**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Новосибирский государственный технический университет»**

**Факультет Автоматики и вычислительной техники
Кафедра Вычислительной техники**

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА
Численные методы решение нелинейных уравнений

Методические указания к лабораторной работе
для студентов II курса дневного отделения АВТФ
Образовательные программы:
09.03.01 «Информатика и ВТ»;
09.03.04 «Программная инженерия»;
12.03.01 «Приборостроение»

НОВОСИБИРСК
2017

Содержание

1. Описание лабораторной работы

Цель работы

1. В соответствии с вариантом контрольного задания найти корни заданного нелинейного уравнения с точностью $\varepsilon = 0{,}0001$ тремя методами из 5 или иным по выбору, например :
- методом хорд (2);
- методом касательных (метод Ньютона) (3);
- методом простых итераций (4).

2. Для каждого метода исследовать обусловленность задачи (численного метода) и влияние заданной точности **ε** на число потребовавшихся итераций.
3. Сравнить методы по скорости сходимости и выбрать наиболее быстро сходящийся вычислительный процесс
4. Применить и сформулировать рекомендации по использованию средств МСАД для решения нелинейных уравнений.
5. Проанализировать результаты работы и сделать выводы.

Результаты численных расчетов должны быть оформлены по всем правилам записи приближенных чисел, т.е. запись приближенного решения только с верными значащими цифрами и допускаемой погрешностью. Анализ численных результатов должен дать ответ на вопрос, соответствуют ли полученные результаты искомому решению поставленной задачи и почему. В отчете обязательно сформулируйте необходимые и достаточные условия сходимости методов; проверьте точность решений. Обсудите замеченные трудности применения методов, дайте рекомендации по решению соответствующих задач на ЭВМ.

2. Варианты контрольных заданий

Вариант	Уравнение	Методы	Вариант	Уравнение	Методы
1	$x^4 - 18x^2 + 6 = 0$	1, 2, 3	31	$2x - \lg(x) - 3 = 0$	3, 4, x
2	$2e^x + 3x + 1 = 0$	4, 5, x	32	$\lg(x) - \frac{4}{2x+1} = 0$	2, 3, 5
3	$x^2 - 3 + 0,5^x = 0$	2, 3, 4	33	$5x + \lg(x) = 3$	1, 2, x
4	$5\sin(x) = x - 1$	1, 4, 5	34	$x^3 - 3x^2 + x - 2 = 0$	2, 4, x
5	$\cos(x + 0,3) = x^2$	3, 4, x	35	$x^3 - 2x^2 + 2x - 3 = 0$	3, 4, 5
6	$x^4 - x - 1 = 0$	2, 3, 5	36	$2e^x + 5x + 1 = 0$	1, 2, 4
7	$x^2 - 20\sin(x) = 0$	1, 2, x	37	$3\sin(x) = x - 2$	2, 3, x
8	$2 \cdot \lg(x) - \frac{x}{2} + 1 = 0$	2, 4, x	38	$\cos(x - 0,5) = x^2$	1, 2, 5
9	$2x^2 - 0,5^x - 3 = 0$	3, 4, 5	39	$x^4 + 2x^2 - x - 1 = 0$	2, 5, x
10	$2^x - 3x - 2 = 0$	1, 2, 4	40	$3x^2 - 2\sin(x) = 0$	1, 2, 3
11	$ctg(x) - \frac{x}{3} = 0$	2, 3, x	41	$2 \cdot \lg(x) - \frac{x}{3} + 1,5 = 0$	4, 5, x
12	$x^3 - 2x + 4 = 0$	1, 2, 5	42	$3x^2 - 0,5^x - 1 = 0$	2, 3, 4
13	$x^2 + 4\sin(x) = 0$	2, 5, x	43	$2^x - x - 4 = 0$	1, 4, 5
14	$x^3 - 6x - 7 = 0$	1, 2, 3	44	$ctg(x + 0,5) - \frac{x}{3} = 0$	3, 4, x
15	$4x - \cos(x) - 1 = 0$	4, 5, x	45	$x^3 + x^2 - 2x + 3 = 0$	2, 3, 5
16	$x + \lg(x) = 0,45$	2, 3, 4	46	$x^2 - 1 + 2\sin(x) = 0$	1, 2, x
17	$tg(0,3x + 0,5) = x^2$	1, 4, 5	47	$x^3 - 2x - 7 = 0$	2, 4, x
18	$x^3 - 3x^2 + 2x - 1,5 = 0$	3, 4, x	48	$4x - 2\cos(x) - 1 = 0$	3, 4, 5
19	$2x - \lg(x) - 5 = 0$	2, 3, 5	49	$x + 2 \cdot \lg(x) = 0,5$	1, 2, 4
20	$\lg(x) - \frac{5}{2x+3} = 0$	1, 2, x	50	$tg(0,2x + 0,3) = x^2 - 1$	2, 3, x

