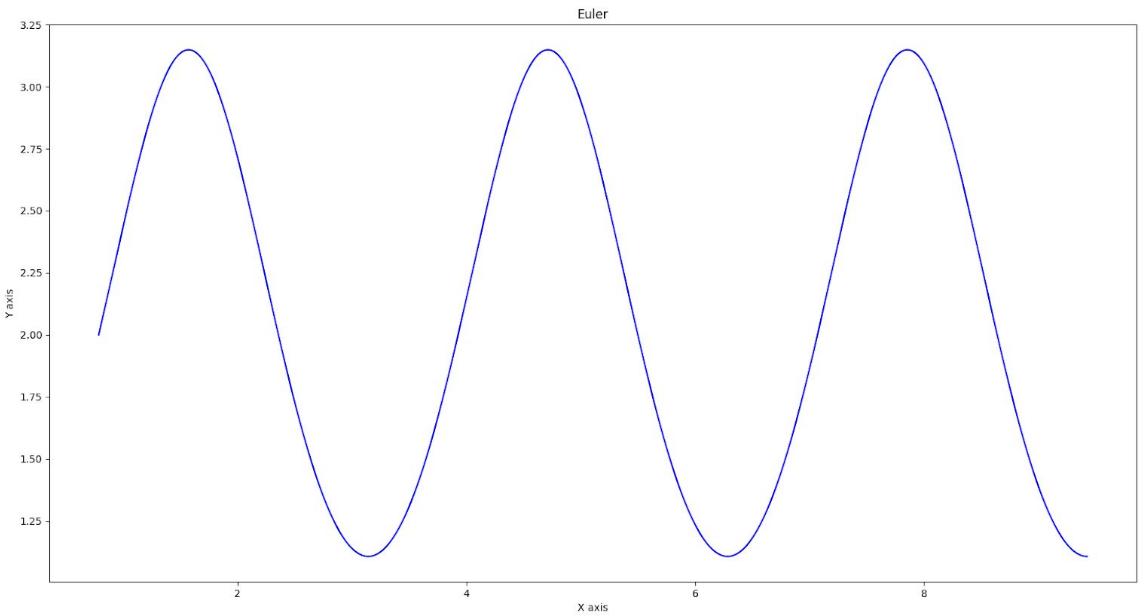
Kamil Świerad

Rozwiązywanie równań różniczkowych zwyczajnych

MOwNiT 2

Do obliczeń użyłem języka python, na systemie operacyjnym Ubuntu. Procesor komputer to Intel® Core™ i5-6300HQ CPU @ 2.30GHz × 4, a ilość pamięci RAM to 16GB.
Program wykorzystany do przeprowadzenia eksperymentów był napisany przeze mnie. Do rysowania wykresów wykorzystałem bibliotekę matplotlib, a dokładniej, pyplot, do liczenia normy z różnicy wektorów wykorzystałem bibliotekę numpy.

Zad 1.
Otrzymane przeze mnie równanie to:
$y' - y * sin(2x) \ = 0.5 * sin(2x) * cos(2x)$
zagadnienie początkowe - $y(x_0) = f(x_0)$
gdzie rozwiązaniem jest $f(x) = e^{-0.5*cos(2x)} - 0.5 * cos(2x) \ + 1$
na przedziale $x \in [\frac{\pi}{4}, 3\pi]$
Wykres 1. Wykres funkcji f(x).



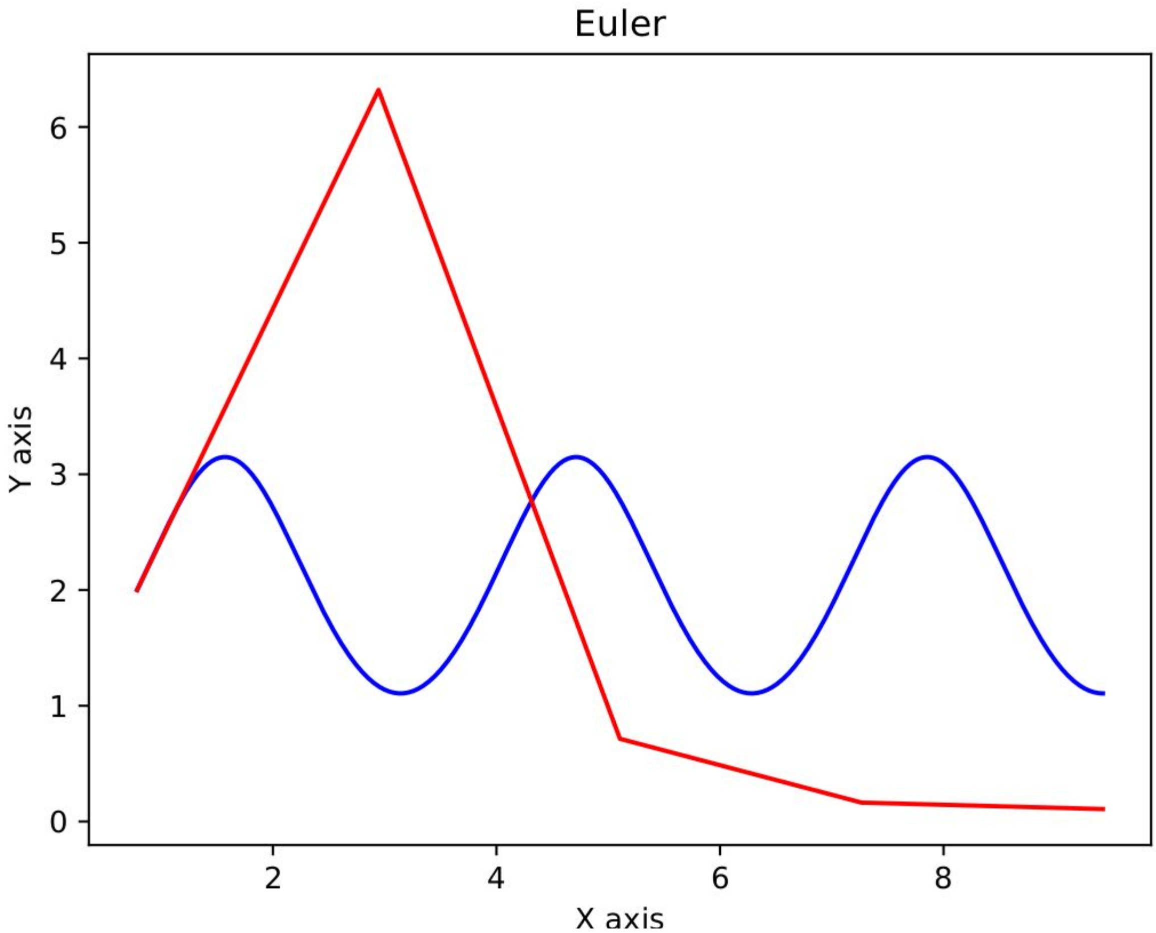
Eksperyment polegał na załączeniu programu rozwiązującego równanie metodą Eulera i metodą Runge-Kuttego dla ilości kroków
$n \in [4, 9, 24, 49, 99, 249, 499, 999]$
Błędy w tabeli poniżej to norma maksimum z różnicy wektora wartości funkcji oraz wartości uzyskanych przez odpowiednią metodę.

