

Rozwiązywanie układów równań liniowych metodami bezpośrednimi

Nikodem Korohoda

AGH, Wydział Informatyki, Elektroniki i Telekomunikacji
Metody Obliczeniowe w Nauce i Technice 2021/2022

Kraków, 25 maja 2022

1 Zadanie 1.

1. Przyjmij wektor x jako dowolną n elementową permutację ze zbioru $\{1, -1\}$ i oblicz wektor b .
2. Metodą eliminacji Gaussa rozwiąż układ równań $Ax=B$ żeby wyliczyć B
3. Oblicz ponownie x z wykorzystaniem A oraz B
4. Wyznacz błędy wyliczenia x dla różnych dokładności z użyciem normy maksimum

Dla poniższej macierzy. Za x początkowo przyjęto wektor $[1, -1, 1, -1, \dots]$. Wyliczano dokładności dla Float oraz Decimal.

$$\begin{cases} a_{1j} = 1 \\ a_{ij} = \frac{1}{i+j-1} \end{cases} \quad dla \quad i \neq 1 \quad i, j = 1, \dots, n$$

wielkość macierzy	float	decimal
2	0	0
3	0	9.0E-27
4	0	7.176E-25
5	2.8415048092256256e-12	1.00800E-23
6	3.395195236066684e-11	1.54629E-22
7	2.016850242370083e-09	1.4110483E-20
8	5.359075139210745e-08	4.99679750E-19
9	1.8087042528147634e-06	1.0445913398E-17
10	1.0739827692063386e-05	2.98212209722E-16
11	0.0002934013240606381	5.249955792919E-15
12	0.037738086028757056	8.9694523471619E-14
13	0.40971738202325025	3.49195492955178E-13
14	0.24474964296635382	2.48161216692904E-13
15	0.7296709134465287	2.275477722011168E-12
16	1.1510249915112998	2.097251433740809E-12
17	1.0964678564654462	2.671037336162030E-12
18	1.8758008638289843	3.664035335418809E-12
19	11.860443059442165	2.8072997890877624E-11
20	47.742356148579084	6.939173327343015E-12

Tabela 1: Błędy różnych dokładności

2 Zadanie 2.

Eksperyment należy powtórzyć analogicznie dla poniższej macierzy, z pominięciem różnych dokładności (używano wyłącznie Float)

$$\begin{cases} a_{ij} = \frac{2i}{j} & dla \ j \geq i \\ a_{ij} = a_{ji} & dla \ j < i \end{cases} \quad i, j = 1, \dots, n$$

