

# Rozwiązywanie równań i układów równań nieliniowych

18 maja 2022

## 1 Problem 1

### 1.1 Opis problemu

Główną ideą zadania jest wyznaczenie pierwiastków równania  $f(x) = 0$  w zadanym przedziale metodą Newtona oraz metodą siecznych. Dla metody Newtona punkty startowe wybierane będą rozpoczynając od wartości końców przedziału, zmniejszając je o 0.1 w kolejnych eksperymentach numerycznych. Odpowiednio dla metody siecznej jeden z końców przedziału stanowić powinna wartość punktu startowego dla metody Newtona, a drugi - początek, a następnie koniec przedziału  $[a, b]$ .

Badana funkcja:

$$f(x) = x^n + x^m$$
$$f'(x) = nx^{(n-1)} + mx^{(m-1)}$$

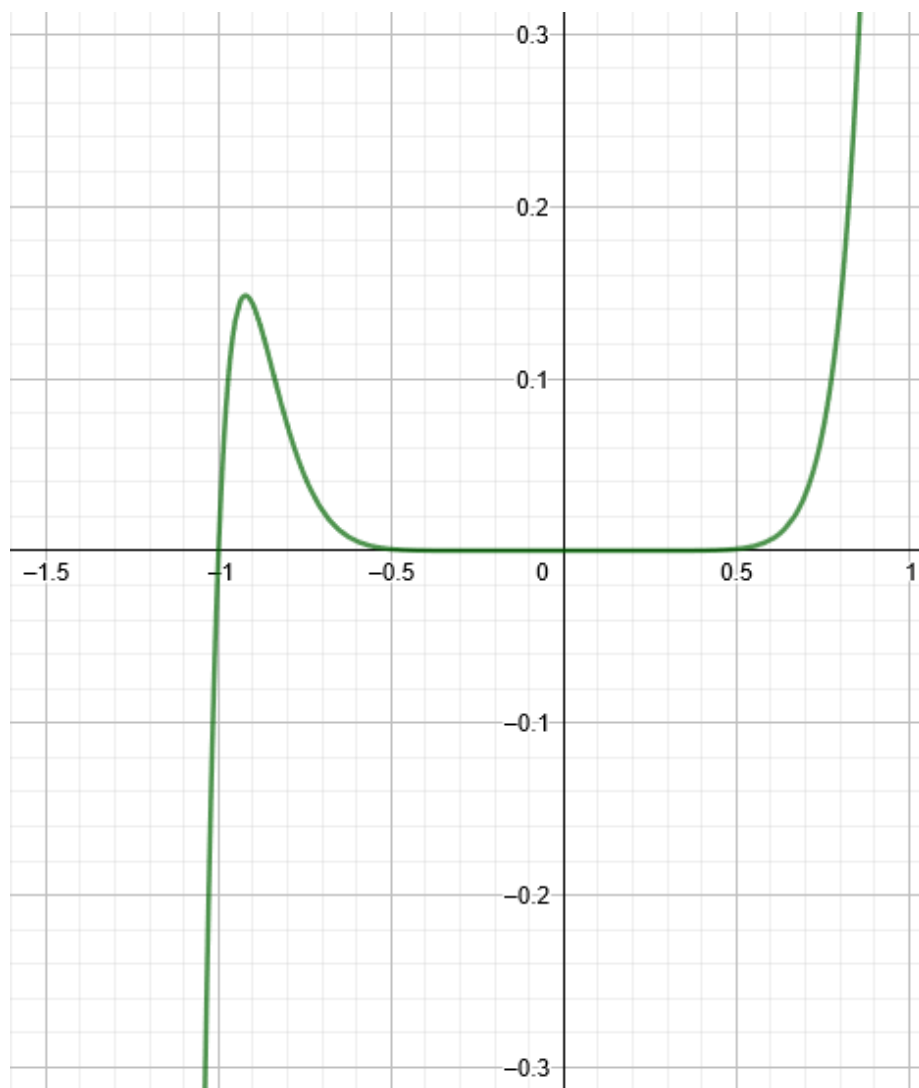
Gdzie  $n = 15$ ,  $m = 10$  oraz  $x \in [-1.5, 0.3]$ .

