

# Rozwiązywanie układów równań liniowych metodami bezpośrednimi

Nikodem Korohoda

AGH, Wydział Informatyki, Elektroniki i Telekomunikacji  
Metody Obliczeniowe w Nauce i Technice 2021/2022

Kraków, 27 maja 2022

## 1 Zadanie 1.

1. Przyjmij wektor  $x$  jako dowolną  $n$  elementową permutację ze zbioru  $\{1, -1\}$  i oblicz wektor  $b$ .
2. Metodą eliminacji Gaussa rozwiąż układ równań  $Ax=B$  żeby wyliczyć  $B$
3. Oblicz ponownie  $x$  z wykorzystaniem  $A$  oraz  $B$
4. Wyznacz błędy wyliczenia  $x$  dla różnych dokładności z użyciem normy maksimum

Dla poniższej macierzy. Za  $x$  początkowo przyjęto wektor  $[1, -1, 1, -1, \dots]$ . Wyliczano dokładności dla Float oraz Decimal.

$$\begin{cases} a_{1j} = 1 \\ a_{ij} = \frac{1}{i+j-1} \end{cases} \quad dla \quad i \neq 1 \quad i, j = 1, \dots, n$$

wielkość macierzy	float	decimal
2	0.0000e+00	0.0000e+00
3	0.0000e+00	9.0000e-27
4	0.0000e+00	7.1760e-25
5	2.8415e-12	1.0080e-23
6	3.3952e-11	1.5463e-22
7	2.0169e-09	1.4110e-20
8	5.3591e-08	4.9968e-19
9	1.8087e-06	1.0446e-17
10	1.0740e-05	2.9821e-16
11	2.9340e-04	5.2500e-15
12	3.7738e-02	8.9695e-14
13	4.0972e-01	3.4920e-13
14	2.4475e-01	2.4816e-13
15	7.2967e-01	2.2755e-12
16	1.1510e+00	2.0973e-12
17	1.0965e+00	2.6710e-12
18	1.8758e+00	3.6640e-12
19	1.1860e+01	2.8073e-11
20	4.7742e+01	6.9392e-12

Tabela 1: Błędy różnych dokładności

## 2 Zadanie 2.

Eksperyment należy powtórzyć analogicznie dla poniższej macierzy, z pominięciem różnych dokładności (używano wyłącznie Float)

$$\begin{cases} a_{ij} = \frac{2i}{j} & dla \ j \geq i \\ a_{ij} = a_{ji} & dla \ j < i \end{cases} \quad i, j = 1, \dots, n$$