Tabela 1. Błędy otrzymane dla wykonanych eksperymentów dla metody Eulera.

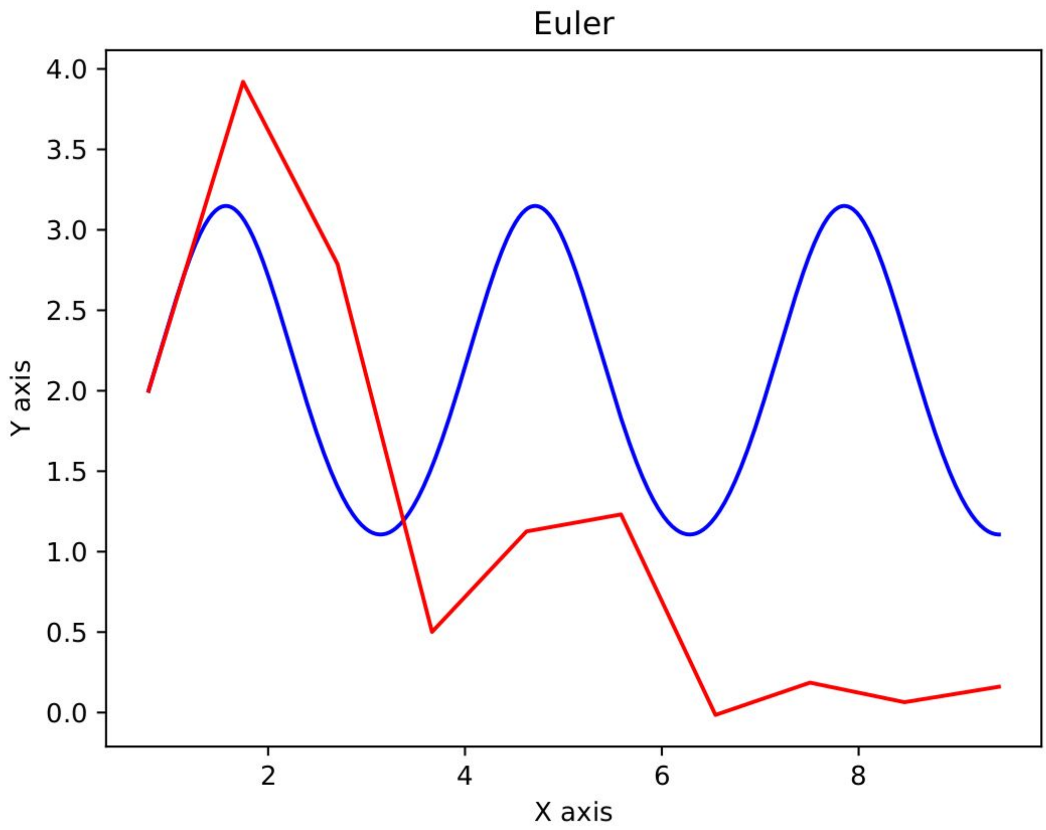
Liczba kroków	długość kroku	błąd
4	2,159844949	5.151569375252217
9	0,9599310886	2.6637722017514087
24	0,3599741582	1.3498565540210836
49	0,1763138734	0.7253717986158907
99	0,0872664626	0.37542333022212393
249	0,03469630441	0.15418481316866428
499	0,01731338637	0.07773881373345315
999	0,008648027825	0.0390372755405628

Analizując wyniki otrzymane w eksperymencie można zauważyć że większa liczba kroków zwiększa dokładność otrzymanych wyników. Jednak zmiana na początku jest o wiele większa, bo co można zaobserwować na wykresach, przy długim kroku możemy otrzymać wynik który bardzo odstaje od faktycznego rozwiązania.