wielkość macierzy	błąd zad2.	błąd zad1.
2	0	0
3	2.220446049250313e-16	0
4	2.220446049250313e-16	0
5	2.220446049250313e-16	2.8415048092256256e-12
6	2.220446049250313e-16	3.395195236066684e-11
7	3.3306690738754696e-16	2.016850242370083e-09
8	1.887379141862766e-15	5.359075139210745e-08
9	1.5543122344752192e-15	1.8087042528147634e-06
10	4.440892098500626e-15	1.0739827692063386e-05
11	6.217248937900877e-15	0.0002934013240606381
12	6.217248937900877e-15	0.037738086028757056
13	4.884981308350689e-15	0.40971738202325025
14	7.771561172376096e-15	0.24474964296635382
15	8.659739592076221e-15	0.7296709134465287
16	7.993605777301127e-15	1.1510249915112998
17	7.771561172376096e-15	1.0964678564654462
18	7.993605777301127e-15	1.8758008638289843
19	7.549516567451064e-15	11.860443059442165
20	7.993605777301127e-15	47.742356148579084
21	8.659739592076221e-15	2.034700061824184
22	9.103828801926284e-15	1.9857803704857355
23	9.103828801926284e-15	1.9154456167348068
24	1.0658141036401503e-14	4.241516631874795
25	1.4876988529977098e-14	6.881887777045873
26	2.1760371282653068e-14	3.3821092995045543
27	2.398081733190338e-14	4.048446095766695
28	2.5091040356528538e-14	11.834965657475932
29	3.086420008457935e-14	8.970530417672101
30	2.9531932455029164e-14	5.635842887476507
31	4.1744385725905886e-14	5.745888504162605
32	5.218048215738236e-14	4.725878757134452
33	5.5067062021407764e-14	7.761078836288002
34	4.8183679268731794e-14	47.802009162096404
35	4.3520742565306136e-14	39.616106068215124
36	4.3298697960381105e-14	21.478047291370398
37	3.352873534367973e-14	7.422467182921501
38	3.597122599785507e-14	8.260924891843759
39	3.552713678800501e-14	6.737252562256598
40	3.530509218307998e-14	8.131608598042952
41	4.596323321948148e-14	4.837243937875295
42	6.150635556423367e-14	3.9056699906427492
43	5.5289106626332796e-14	4.66044503691097
44	4.929390229335695e-14	7.516718067608759
45	5.795364188543317e-14	5.915384150343596
46	6.794564910705958e-14	13.856485956343452
47	9.192646643896296e-14	66.34834461269979
48	9.725553695716371e-14	30.132367421539673
49	1.0258460747536446e-13	122.98582449329237
50	8.815170815523743e-14	7.157279726230524
51	8.903988657493755e-14	35.03122996393095
52	1.1057821325266559e-13	333.0233451429398
53	9.836575998178887e-14	12.125459022701943
54	1.1324274851176597e-13	10.457616637031514
55	1.1657341758564144e-13	16.43883047663803
56	1.3367085216486885e-13	72.78657198234048
57	1.4588330543574557e-13	7.412139683158703
58	1.3078427230084344e-13	31.266258418911086
59	1.318944953254686e-13	27.73211837123607
60	1.2656542480726785e-13	8.47879972566738
61	1.1790568521519162e-13	10.768527903034682
62	1.199040866595169e-13	49.555681681693265
63	1.312283615106935e-13	250.36899630401152
64	1.2456702336294256e-13	124.67908194831702
65	2.539080057317733e-13	46.20244046362867
66	2.7977620220553945e-13	36.70199289199294

Tabela 2: Błędy różnych macierzy

wielkość macierzy	błąd zad2.	błąd zad1.
67	2.7056135110115065e-13	24.98483753584167
68	2.7766677845875165e-13	37.12976339622625
69	2.923217223838037e-13	164.75236312488568
70	3.1041835768519377e-13	110.00866557595774
71	3.171907181354072e-13	22.287906584263567
72	3.1585845050585704e-13	23.727850248396187
73	3.5582647939236267e-13	17.21967002774788
74	3.036459972349803e-13	41.726124743814474
75	3.2107649872159527e-13	70.59751255571872
76	3.020916850005051e-13	13.919418043026024
77	2.821076705572523e-13	13.367439300991776
78	3.0386804183990535e-13	9.935409573389677
79	3.006483950684924e-13	16.463955303025365
80	2.7766677845875165e-13	11.503319721204335
81	3.133049375492192e-13	20.25915389199676
82	3.3095748364075916e-13	17.76576415135287
83	3.431699369116359e-13	48.425737868209474
84	3.7847502909471586e-13	275.12687276781924
85	3.3228975127030935e-13	92.1065107045069
86	3.127498260369066e-13	25.571827679858718
87	3.2573943542502093e-13	297.29899550560293
88	4.1322500976548326e-13	461.99388740696355
89	4.2676973066591017e-13	42.86152689189008
90	4.614086890342151e-13	21.999612226824027
91	4.622968674539152e-13	23.351950528502787
92	4.2943426592501055e-13	14.341645539409443
93	5.149214388211476e-13	8.99433782249533
94	4.756195437494171e-13	13.128123298517774
95	4.969358258222201e-13	15.393020337313793
96	4.938272013532696e-13	599.7091241007164
97	5.135891711915974e-13	21.93586272960362
98	4.796163466380676e-13	24.318754846090382
99	5.486722187697524e-13	38.92901422224874
100	5.493383525845275e-13	21.625226269863923
101	5.737632591262809e-13	27.819237602658553
102	5.513367540288527e-13	38.49028901863765
103	5.571099137569036e-13	59.61251136788129
104	5.582201367815287e-13	31.448024515306575
105	5.584421813864537e-13	21.000240648472523
106	5.466738173254271e-13	19.90245888566511
107	5.866418462119327e-13	26.889461843136104
108	5.759837051755312e-13	12.314542996311085
109	5.95745675013859e-13	12.352519129692256
110	6.206146707654625e-13	12.513629814399502
111	6.010747455320598e-13	35.088271777550666
112	6.02629057766535e-13	12.878265882781704
113	6.219469383950127e-13	14.8612801979427
114	6.143974218275616e-13	23.92402925164284
115	6.306066779870889e-13	41.14743109972276
116	5.826450433232822e-13	24.54818703700155
117	5.717648576819556e-13	19.533959904335603
118	6.021849685566849e-13	22.071401981440946
119	5.642153411145046e-13	10.976480130556357
120	5.577760475716786e-13	13.211329570564358
121	5.131450819817474e-13	15.166072053927886
122	5.235811784132238e-13	9.769040787395058
123	5.369038547087257e-13	9.309450591593977
124	4.976019596369952e-13	14.788311463956482
125	5.127009927718973e-13	18.89954066591089
126	5.477840403500522e-13	15.993944724514925
127	5.513367540288527e-13	99.11305429617742
128	5.693223670277803e-13	28.1004167832491
129	8.389955397092308e-13	35.24465736250057
130	8.107958748837518e-13	64.4902292455948
131	8.846257060213247e-13	20.566523166598316