Liczba iteracji dla obu tych metod (dla różnych dokładności  $\rho$ ) zostanie porównana, stosując kryteria stopu:

1.  $|x_{(i+1)} - x_{(i)}| < \rho$
2.  $|f(x_i)| < \rho$

### 1.2 Opracowanie

Wykres badanej funkcji wygląda następująco:



Rysunek 1: Funkcja  $f$

### 1.2.1 Metoda Newtona

Żeby zastosować metodę Newtona muszą być spełnione warunki:

1. funkcja jest ciągła,
2. w przedziale znajduje się dokładnie jeden pierwiastek,
3. funkcja ma różne znaki na krańcach przedziału,
4. pierwsza i druga pochodna funkcji mają stały znak w tym przedziale.

### 1.2.2 Metoda Siecznych

Żeby zastosować metodę siecznych muszą być spełnione warunki:

1. funkcja jest ciągła,
2. funkcja ma różne znaki na krańcach przedziału,

Poniżej znajdują się tabele z wynikami oraz liczbami iteracji dla różnych punktów startowych, dokładności i kryteriów stopu (kolumny - dokładność warunku stopu, wiersze - przedział startowy, pierwsza wartość to liczba iteracji, druga to wyliczona wartość):

	0.01	0.0001
[-1.5, 0.3]	1 , 0.2999999719783287	1 , 0.2999999719783287
[-1.5, 0.2]	1 , 0.1999999954202397	1 , 0.1999999954202397
[-1.5, 0.1]	1 , 0.099999999995792	1 , 0.099999999995792
[-1.5, 0.0]	1 , 0.0	1 , 0.0
[-1.5, -0.1]	1 , -0.1000000000003682	1 , -0.1000000000003682
[-1.5, -0.2]	1 , -0.2000000003499929	1 , -0.2000000003499929
[-1.5, -0.3]	1 , -0.30000001859054404	1 , -0.30000001859054404
[-1.5, -0.4]	1 , -0.4000003002460556	1 , -0.4000003002460556
[-1.5, -0.5]	1 , -0.5000024880872789	1 , -0.5000024880872789
[-1.5, -0.6]	1 , -0.6000131991976202	1 , -0.6000131991976202
[-1.5, -0.7]	1 , -0.7000494407743927	1 , -0.7000494407743927
[-1.5, -0.8]	1 , -0.8001328759633891	88 , -0.0012792299168158175
[-1.5, -0.9]	1 , -0.9002252333668005	86 , -0.0012872915386244574
[-1.5, -1.0]	1 , -1.0	1 , -1.0
[-1.5, -1.1]	- , -	- , -
[-1.5, -1.2]	- , -	- , -
[-1.5, -1.3]	- , -	- , -
[-1.5, -1.4]	- , -	- , -

Tabela 1: Wyniki dla kryterium 1

	0.000001	0.00000001
[-1.5, 0.3]	1 , 0.2999999719783287	202 , 1.2347184284733514e-07
[-1.5, 0.2]	1 , 0.19999999954202397	1 , 0.19999999954202397
[-1.5, 0.1]	1 , 0.0999999999995792	1 , 0.0999999999995792
[-1.5, 0.0]	1 , 0.0	1 , 0.0
[-1.5, -0.1]	1 , -0.1000000000003682	1 , -0.1000000000003682
[-1.5, -0.2]	1 , -0.2000000003499929	1 , -0.2000000003499929
[-1.5, -0.3]	1 , -0.30000001859054404	202 , -1.2339064682943556e-07
[-1.5, -0.4]	1 , -0.4000003002460556	206 , -1.2271185187385738e-07
[-1.5, -0.5]	145 , -1.3161745867565867e-05	209 , -1.228490181943292e-07
[-1.5, -0.6]	148 , -1.2600322423135904e-05	211 , -1.2651956438673627e-07
[-1.5, -0.7]	150 , -1.2515478045913677e-05	213 , -1.2566764383372642e-07
[-1.5, -0.8]	151 , -1.2844719872314041e-05	214 , -1.2897355387755059e-07
[-1.5, -0.9]	149 , -1.2925666442189665e-05	212 , -1.2978633663146324e-07
[-1.5, -1.0]	1 , -1.0	1 , -1.0
[-1.5, -1.1]	- , -	- , -
[-1.5, -1.2]	- , -	- , -
[-1.5, -1.3]	- , -	- , -
[-1.5, -1.4]	- , -	- , -