wielkość macierzy	błąd zad2.	błąd zad1.
2	0.0000e+00	0.0000e+00
3	2.2204e-16	0.0000e+00
4	2.2204e-16	0.0000e+00
5	2.2204e-16	2.8415e-12
6	2.2204e-16	3.3952e-11
7	3.3307e-16	2.0169e-09
8	1.8874e-15	5.3591e-08
9	1.5543e-15	1.8087e-06
10	4.4409e-15	1.0740e-05
11	6.2172e-15	2.9340e-04
12	6.2172e-15	3.7738e-02
13	4.8850e-15	4.0972e-01
14	7.7716e-15	2.4475e-01
15	8.6597e-15	7.2967e-01
16	7.9936e-15	1.1510e+00
17	7.7716e-15	1.0965e+00
18	7.9936e-15	1.8758e+00
19	7.5495e-15	1.1860e+01
20	7.9936e-15	4.7742e+01
21	8.6597e-15	2.0347e+00
22	9.1038e-15	1.9858e+00
23	9.1038e-15	1.9154e+00
24	1.0658e-14	4.2415e+00
25	1.4877e-14	6.8819e+00
26	2.1760e-14	3.3821e+00
27	2.3981e-14	4.0484e+00
28	2.5091e-14	1.1835e+01
29	3.0864e-14	8.9705e+00
30	2.9532e-14	5.6358e+00
31	4.1744e-14	5.7459e+00
32	5.2180e-14	4.7259e+00
33	5.5067e-14	7.7611e+00
34	4.8184e-14	4.7802e+01
35	4.3521e-14	3.9616e+01
36	4.3299e-14	2.1478e+01
37	3.3529e-14	7.4225e+00
38	3.5971e-14	8.2609e+00
39	3.5527e-14	6.7373e+00
40	3.5305e-14	8.1316e+00
41	4.5963e-14	4.8372e+00
42	6.1506e-14	3.9057e+00
43	5.5289e-14	4.6604e+00
44	4.9294e-14	7.5167e+00
45	5.7954e-14	5.9154e+00
46	6.7946e-14	1.3856e+01
47	9.1926e-14	6.6348e+01
48	9.7256e-14	3.0132e+01
49	1.0258e-13	1.2299e+02
50	8.8152e-14	7.1573e+00
51	8.9040e-14	3.5031e+01
52	1.1058e-13	3.3302e+02
53	9.8366e-14	1.2125e+01
54	1.1324e-13	1.0458e+01
55	1.1657e-13	1.6439e+01
56	1.3367e-13	7.2787e+01
57	1.4588e-13	7.4121e+00
58	1.3078e-13	3.1266e+01
59	1.3189e-13	2.7732e+01
60	1.2657e-13	8.4788e+00
61	1.1791e-13	1.0769e+01
62	1.1990e-13	4.9556e+01
63	1.3123e-13	2.5037e+02
64	1.2457e-13	1.2468e+02
65	2.5391e-13	4.6202e+01
66	2.7978e-13	3.6702e+01
67	2.7056e-13	2.4985e+01
68	2.7767e-13	3.7130e+01
69	2.9232e-13	1.6475e+02

Tabela 2: Błędy różnych macierzy

wielkość macierzy	błąd zad2.	błąd zad1.
70	3.1042e-13	1.1001e+02
71	3.1719e-13	2.2288e+01
72	3.1586e-13	2.3728e+01
73	3.5583e-13	1.7220e+01
74	3.0365e-13	4.1726e+01
75	3.2108e-13	7.0598e+01
76	3.0209e-13	1.3919e+01
77	2.8211e-13	1.3367e+01
78	3.0387e-13	9.9354e+00
79	3.0065e-13	1.6464e+01
80	2.7767e-13	1.1503e+01
81	3.1330e-13	2.0259e+01
82	3.3096e-13	1.7766e+01
83	3.4317e-13	4.8426e+01
84	3.7848e-13	2.7513e+02
85	3.3229e-13	9.2107e+01
86	3.1275e-13	2.5572e+01
87	3.2574e-13	2.9730e+02
88	4.1323e-13	4.6199e+02
89	4.2677e-13	4.2862e+01
90	4.6141e-13	2.2000e+01
91	4.6230e-13	2.3352e+01
92	4.2943e-13	1.4342e+01
93	5.1492e-13	8.9943e+00
94	4.7562e-13	1.3128e+01
95	4.9694e-13	1.5393e+01
96	4.9383e-13	5.9971e+02
97	5.1359e-13	2.1936e+01
98	4.7962e-13	2.4319e+01
99	5.4867e-13	3.8929e+01
100	5.4934e-13	2.1625e+01
101	5.7376e-13	2.7819e+01
102	5.5134e-13	3.8490e+01
103	5.5711e-13	5.9613e+01
104	5.5822e-13	3.1448e+01
105	5.5844e-13	2.1000e+01
106	5.4667e-13	1.9902e+01
107	5.8664e-13	2.6889e+01
108	5.7598e-13	1.2315e+01
109	5.9575e-13	1.2353e+01
110	6.2061e-13	1.2514e+01
111	6.0107e-13	3.5088e+01
112	6.0263e-13	1.2878e+01
113	6.2195e-13	1.4861e+01
114	6.1440e-13	2.3924e+01
115	6.3061e-13	4.1147e+01
116	5.8265e-13	2.4548e+01
117	5.7176e-13	1.9534e+01
118	6.0218e-13	2.2071e+01
119	5.6422e-13	1.0976e+01
120	5.5778e-13	1.3211e+01
121	5.1315e-13	1.5166e+01
122	5.2358e-13	9.7690e+00
123	5.3690e-13	9.3095e+00
124	4.9760e-13	1.4788e+01
125	5.1270e-13	1.8900e+01
126	5.4778e-13	1.5994e+01
127	5.5134e-13	9.9113e+01
128	5.6932e-13	2.8100e+01
129	8.3900e-13	3.5245e+01
130	8.1080e-13	6.4490e+01
131	8.8463e-13	2.0567e+01
132	1.0097e-12	8.8848e+00
133	9.6001e-13	1.8696e+01
134	9.6922e-13	7.5935e+00
135	1.0089e-12	6.8953e+00
136	1.0019e-12	1.2714e+01
137	9.3503e-13	2.3934e+01