Tabela 3: Błędy różnych macierzy

wielkość macierzy	błąd zad2.	błąd zad1.
132	1.0097478408965799e-12	8.884781923426683
133	9.600098493933729e-13	18.696029367572034
134	9.692247004977617e-13	7.5935244874678745
135	1.0088596624768797e-12	6.895343894636873
136	1.0018652574217413e-12	12.713978079754872
137	9.350298313393068e-13	23.933701325951727
138	9.10715947100016e-13	12.476945468005615
139	9.030554082301023e-13	9.434983165270992
140	9.069411888162904e-13	49.40109205304367
141	8.980594046192891e-13	986.8271952771855
142	8.82738326879462e-13	6.437309144009079
143	9.302558723334187e-13	10.712407006956926
144	9.75108882528275e-13	65.39224599676044
145	1.0419443086107094e-12	25.95939414456463
146	1.1161072066556699e-12	540.5130490455377
147	1.184830011879967e-12	11.002906152380724
148	1.2103651414463457e-12	7.56293997598749
149	1.1922685061449556e-12	11.92321822612696
150	1.0950129691877919e-12	74.57984673705913
151	1.1042278202921807e-12	16.12210809182349
152	1.1655121312514893e-12	13.209444548446236
153	1.0705880626460385e-12	47.35158464414391
154	1.1195488980320079e-12	36.841072101787155
155	1.0382805726294464e-12	41.70458720534243
156	1.0634826352884375e-12	19.204327428196503
157	1.0764722446765518e-12	23.374680741643505
158	1.092459456231154e-12	33.560660408824766
159	1.141531313919586e-12	21.30131990833604
160	1.138977800962948e-12	61.36032881342938
161	1.174282893146028e-12	18.412917944032415
162	1.1505241204190497e-12	15.088539333890647
163	1.1547429679126253e-12	44.144351056785545
164	1.1672884880908896e-12	17.44936817819701
165	1.1418643808269735e-12	21.207475718162577
166	1.2250200853713977e-12	27.66159372768027
167	1.1334266858398223e-12	93.90271619992937
168	1.1287637491363967e-12	37.49742325877829
169	1.0755840662568517e-12	11.887693336202954
170	1.1366463326112353e-12	93.86401603768778
171	1.2241319069516976e-12	711.6627651076049
172	1.1636247521096266e-12	37.25877715234159
173	1.0971223929345797e-12	13.901772723546017
174	1.1367573549136978e-12	15.115243759871245
175	1.2881917754725691e-12	20.88288126611665
176	1.3495871087343403e-12	21.856826147077356
177	1.3433698597964394e-12	95.75036013514107
178	1.606159649725214e-12	325.6212639199988
179	1.6074919173547642e-12	72.23095438008059
180	1.628364110217717e-12	19.56915440442002
181	1.5381029783156919e-12	13.16665465423605
182	1.6026069360464135e-12	197.1620037983434
183	1.6665557822648225e-12	15.73401701630556
184	1.6828760607268123e-12	39.518818574586334
185	1.6533441282717831e-12	25.898691489776283
186	1.56008539420327e-12	25.970660731853517
187	1.5081269566508126e-12	241.12328151088767
188	1.5170087408478139e-12	31.80632346550565
189	1.6083800957744643e-12	44.9164697194184
190	1.5727419366839968e-12	51.117850373649816
191	1.599720356182388e-12	22.14317864017062
192	1.5865087021893487e-12	54.65371643616022
193	1.5750734050357096e-12	22.610022318394478
194	1.6334711361309928e-12	9.392649670545662
195	1.6262546864709293e-12	11.814537429566647
196	1.6572299088579712e-12	8.880047951408685
197	1.6375789613221059e-12	27.466424073849417
198	1.7227330673108554e-12	25.432103606441267
199	1.6263657087733918e-12	44.980100963522254
200	1.642352920327994e-12	47.69783755417759