Tabela 2: Wyniki dla kryterium 1

	0.01	0.0001
[-1.5, 0.3]	1 , 0.2999999719783287	1 , 0.2999999719783287
[-1.4, 0.3]	1 , 0.2999999205423745	1 , 0.2999999205423745
[-1.3, 0.3]	1 , 0.29999974677043706	1 , 0.29999974677043706
[-1.2, 0.3]	1 , 0.2999990365064661	1 , 0.2999990365064661
[-1.1, 0.3]	1 , 0.2999947667271144	1 , 0.2999947667271144
[-1.0, 0.3]	2 , -1.0	2 , -1.0
[-0.9, 0.3]	- , -	- , -
[-0.8, 0.3]	- , -	- , -
[-0.7, 0.3]	- , -	- , -
[-0.6, 0.3]	- , -	- , -
[-0.5, 0.3]	- , -	- , -
[-0.4, 0.3]	- , -	- , -
[-0.3, 0.3]	- , -	- , -
[-0.2, 0.3]	- , -	- , -
[-0.1, 0.3]	- , -	- , -
[0.0, 0.3]	2 , 0.0	2 , 0.0
[0.1, 0.3]	- , -	- , -
[0.2, 0.3]	- , -	- , -

Tabela 3: Wyniki dla kryterium 1

	0.000001	0.00000001
[-1.5, 0.3]	1 , 0.2999999719783287	202 , 1.2347184284733514e-07
[-1.4, 0.3]	1 , 0.2999999205423745	202 , 1.2347182971148565e-07
[-1.3, 0.3]	1 , 0.29999974677043706	202 , 1.234717853290779e-07
[-1.2, 0.3]	1 , 0.2999990365064661	202 , 1.2347160392290603e-07
[-1.1, 0.3]	139 , 1.229666167208727e-05	202 , 1.234705133661465e-07
[-1.0, 0.3]	2 , -1.0	2 , -1.0
[-0.9, 0.3]	- , -	- , -
[-0.8, 0.3]	- , -	- , -
[-0.7, 0.3]	- , -	- , -
[-0.6, 0.3]	- , -	- , -
[-0.5, 0.3]	- , -	- , -
[-0.4, 0.3]	- , -	- , -
[-0.3, 0.3]	- , -	- , -
[-0.2, 0.3]	- , -	- , -
[-0.1, 0.3]	- , -	- , -
[0.0, 0.3]	2 , 0.0	2 , 0.0
[0.1, 0.3]	- , -	- , -
[0.2, 0.3]	- , -	- , -

Tabela 4: Wyniki dla kryterium 1

Obliczenia dla warunku 2.

	0.01	0.0001
[-1.5, 0.3]	0 , 0.3	0 , 0.3
[-1.5, 0.2]	0 , 0.2	0 , 0.2
[-1.5, 0.1]	0 , 0.1	0 , 0.1
[-1.5, 0.0]	0 , 0.0	0 , 0.0
[-1.5, -0.1]	0 , -0.1	0 , -0.1
[-1.5, -0.2]	0 , -0.2	0 , -0.2
[-1.5, -0.3]	0 , -0.3	0 , -0.3
[-1.5, -0.4]	0 , -0.4	2 , -0.35979213983546243
[-1.5, -0.5]	0 , -0.5	4 , -0.39040130801355694
[-1.5, -0.6]	0 , -0.6	7 , -0.37416450906711657
[-1.5, -0.7]	2 , -0.6221547686232306	9 , -0.3716091577181563
[-1.5, -0.8]	4 , -0.5960998703447792	10 , -0.3814304816183517
[-1.5, -0.9]	2 , -0.5762442355591834	8 , -0.3837915650717631
[-1.5, -1.0]	0 , -1.0	0 , -1.0
[-1.5, -1.1]	- , -	- , -
[-1.5, -1.2]	- , -	- , -
[-1.5, -1.3]	- , -	- , -
[-1.5, -1.4]	- , -	- , -