21	$0,5x+\lg(x)=1$	2, 4, x
22	$x^3+x-4=0$	3, 4, 5
23	$x^3-0,5x^2+x+3=0$	1, 2, 4
24	$x^3-x^2+2x+3=0$	2, 3, x
25	$x^2-4\cos(x)=0$	1, 2, 5
26	$x^3-3x-4=0$	2, 5, x
27	$4x-\cos(x)-2=0$	1, 2, 3
28	$x+2\cdot\lg(x)=1,45$	4, 5, x
29	$tg(0,5x-0,3)=x^2-1$	2, 3, 4
30	$x^3-3x^2+4x-5=0$	1, 4, 5

51	$x^3-1,3x^2+x-1=0$	1, 2, 5
52	$2x-3\cdot\lg(x)-3=0$	2, 5, x
53	$2\cdot\lg(x)-\dfrac{5}{4x+3}=0$	1, 2, 3
54	$1,5x+\lg(x)=2$	4, 5, x
55	$x^3+x^2-3=0$	2, 3, 4
56	$x^3-2x^2+3x-4=0$	1, 4, 5
57	$x^3-3x^2+2x+3=0$	2, 3, 5
58	$3x^2-2\cos(x)=0$	1, 2, x
59	$x^3+2x^2-3x-1=0$	2, 4, x
60	$4x-2\cos(x)-1=0$	3, 4, 5

Замечание. Символом «Х» отмечен метод выбираемый студентом самостоятельно из числа дополнительных к рассмотренным (1-5) в данном методическом указании!

3. Краткая теория к лабораторной работе

3.1 Обусловленность вычислительной задачи и алгоритма (численного метода)

Пусть вычислительная задача корректна (её решение существует, единственно и устойчиво по входным данным). Теоретически устойчивость задачи означает, что решение может быть найдено со сколь угодно малой погрешностью, если гарантировать, что погрешности входных данных достаточно малы. Однако на практике точность входных данных ограничена. Под ***обусловленностью*** вычислительной задачи будем понимать чувствительность её решения к неустранимым погрешностям входных данных. Задачу называют ***хорошо обусловленной***, если малым неустранимым погрешностям входных данных соответствуют малые погрешности решения. Если же возможны сильные изменения решения, задача считается ***плохо обусловленной***. В частности, при решении задачи на компьютере точность не может быть произвольной, она всегда ограничена разрядностью сетки; для чисел с плавающей запятой мерой относительной точности представления вещественных чисел служит характеристика машинный эпсилон.

Часто возможно ввести количественную меру степени обусловленности вычислительной задачи – число обусловленности. Эту величину можно интерпретировать, как коэффициент возможного возрастания погрешностей в решении по отношению к вызвавшим их неустранимым погрешностям входных данных.

Пусть между абсолютными неустранимыми погрешностями входных данных $\boldsymbol{x}$ и решения $\boldsymbol{y}$ установлено неравенство

$$\Delta y^* \le \nu_\Delta \Delta x^*,$$

тогда величина $\boldsymbol{\nu_\Delta}$ называется абсолютным числом обусловленности. Если же установлено неравенство

$$\delta y^* \le \nu_\delta \delta x^*$$

между относительными неустранимыми погрешностями входных данных и решения, то величину $\boldsymbol{\delta_\Delta}$ называют относительным числом обусловленности. В данных неравенствах вместо погрешностей могут фигурировать их границы. Чаще под числом обусловленности понимается относительное число обусловленности. Для плохо обусловленной задачи $\boldsymbol{\nu >> 1}$.

Обусловленность задачи вычитания приближённых чисел одного знака $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$:

$$\nu = \frac{|a+b|}{|a-b|}.$$

Обусловленность задачи нахождения корней уравнения. Пусть задано алгебраическое или трансцендентное уравнение f(x, a_1, a_2, …, a_m) = 0. Это уравнение может иметь один или несколько корней или не иметь их вовсе. Каждый корень зависит от числовых данных уравнения a_1, a_2, …, a_m. Число обусловленности k-ого корня в зависимости от параметра находится по формуле:

$$\nu_k = \left. \frac{|a_i| \cdot \left| \frac{f'_{a_i}}{f'_x} \right|}{|x|} \right|_{x=x_k}.$$

Наряду с обусловленностью задачи применяют аналогичное понятие обусловленности вычислительного алгоритма (метода вычислений).