Tabela 4: Błędy różnych macierzy

3 **Zadanie 3.**

Eksperyment należy powtórzyć analogicznie dla poniższej macierzy, dla k=4, m=4, tym razem z wykorzystaniem dwóch różnych algorytmów - Gaussa oraz Thomasa

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{i,i} = k \\ a_{i,i+1} = \frac{1}{i+m} \\ a_{i,i-1} = \frac{k}{i+m+1} \quad dla \ i > 1 \\ a_{i,j} = 0 \quad dla \ j < i-1 \quad oraz \quad j > i+1 \end{array} \right. \qquad i, j = 1, \dots, n$$

Poniżej znajdują się tabele z niedokładnościami wyników oraz czasem wykonywaniaa obliczeń:

wielkość macierzy	algorytm gaussa	algorytm thomasa
2	0	0
3	0	0
4	1.1102230246251565e-16	2.220446049250313e-16
5	1.1102230246251565e-16	2.220446049250313e-16
6	1.1102230246251565e-16	2.220446049250313e-16
7	1.1102230246251565e-16	2.220446049250313e-16
8	1.1102230246251565e-16	2.220446049250313e-16
9	1.1102230246251565e-16	2.220446049250313e-16
10	1.1102230246251565e-16	2.220446049250313e-16
11	1.1102230246251565e-16	2.220446049250313e-16
12	1.1102230246251565e-16	2.220446049250313e-16
13	1.1102230246251565e-16	2.220446049250313e-16
14	1.1102230246251565e-16	2.220446049250313e-16
15	1.1102230246251565e-16	2.220446049250313e-16
16	1.1102230246251565e-16	2.220446049250313e-16
17	2.220446049250313e-16	2.220446049250313e-16
18	2.220446049250313e-16	2.220446049250313e-16
...	2.220446049250313e-16	2.220446049250313e-16
200	2.220446049250313e-16	2.220446049250313e-16

