Systèmes dynamiques **Vezin Lomàn**
MAT551 Date de rendu: 13/11/2020

Devoir maison

EXERCICE 1:

Cobords et mesures invariantes

1. Remarquons dans un premier temps l'inclusion

$$\mathcal{C}_b(X,T) \subset \mathcal{C}_m(X,T),$$

en effet si l'on prend $\phi \in \mathcal{C}_b(X,T)$, alors pour toute mesure $\mu \in \mathcal{M}(X,T)$

$$\begin{aligned}\int \phi \mathrm{d}\mu &= \int \psi \circ T - \psi \mathrm{d}\mu \\ &= \int \psi \circ T \mathrm{d}\mu - \int \psi \mathrm{d}\mu \\ &= \int \psi \mathrm{d}T_\star \mu - \int \psi \mathrm{d}\mu \\ &= 0 \quad \text{par } T \text{ invariance de } \mu.\end{aligned}$$

En montrant que l'ensemble $\mathcal{C}_m(X,T)$ est un fermé on obtiendra le résultat souhaité

$$\overline{\mathcal{C}_b(X,T)} \subset \overline{\mathcal{C}_m(X,T)} = \mathcal{C}_m(X,T).$$

Comme $\mathcal{C}(X)$ est un espace métrique on peut utiliser un argument séquentiel. Soit $(\phi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de $\mathcal{C}_m(X,T)$ convergeant vers ϕ. Alors pour $n \in \mathbf{N}$

$$\begin{aligned}|\int \phi \mathrm{d}\mu| &= |\int \phi \mathrm{d}\mu - \int \phi_n \mathrm{d}\mu| \\ &\leq \int |\phi - \phi_n| \mathrm{d}\mu \\ &\leq \int \|\phi - \phi_n\| \mathrm{d}\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

La limite appartient donc à $\mathcal{C}_m(X,T)$ qui est donc bien fermé.

2. *i.* On applique un corollaire du théorème de Hahn Banach dans sa formulation géométrique, étant donné un espace vectoriel E, un sous espace vectoriel $M \subset E$ non dense, il existe une forme linéaire continue Λ non nulle qui s'annule sur M. Il est facile de vérifier que $\mathcal{C}_b(X,T)$ et $\mathcal{C}_m(X,T)$ sont des $\mathbf{R}$ espaces vectoriels, le premier sous espace du second. Ils contiennent la fonction nulle sont stables par somme et multiplication par un scalaire.

En supposant que l'inclusion $\overline{\mathcal{C}_b(X,T)} \subsetneq \mathcal{C}_m(X,T)$ soit stricte on obtient que $\mathcal{C}_b(X,T)$ n'est pas dense dans $\mathcal{C}_m(X,T)$. On conclut par le corollaire précédent l'existence de Λ telle que

$$\mathcal{C}_b(X,T) \subset \{\phi \in \mathcal{C}(X) \mid \Lambda(\phi) = 0\} \subsetneq \mathcal{C}_m(X,T).$$

On sait de plus que le noyau d'une forme linéaire continue est fermé, ainsi on obtient

$$\overline{\mathcal{C}_b(X,T)} \subset \{\phi \in \mathcal{C}(X) \mid \Lambda(\phi) = 0\} \subsetneq \mathcal{C}_m(X,T).$$

ii. Puisque Λ s'annule sur les cobords, pour toute fonction continue ψ on a

$$\int \psi \circ T - \psi \mathrm{d}\mu = 0 = \int \psi \circ T \mathrm{d}\mu - \int \psi \mathrm{d}\mu.$$

On en déduit que μ est $T-$invariante. Les mesures boréliennes positives $T_\star\mu_+, T_\star\mu_-$ satisfont donc

$$\begin{aligned}
\int \psi \mathrm{d}T_\star\mu_+ - \int \psi \mathrm{d}T_\star\mu_- &= \int \psi \circ T \mathrm{d}\mu_+ - \int \psi \circ T \mathrm{d}\mu_- \\
&= \int \psi \circ T \mathrm{d}\mu \\
&= \int \psi \mathrm{d}\mu \\
&= \int \psi \mathrm{d}\mu_+ - \int \psi \mathrm{d}\mu_-.
\end{aligned}$$

De l'hypothèse d'unicité on en déduit que pour tout borélien A,

$$T_\star\mu_+(A) \geq \mu_+(A) \quad \text{et} \quad T_\star\mu_-(A) \geq \mu_-(A).$$

Remarquons que $T_\star\mu_+, T_\star\mu_-$ sont mutuellement séparées. Si $\mu_+(E) = 1,\ \mu_-(E) = 0$,

$$T_\star\mu_+(E) \geq \mu_+(E) = 1 \quad \text{et,}$$

$$\begin{aligned}
T_\star\mu_-(E) &= \int_E T \mathrm{d}\mu_- \\
&\leq \|T\|_\infty \mu_-(E) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

puisque T est continue sur X compact donc bornée.