Вычислительный алгоритм называется корректным, если выполнены два условия:

1. для любых входных данных результат может быть получен за конечное число шагов;

2. результат, полученный с помощью алгоритма, устойчив по входным данным.

Алгоритм называется некорректным, если не выполняется хотя бы одно из этих двух условий.

Корректный вычислительный алгоритм называется хорошо обусловленным, если неустранимым погрешностям входных данных соответствуют малые погрешности решения. В частности, если $\boldsymbol{\delta y^* \le \nu \cdot \varepsilon_{маш}}$, где $\boldsymbol{\nu}$ – коэффициент обусловленности. Корректность вычислительного алгоритма - это теоретическая возможность получить решение вычислительной задачи с приемлемой точностью. Хорошо обусловленный вычислительный алгоритм даёт возможность получить такое решение с помощью компьютера.

Неустойчивым методам вычислений, как правило, есть альтернативы. Основная причина возникновения плохо обусловленных задач и алгоритмов – пренебрежение к математике вообще и вычислительной математике в частности; вера в могущество и надёжность стандартных программ так велика, что не считается нужным что-то знать о них.

3.2 Численные методы решения нелинейных уравнений

3.2.1 Метод половинного деления.

Постановка задачи. Дано нелинейное уравнение $F(x)=0$, где функция $y=F(x)$ определена и непрерывна для всех $x\in[a,b]$, причем функция меняет знак на концах этого отрезка, т.е. $F(a)\cdot F(b)<0$.

Найти приближенное решение данного уравнения $F(x)=0$ с точностью $\varepsilon=10^{-3}$, а так же необходимое для этого число разбиений отрезка $[a,b]$.

Приближенное решение $\tilde{\xi}$ и погрешность приближения $\Delta_{\tilde{\xi}}$ находятся по следующей схеме:

$$\tilde{\xi}=\frac{a_n+b_n}{2},\ \Delta\tilde{\xi}=\frac{b_n-a_n}{2},\ n=0,1,2,\ldots;\ a_0=a,\ b_0=b;$$

где $b_n-a_n=\dfrac{b_{n-1}-a_{n-1}}{2}=\dfrac{b-a}{2^n}$, удовлетворяет условиям $F(a_n)\cdot F(b_n)<0$, $(b_n-a_n)\le\varepsilon$;

из последнего определяется число разбиений отрезка $n\ge\log_2\left(\dfrac{b-a}{\varepsilon}\right)$.

Необходимым и достаточным условием корректности вычислительного алгоритма численного решения уравнения F(x)=0 на отрезке [a; b] методом половинного деления является условие F(a)· Fb) < 0.

3.2.2 Метод хорд.

Постановка задачи. Дано нелинейное уравнение $F(x)=0$, где функция $y=F(x)$ определена и непрерывно-дифференцируема для всех $x\in[a,b]$, причем функция меняет знак на концах этого отрезка, т.е. $F(a)\cdot F(b)<0$.

Найти приближенное решение данного уравнения $F(x)=0$ с точностью $\varepsilon=10^{-3}$.

Приближенное решение $\tilde{\xi}$ и погрешность приближения $\Delta_{\tilde{\xi}}$ находятся по следующей схеме:

если $F(b)\cdot F''(x)>0$ на $[a,b]$, то $x_{n+1}=b-\dfrac{F(b)}{F(b)-F(x_n)}\left(b-x_n\right)$, $x_0=a$, $n=0,1,2,\ldots$;

если $F(a)\cdot F''(x)>0$ на $[a,b]$, то $x_{n+1}=a-\dfrac{F(a)}{F(x_n)-F(a)}\left(x_n-a\right)$, $x_0=b$, $n=0,1,2,\ldots$.

Приближенное решение $\tilde{\xi}$ и погрешность приближения $\Delta_{\tilde{\xi}}$:

$$\tilde{\xi}=x_{n+1},\ \Delta\tilde{\xi}=\left|x_{n+1}-\xi\right|\le\varepsilon.$$

3.2.3 Метод Ньютона (метод касательных).