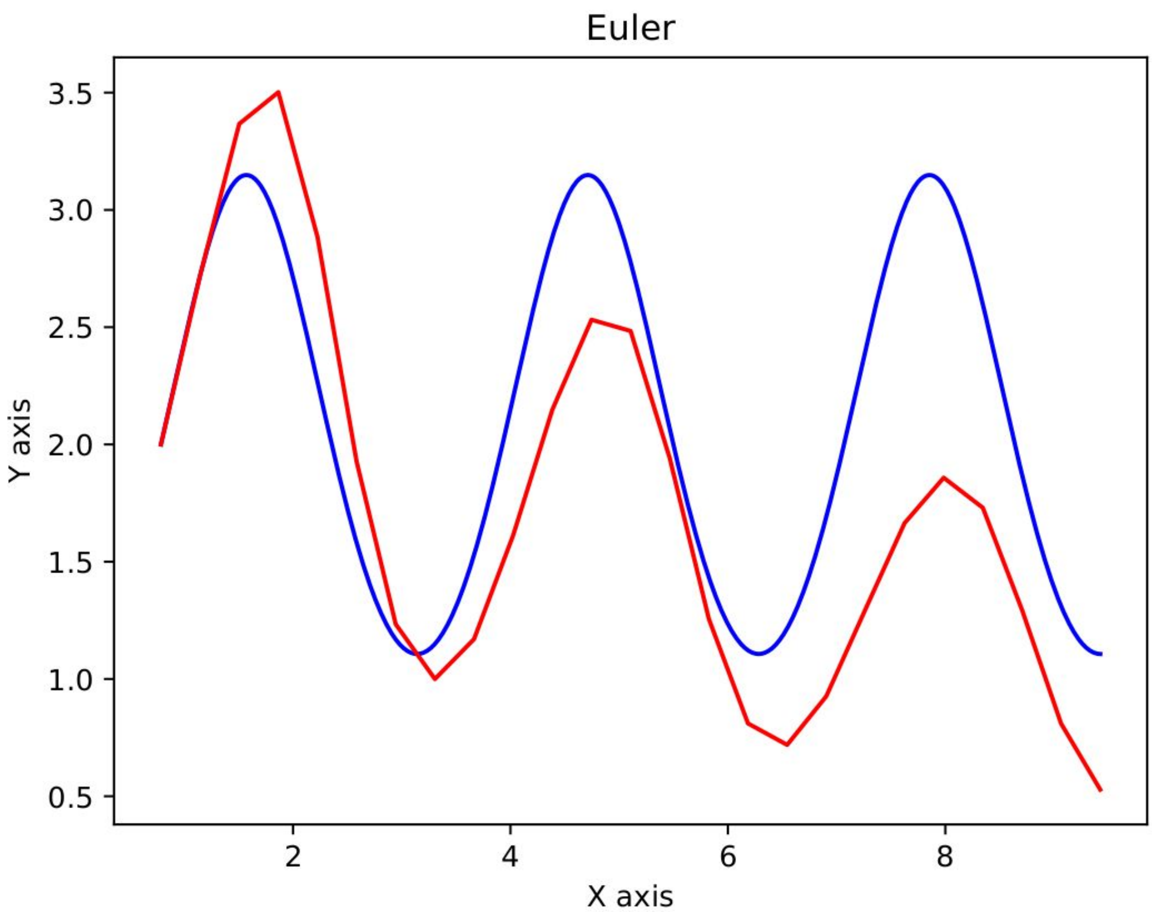
Wykres 2. Otrzymana funkcja metodą Eulera przy 4 krokach.



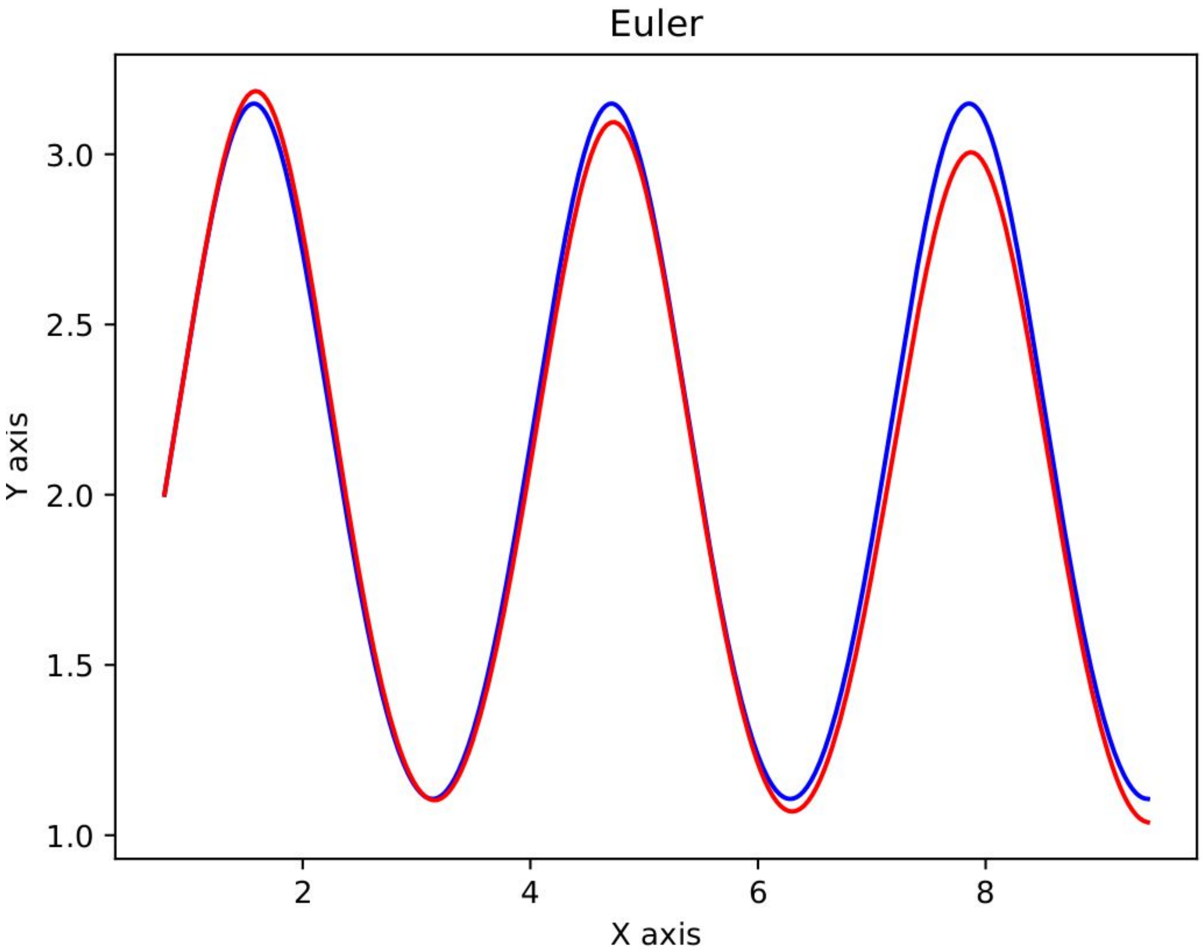
Wykres 3. Otrzymana funkcja metodą Eulera przy 9 krokach.



