифицированный метод Эйлера)

В формуле метода Эйлера используем среднее значение производной. Получим

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left[f\left(x_k, y_k\right) + f\left(x_{k+1}, y^{\wedge}{}_{k+1}\right)\right].$$

В правой части полагаем, как в исходном методе Эйлера $y^{\wedge}{}_{k+1} = y_k + h \cdot f\left(x_k, y_k\right)$. Получаем явный метод, для которого погрешность $\sim h^3$.

Можно переписать формулы так $D1 = f\left(x_k, y_k\right)$, $x_{k+1} = x_k + h$,

$$y_{k+1} = y_k + h\frac{1}{2}\left[D1 + f\left(x_k + h, y_k + hD1\right)\right]$$

3.3.2 Метод Рунге-Кутта 4-ого порядка

Этот одношаговый метод применяется для решения задачи Коши и является самым распространенным. В рассмотренных выше двух методах Эйлера использовалась линейная интерполяция $y(x)$ на шаге и производная y' на каждом шаге вычислялась один раз или два раза. В методе Рунге-Кутта производные на шаге вычисляются 4 раза при разных значениях x и y, и этот метод эквивалентен выполнению четырех шагов по методу Эйлера для получения на текущем шаге искомого значения y_{k+1}.

Введем обозначение D1 для значений производных, полученных в левой точке шага (D1) и в результате выполнения трех вспомогательных шагов по методу Эйлера (D2, D3, D4), причем половинные шаги $h/2$ дают значения D2 и D3, а полный шаг h - значение D4. На рис.2 даны эти шаги, цифры на прямых показывают, какому значению - D1, D2 или D3 - соответствует наклон каждой прямой. Значения D1, D2, D3, D4 показывают производную в каждой точке в виде малого отрезка касательной.

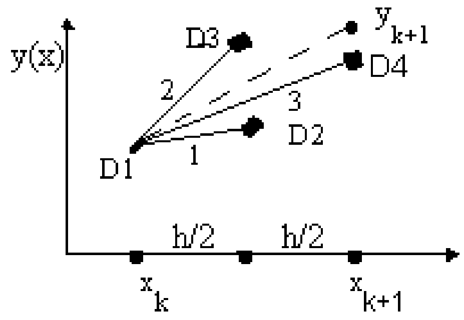


Рис.2. Вспомогательные шаги в методе Рунге-Кутта.

Формулы для вычисления значений производных имеют следующий вид:

$$D1 = f\left(x_k, y_k\right)$$

$$D2 = f\left(x_k + h/2, y_k + D1 \cdot h/2\right)$$

$$D3 = f\left(x_k + h/2, y_k + D2 \cdot h/2\right)$$

$$D4 = f\left(x_k + h, y_k + D3 \cdot h\right)$$

Полученные значения D усредняются с разными весовыми коэффициентами и основной шаг h выполняется по формуле $y_{k+1} = y_k + h \cdot f\left(x_k y_k\right)$ с полученным средним значением D:

$$\bar{D} = \left(D1 + 2 \cdot D2 + 2 \cdot D3 + D4\right)/6$$

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot \bar{D}$$

Строго можно показать, что метод Рунге-Кутта соответствует интерполяции $y\left(x\right)$ полиномом четвертой степени и учитывает в разложении ряда Тейлора для $y\left(x+h\right)$ все производные до пятой. Пятая производная отбрасывается, т.е. абсолютная погрешность этого метода может быть оценена величиной

$$y^{(5)} \cdot h^5/5!$$

Отметим, что для метода порядка p его погрешность на шаге представляется как

$$pgr1 \approx C \cdot h^{p+1},$$

т.е. пропорциональна h^{p+1}. Оценку $y^{(5)} \cdot h^5/5!$ следует сравнить с аналогичной оценкой для метода Эйлера

$$y'' \cdot h^2/2$$

и из сравнения видим, что метод Рунге-Кутта позволяет использовать существенно более крупные шаги. Это показано на рис.3, где пунктирная линия означает точное решение уравнения, полученное, например, с очень мелким шагом или аналитически для специально выбранного уравнения.

