Vezin Lomàn
Prof. D. Strütt

Analyse IV
Due Date: 26/03/2020

Homework 5

STATEMENT 1:

Soient $f, g \geq 0$ des fonctions mesurables, alors

$$\int (f+g) = \int f + \int g.$$

Proof. On commence par montrer le résultat pour deux fonctions simples positives φ, ψ.

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i} \qquad \psi = \sum_{j=1}^{m} b_j \chi_{B_j}.$$

Ainsi comme les A_i et les B_j forment une partition de $\mathbf{R}$ on obtient que

$$\varphi + \psi = \sum_{1 \leq i \leq n\,,\, 1 \leq j \leq m} (a_i + b_j) \chi_{A_i \cap B_j}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\int (\varphi + \psi) &= \sum_{1 \leq i \leq n\,,\, 1 \leq j \leq m} (a_i + b_j) mes(A_i \cap B_j) \\
&= \sum_{1 \leq i \leq n\,,\, 1 \leq j \leq m} a_i mes(A_i \cap B_j) + \sum_{1 \leq i \leq n\,,\, 1 \leq j \leq m} b_j mes(A_i \cap B_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i mes(A_i) + \sum_{j=1}^{m} b_j mes(B_j) \\
&= \int \varphi + \int \psi
\end{aligned}$$

puisque les A_i, B_j forment une partition de $\mathbf{R}$ et on le résultat. Maintenant,

$$\begin{aligned}
\int f + \int g &= \sup\{\int \varphi \mid 0 \leq \varphi \leq f\} + \sup\{\int \psi \mid 0 \leq \psi \leq g\} \\
&= \sup\{\int \varphi + \int \psi \mid 0 \leq \varphi \leq f \; 0 \leq \psi \leq g\} \\
&= \sup\{\int (\varphi + \psi) \mid 0 \leq \varphi + \psi \leq f + g\} \\
&= \int (f+g).
\end{aligned}$$

Ce qui conclut la preuve. □

STATEMENT 2:

Pour $f_n \geq 0$ une suite de fonctions mesurables,

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n.$$

Proof. On montre dans un premier temps par récurrence sur $m > 0$ que

$$\int \sum_{n=1}^{m} f_n = \sum_{n=1}^{m} \int f_n.$$

Par le premier point nous savons déjà que le résultat est valide pour $m = 2$. Supposons que le résultat soit vérifié pour $m \geq 2$, alors

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{m+1} \int f_n &= \sum_{n=1}^{m} \int f_n + \int f_{m+1} \\
&= \int \sum_{n=1}^{m} f_n + \int f_{m+1} \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= \int \Big(\sum_{n=1}^{m} f_n + f_{m+1}\Big) \quad \text{par l'additivité montrée au premier point} \\
&= \int \sum_{n=1}^{m+1} f_n \quad \text{et le résultat est démontré.}
\end{aligned}$$

Remarquons à présent que la suite $(\sum_{n=1}^{m} f_n)_{m=1}^{\infty}$ est une suite croissante de fonctions mesurables puisque les f_n sont des fonctions positives et mesurables. Ainsi par le théorème de la convergence monotone

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \int \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} f_n = \lim_{m\to\infty} \int \sum_{n=1}^{m} f_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \int f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n.$$

Ce qui conclut la preuve. $\square$