En inversant les rôles de μ et $T_\star\mu$ qui sont égales, on obtient l'inégalité inverse et donc l'égalité. Par définition, nous venons de montrer que μ_+, μ_- sont T-invariantes.

iii. Puisque μ_+, μ_- sont $T-$invariantes et finies les mesures $\frac{1}{\mu_+(X)}\mu_+, \frac{1}{\mu_-(X)}\mu_- \in \mathcal{M}(X,T)$. Si $\phi \in \mathcal{C}_m(X,T)$ alors

$$\frac{1}{\mu_+(X)}\int \phi \mathrm{d}\mu_+ = 0 = \frac{1}{\mu_-(X)}\int \phi \mathrm{d}\mu_-.$$

Donc

$$\int \phi \mathrm{d}\mu_+ = 0 = \int \phi \mathrm{d}\mu_-,$$

et il en découle que

$$\Lambda(\phi) = \int \phi \mathrm{d}\mu_+ - \int \phi \mathrm{d}\mu_- = 0.$$

Ainsi nous obtenons une contradiction

$$\mathcal{C}_m(X,T) \subset \{\phi \in \mathcal{C}(X) \mid \Lambda(\phi) = 0\}.$$

3. On raisonne par contraposée. Si pour toutes mesures ergodiques μ_1, μ_2 on a

$$\int \phi \mathrm{d}\mu_1 = \int \phi \mathrm{d}\mu_2 = c \in \mathbf{R},$$

$c < \infty$ comme ϕ est continue sur X compact donc bornée. Alors si $\mu \in \mathcal{M}(X,T)$, comme les mesures ergodiques sont les points extrémaux des mesures T-invariantes on obtient par le théorème de Choquet l'existence d'une distribution M_μ sur $\mathcal{M}(X,T)$ supportée par les mesures ergodiques telle que

$$\int \phi \mathrm{d}\mu = \int (\int \phi \mathrm{d}\nu)\mathrm{d}M_\mu(\nu), \ \nu \text{ ergodiques.}$$

Comme par hypothèse

$$\int \phi \mathrm{d}\nu = c \quad \forall \nu \in \mathcal{M}_e(X,T),$$

on en déduit

$$\int \phi \mathrm{d}\mu = c \quad \forall \mu \in \mathcal{M}(X,T).$$

Ainsi pour $\mu \in \mathcal{M}(X,T)$

$$\int (\phi - c)\mathrm{d}\mu = \int \phi \mathrm{d}\mu - c\mu(X) = c - c = 0.$$

Donc en posant $\psi = \phi - c$ on obtient $\phi = \psi + c,\ \psi \in \mathcal{C}_m(X,T)$. On a donc bien montré

$$\phi \in \mathcal{C}_m(X,T) + \mathbf{R}.$$

4. Par le point précédent il existe deux mesures ergodiques μ_1, μ_2 satisfaisant

$$\int \phi \mathrm{d}\mu_1 \neq \int \phi \mathrm{d}\mu_2.$$

$\mathcal{M}(X,T)$ muni de la topologie faible-* est métrisable, comme les mesures périodiques sont denses dans les mesures ergodiques μ_1, μ_2 sont toutes deux limites de suites de mesures périodiques. Par définition de la topologie faible-* l'application

$$\mu \longmapsto \int \phi \mathrm{d}\mu$$

et continue, on peut donc trouver au moins deux mesures périodiques, une dans chaque suite, $\tilde{\mu_1}, \tilde{\mu_2}$ disons, satisfaisant

$$\int \phi \mathrm{d}\tilde{\mu_1} \neq \int \phi \mathrm{d}\tilde{\mu_2}.$$

EXERCICE 2:

Ensemble de divergence, quelques généralités

6. On montre que l'ensemble $\mathcal{B}(\phi)$ est T-invariant. Soit $x \in T^{-1}(\mathcal{B}(\phi))$, et soit $y \in \mathcal{B}(\phi)$ tel que $T(x) = y$. Alors pour $n \in \mathbf{N}$ fixé on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \phi \circ T^k(x) &= \frac{\phi(x)}{n} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} \phi \circ T^{k-1}(y) \\ &= \frac{\phi(x)}{n} + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \phi \circ T^k(y) - \frac{\phi(T^{n-1}(x))}{n}. \end{aligned}$$

Comme ϕ est bornée, en prenant la limite inférieure on remarque que

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \phi \circ T^k(x) = \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \phi \circ T^k(y),$$

de même pour la limite supérieure. Ainsi $x \in \mathcal{B}(\phi)$ qui est donc bien $T-$invariant.