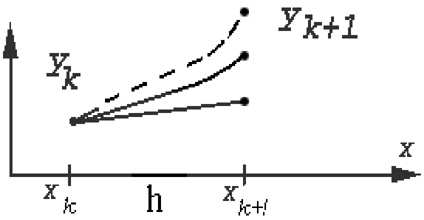


Рис.3 Интерполяция на шаге для метода Рунге-Кутта и точное решение уравнения

3.4 Метод Адамса

Это многошаговый метод, т.е. для вычисления y_{k+1} используют значения y_k, y_{k-1}, y_{k-2}, …. Используем ряд Тейлора:

$$y_{k+1} = y(x_k + h) = y_k + y'(x_k)h + \frac{1}{2!}y''(x_k)h^2 + \frac{h^3}{3!}y'''(x_k) + \frac{h^4}{4!}y'^{\mathrm{v}}(x_k),$$

т.к. $y' = f(x,y)$, то

$$y_{k+1} = y_k + f_k + \frac{h^2}{2!}f_k' + \frac{h^3}{3!}f_k'' + \frac{h^4}{4!}f_k'''.$$

Используем вычисление производных через конечные разности.

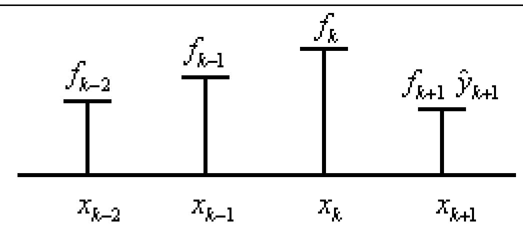
$$f_k' \approx \frac{\Delta f_k}{h},\ f_k'' \approx \frac{\Delta^2 f_k}{h^2},\ f_k''' \approx \frac{\Delta^3 f_k}{h^3},$$

$$\Delta f_k = \frac{f_k - f_{k-1}}{h},\ \Delta^2 f_k = \frac{\Delta f_k - \Delta f_{k-1}}{h^2},\ \Delta^3 f_k = \frac{\Delta^2 f_k - \Delta^2 f_{k-1}}{h^3}.$$

Подставив в y_{k+1}, получим приблизительный прогноз

$$\hat{y}_{k+1} = y_k + \frac{h}{24}\left(55 f_k - 59 f_{k-1} + 37 f_{k-2} - 9 f_{k-3}\right).$$

Далее находим, используя прогноз $f_{k+1} = f\left(x_{k+1}, \hat{y}_{k+1}\right)$



По 4-м точкам строим полином 3-й степени (интерполяция) для производной $y'(x) = f\left(x, y(x)\right) \approx P(x)$. Уточняем приращение $y(x)$ на отрезке x_k, x_{k+1}:

$$y_{k+1} = y_k + \int_{x_k}^{x_{k+1}} y'(x)dx \approx y_k + \int_{x_k}^{x_{k+1}} P(x)dx.$$

Берем интеграл от $P(x)$. Получаем метод прогноза-коррекции Адамса:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{24}\left(9f_{k+1} + 19f_k - 5f_{k-1} + f_{k-2}\right).$$

Для начала счета нужен «разгон», т.е. точки $k = 0, 1, 2$. Для вычисления функции $y(x)$ в точках $k = 1, 2$ используем метод Эйлера или Рунге-Кутта, затем переходим к методу Адамса. Погрешность метода Адамса $\sim h^5$.

