Analyse IV **Vezin Lomàn**
Prof. D. Strut Due Date: 02/04/2020

Homework

STATEMENT 1:

Soit $f \in L^p$ et $1 \leq p < \infty$, alors

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbf{R}} |f(x+\varepsilon) - f(x)|^p dx = 0.$$

Proof. On commence par montrer le résultat pour une fonction $g \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R})$.
Soit $\gamma > 0$ quelconque et soit $[a,b] \subset \mathbf{R}$ un intervalle contenant le support compact de g. Puisque g est continue sur ce compact elle est en particulier uniformément continue et il existe $\delta > 0$ tel que pour $\varepsilon < \delta$ on a $|g(x+\varepsilon) - g(x)| \leq (\frac{\gamma}{3 \cdot (b-a)})^{\frac{1}{p}}$. Ainsi on obtient

$$\int_{\mathbf{R}} |g(x+\varepsilon) - g(x)|^p dx = \int_a^b |g(x+\varepsilon) - g(x)|^p dx \leq \frac{\gamma}{3}.$$

Puisque $\gamma > 0$ est arbitraire on a

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbf{R}} |g(x+\varepsilon) - g(x)| dx = 0.$$

Soit maintenant $\gamma > 0$ quelconque et $f \in L^p$, alors par le théorème d'approximation par fonction lisses il existe $g \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R})$ telle que $\|f - g\|_{L^p} \leq \frac{\gamma}{3}$. Si on pose les fonctions auxiliaires $\hat{f}(x) = f(x+\varepsilon)$ et $\hat{g}(x) = g(x+\varepsilon)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$ on remarque par le point précédent que

$$\|\hat{f} - \hat{g}\|_{L^p} = \|f - g\|_{L^p} \leq \frac{\gamma}{3} \quad \text{et} \quad \|\hat{g} - g\|_{L^p} \leq \frac{\gamma}{3}.$$

Ainsi par la feinte du loup et par inégalité triangulaire on obtient

$$\begin{aligned} \|\hat{f} - f\|_{L^p} &= \|\hat{f} - \hat{g} - f + g - g + \hat{g}\|_{L^p} \\ &\leq \|\hat{f} - \hat{g}\|_{L^p} + \|f - g\|_{L^p} + \|\hat{g} - g\|_{L^p} \\ &\leq \gamma. \end{aligned}$$

Ainsi lorsque ε tend vers 0 on a bien $\|\hat{f} - f\|_{L^p} \longrightarrow 0$ puisque γ est arbitraire. En d'autres termes

$$\lim_{\varepsilon \to 0} (\int_{\mathbf{R}} |f(x+\varepsilon) - f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}} = 0.$$

Soit donc le résultat voulu

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbf{R}} |f(x+\varepsilon) - f(x)|^p dx = 0.$$

$\square$