Kamil Świerad

Rozwiązywanie równań i układów równań nieliniowych

MOwNiT 2

Do obliczeń użyłem języka c++, na systemie operacyjnym Ubuntu kompilując przy użyciu g++. Procesor komputer to Intel® Core™ i5-6300HQ CPU @ 2.30GHz × 4, a ilość pamięci RAM to 16GB. Program wykorzystany do przeprowadzenia eksperymentów był napisany przez mnie oraz wykorzystałem elementy biblioteki Armadillo.

1) Pierwsze zadanie polegało na znalezieniu miejsc zerowych funkcji:
   $f(x) = x^{10} - (1-x)^{15}$
   na przedziale $x \in [0.1\ ,\ 2.1]$

metodą Newtona i Siecznych dla dwóch kryteriów stopu:

- $\left|x^{(i+1)} - x^{(i)}\right| < \rho$
- $\left|f(x^{i})\right| < \rho$

Jako pierwszej użyłem metody Newtona. Pochodna była policzona ręcznie i wprowadzona jako osobna funkcji do programu.
Eksperyment polegał no załączeniu skryptu który wykonywał program dla różnych parametrów:
ϱ - {1e-2, 1e-5, 1e-9}
x_0 - co 0.1 od 0.1 do 2.1 (gdzie x_0 to punkt początkowy dla metody Newtona)
dla obu warunków stopu.

N w tabeli do liczba iteracji
x_k w tabeli to wynik końcowy

Tabela 1.1 Wartości otrzymane w eksperymencie przy użyciu metody Newtona dla obu warunków stopu(prawa część tabeli dla pierwszego warunku stopu, lewa dla drugiego) i dla ϱ = 0.01

x_0	ϱ	**N**	x_k
0.1	0.01	7	0.430122
0.2	0.01	5	0.429937
0.3	0.01	3	0.429847
0.4	0.01	1	0.430107
0.5	0.01	2	0.430158
0.6	0.01	4	0.43016
0.7	0.01	5	0.43015
0.8	0.01	6	0.430134
0.9	0.01	8	0.43016
1	0.01	9	0.43016
1.1	0.01	9	0.430136
1.2	0.01	10	0.430141
1.3	0.01	11	0.430156
1.4	0.01	12	0.43016
1.5	0.01	12	0.430134
1.6	0.01	13	0.430157
1.7	0.01	14	0.43016
1.8	0.01	14	0.430152
1.9	0.01	15	0.43016
2	0.01	15	0.430152
2.1	0.01	16	0.43016

x_0	ϱ	**N**	x_k
0.1	0.01	4	0.317019
0.2	0.01	3	0.349385
0.3	0.01	1	0.346519
0.4	0.01	1	0.425412
0.5	0.01	1	0.453731
0.6	0.01	1	0.540035
0.7	0.01	2	0.567008
0.8	0.01	4	0.524962
0.9	0.01	5	0.531498
1	0.01	6	0.531498
1.1	0.01	7	0.526203
1.2	0.01	8	0.516689
1.3	0.01	8	0.559619
1.4	0.01	9	0.54242
1.5	0.01	10	0.523108
1.6	0.01	10	0.557899
1.7	0.01	11	0.533533
1.8	0.01	11	0.564884
1.9	0.01	12	0.536707
2	0.01	12	0.565006
2.1	0.01	13	0.534159

Tabela 1.2 Wartości otrzymane w eksperymencie przy użyciu metody Newtona dla obu warunków stopu(prawa część tabeli dla pierwszego warunku stopu, lewa dla drugiego) i dla ϱ = 0.00001

x_0	ϱ	N	x_k
0.1	1,00E-0 5	9	0.43016
0.2	1,00E-0 5	7	0.43016
0.3	1,00E-0 5	5	0.43016
0.4	1,00E-0 5	3	0.43016
0.5	1,00E-0 5	3	0.43016
0.6	1,00E-0 5	5	0.43016
0.7	1,00E-0 5	6	0.43016
0.8	1,00E-0 5	8	0.43016
0.9	1,00E-0 5	8	0.43016
1	1,00E-0 5	9	0.43016
1.1	1,00E-0 5	11	0.43016
1.2	1,00E-0 5	12	0.43016
1.3	1,00E-0 5	12	0.43016
1.4	1,00E-0 5	13	0.43016
1.5	1,00E-0 5	14	0.43016
1.6	1,00E-0 5	14	0.43016
1.7	1,00E-0 5	15	0.43016
1.8	1,00E-0 5	15	0.43016
1.9	1,00E-0 5	16	0.43016
2	1,00E-0	16	0.43016