Tabela 5: Błędy obu algorytmów

wielkość macierzy	czas obliczeń Gaussa [s]	czas obliczeń Thomasa [s]
2	0.0	0.0
3	0.0	0.0
4	0.0	0.0
5	0.0	0.0
6	0.0	0.0
7	0.0	0.0
8	0.0	0.0
9	0.0	0.0
10	0.0009989738464355469	0.0
11	0.0	0.0
12	0.0	0.0
13	0.000997781753540039	0.0
14	0.0	0.0
15	0.0	0.0
16	0.0010001659393310547	0.0
17	0.0010106563568115234	0.0
18	0.0009999275207519531	0.0
19	0.0009999275207519531	0.0
20	0.0019989013671875	0.0
21	0.001998424530029297	0.0
22	0.0029976367950439453	0.0
23	0.0019981861114501953	0.0
24	0.00299835205078125	0.0
25	0.0029969215393066406	0.0
26	0.0039942264556884766	0.0
27	0.004001617431640625	0.0
28	0.004996538162231445	0.0
29	0.00499725341796875	0.0
30	0.005995035171508789	0.0
31	0.00699615478515625	0.0
32	0.00699615478515625	0.0
33	0.007996559143066406	0.0
34	0.007996559143066406	0.0
35	0.00899505615234375	0.0
36	0.008994102478027344	0.0
37	0.009993791580200195	0.0
38	0.010992765426635742	0.0
39	0.012991905212402344	0.0009989738464355469
40	0.012991666793823242	0.0009996891021728516
41	0.013990163803100586	0.0
42	0.014991283416748047	0.0
43	0.016989707946777344	0.0
44	0.017987489700317383	0.0
45	0.017988204956054688	0.0
46	0.018988370895385742	0.0
47	0.02098679542541504	0.0
48	0.021986722946166992	0.0
49	0.023984909057617188	0.0
50	0.024984359741210938	0.0
51	0.025983810424804688	0.0
52	0.027982711791992188	0.0
53	0.029982805252075195	0.0009989738464355469
54	0.030979633331298828	0.0
55	0.03897714614868164	0.0
56	0.03597688674926758	0.000997781753540039
57	0.03797769546508789	0.0
58	0.03697705268859863	0.0
59	0.038976192474365234	0.0
60	0.04097437858581543	0.0
61	0.04297471046447754	0.0
62	0.04597187042236328	0.0
63	0.04797077178955078	0.00099945068359375
64	0.04896664619445801	0.0
65	0.05396580696105957	0.0
66	0.0649566650390625	0.0