Tabela 3: Błędy różnych macierzy

wielkość macierzy	błąd zad2.	błąd zad1.
138	9.1072e-13	1.2477e+01
139	9.0306e-13	9.4350e+00
140	9.0694e-13	4.9401e+01
141	8.9806e-13	9.8683e+02
142	8.8274e-13	6.4373e+00
143	9.3026e-13	1.0712e+01
144	9.7511e-13	6.5392e+01
145	1.0419e-12	2.5959e+01
146	1.1161e-12	5.4051e+02
147	1.1848e-12	1.1003e+01
148	1.2104e-12	7.5629e+00
149	1.1923e-12	1.1923e+01
150	1.0950e-12	7.4580e+01
151	1.1042e-12	1.6122e+01
152	1.1655e-12	1.3209e+01
153	1.0706e-12	4.7352e+01
154	1.1195e-12	3.6841e+01
155	1.0383e-12	4.1705e+01
156	1.0635e-12	1.9204e+01
157	1.0765e-12	2.3375e+01
158	1.0925e-12	3.3561e+01
159	1.1415e-12	2.1301e+01
160	1.1390e-12	6.1360e+01
161	1.1743e-12	1.8413e+01
162	1.1505e-12	1.5089e+01
163	1.1547e-12	4.4144e+01
164	1.1673e-12	1.7449e+01
165	1.1419e-12	2.1207e+01
166	1.2250e-12	2.7662e+01
167	1.1334e-12	9.3903e+01
168	1.1288e-12	3.7497e+01
169	1.0756e-12	1.1888e+01
170	1.1366e-12	9.3864e+01
171	1.2241e-12	7.1166e+02
172	1.1636e-12	3.7259e+01
173	1.0971e-12	1.3902e+01
174	1.1368e-12	1.5115e+01
175	1.2882e-12	2.0883e+01
176	1.3496e-12	2.1857e+01
177	1.3434e-12	9.5750e+01
178	1.6062e-12	3.2562e+02
179	1.6075e-12	7.2231e+01
180	1.6284e-12	1.9569e+01
181	1.5381e-12	1.3167e+01
182	1.6026e-12	1.9716e+02
183	1.6666e-12	1.5734e+01
184	1.6829e-12	3.9519e+01
185	1.6533e-12	2.5899e+01
186	1.5601e-12	2.5971e+01
187	1.5081e-12	2.4112e+02
188	1.5170e-12	3.1806e+01
189	1.6084e-12	4.4916e+01
190	1.5727e-12	5.1118e+01
191	1.5997e-12	2.2143e+01
192	1.5865e-12	5.4654e+01
193	1.5751e-12	2.2610e+01
194	1.6335e-12	9.3926e+00
195	1.6263e-12	1.1815e+01
196	1.6572e-12	8.8800e+00
197	1.6376e-12	2.7466e+01
198	1.7227e-12	2.5432e+01
199	1.6264e-12	4.4980e+01
200	1.6424e-12	4.7698e+01
300	4.9534e-12	6.9383e+01
400	7.6616e-12	8.0703e+01
500	1.1454e-11	2.9129e+01
600	1.8954e-11	6.7223e+01