Wykres 4. Otrzymana funkcja metodą Eulera przy 25 krokach.



Wykres 5. Otrzymana funkcja metodą Eulera przy 250 krokach.



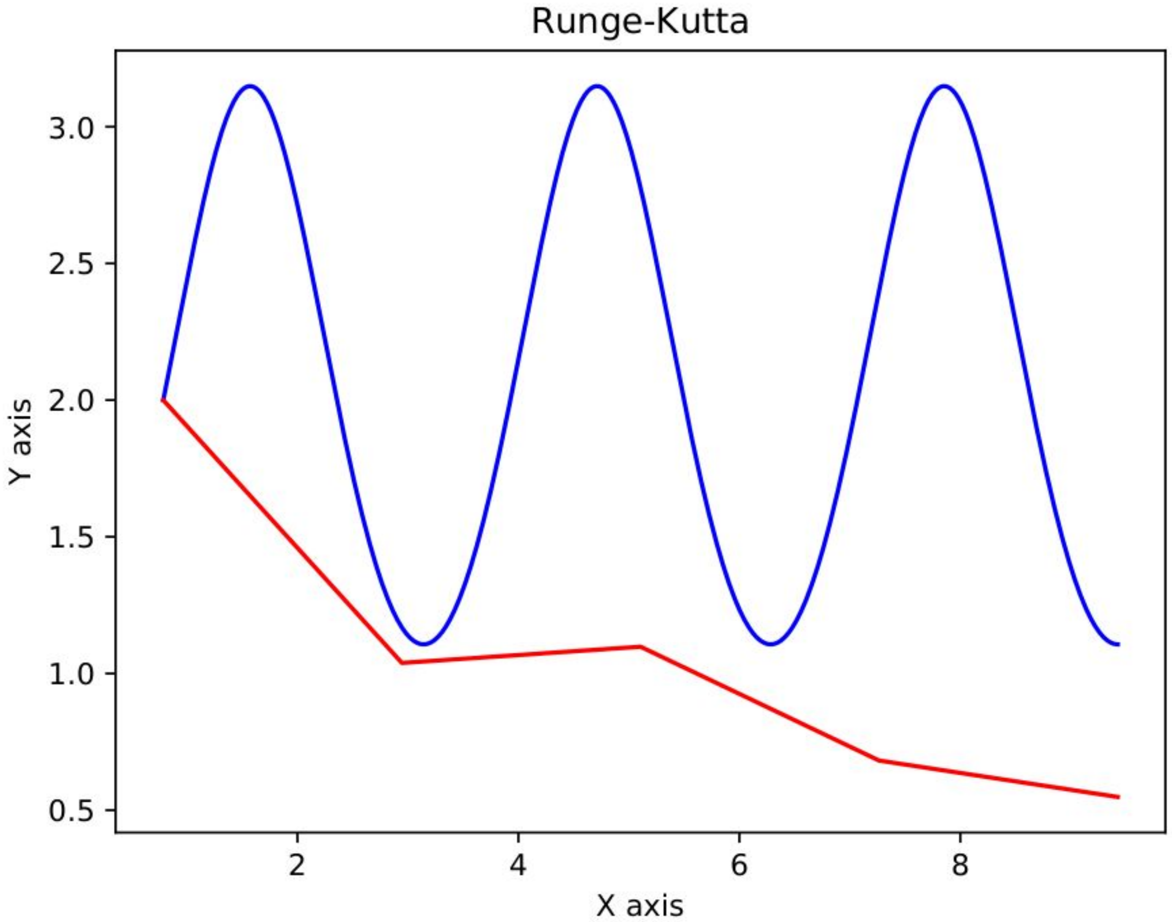
Analizując powyższe wykresy można zauważyć że przy długich krokach łatwo może dojść do sytuacji że metoda “przestrzela” prawidłowe rozwiązanie i powstaje funkcja całkowicie nieadekwatna.

Tabela 2. Błędy otrzymane dla wykonanych eksperymentów dla metody Runge-Kutty 4 stopnia.