4 Вопросы самоконтроля

1. Что значит решить задачу Коши для ДУ первого порядка?
2. Что является решением дифференциального уравнения, системы таких уравнений
3. Графическая интерпретация численного решения ДУ.
4. В какой форме может быть представлен результат численного решения системы дифференциальных уравнений?
5. Какие существуют методы решения ДУ в зависимости от формы представления решения?
6. В чем заключается суть принципа сжимающих отображений?
7. В чем заключается суть метода Эйлера?
8. Применение каких формул позволяет получить значения искомой функции по методу Эйлера?
9. Графическая интерпретация метода Эйлера и усовершенствованного метода Эйлера. В чем их отличие?
10. Основные положения метода Эйлера. Геометрическая интерпретация.
11. Основные положения неявного метода Эйлера. Геометрическая интерпретация.
12. В чем заключается суть метода Рунге-Кутта
13. Как определить количество верных цифр в числе, являющемся решением ДУ методом Эйлера, усовершенствованного метода Эйлера, Рунге-Кутта?
14. Метод Рунге-Кутта. Оценка погрешности метода на шаге интегрирования и на заданном интервале.
15. Какой из рассмотренных в работе метод является более точным, какой менее точным?
16. Перечислите достоинства и недостатки методов решения дифференциальных уравнений.
17. При каких условиях и как в Mathcad можно получить аналитическое решение?
18. В какой форме может быть представлен результат численного решения системы дифференциальных уравнений?
19. Что такое шаг интегрирования? Как он выбирается? Как влияет на точность решения? Как связаны число шагов интегрирования и величина шага?
20. Что называют начальными условиями для системы дифференциальных уравнений? Почему решение системы нельзя получить без начальных условий?
21. Сравните по точности результаты решения систем дифференциальных уравнений методами Эйлера и Рунге-Кутта. Как повысить точность решения?
22. Интегрирование с переменным шагом – в чем смысл такого подхода к решению дифференциальных уравнений?

Литература

1. Киселевская, С.В., Ушаков, А.А. Вычислительная математика. Численные методы [Текст]: учебное пособие. – Владивосток : Изд-во ВГУЭС, 2009. – 96 с.
2. Киреев В.И. Численные методы в примерах и задачах: Учеб. пособие/В.И. Киреев, А.В. Пантелеев. — 3-е изд. стер. — М: Высш. шк., 2008. — 480 с: ил**.**
3. Латыпов И.И. Численные методы. Лабораторный практикум: Учебное пособие для студентов физико-математического факультета по основам численных методов. Книга 1.– Бирск: Бирск.гос.соц.-пед.акад., 2007. – 94 с.
4. Поршнев С. В., Беленкова И. В. Численные методы на базе Mathcad. СПб.; БХВ-Петербург, 2005. 464 с: ил.
5. Васильев А. Н. Mathcad 13 на примерах. — СПб.: БХВ-Петербург, 2006. — 528 с.: ил. (Численное решение дифференциальных уравнений – стр. 460-468)

Приложение.

П 1 Примеры решения ОДУ задачи Коши на основе метода Эйлера и программами-функциями MathCad (файл : РешОДУ метод Эйлера.xmcd)
Пример 1. Решение ОДУ 1-го порядка явным методом Эйлера и сравнения результатов решений с разным шагом
Пример 2. Решение ОДУ 1-го порядка явным методом Эйлера с исследование решения в зависимости от числа участков сетки
Пример 3. Сравнение свойств явного и неявного метода Эйлера
Пример 4. Решение ОДУ модифицированным методом Эйлера и методом Рунге-Кутта
4.1 Модифицированный метод Эйлера ("предиктор-корректор", метод Эйлера-Коши)
4.2 Метод Рунге-Кутта 4 порядка реализуем с помощью стандартной функции и программ-функции
Пример 5. Решение системы дифференциальных уравнений первого порядка с начальными условиями методом Эйлера

П 2 Варианты решения ОДУ на основе вычислительного блока Given \ Odesolve
(файл: Применения Odesolve.xmcd)
Пример 1. Решение ОДУ первого порядка на основе вычислительного блока Given \ Odesolve (3 варианта реализаций решений тестовой задачи)
Пример 2. Использования функции Odesolve для решения Дифф.уравнения третьего порядка
Пример 3. Использования функции Odesolve и rkfixed для решения системы ОДУ

П 3 Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений функциями MathCad (файл: ПримФункМСАДа для ЧислРешДиффУр.xmcd)
Пример 1. Решение ОДУ первого порядка на основе вычислительного блока Given I Odesolve
Пример 2. Дифференциальные уравнения 1-го порядка. Решение задачи Коши функцией rkfixed.

Пример 3. Системы линейных дифф. уравнений первого порядка. Решение функцией rkfixed
Пример 4. Дифференциальное уравнение 2-го порядка. Решение функцией rkfixed
Пример 5. Решение ОДУ или систем высокого порядка. Решение функцией rkfixed
Пример 6. Решение ОДУ с помощью функцией Rkadapt

П 4 Пример выполнения задания лабораторной работы и применения средств MathCad для решения ОДУ (файл: LR7 .xmcd)