Постановка задачи. Дано нелинейное уравнение $F(x)=0$, где функция $y=F(x)$ определена и непрерывно-дифференцируема для всех $x\in[a,b]$, причем функция меняет знак на концах этого отрезка, т.е. $F(a)\cdot F(b)<0$.

Найти приближенное решение данного уравнения $F(x)=0$ с точностью $\varepsilon=10^{-3}$.

Приближенное решение $\tilde{\xi}$ и погрешность приближения $\Delta_{\tilde{\xi}}$ находятся по следующей схеме:

$$x_{n+1}=x_n-\frac{F(x_n)}{F'(x_n)},\ n=0,1,2,\ldots;$$

если $F(b)\cdot F''(x)>0$ на $[a,b]$, то $x_0=b$;
если $F(a)\cdot F''(x)>0$ на $[a,b]$, то $x_0=a$.

Приближенное решение $\tilde{\xi}$ и погрешность приближения $\Delta_{\tilde{\xi}}$:

$$\tilde{\xi} = x_{n+1},\ \Delta\tilde{\xi} = |x_{n+1} - \xi| \le \varepsilon .$$

3.2.4 Метод итерации.

<u>Постановка задачи</u>. Дано нелинейное уравнение, где функция $y = F(x)$ определена и непрерывно-дифференцируема для всех $x \in [a,b]$, причем функция меняет знак на концах этого отрезка, т.е. $F(a)\cdot F(b) < 0$.

Найти приближенное решение данного уравнения $F(x) = 0$ с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$.

Приближенное решение $\tilde{\xi}$ и погрешность приближения $\Delta_{\tilde{\xi}}$ находятся по следующей схеме:

- уравнение $F(x) = 0$ приводится к виду $x = \varphi(x)$, где функция $y = \varphi(x)$ удовлетворяет условиям: $\varphi(x) \in [a,b]$, дифференцируема на данном отрезке и $0 < |\varphi'(x)| \le q < 1$;
- строится итерационная последовательность вида $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, $n = 0,1,2,\ldots$, где x_0 выбирается произвольно из данного отрезка, например, $x_0 = \dfrac{b+a}{2}$;
- полагая $\tilde{\xi} = x_n$ приближенное значение корня ξ, для погрешности получим $\Delta_{\tilde{\xi}} = |\xi - \tilde{\xi}| \le \dfrac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}|$, а так как по условию $\Delta_{\tilde{\xi}} \le \varepsilon$, то итерационный процесс продолжим до выполнения условия $|x_n - x_{n-1}| \le \dfrac{1-q}{q}\cdot\varepsilon$, при этом приближенное значение корня определяется как $\tilde{\xi} = x_n$.

Приближенное решение $\tilde{\xi}$ и погрешность приближения $\Delta_{\tilde{\xi}}$:

$$\tilde{\xi} = x_n,\ \Delta\tilde{\xi} = |x_n - x_{n-1}|\frac{q}{1-q} \le \varepsilon .$$

3.2.5 Метод хорд и касательных.

<u>Постановка задачи</u>. Дано нелинейное уравнение, где функция $y = F(x)$ определена и непрерывно-дифференцируема для всех $x \in [a,b]$, причем функция меняет знак на концах этого отрезка, т.е. $F(a)\cdot F(b) < 0$.

Найти приближенное решение данного уравнения $F(x) = 0$ с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$.

Приближенное решение $\tilde{\xi}$ и погрешность приближения $\Delta_{\tilde{\xi}}$ находятся по следующей схеме:

если $F(b)\cdot F''(x) > 0$ на $[a,b]$, то

$$x_0 = a,\ x_{n+1} = \overline{x}_n - \frac{F(\overline{x}_n)}{F(\overline{x}_n) - F(x_n)}(\overline{x}_n - x_n),$$

$$\overline{x}_0 = b,\ \overline{x}_{n+1} = \overline{x}_n - \frac{F(\overline{x}_n)}{F'(\overline{x}_n)}, \qquad n = 0,1,2,\ldots;$$

если $F(a)\cdot F''(x) > 0$ на $[a,b]$, то

$$x_0 = b,\ x_{n+1} = \overline{x}_n - \frac{F(\overline{x}_n)}{F(x_n) - F(\overline{x}_n)}(x_n - \overline{x}_n),$$

$$\bar{x}_0 = a\,,\ \bar{x}_{n+1} = \bar{x}_n - \frac{F(\bar{x}_n)}{F'(\bar{x}_n)}\,, \qquad n = 0,1,2,\dots.$$

Приближенное решение $\tilde{\xi}$ и погрешность приближения $\Delta_{\tilde{\xi}}$:

$$\xi = \frac{x_{n+1} + \bar{x}_{n+1}}{2}\,,\ \Delta\tilde{\xi} = \frac{1}{2}\left|x_{n+1} - \bar{x}_{n+1}\right| \le \varepsilon\,.$$

4 Вопросы самоконтроля.