Tabela 6: Czasy obliczeń dla obu algorytmów

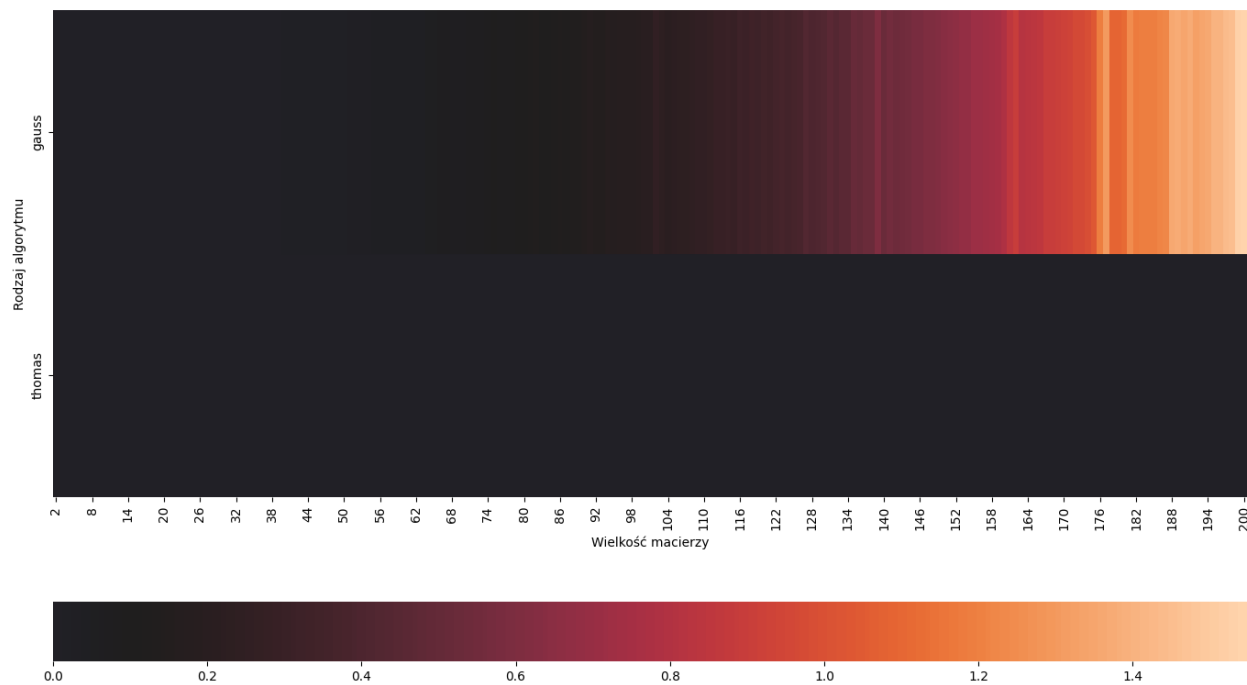
wielkość macierzy	czas obliczeń Gaussa [s]	czas obliczeń Thomasa [s]
67	0.05996370315551758	0.0
68	0.06196331977844238	0.0
69	0.10393500328063965	0.000997781753540039
70	0.07095766067504883	0.0
71	0.07295513153076172	0.0009996891021728516
72	0.09594130516052246	0.0
73	0.08494329452514648	0.0
74	0.07995080947875977	0.0009996891021728516
75	0.08195066452026367	0.0
76	0.08494687080383301	0.0
77	0.08794569969177246	0.0
78	0.0929412841796875	0.0009989738464355469
79	0.0969398021697998	0.0
80	0.10293412208557129	0.0
81	0.10193848609924316	0.0
82	0.10393548011779785	0.0009989738464355469
83	0.10993194580078125	0.0
84	0.1129310131072998	0.0
85	0.1209249496459961	0.0
86	0.1249237060546875	0.0
87	0.13991498947143555	0.0
88	0.13291716575622559	0.0
89	0.13791394233703613	0.0009992122650146484
90	0.1409142017364502	0.0
91	0.14391183853149414	0.0
92	0.14690780639648438	0.0009989738464355469
93	0.15890216827392578	0.0009989738464355469
94	0.16889548301696777	0.00099945068359375
95	0.18388843536376953	0.0
96	0.18088912963867188	0.0
97	0.1818866729736328	0.0
98	0.18088936805725098	0.0
99	0.20487380027770996	0.0
100	0.19090008735656738	0.0
101	0.1948854923248291	0.0
102	0.1979525089263916	0.0
103	0.21492338180541992	0.0009996891021728516
104	0.2160632610321045	0.0
105	0.22502446174621582	0.000990152359008789
106	0.2565803527832031	0.0
107	0.24584698677062988	0.0
108	0.24186229705810547	0.0
109	0.25284862518310547	0.0
110	0.2531721591949463	0.0
111	0.2660973072052002	0.0010004043579101562
112	0.26900386810302734	0.0009992122650146484
113	0.27584338188171387	0.0010311603546142578
114	0.28760647773742676	0.0
115	0.2898421287536621	0.0009984970092773438
116	0.303086519241333	0.0
117	0.33985400199890137	0.0
118	0.31615233421325684	0.0
119	0.3299734592437744	0.0
120	0.3248300552368164	0.0
121	0.36627197265625	0.0
122	0.3497965335845947	0.0009996891021728516
123	0.3577899932861328	0.0
124	0.3657829761505127	0.0
125	0.3917655944824219	0.0009999275207519531
126	0.3907585144042969	0.0
127	0.39575695991516113	0.0
128	0.40375304222106934	0.0
129	0.4137604236602783	0.001001119613647461
130	0.43674278259277344	0.0
131	0.4219202995300293	0.0009982585906982422