Par le théorème ergodique ponctuel, si $\mu \in \mathcal{M}(X,T)$, alors pour μ presque tout $x \in X$ on a la convergence de la suite

$$(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\phi \circ T^k(x))_{n\in\mathbf{N}}. \tag{1}$$

L'ensemble de divergence des sommes de Birkhoff est donc de μ mesure nulle.

De plus, par le théorème 4.11 des notes de cours lorsque μ est uniquement ergodique la convergence de la suite (1) ci dessus est uniforme vers une constante, on a donc convergence pour tout $x \in X$ et l'ensemble de divergence $\mathcal{B}(\phi)$ est vide.

7. Par la question **2.**, nous savons que $\mathcal{C}_m(X,T) = \overline{\mathcal{C}_b(X,T)}$. Prenons donc $\phi \in \mathcal{C}_m(X,T)$ et une suite de cobords $(\phi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ donc ϕ est la limite uniforme. Notons pour tout $n \in \mathbf{N}$

$$\phi_n = \psi_n \circ T - \psi_n, \quad \psi_n \in \mathcal{C}(X),$$

nous obtenons alors pour $x \in X$ quelconque et $j \in \mathbf{N}$

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\phi_j \circ T^k(x) &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(\psi_j \circ T - \psi_j)\circ T^k(x)\\ &= \frac{1}{n}(\psi_j \circ T^n - \psi_j)(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

puisque ψ_j est continue sur X qui est compact, et donc bornée.

Par convergence uniforme, en prenant la limite $j \to \infty$ on obtient le résultat souhaité. Puisque le choix de $x \in X$ était arbitraire on a convergence partout et l'ensemble de divergence $\mathcal{B}(\phi)$ est vide.

EXERCICE 3:

Ensemble de divergence pour des dynamiques minimales

8. (X,T) est un espace métrique nous pouvons appliquer un argument séquentiel. Soient $n \geq N$ alors la somme

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\phi \circ T^k$$

est une application continue comme somme de compositions d'applications continues. Si l'on considère une suite $(x_j)_{j\in\mathbf{N}}$ de $W(N,\varepsilon)$ convergeant vers $x \in X$, alors nous obtenons par passage à la limite et continuité

$$\lim_{j\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \phi \circ T^k(x_j) \geq \int \phi \mathrm{d}\mu + \varepsilon \qquad \text{d'une part,}$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \phi \circ T^k(x) \quad \text{d'autre part.}$$

Comme $n \geq N$ était arbitraire $x \in W(N,\varepsilon)$ qui est donc fermé.

9. Nous venons de montrer que pour tous $N > 0, \varepsilon > 0$ l'ensemble $W(N,\varepsilon)$ est maigre. En effet comme il est fermé nous avons

$$\overline{W(N,\varepsilon)} = W(N,\varepsilon) \quad \text{et donc} \quad \left(\overline{W(N,\varepsilon)}\right)^{\mathrm{o}} = W(N,\varepsilon)^{\mathrm{o}} = \emptyset.$$

Nous savons que le complémentaire d'un ensemble maigre contient un sous ensemble dense. Aussi

$$W(N,\varepsilon) = \{x \in X \mid \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \phi \circ T^k(x) \geq \int \phi \mathrm{d}\mu + \varepsilon,\ \forall n \geq N\}$$
$$= \{x \in X \mid \liminf_n \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \phi \circ T^k(x) \geq \int \phi \mathrm{d}\mu + \varepsilon\}.$$

Comme le résultat est valable pour tout $\varepsilon > 0$, que μ est une mesure ergodique et en remarquant que

$$\mathcal{B}(\phi)^c = \{x \in X \mid \liminf_n \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \phi \circ T^k(x) \geq \limsup_n \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \phi \circ T^k(x)\},$$

on en conclut que $\mathcal{B}(\phi)$ contient un sous ensemble dense de X.

EXERCICE 4:

Ensemble de divergence pour le décalage sur $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$