1. Обусловленность вычислительной задачи и алгоритма (численного метода).
2. На что влияет анализ обусловленности задачи решения уравнения
3. Что называется, корнем уравнения и что значит численно решить уравнение?
4. Этапы численного решения нелинейного уравнения с одной неизвестной на ЭВМ.
5. Что такое отделение корней и как отделяются корни уравнения, в чем состоит суть графического отделения корней уравнения?
6. Какой должна быть величина шага при отделении корней, как её определить?
7. Какие условия должны быть выполнены для применения конкретного метода (по выбору студента) уточнения и поиска решения?
8. Какова идея численного метода решения нелинейного уравнения (по выбору студента). и его геометрическая иллюстрация
9. Основные погрешности, возникающие при численном решении нелинейного уравнения?
10. Как зависит погрешность результата от выбора (начального) приближенного решения?
11. Какое условие должно выполняться для сходимости итерационной последовательности?
12. Как находится равносильное уравнение, применяемое для итерационного процесса? Критерий выбора равносильного уравнения.
13. Как определяется погрешность метода итерации для достижения требуемой точности числового результата?
14. Какие положительные и отрицательные стороны метода простой итерации (сравнить с другими методами решения)?
15. Какие численные методы решения нелинейных уравнений вам известны?
16. В каких случаях необходимо использовать итерационные методы?
17. Каким условиям должна соответствовать функция f(x) в канонической форме задания уравнения и что они гарантируют?
18. Что значит решить уравнение итерационным методом?
19. Из каких этапов состоит задача нахождения нуля функции f(x) итерационным методом?
20. Назовите способы отделения корней?
21. В чем общность и отличии итерационных процессов уточнения и поиска решения?
22. В чем сущность метода половинного деления?
23. В чем сущность метода хорд?
24. Какой из концов отрезка [a, b] в методе хорд считается неподвижным?
25. Начальные условия и критерии окончания итерационного процесса в методе хорд?
26. В чем сущность метода Ньютона?
27. Как выбрать начальное приближение для метода Ньютона?
28. Как в программе Mathcad можно организовать итерационный процесс?
29. Что влияет на скорость сходимости итерационного процесса и точность решения?
30. В чем сущность метода простых итераций, как еще называют этот метод?
31. Какие виды итерационных процессов для численного решения уравнения вам известны?

32. Сформулируйте достаточные условия сходимости метода простых итераций?
33. Каким образом можно ускорить получение численного решения нелинейного уравнения.
34. Дайте рекомендации для применения основных правил остановки итерационных вычислительных процессов решения нелинейных уравнений.
35. Дайте информационную интерпретацию вычислительных процессов рассмотренных способов решения уравнений.
36. Перечислите основные характеристики качества вычислительного процесса решения нелинейного уравнения на ЭВМ.
37. Эмпирическая проверка точности численного решения нелинейного уравнения

Литература

1. Латыпов И.И. Численные методы. Лабораторный практикум: Учебное пособие для студентов физико-математического факультета по основам численных методов. Книга 1.– Бирск: Бирск.гос.соц.-пед.акад., 2007. – 94 с.

2. **Ханова А. А.** Численное решение уравнений и систем уравнений: Методическое пособие для студентов института Информационно- технологий телекоммуникаций, Астрахань -2001, -43 стр.

2. Поршнев С. В., Беленкова И. В.
Численные методы на базе Mathcad. СПб.; БХВ-Петербург, 2005. 464 с: ил.

Приложение.

П1. Пример выполнения задания лабораторной работы и применения средств MathCad для решения уравнений (файл: ***Пример и Приложения к ЛР 1.xmcd***).

П2. Ускоренные методы решения нелинейных уравнений

П2.1 Текстовый файл с описание некоторых методов ускорения вычислений : ***Ускоренные методы решНеЛинУрав.docx***

П2.2 Примеры реализации ускоренных методы решения нелинейных уравнений ***Доп ЛР1 УскорРеш НелинУр.xmcd***

П3 Набор файлов с примерами решения различных уравнений на MathCad