x_0	ϱ	N	x_k
0.1	1,00E-05	9	0.43016
0.2	1,00E-05	7	0.43016
0.3	1,00E-05	5	0.43016
0.4	1,00E-05	3	0.43016
0.5	1,00E-05	4	0.43016
0.6	1,00E-05	5	0.43016
0.7	1,00E-05	7	0.43016
0.8	1,00E-05	8	0.43016
0.9	1,00E-05	9	0.43016
1	1,00E-05	10	0.43016
1.1	1,00E-05	11	0.43016
1.2	1,00E-05	12	0.43016
1.3	1,00E-05	13	0.43016
1.4	1,00E-05	13	0.43016
1.5	1,00E-05	14	0.43016
1.6	1,00E-05	15	0.43016
1.7	1,00E-05	15	0.43016
1.8	1,00E-05	16	0.43016
1.9	1,00E-05	16	0.43016
2	1,00E-05	17	0.43016

	5		
2.1	1,00E-0 5	17	0.43016

2.1	1,00E-05	17	0.43016

Dobrze widać że pierwastek naszej funkcji to ok 0.43, i dobrze widać że im x0, jest bliżej właściwej wartości tym mniej iteracji algorytm potrzebuje, aby dojść do tej wartości. Warunek stopu nr 2 powoduje mniejszą dokładność.

Jako drugiej użyłem metody siecznych.
Eksperyment polegał no załączeniu skryptu który wykonywał program dla różnych parametrów:
ϱ - {1e-2, 1e-5, 1e-9}
x_0 - co 0.1 od 0.1 do 2.1
x_1 - co 0.1 od 0.1 do 2.1
dla obu warunków stopu. x_0 i x_1 to punkty początkowe metody siecznych, i zmieniałem je najpierw zwiększając x_0 mając stale $x_1 = 2.1$, następnie majac stale $x_0 = 0.1$ zmniejszałem
N w tabeli do liczba iteracji
x_k w tabeli to wynik końcowy

Tabela 2.1 Wartości otrzymane w eksperymencie przy użyciu metody siecznych dla obu warunków stopu(prawa część tabeli dla pierwszego warunku stopu, lewa dla drugiego) i dla ϱ = 0.001.

x_0	x_1	**ϱ**	**N**	x_k
0.1	2.1	0.001	3	0.100491
0.2	2.1	0.001	3	0.20008
0.3	2.1	0.001	3	0.30001
0.4	2.1	0.001	3	0.400001
0.5	2.1	0.001	3	0.499998
0.6	2.1	0.001	3	0.599989
0.7	2.1	0.001	3	0.699953
0.8	2.1	0.001	3	0.799833
0.9	2.1	0.001	3	0.8995
1	2.1	0.001	3	0.998687
1.1	2.1	0.001	18	0.43016
1.2	2.1	0.001	19	0.430159
1.3	2.1	0.001	20	0.430159
1.4	2.1	0.001	21	0.430159
1.5	2.1	0.001	22	0.43016
1.6	2.1	0.001	23	0.43016

x_0	x_1	**ϱ**	**N**	x_k
0.1	2.1	0.001	12	0.416055
0.2	2.1	0.001	9	0.404922
0.3	2.1	0.001	6	0.400442
0.4	2.1	0.001	1	2.1
0.5	2.1	0.001	1	2.1
0.6	2.1	0.001	7	0.444837
0.7	2.1	0.001	9	0.447147
0.8	2.1	0.001	11	0.443372
0.9	2.1	0.001	12	0.458314
1	2.1	0.001	14	0.444261
1.1	2.1	0.001	15	0.450923
1.2	2.1	0.001	16	0.455114
1.3	2.1	0.001	17	0.45634
1.4	2.1	0.001	18	0.45458
1.5	2.1	0.001	19	0.450147
1.6	2.1	0.001	20	0.443824

1.7	2.1	0.001	23	0.430158
1.8	2.1	0.001	24	0.43016
1.9	2.1	0.001	24	0.430159
2	2.1	0.001	24	0.430153

1.7	2.1	0.001	20	0.459228
1.8	2.1	0.001	21	0.446868
1.9	2.1	0.001	21	0.457864
2	2.1	0.001	21	0.468223

Tabela 2.2 Wartości otrzymane w eksperymencie przy użyciu metody siecznych dla obu warunków stopu(prawa część tabeli dla pierwszego warunku stopu, lewa dla drugiego) i dla ϱ = 0.001.