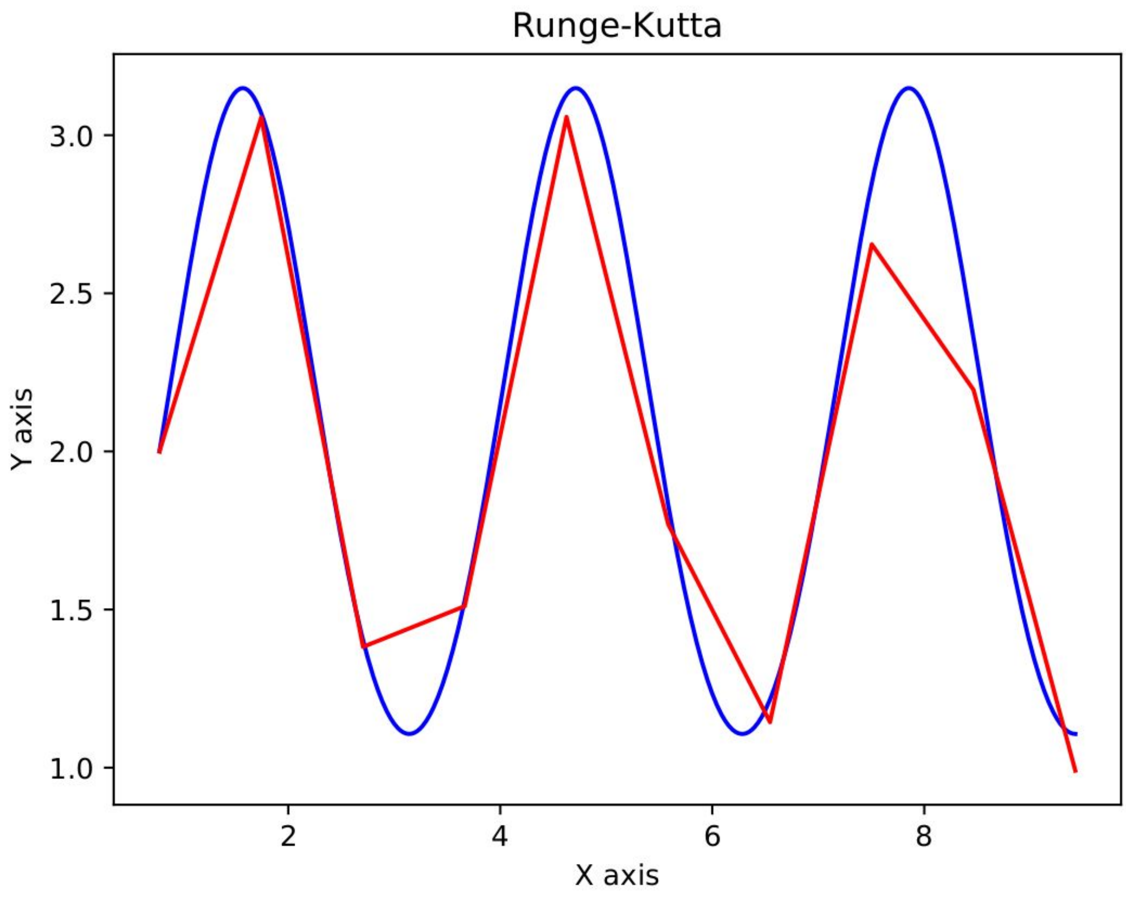
Liczba kroków	**długość kroku**	**błąd**
4	2,159844949	1.7208608661031284
9	0,9599310886	0.19480369498800787
24	0,3599741582	0.0020719135376054965
49	0,1763138734	6.304749970187373e-05
99	0,0872664626	1.980465036854895e-06
249	0,03469630441	2.5650980006730606e-08
499	0,01731338637	1.3366974194184422e-09
999	0,008648027825	7.534706192302565e-11

Porównując wyniki z metody Runge-Kutty z metodą Eulera łatwo zauważyć że ta metoda wymaga dużo mniejszej ilości kroków aby osiągać wyższą dokładność, już dla 9 kroków dokładność osiąga poziom porównywalny z poziomem dokładności dla 249 kroków przy metodzie Eulera.

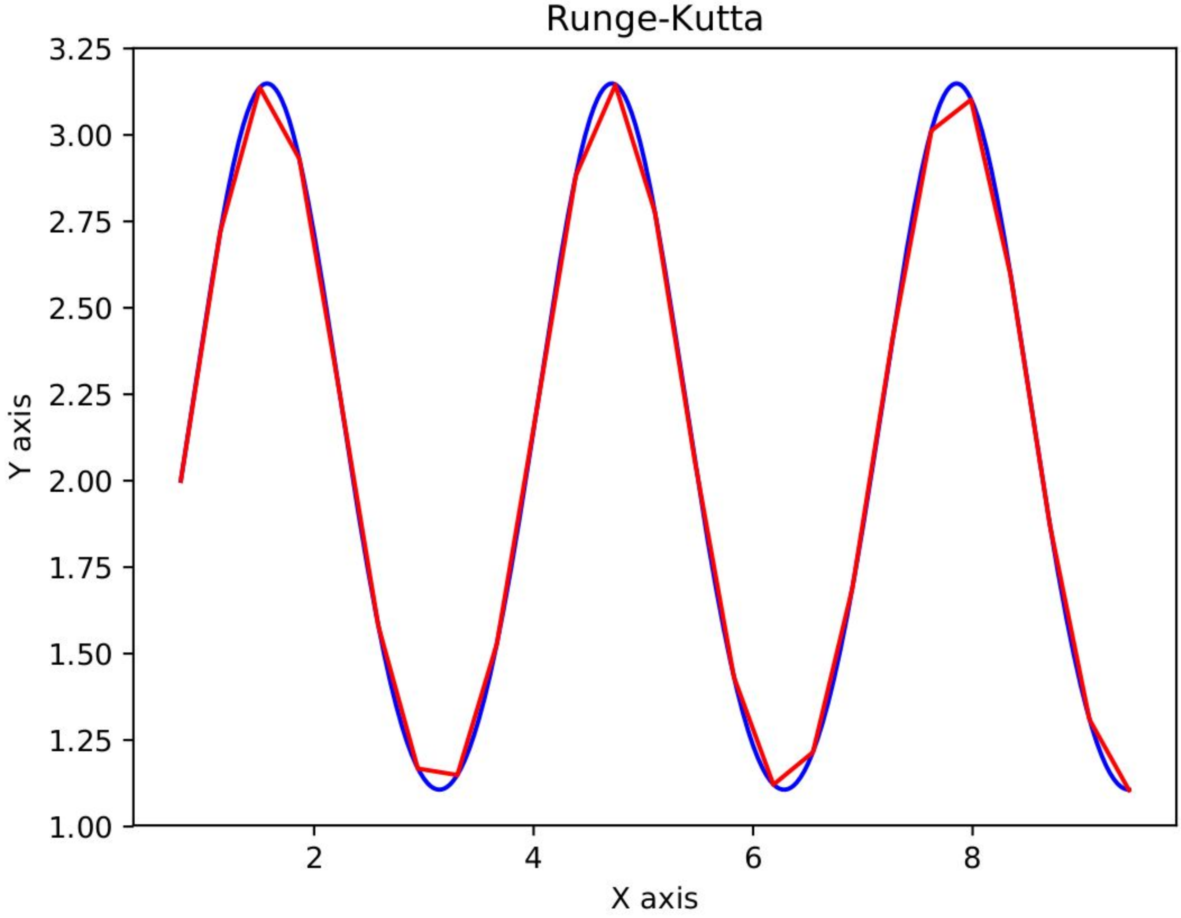
Wykres 6. Otrzymana funkcja metodą Runge-Kuttego 4 stopnia przy 4 krokach.