Tabela 5: Wyniki dla kryterium 2

	0.000001	0.00000001
[-1.5, 0.3]	4 , 0.23501985880182222	10 , 0.1518402028750265
[-1.5, 0.2]	0 , 0.2	4 , 0.1566484373406491
[-1.5, 0.1]	0 , 0.1	0 , 0.1
[-1.5, 0.0]	0 , 0.0	0 , 0.0
[-1.5, -0.1]	0 , -0.1	0 , -0.1
[-1.5, -0.2]	0 , -0.2	4 , -0.15663886236268393
[-1.5, -0.3]	4 , -0.23491080994718538	10 , -0.15174366116087418
[-1.5, -0.4]	8 , -0.23390946353709313	14 , -0.15090947305716007
[-1.5, -0.5]	11 , -0.23417810827818566	17 , -0.15107818251905067
[-1.5, -0.6]	13 , -0.2411783165995013	19 , -0.15559243636836842
[-1.5, -0.7]	15 , -0.23955341019879936	21 , -0.15454468991624457
[-1.5, -0.8]	16 , -0.24585891973154145	23 , -0.1474389924878853
[-1.5, -0.9]	14 , -0.247409148038453	21 , -0.14836818794539236
[-1.5, -1.0]	0 , -1.0	0 , -1.0
[-1.5, -1.1]	- , -	- , -
[-1.5, -1.2]	- , -	- , -
[-1.5, -1.3]	- , -	- , -
[-1.5, -1.4]	- , -	- , -

Tabela 6: Wyniki dla kryterium 2

	0.01	0.0001
[-1.5, 0.3]	0 , 0.3	0 , 0.3
[-1.4, 0.3]	0 , 0.3	0 , 0.3
[-1.3, 0.3]	0 , 0.3	0 , 0.3
[-1.2, 0.3]	0 , 0.3	0 , 0.3
[-1.1, 0.3]	0 , 0.3	0 , 0.3
[-1.0, 0.3]	0 , 0.3	0 , 0.3
[-0.9, 0.3]	- , -	- , -
[-0.8, 0.3]	- , -	- , -
[-0.7, 0.3]	- , -	- , -
[-0.6, 0.3]	- , -	- , -
[-0.5, 0.3]	- , -	- , -
[-0.4, 0.3]	- , -	- , -
[-0.3, 0.3]	- , -	- , -
[-0.2, 0.3]	- , -	- , -
[-0.1, 0.3]	- , -	- , -
[0.0, 0.3]	0 , 0.3	0 , 0.3
[0.1, 0.3]	- , -	- , -
[0.2, 0.3]	- , -	- , -

Tabela 7: Wyniki dla kryterium 2

	0.000001	0.00000001
[-1.5, 0.3]	4 , 0.23501985880182222	10 , 0.1518402028750265
[-1.4, 0.3]	4 , 0.23501983456326772	10 , 0.15184018672364935
[-1.3, 0.3]	4 , 0.23501975266727598	10 , 0.1518401321526053
[-1.2, 0.3]	4 , 0.23501941793015638	10 , 0.15183990910197134
[-1.1, 0.3]	4 , 0.23501740559353826	10 , 0.1518385681918165
[-1.0, 0.3]	1 , -1.0	1 , -1.0
[-0.9, 0.3]	- , -	- , -
[-0.8, 0.3]	- , -	- , -
[-0.7, 0.3]	- , -	- , -
[-0.6, 0.3]	- , -	- , -
[-0.5, 0.3]	- , -	- , -
[-0.4, 0.3]	- , -	- , -
[-0.3, 0.3]	- , -	- , -
[-0.2, 0.3]	- , -	- , -
[-0.1, 0.3]	- , -	- , -
[0.0, 0.3]	1 , 0.0	1 , 0.0
[0.1, 0.3]	- , -	- , -
[0.2, 0.3]	- , -	- , -

Tabela 8: Wyniki dla kryterium 2

## 2 Problem 2

### 2.1 Opis problemu

Główną ideą problemu jest rozwiązanie układu równań metodą Newtona.

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3 = 1 \\ 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^3 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2^3 - 2x_3^2 = 3 \end{cases}$$

Eksperymenty zostaną przeprowadzone dla różnych wektorów początkowych. Sprawdzona zostanie liczba rozwiązań układu, przy jakich wektorach początkowych metoda nie zbiega do rozwiązania oraz to jakie wektory początkowe doprowadzają do jakiego rozwiązania. Zastosowane zostaną dwa różne kryteria stopu (analogiczne do problemu 1, normy euklidesowe):

1.  $\|X_{(i+1)} - X_{(i)}\| < \rho$
2.  $\|F(X_i)\| < \rho$

## 2.2 Opracowanie

Niech

$$F(X) = \begin{bmatrix} f_1(X) \\ f_2(X) \\ f_3(X) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^2 + x_3 = 1 \\ 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^3 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2^3 - 2x_3^2 = 3 \end{bmatrix}$$