x_0	x_1	ϱ	N	x_k
0.1	2.1	0.001	3	0.100491
0.1	2	0.001	3	0.100761
0.1	1.9	0.001	3	0.101202
0.1	1.8	0.001	3	0.101943
0.1	1.7	0.001	15	0.430159
0.1	1.6	0.001	15	0.430159
0.1	1.5	0.001	15	0.43016
0.1	1.4	0.001	15	0.43016
0.1	1.3	0.001	14	0.430154
0.1	1.2	0.001	14	0.43016
0.1	1.1	0.001	13	0.430159
0.1	1	0.001	11	0.430159
0.1	0.9	0.001	3	0.3976
0.1	0.8	0.001	9	0.43016
0.1	0.7	0.001	10	0.43016
0.1	0.6	0.001	8	0.430155
0.1	0.5	0.001	6	0.430159
0.1	0.4	0.001	2	0.400533
0.1	0.3	0.001	8	0.430138
0.1	0.2	0.001	11	0.430158

x_0	x_1	ϱ	N	x_k
0.1	2.1	0.001	12	0.416055
0.1	2	0.001	12	0.416144
0.1	1.9	0.001	12	0.41629
0.1	1.8	0.001	12	0.416535
0.1	1.7	0.001	11	0.395146
0.1	1.6	0.001	11	0.396243
0.1	1.5	0.001	11	0.39822
0.1	1.4	0.001	11	0.401819
0.1	1.3	0.001	11	0.40821
0.1	1.2	0.001	10	0.397138
0.1	1.1	0.001	9	0.396497
0.1	1	0.001	7	0.395465
0.1	0.9	0.001	3	0.3976
0.1	0.8	0.001	5	0.471575
0.1	0.7	0.001	7	0.446267
0.1	0.6	0.001	5	0.465114
0.1	0.5	0.001	2	0.49817
0.1	0.4	0.001	2	0.400533
0.1	0.3	0.001	5	0.402497
0.1	0.2	0.001	8	0.412452

Tabela 2.3 Wartości otrzymane w eksperymencie przy użyciu metody siecznych dla obu warunków stopu(prawa część tabeli dla pierwszego warunku stopu, lewa dla drugiego) i dla ϱ = 1e-7.

x_0	x_1	ϱ	N	x_k
0.1	2.1	1,00E-07	17	0.43016
0.1	2	1,00E-07	17	0.43016
0.1	1.9	1,00E-07	17	0.43016
0.1	1.8	1,00E-07	17	0.43016
0.1	1.7	1,00E-07	17	0.43016

x_0	x_1	ϱ	N	x_k
0.1	2.1	1,00E-07	16	0.43016
0.1	2	1,00E-07	16	0.43016
0.1	1.9	1,00E-07	16	0.43016
0.1	1.8	1,00E-07	16	0.43016
0.1	1.7	1,00E-07	16	0.43016

0.1	1.6	1,00E-07	17	0.43016
0.1	1.5	1,00E-07	17	0.43016
0.1	1.4	1,00E-07	16	0.43016
0.1	1.3	1,00E-07	16	0.43016
0.1	1.2	1,00E-07	16	0.43016
0.1	1.1	1,00E-07	15	0.43016
0.1	1	1,00E-07	13	0.43016
0.1	0.9	1,00E-07	8	0.43016
0.1	0.8	1,00E-07	10	0.43016
0.1	0.7	1,00E-07	11	0.43016
0.1	0.6	1,00E-07	10	0.43016
0.1	0.5	1,00E-07	8	0.43016
0.1	0.4	1,00E-07	7	0.43016
0.1	0.3	1,00E-07	10	0.43016
0.1	0.2	1,00E-07	13	0.43016

0.1	1.6	1,00E-07	16	0.43016
0.1	1.5	1,00E-07	16	0.43016
0.1	1.4	1,00E-07	16	0.43016
0.1	1.3	1,00E-07	15	0.43016
0.1	1.2	1,00E-07	15	0.43016
0.1	1.1	1,00E-07	14	0.43016
0.1	1	1,00E-07	12	0.43016
0.1	0.9	1,00E-07	8	0.43016
0.1	0.8	1,00E-07	9	0.43016
0.1	0.7	1,00E-07	10	0.43016
0.1	0.6	1,00E-07	9	0.43016
0.1	0.5	1,00E-07	7	0.43016
0.1	0.4	1,00E-07	6	0.43016
0.1	0.3	1,00E-07	10	0.43016
0.1	0.2	1,00E-07	12	0.43016