Tabela 4: Błędy różnych macierzy

3    **Zadanie 3.**

Eksperyment należy powtórzyć analogicznie dla poniższej macierzy, dla k=4, m=4, tym razem z wykorzystaniem dwóch różnych algorytmów - Gaussa oraz Thomasa

$$\begin{cases}
 a_{i,i} = k \\
 a_{i,i+1} = \frac{1}{i+m} \\
 a_{i,i-1} = \frac{k}{i+m+1} & dla \ i > 1 \\
 a_{i,j} = 0 & dla \ j < i-1 \quad oraz \quad j > i+1
 \end{cases}
 \qquad i, j = 1, \dots, n$$

Poniżej znajdują się tabele z niedokładnościami wyników oraz czasem wykonywania obliczeń:

wielkość macierzy	czas obliczeń	czas obliczeń
2	0.0000e+00	0.0000e+00
3	0.0000e+00	0.0000e+00
4	1.1102e-16	2.2204e-16
5	1.1102e-16	2.2204e-16
6	1.1102e-16	2.2204e-16
7	1.1102e-16	2.2204e-16
8	1.1102e-16	2.2204e-16
9	1.1102e-16	2.2204e-16
10	1.1102e-16	2.2204e-16
11	1.1102e-16	2.2204e-16
12	1.1102e-16	2.2204e-16
13	1.1102e-16	2.2204e-16
14	1.1102e-16	2.2204e-16
15	1.1102e-16	2.2204e-16
16	1.1102e-16	2.2204e-16
17	2.2204e-16	2.2204e-16
18	2.2204e-16	2.2204e-16
...	2.2204e-16	2.2204e-16
200	2.2204e-16	2.2204e-16

Tabela 5: Błędy obu algorytmów

wielkość macierzy	czas obliczeń	czas obliczeń
2	1.2636e-05	1.0252e-05
3	1.0490e-05	9.2983e-06
4	1.6451e-05	1.0252e-05
5	2.6941e-05	1.1921e-05
6	4.0531e-05	1.3113e-05
7	5.8889e-05	1.4544e-05
8	8.0824e-05	1.5736e-05
9	1.1230e-04	1.7405e-05
10	1.4853e-04	1.8835e-05
11	1.9264e-04	2.1458e-05
12	2.5463e-04	2.3603e-05
13	3.0422e-04	2.3603e-05
14	3.9530e-04	2.5749e-05
15	4.5705e-04	2.6703e-05
16	5.3811e-04	2.8849e-05
17	6.5017e-04	3.1471e-05
18	7.5912e-04	3.5524e-05
19	9.0575e-04	3.4094e-05
20	1.0622e-03	3.6478e-05
21	1.2250e-03	5.5075e-05
22	1.3747e-03	3.6716e-05
23	1.5306e-03	3.8147e-05
24	1.7903e-03	3.8862e-05
25	2.1191e-03	4.2439e-05
26	2.2225e-03	7.6294e-05
27	2.6102e-03	4.7207e-05
28	2.7061e-03	4.6253e-05
29	3.2098e-03	5.1737e-05
30	3.4468e-03	6.5565e-05
31	3.8514e-03	5.5790e-05
32	3.9518e-03	5.0783e-05
33	4.5891e-03	5.3883e-05
34	4.8707e-03	5.3883e-05
35	5.1677e-03	1.1015e-04
36	5.3232e-03	5.6744e-05
37	6.0258e-03	6.0797e-05
38	6.5975e-03	6.0081e-05
39	7.0112e-03	6.1512e-05
40	7.6327e-03	6.2227e-05
41	7.7841e-03	6.1989e-05
42	8.2781e-03	6.2704e-05
43	9.1679e-03	6.7472e-05
44	9.8529e-03	6.7949e-05
45	1.0340e-02	7.1526e-05
46	1.1070e-02	6.9857e-05
47	1.1594e-02	7.2002e-05
48	1.3496e-02	1.6260e-04
49	1.8426e-02	1.5545e-04
50	1.7958e-02	1.6260e-04
51	1.9222e-02	1.1492e-04
52	1.9046e-02	1.1063e-04
53	1.8319e-02	9.7990e-05
54	1.9068e-02	9.0599e-05
55	1.9269e-02	8.6069e-05
56	2.0023e-02	8.5354e-05
57	2.0654e-02	9.3699e-05
58	2.6860e-02	1.0157e-04
59	2.8278e-02	1.0324e-04
60	2.8695e-02	1.0037e-04
61	2.6891e-02	9.8228e-05
62	2.8952e-02	9.7275e-05
63	2.9260e-02	1.1039e-04
64	3.4147e-02	1.5545e-04
65	3.5797e-02	1.1086e-04
66	3.7061e-02	1.1230e-04
67	3.5350e-02	1.0467e-04
68	3.5158e-02	1.2374e-04
69	3.7354e-02	1.5688e-04