Metoda Newtona dla układów równań jest analogiczna jak dla równania nieliniowego z tą różnicą, że zamiast pochodnej używany jest jakobian macierzy, w tym przypadku:

$$J(X) = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 & 1 \\ 4x_1 & 2x_2 & 3x_3^2 \\ 3 & -6x_2^2 & -4x_3 \end{bmatrix}$$

Wówczas

$$X_{k+1} = X_k - \frac{F(X_k)}{J(X_k)}$$

Czyli

$$X_{k+1} = X_k - J(X_k)^{-1}F(X_k)$$

Gdzie  $J(X_k)^{-1}F(X_k)$  jest rozwiązaniem układu równań  $J(X_k)S = F(X_k)$ , więc

$$X_{k+1} = X_k - S$$



Wektor początkowy	L. iteracji, Wynik
[-1.0, -1.0, -1.0]	74 , [ 1. -1. -1.]
[-1.0, -1.0, -0.3]	63 , [ 1. -1. -1.]
[-1.0, -1.0, 0.3]	132 , [ 1. -1. -1.]
[-1.0, -1.0, 1.0]	24 , [ 1. -1. -1.]
[-1.0, -0.3, -1.0]	8 , [ 1. -1. -1.]
[-1.0, -0.3, -0.3]	76 , [ 1. -1. -1.]
[-1.0, -0.3, 0.3]	9 , [ 1. -1. -1.]
[-1.0, -0.3, 1.0]	139 , [ 1. -1. -1.]
[-1.0, 0.3, -1.0]	31 , [ 1. -1. -1.]
[-1.0, 0.3, -0.3]	173 , [ 1. -1. -1.]
[-1.0, 0.3, 0.3]	80 , [ 1. -1. -1.]
[-1.0, 0.3, 1.0]	138 , [ 1. -1. -1.]
[-1.0, 1.0, -1.0]	15 , [ 1. -1. -1.]
[-1.0, 1.0, -0.3]	29 , [1.00000000e+00 8.73837918e-07 2.62134777e-16]
[-1.0, 1.0, 0.3]	58 , [ 1. -1. -1.]
[-1.0, 1.0, 1.0]	341 , [ 0.9531556 -0.42868942 -0.09228022]
[-0.3, -1.0, -1.0]	121 , [1.00000000e+00 5.98835187e-07 2.94467194e-16]
[-0.3, -1.0, -0.3]	296 , [ 1. -1. -1.]
[-0.3, -1.0, 0.3]	365 , [ 1. -1. -1.]
[-0.3, -1.0, 1.0]	38 , [ 1.00000000e+00 8.48961872e-07 -5.44517800e-17]
[-0.3, -0.3, -1.0]	99 , [ 1. -1. -1.]
[-0.3, -0.3, -0.3]	32 , [ 1. -1. -1.]
[-0.3, -0.3, 0.3]	9 , [ 1. -1. -1.]
[-0.3, -0.3, 1.0]	37 , [ 1. -1. -1.]
[-0.3, 0.3, -1.0]	130 , [ 1. -1. -1.]
[-0.3, 0.3, -0.3]	20 , [ 1. -1. -1.]
[-0.3, 0.3, 0.3]	89 , [ 1. -1. -1.]
[-0.3, 0.3, 1.0]	130 , [ 1. -1. -1.]
[-0.3, 1.0, -1.0]	24 , [1.00000000e+00 8.52286434e-07 2.21536892e-16]
[-0.3, 1.0, -0.3]	165 , [ 1.00000000e+00 5.32508800e-07 -1.83547241e-16]
[-0.3, 1.0, 0.3]	105 , [ 1. -1. -1.]
[-0.3, 1.0, 1.0]	447 , [ 1. -1. -1.]