Tabela 2.4 Wartości otrzymane w eksperymencie przy użyciu metody siecznych dla obu warunków stopu(prawa część tabeli dla pierwszego warunku stopu, lewa dla drugiego) i dla ϱ = 1e-7.

x_0	x_1	ϱ	N	x_k
0.1	2.1	1,00E-07	17	0.43016
0.2	2.1	1,00E-07	14	0.43016
0.3	2.1	1,00E-07	11	0.43016
0.4	2.1	1,00E-07	8	0.43016
0.5	2.1	1,00E-07	9	0.43016
0.6	2.1	1,00E-07	11	0.43016
0.7	2.1	1,00E-07	13	0.43016
0.8	2.1	1,00E-07	15	0.43016
0.9	2.1	1,00E-07	17	0.43016
1	2.1	1,00E-07	18	0.43016
1.1	2.1	1,00E-07	19	0.43016
1.2	2.1	1,00E-07	21	0.43016
1.3	2.1	1,00E-07	22	0.43016
1.4	2.1	1,00E-07	23	0.43016
1.5	2.1	1,00E-07	23	0.43016
1.6	2.1	1,00E-07	24	0.43016
1.7	2.1	1,00E-07	25	0.43016
1.8	2.1	1,00E-07	25	0.43016
1.9	2.1	1,00E-07	26	0.43016

x_0	x_1	ϱ	N	x_k
0.1	2.1	1,00E-07	16	0.43016
0.2	2.1	1,00E-07	14	0.43016
0.3	2.1	1,00E-07	11	0.43016
0.4	2.1	1,00E-07	7	0.43016
0.5	2.1	1,00E-07	8	0.43016
0.6	2.1	1,00E-07	10	0.43016
0.7	2.1	1,00E-07	12	0.43016
0.8	2.1	1,00E-07	14	0.43016
0.9	2.1	1,00E-07	16	0.43016
1	2.1	1,00E-07	17	0.43016
1.1	2.1	1,00E-07	19	0.43016
1.2	2.1	1,00E-07	20	0.43016
1.3	2.1	1,00E-07	21	0.43016
1.4	2.1	1,00E-07	22	0.43016
1.5	2.1	1,00E-07	23	0.43016
1.6	2.1	1,00E-07	23	0.43016
1.7	2.1	1,00E-07	24	0.43016
1.8	2.1	1,00E-07	24	0.43016
1.9	2.1	1,00E-07	25	0.43016

2	2.1	1,00E-07	26	0.43016

2	2.1	1,00E-07	25	0.43016

Analizując powyższe tabele można stwierdzić że metoda siecznych jest bardzo wrażliwa na wygląd funkcji i w zależności od stwierdzonej dokładności, może wskazywać bardzo niepoprawne rozwiązanie, co więcej, liczba iteracji zmniejsza się w miarę być bliżej rozwiązania któregoś z węzłów.

2)Drugie zadanie polegało na rozwiązaniu układu równań nieliniowych metodą Newtona:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3 = 1 \\ 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^3 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2^3 - 2x_3^2 = 3 \end{cases}$$

Wzór w metodzie Newtona dla układów równań, zakłada użycie Jakobianu, po odpowiednich przekształceniach uzyskujemy: $J_F(x_n)(x_{n+1} - x_n) = -F(x_n)$
gdzie F to nasza funkcja (de facto nasz cały układ), J_F to jej jakobian. Dzięki temu powstaje układ równań liniowych, który rozwiązałem przy użyciu metody solve z biblioteki Armadillo. Jako normę wektora zastosowałem normę maksimum.

Przed wykonaniem eksperymentu wprowadziłem mój układ równań do kalkulatora online (wolfram alpha) i otrzymałem poniższe rozwiązania:
$x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = -1$ oraz
$x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ oraz
$x_1 \approx 0.953$, $x_2 \approx -0.429$, $x_3 \approx -0.0923$

Wektory początkowe generowałem metodą randu z biblioteki Armadillo, która generuje wektory o wartościach [0,1], o rozkładzie jednorodnym, następnie odejmowałem od każdej wartości 0.5 i mnożyłem przez 200 otrzymując wektor z wartościami między -100 a 100.
ϱ - było jedną z trzech wartości: {1e-3, 1e-6, 1e-9}
x^0 - to wektor początkowy, x^k - to wektor otrzymany po wykonaniu metody.

Tabela 3.1 Prezentuje otrzymane dane po wykonaniu eksperymentu dla pierwszego warunku stopu.