Wykres 7. Otrzymana funkcja metodą Runge-Kuttego 4 stopnia przy 9 krokach.



Wykres 8. Otrzymana funkcja metodą Runge-Kuttego 4 stopnia przy 24 krokach.



Jak widać na powyższych wykresach, przy tej metodzie satysfakcjonująca dokładność jest osiągana już przy małej ilości kroków, a proste niepokrywające się z wykresem niebieskiej funkcji wynikają z małej liczby punktów z których jest tworzony ten wykres.

Zad 2.

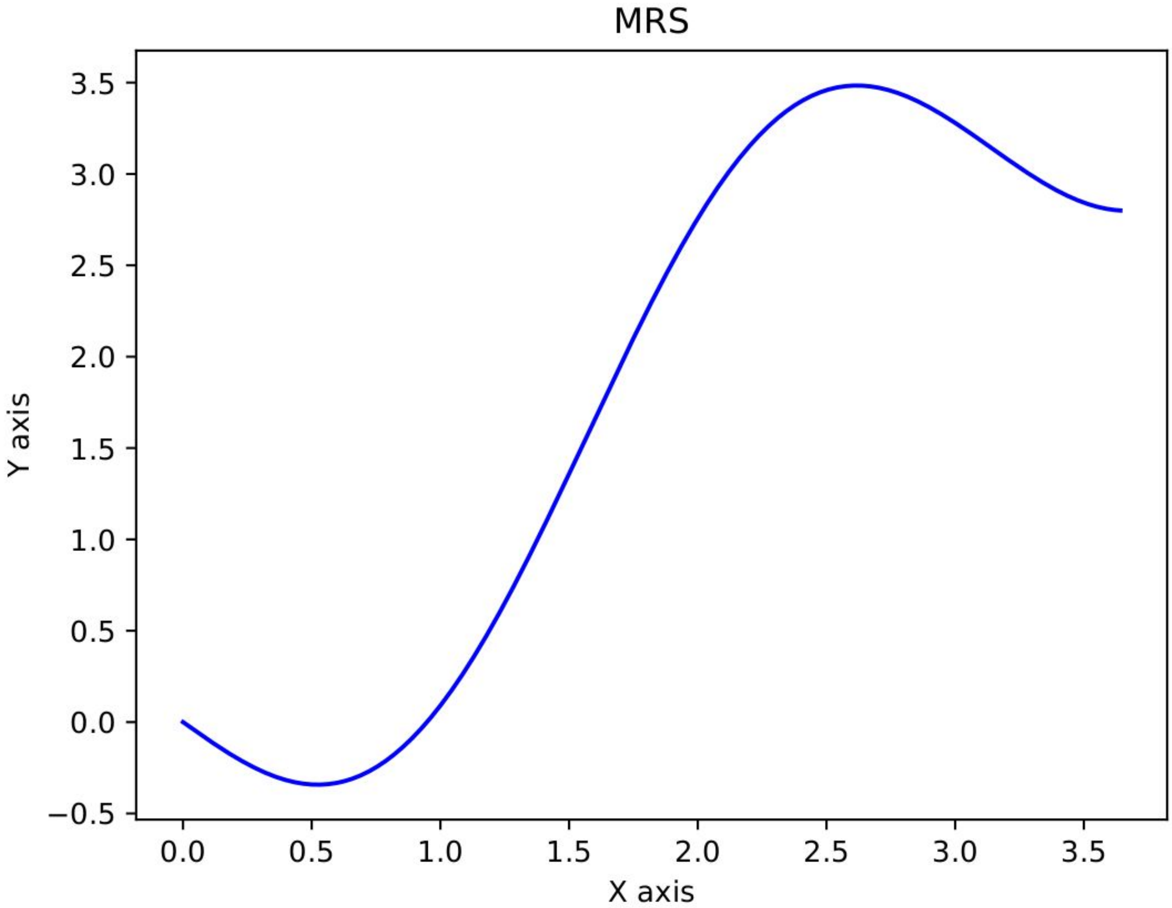
Otrzymane przeze mnie równanie to:

$y'' + m^2 y = m^2 x$

zagadnienie brzegowe - $y(0) = 0,\ y(\frac{2\pi+1}{2}) = b$

gdzie b to wartość funkcji $y(x) = -sin(2x) + x$, w tym miejscu, a funkcja ta jest rozwiązaniem równania.