Tabela 6: Czasy obliczeń dla obu algorytmów

wielkość macierzy	czas obliczeń Gaussa [s]	czas obliczeń Thomasa [s]
70	4.1199e-02	1.1015e-04
71	4.4925e-02	1.1945e-04
72	4.2458e-02	1.0896e-04
73	4.4128e-02	1.7047e-04
74	5.3625e-02	1.2064e-04
75	5.2609e-02	1.2469e-04
76	4.9780e-02	1.1730e-04
77	5.1463e-02	1.1420e-04
78	5.6782e-02	1.2493e-04
79	6.4463e-02	1.2922e-04
80	6.1474e-02	1.2827e-04
81	6.0908e-02	2.0242e-04
82	6.7038e-02	1.2946e-04
83	6.4827e-02	1.2350e-04
84	6.9494e-02	1.3542e-04
85	7.0461e-02	1.3590e-04
86	7.2515e-02	1.3566e-04
87	7.8563e-02	1.3876e-04
88	7.7518e-02	1.5736e-04
89	8.1549e-02	1.4067e-04
90	8.9209e-02	1.3924e-04
91	8.5561e-02	1.9550e-04
92	8.9145e-02	1.4067e-04
93	9.5186e-02	1.4353e-04
94	9.4952e-02	1.4448e-04
95	1.0055e-01	2.3150e-04
96	1.0258e-01	1.5378e-04
97	1.0605e-01	1.5664e-04
98	1.1048e-01	1.5712e-04
99	1.1748e-01	1.5807e-04
100	1.1558e-01	1.5402e-04
101	1.2051e-01	1.6046e-04
102	1.2276e-01	1.6856e-04
103	1.2902e-01	1.6308e-04
104	1.3615e-01	1.7953e-04
105	1.4939e-01	1.7381e-04
106	1.4061e-01	1.6713e-04
107	1.5103e-01	1.6904e-04
108	1.4792e-01	1.7142e-04
109	1.5555e-01	1.6856e-04
110	1.5585e-01	1.8406e-04
111	1.7672e-01	2.1386e-04
112	1.9895e-01	2.4486e-04
113	2.1386e-01	2.4629e-04
114	2.3399e-01	2.5487e-04
115	2.4329e-01	2.6655e-04
116	2.4979e-01	2.6584e-04
117	2.5475e-01	2.6131e-04
118	2.7906e-01	2.8253e-04
119	2.7819e-01	2.8729e-04
120	2.8994e-01	2.7585e-04
121	2.8621e-01	2.6846e-04
122	2.9492e-01	2.9492e-04
123	3.0352e-01	2.7227e-04
124	3.1276e-01	2.8563e-04
125	3.2363e-01	2.8849e-04
126	3.3552e-01	2.9111e-04
127	3.2325e-01	2.9564e-04
128	3.3921e-01	2.9349e-04
129	3.9587e-01	3.2687e-04
130	4.0180e-01	3.2091e-04
131	4.0310e-01	3.1877e-04
132	4.1435e-01	4.0197e-04
133	4.8243e-01	3.5548e-04
134	4.3507e-01	3.2926e-04
135	4.0798e-01	3.1090e-04
136	4.2398e-01	3.2020e-04
137	4.4472e-01	4.2343e-04