Wektor początkowy	L. iteracji, Wynik
[0.3, -1.0, -1.0]	21 , [ 1. -1. -1.]
[0.3, -1.0, -0.3]	104 , [ 0.9531556 -0.42868942 -0.09228022]
[0.3, -1.0, 0.3]	80 , [ 1. -1. -1.]
[0.3, -1.0, 1.0]	157 , [ 1. -1. -1.]
[0.3, -0.3, -1.0]	89 , [ 1. -1. -1.]
[0.3, -0.3, -0.3]	11 , [ 1. -1. -1.]
[0.3, -0.3, 0.3]	34 , [ 1. -1. -1.]
[0.3, -0.3, 1.0]	14 , [ 1. -1. -1.]
[0.3, 0.3, -1.0]	71 , [ 1. -1. -1.]
[0.3, 0.3, -0.3]	24 , [1.00000000e+00 5.42508179e-07 2.41224411e-16]
[0.3, 0.3, 0.3]	119 , [ 1. -1. -1.]
[0.3, 0.3, 1.0]	224 , [1.00000000e+00 6.17150412e-07 1.99145032e-17]
[0.3, 1.0, -1.0]	172 , [ 1. -1. -1.]
[0.3, 1.0, -0.3]	23 , [1.00000000e+00 5.74285178e-07 1.94318265e-16]
[0.3, 1.0, 0.3]	23 , [ 1.00000000e+00 7.46004508e-07 -1.00047672e-16]
[0.3, 1.0, 1.0]	281 , [ 1. -1. -1.]
[1.0, -1.0, -1.0]	1 , [ 1. -1. -1.]
[1.0, -1.0, -0.3]	7 , [ 0.9531556 -0.42868942 -0.09228022]
[1.0, -1.0, 0.3]	7 , [ 0.9531556 -0.42868942 -0.09228022]
[1.0, -1.0, 1.0]	24 , [ 1.00000000e+00 5.85365123e-07 -3.18669687e-16]
[1.0, -0.3, -1.0]	363 , [ 1. -1. -1.]
[1.0, -0.3, -0.3]	7 , [ 0.9531556 -0.42868942 -0.09228022]
[1.0, -0.3, 0.3]	21 , [1.00000000e+00 6.07994622e-07 9.45143610e-17]
[1.0, -0.3, 1.0]	229 , [ 1. -1. -1.]
[1.0, 0.3, -1.0]	34 , [ 1. -1. -1.]
[1.0, 0.3, -0.3]	20 , [ 1.00000000e+00 9.66979817e-07 -1.26466082e-16]
[1.0, 0.3, 0.3]	22 , [ 1.00000000e+00 8.95183304e-07 -2.61205052e-17]
[1.0, 0.3, 1.0]	49 , [ 1. -1. -1.]
[1.0, 1.0, -1.0]	x , ['x', 'x', 'x']
[1.0, 1.0, -0.3]	22 , [ 1.00000000e+00 7.15529230e-07 -2.92212534e-19]
[1.0, 1.0, 0.3]	22 , [1.00000000e+00 8.92027608e-07 2.91422175e-16]
[1.0, 1.0, 1.0]	41 , [ 1. -1. -1.]

Tabela 9: Wyniki dla kryterium 1

Wektor początkowy	L. iteracji, Wynik
[-1.0, -1.0, -1.0]	73 , [ 1. -1. -1.]
[-1.0, -1.0, -0.3]	62 , [ 1. -1. -1.]
[-1.0, -1.0, 0.3]	131 , [ 1. -1. -1.]
[-1.0, -1.0, 1.0]	23 , [ 1. -1. -1.]
[-1.0, -0.3, -1.0]	7 , [ 1. -1. -1.]
[-1.0, -0.3, -0.3]	75 , [ 1. -1. -1.]
[-1.0, -0.3, 0.3]	8 , [ 1. -1. -1.]
[-1.0, -0.3, 1.0]	138 , [ 1. -1. -1.]
[-1.0, 0.3, -1.0]	30 , [ 1. -1. -1.]
[-1.0, 0.3, -0.3]	172 , [ 1. -1. -1.]
[-1.0, 0.3, 0.3]	79 , [ 1. -1. -1.]
[-1.0, 0.3, 1.0]	138 , [ 1. -1. -1.]
[-1.0, 1.0, -1.0]	14 , [ 1. -1. -1.]
[-1.0, 1.0, -0.3]	20 , [1.00000000e+00 8.73837918e-07 2.62134777e-16]
[-1.0, 1.0, 0.3]	57 , [ 1. -1. -1.]
[-1.0, 1.0, 1.0]	340 , [ 0.9531556 -0.42868942 -0.09228022]
[-0.3, -1.0, -1.0]	111 , [1.00000000e+00 5.98835187e-07 2.94467194e-16]
[-0.3, -1.0, -0.3]	295 , [ 1. -1. -1.]
[-0.3, -1.0, 0.3]	364 , [ 1. -1. -1.]
[-0.3, -1.0, 1.0]	29 , [ 1.00000000e+00 8.48961872e-07 -5.44517800e-17]
[-0.3, -0.3, -1.0]	98 , [ 1. -1. -1.]
[-0.3, -0.3, -0.3]	31 , [ 1. -1. -1.]
[-0.3, -0.3, 0.3]	8 , [ 1. -1. -1.]
[-0.3, -0.3, 1.0]	36 , [ 1. -1. -1.]
[-0.3, 0.3, -1.0]	129 , [ 1. -1. -1.]
[-0.3, 0.3, -0.3]	19 , [ 1. -1. -1.]
[-0.3, 0.3, 0.3]	88 , [ 1. -1. -1.]
[-0.3, 0.3, 1.0]	129 , [ 1. -1. -1.]
[-0.3, 1.0, -1.0]	15 , [1.00000000e+00 8.52286434e-07 2.21536892e-16]
[-0.3, 1.0, -0.3]	155 , [ 1.00000000e+00 5.32508800e-07 -1.83547241e-16]
[-0.3, 1.0, 0.3]	104 , [ 1. -1. -1.]
[-0.3, 1.0, 1.0]	446 , [ 1. -1. -1.]