Wykres 9. Wykres funkcji y(x), będącej rozwiązaniem równania.



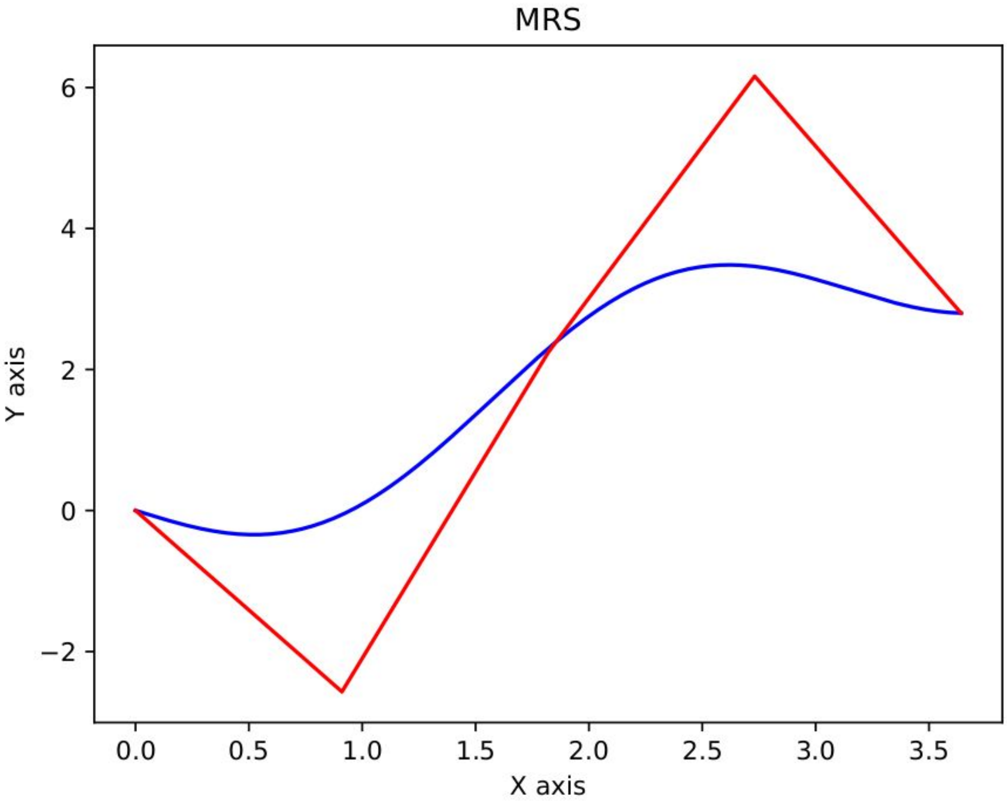
Eksperyment polegał na załączeniu programu rozwiązującego równanie metodą różnic skończonych dla ilości kroków
$n \in [4, 9, 24, 49, 99, 249, 499, 999]$
Błędy w tabeli poniżej to norma maksimum z różnicy wektora wartości funkcji oraz wartości uzyskanych przez odpowiednią metodę.

Tabela 3. Uzyskane błędy przy metodzie różnic skończonych.

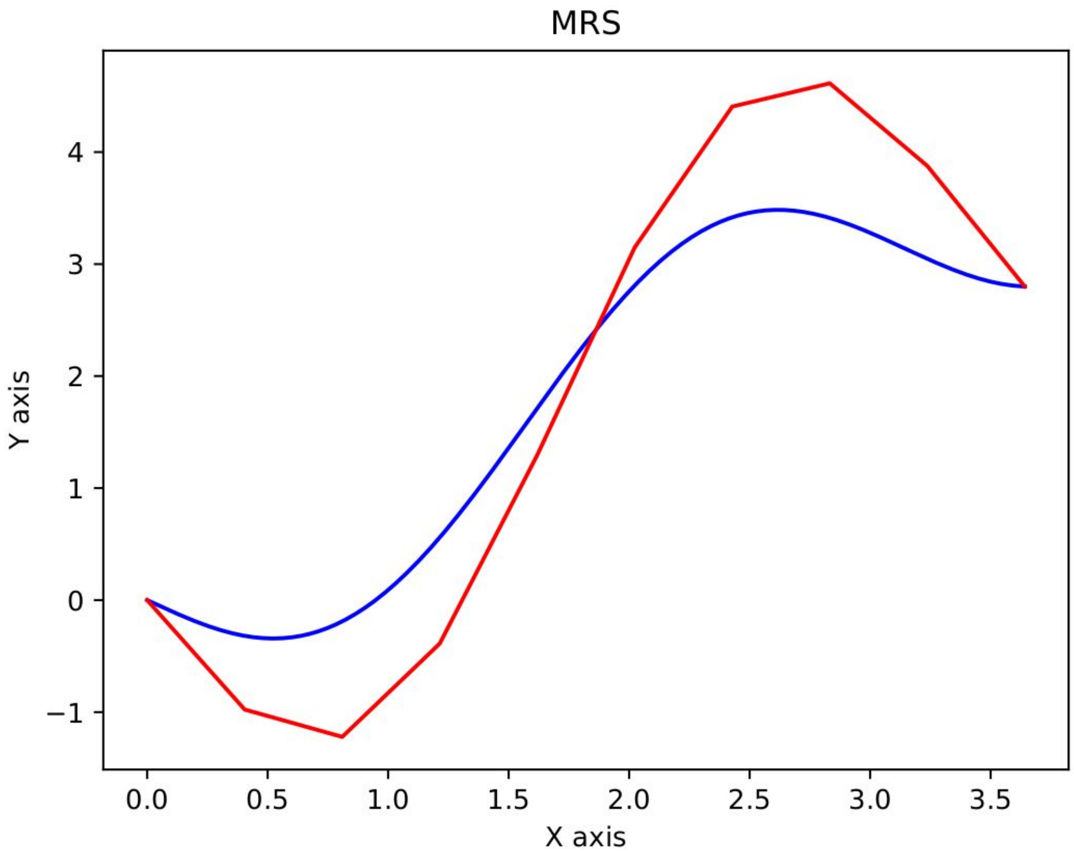
Liczba kroków	**długość kroku**	**błąd**
4	0,7283185307	2.697053334974594
9	0,3641592654	1.2016964371701162
24	0,1456637061	0.34182271378659923
49	0,07283185307	0.1575953473949805
99	0,03641592654	0.07585833926872221
249	0,01456637061	0.029723758928459354
499	0,007283185307	0.014762981070727488
999	0,003641592654	0.007357322140528755