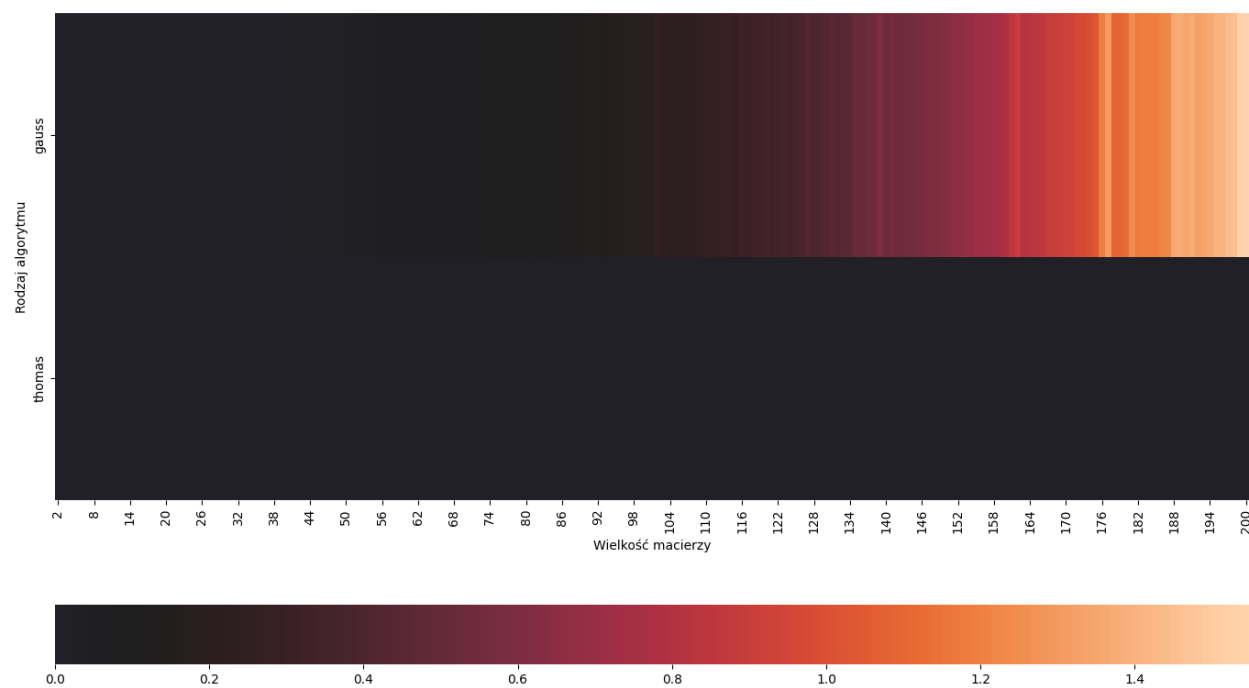
Tabela 7: Czasy obliczeń dla obu algorytmów