Wektor początkowy	L. iteracji, Wynik
[0.3, -1.0, -1.0]	20 , [ 1. -1. -1.]
[0.3, -1.0, -0.3]	102 , [ 0.9531556 -0.42868942 -0.09228022]
[0.3, -1.0, 0.3]	79 , [ 1. -1. -1.]
[0.3, -1.0, 1.0]	156 , [ 1. -1. -1.]
[0.3, -0.3, -1.0]	88 , [ 1. -1. -1.]
[0.3, -0.3, -0.3]	11 , [ 1. -1. -1.]
[0.3, -0.3, 0.3]	33 , [ 1. -1. -1.]
[0.3, -0.3, 1.0]	13 , [ 1. -1. -1.]
[0.3, 0.3, -1.0]	70 , [ 1. -1. -1.]
[0.3, 0.3, -0.3]	14 , [1.00000000e+00 5.42508179e-07 2.41224411e-16]
[0.3, 0.3, 0.3]	118 , [ 1. -1. -1.]
[0.3, 0.3, 1.0]	214 , [1.00000000e+00 6.17150412e-07 1.99145032e-17]
[0.3, 1.0, -1.0]	172 , [ 1. -1. -1.]
[0.3, 1.0, -0.3]	13 , [1.00000000e+00 5.74285178e-07 1.94318265e-16]
[0.3, 1.0, 0.3]	13 , [ 1.00000000e+00 7.46004508e-07 -1.00047672e-16]
[0.3, 1.0, 1.0]	280 , [ 1. -1. -1.]
[1.0, -1.0, -1.0]	1 , [ 1. -1. -1.]
[1.0, -1.0, -0.3]	6 , [ 0.9531556 -0.42868942 -0.09228022]
[1.0, -1.0, 0.3]	6 , [ 0.9531556 -0.42868942 -0.09228022]
[1.0, -1.0, 1.0]	14 , [ 1.00000000e+00 5.85365123e-07 -3.18669687e-16]
[1.0, -0.3, -1.0]	362 , [ 1. -1. -1.]
[1.0, -0.3, -0.3]	6 , [ 0.9531556 -0.42868942 -0.09228022]
[1.0, -0.3, 0.3]	11 , [1.00000000e+00 6.07994622e-07 9.45143610e-17]
[1.0, -0.3, 1.0]	228 , [ 1. -1. -1.]
[1.0, 0.3, -1.0]	33 , [ 1. -1. -1.]
[1.0, 0.3, -0.3]	11 , [ 1.00000000e+00 9.66979817e-07 -1.26466082e-16]
[1.0, 0.3, 0.3]	13 , [ 1.00000000e+00 8.95183304e-07 -2.61205052e-17]
[1.0, 0.3, 1.0]	48 , [ 1. -1. -1.]
[1.0, 1.0, -1.0]	x , ['x', 'x', 'x']
[1.0, 1.0, -0.3]	12 , [ 1.00000000e+00 7.15529230e-07 -2.92212534e-19]
[1.0, 1.0, 0.3]	13 , [1.00000000e+00 8.92027608e-07 2.91422175e-16]
[1.0, 1.0, 1.0]	40 , [ 1. -1. -1.]

Tabela 10: Wyniki dla kryterium 2

## 2.3 Wnioski