Tabela 7: Czasy obliczeń dla obu algorytmów

wielkość macierzy	czas obliczeń Gaussa [s]	czas obliczeń Thomasa [s]
132	0.4404129981994629	0.0
133	0.4617142677307129	0.0
134	0.4617171287536621	0.0
135	0.4868783950805664	0.0
136	0.4813365936279297	0.0
137	0.49931931495666504	0.00099945068359375
138	0.5166826248168945	0.0
139	0.5325577259063721	0.0009992122650146484
140	0.5276815891265869	0.0
141	0.5228557586669922	0.00099945068359375
142	0.537771463394165	0.0009992122650146484
143	0.6009933948516846	0.0009992122650146484
144	0.6276154518127441	0.0
145	0.5764217376708984	0.00099945068359375
146	0.5866320133209229	0.0
147	0.5950915813446045	0.0009987354278564453
148	0.6446115970611572	0.0
149	0.6695230007171631	0.0
150	0.6696183681488037	0.0
151	0.6567564010620117	0.0
152	0.6493062973022461	0.0
153	0.6703324317932129	0.0009996891021728516
154	0.7005743980407715	0.0009992122650146484
155	0.7052538394927979	0.0009996891021728516
156	0.716602087020874	0.0009982585906982422
157	0.7455034255981445	0.0
158	0.7673871517181396	0.0009989738464355469
159	0.7931764125823975	0.0010001659393310547
160	0.7760365009307861	0.0009980201721191406
161	0.7920207977294922	0.0
162	0.855759859085083	0.0
163	0.8091650009155273	0.0
164	0.8355166912078857	0.0
165	0.8531210422515869	0.0
166	0.8511316776275635	0.0
167	0.8600850105285645	0.0009999275207519531
168	0.8918442726135254	0.0
169	0.9047949314117432	0.0
170	0.9854903221130371	0.0
171	0.9848570823669434	0.0009996891021728516
172	0.9849095344543457	0.0
173	1.0828022956848145	0.0
174	1.0098590850830078	0.00099945068359375
175	1.0349254608154297	0.0009996891021728516
176	1.040848970413208	0.0009992122650146484
177	1.0443670749664307	0.0
178	1.0870120525360107	0.0009987354278564453
179	1.0821101665496826	0.0009996891021728516
180	1.0909268856048584	0.0
181	1.1172845363616943	0.0010001659393310547
182	1.2068674564361572	0.0009999275207519531
183	1.3157835006713867	0.0009996891021728516
184	1.2464401721954346	0.0009992122650146484
185	1.4036364555358887	0.0019989013671875
186	1.3215246200561523	0.0
187	1.3691554069519043	0.00099945068359375
188	1.3635401725769043	0.00099945068359375
189	1.2724688053131104	0.00099945068359375
190	1.2977972030639648	0.0
191	1.327301025390625	0.00099945068359375
192	1.3298773765563965	0.0009989738464355469
193	1.3348312377929688	0.0
194	1.3826375007629395	0.0
195	1.406775951385498	0.0
196	1.4207098484039307	0.0030002593994140625
197	1.4870827198028564	0.0
198	1.4888498783111572	0.0
199	1.4917888641357422	0.0
200	1.5671131610870361	0.0

Tabela 8: Czasy obliczeń dla obu algorytmów

Porównanie czasów za pomocą mapy cieplnej



Rysunek 1: Porównanie czasów

4 Wnioski

4.1 Zadanie 1.

Dokładność Decimal jest znacznie lepsza niż Float.

4.2 Zadanie 2.

Dokładność wyliczeń drugiej macierzy jest dużo lepsza, ponieważ w trakcie wykonywania algorytmu Gaussa nie powstają tak duże ułamki (a to one powodują największe niedokładności).

4.3 Zadanie 3.

Dla macierzy trójdzielnej znacznie bardziej efektywny niż algorytm Gaussa jest algorytm Thomasa. Nawet dla bardz dużych rozmiarów macierzy dla tego drugiego czas jest nieznaczny.