wielkość macierzy	czas obliczeń Gaussa [s]	czas obliczeń Thomasa [s]
138	5.3174e-01	3.8314e-04
139	4.7388e-01	3.5167e-04
140	4.5330e-01	3.4690e-04
141	4.5546e-01	3.1447e-04
142	4.5005e-01	3.4094e-04
143	4.7170e-01	3.2806e-04
144	4.6863e-01	3.1638e-04
145	4.8586e-01	3.2282e-04
146	5.0286e-01	3.4213e-04
147	5.0503e-01	3.2759e-04
148	5.1134e-01	3.4404e-04
149	5.7232e-01	4.1986e-04
150	7.1736e-01	5.0688e-04
151	8.0849e-01	6.1846e-04
152	7.7659e-01	4.7255e-04
153	6.7024e-01	4.1127e-04
154	6.1361e-01	3.7146e-04
155	6.0249e-01	3.5834e-04
156	6.1274e-01	3.5596e-04
157	8.0958e-01	4.1389e-04
158	7.4533e-01	8.1849e-04
159	8.2814e-01	3.9959e-04
160	7.0860e-01	3.7432e-04
161	7.4193e-01	3.6931e-04
162	7.1449e-01	3.6764e-04
163	6.9272e-01	8.0681e-04
164	7.9153e-01	3.7313e-04
165	7.6295e-01	3.8934e-04
166	7.3437e-01	5.6624e-04
167	7.3578e-01	4.0913e-04
168	7.4973e-01	3.7575e-04
169	7.6191e-01	3.9124e-04
170	7.6983e-01	3.7289e-04
171	7.8279e-01	3.7432e-04
172	8.0153e-01	3.9458e-04
173	8.1470e-01	3.9005e-04
174	8.2577e-01	3.8171e-04
175	8.4051e-01	3.8433e-04
176	8.6249e-01	4.3035e-04
177	8.6822e-01	3.8791e-04
178	8.8378e-01	3.8886e-04
179	8.9677e-01	3.9244e-04
180	9.1511e-01	4.0483e-04
181	9.2279e-01	3.9601e-04
182	9.3751e-01	3.8242e-04
183	9.5881e-01	4.0197e-04
184	9.7231e-01	3.9053e-04
185	9.9262e-01	4.1509e-04
186	1.0073e+00	4.3678e-04
187	1.0221e+00	4.0030e-04
188	1.0422e+00	4.1699e-04
189	1.0604e+00	4.1509e-04
190	1.0672e+00	4.2915e-04
191	1.0997e+00	4.0269e-04
192	1.1067e+00	4.3988e-04
193	1.1180e+00	5.2142e-04
194	1.1628e+00	4.2367e-04
195	1.1657e+00	4.3225e-04
196	1.1803e+00	4.2915e-04
197	1.1939e+00	4.3082e-04
198	1.2190e+00	4.3678e-04
199	1.2332e+00	4.5896e-04
200	1.2622e+00	5.1093e-04
300	3.0570e+00	5.2023e-04
400	9.6909e+00	8.9860e-04
500	2.0677e+01	1.2257e-03
600	3.5770e+01	1.3947e-03
700	5.9108e+01	1.6799e-03
800	8.2323e+01	1.8961e-03

Tabela 8: Czasy obliczeń dla obu algorytmów

Porównanie czasów za pomocą mapy cieplnej



Rysunek 1: Porównanie czasów

4    Wnioski

4.1    Zadanie 1.

Dokładność Decimal jest znacznie lepsza niż Float.

4.2    Zadanie 2.

Dokładność wyliczeń drugiej macierzy jest dużo lepsza, ponieważ w trakcie wykonywania algorytmu Gaussa nie powstają tak duże ułamki (a to one powodują największe niedokładności).

4.3    Zadanie 3.

Dla macierzy trójdzielnej znacznie bardziej efektywny niż algorytm Gaussa jest algorytm Thomasa. Nawet dla bardz dużych rozmiarów macierzy dla tego drugiego czas jest nieznaczny.