ϱ	x^0	N	x^k
0.001	[63.6428,49.8546,-69.9056]	52	[0.953155,-0.42869,-0.0922806]
0.001	[-4.35435,35.9237,80.4029]	139	[1,-1,-1]
0.001	[75.4703,81.5046,26.8571]	21	[1,-1,-1]
0.001	[-77.0926,-97.2648,88.2598]	122	[1,-1,-1]

0.001	[-16.0318,-86.3217,-63.5034]	17	[0.953155,-0.428692,-0.0922811]
0.001	[-49.7916,96.562,-44.4892]	214	[1,0.000540931,-8.36919e-10]
0.001	[-73.943,15.0949,-70.0976]	227	[1,0.000696413,-1.78152e-09]
0.001	[-38.6407,71.0881,-94.4796]	19	[0.953156,-0.42869,-0.0922803]
0.001	[-86.1988,-1.99904,21.5217]	160	[1,0.000829334,-3.0024e-09]
1,00E-09	[-52.2133,50.1663,68.1049]	223	[0.953156,-0.428689,-0.0922802]
1,00E-09	[-29.0482,-98.6225,82.7026]	152	[1,-1,-1]
1,00E-09	[-59.9243,82.0589,-23.7859]	159	[1,4.05391e-09,-6.09756e-17]
1,00E-09	[58.1214,-71.5604,20.5396]	260	[1,6.76012e-09,4.58294e-17]
1,00E-09	[-79.8838,-82.7774,95.3723]	217	[1,-1,-1]
1,00E-09	[-65.5092,-42.8853,48.9626]	287	[1,9.7219e-09,4.52897e-17]
1,00E-09	[-40.0792,-33.8909,-12.5415]	54	[1,-1,-1]
1,00E-09	[-4.74348,34.3612,-30.7036]	218	[1,-1,-1]

Tabela 3.2 Prezentuje otrzymane dane po wykonaniu eksperymentu dla drugiego warunku stopu.

ϱ	x^0	N	x^k
0.001	[63.6428,49.8546,-69.9056]	51	[0.953079,-0.429144,-0.0924303]
0.001	[-4.35435,35.9237,80.4029]	138	[0.999997,-1.00001,-1.00002]
0.001	[75.4703,81.5046,26.8571]	21	[1,-1,-1]
0.001	[-77.0926,-97.2648,88.2598]	121	[0.999999,-1,-0.999998]
0.001	[-16.0318,-86.3217,-63.5034]	16	[0.953031,-0.429426,-0.0925237]
0.001	[-49.7916,96.562,-44.4892]	208	[0.999941,0.0320069,-0.000117067]
0.001	[-73.943,15.0949,-70.0976]	222	[0.999981,0.0211541,-3.79664e-05]
0.001	[-38.6407,71.0881,-94.4796]	18	[0.953114,-0.428934,-0.0923607]
0.001	[-86.1988,-1.99904,21.5217]	155	[0.99997,0.0249686,-5.98232e-05]
1,00E-09	[-52.2133,50.1663,68.1049]	222	[0.953156,-0.428689,-0.0922802]
1,00E-09	[-29.0482,-98.6225,82.7026]	151	[1,-1,-1]
1,00E-09	[-59.9243,82.0589,-23.7859]	146	[1,3.10914e-05,-1.59774e-13]
1,00E-09	[58.1214,-71.5604,20.5396]	248	[1,1.63885e-05,-2.3126e-14]
1,00E-09	[-79.8838,-82.7774,95.3723]	216	[1,-1,-1]
1,00E-09	[-65.5092,-42.8853,48.9626]	275	[1,2.01298e-05,-4.34835e-14]
1,00E-09	[-40.0792,-33.8909,-12.5415]	53	[1,-1,-1]
1,00E-09	[-4.74348,34.3612,-30.7036]	217	[1,-1,-1]

Jak widać w powyższych tabelach, metoda Newtona zbiega do wszystkich trzech rozwiązań podanych przez kalkulator, w zależności od podanego wektora początkowego, co ważne metoda jest bardzo wrażliwa na wektor początkowy, małe zmiany w wektorze początkowym mogą powodować bardzo duże wahania w liczbie iteracji. Różnicą między warunkami stopu, jest zmniejszona dokładność drugiego warunku, a co za tym idzie, minimalnie mniejsza liczba iteracji. Co trzeba zaznaczyć to fakt, że ilość wektorów początkowych dla których rozwiązanie zbiega do [1,-1,-1], jest przeważająco nad pozostałymi dwoma rozwiązaniami, czego nie widać na powyższych tabelach, ale można to zauważyć w pełnej tabeli uzyskanych przezemnie wyników w pliku “Układ.pdf”.