Analizując dane otrzymane przy eksperymentach można zauważyć że metoda ta także potrzebuje dość małego kroku aby uzyskać satysfakcjonująco małe błędy, dodatkowo można zauważyć że błąd zmniejsza się liniowo względem długości kroku.

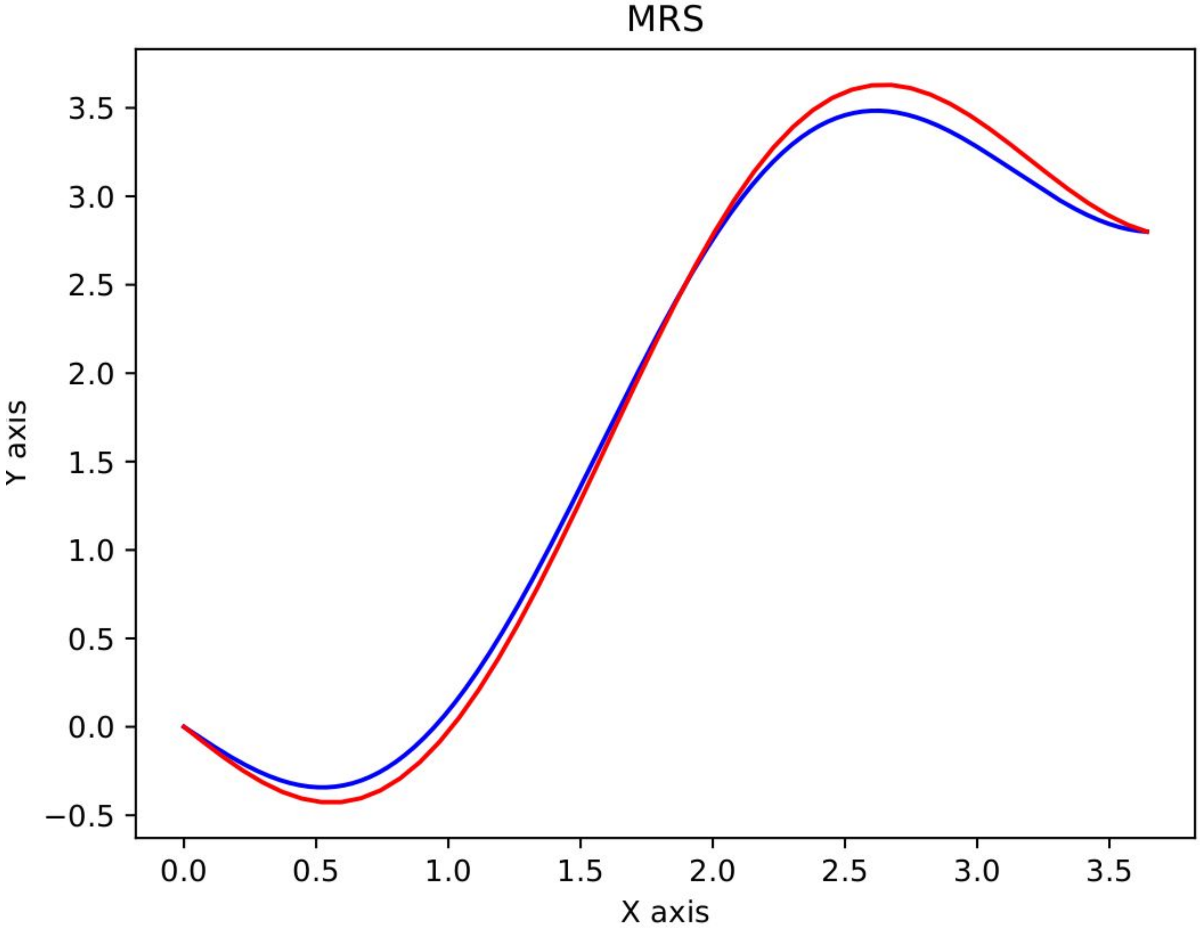
Wykres 10. Otrzymana funkcja metodą różnic skończonych przy 4 krokach.



Wykres 11. Otrzymana funkcja metodą różnic skończonych przy 9 krokach.



Wykres 10. Otrzymana funkcja metodą różnic skończonych przy 50 krokach.



Na powyższych wykresach można zauważyć, że metoda ta przy zbyt długim kroku metoda ta nieco “przestrzela”, przez co otrzymujemy błędy, ale wraz ze zmniejszonym krokiem błędy te zdecydowanie się zmniejszają.