Introduction aux chaînes de Markov **Vezin Lomàn**
MAP432 Date de rendu: 16/02/2021

Devoir Maison 2

1. En observant comme dans l'exercice de PC que

$$\{\tau_{a,b} = n\} = \bigcap_{k=0}^{n} \{S_k \in]a,b[\} \cap \{S_n \in \{a,b\}\} \in \mathcal{F}_n,$$

on voit bien que $\tau_{a,b}$ est un temps d'arrêt. Pour prouver le résultat on va montrer que pour $p \notin \{0, 1, \frac{1}{2}\}$ la marche aléatoire diverge presque sûrement, plus particulièrement que

$$\begin{cases} p < \frac{1}{2} \implies \mathbf{P}(\lim_n S_n = -\infty) = 1 \\ p > \frac{1}{2} \implies \mathbf{P}(\lim_n S_n = +\infty) = 1 \end{cases}.$$

Alors comme $x \in]a,b[$ et que l'incrément de la marche vaut 1, on aura

$$\mathbf{P}(\tau_{a,b} = +\infty) = \mathbf{P}(\{S_n \in]a,b[,\ \forall n \in \mathbf{N}\}) = 0.$$

Comme $|\xi_1| = 1$, on a $\mathbf{E}[|\xi_1|] = 1$ et comme les ξ_i sont iid par la loi forte des grands nombres on obtient la convergence presque sure

$$\frac{S_n - x}{n} \to_n \mathbf{E}[\xi_1] = 2p - 1.$$

On en déduit asymptotiquement

$$S_n \sim_n (2p-1) \cdot n,$$

ce qui garantit le premier résultat annoncé. Ainsi $\tau_{a,b}$ est bien fini presque sûrement.

2. Montrons dans un premier temps que le processus $(\frac{q}{p})^{S_n}$ est une martingale.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}[(\frac{q}{p})^{S_{n+1}}|\mathcal{F}_n] &= \mathbf{E}[(\frac{q}{p})^{\xi_{n+1}} \cdot (\frac{q}{p})^{S_n}|\mathcal{F}_n] \\
&= (\frac{q}{p})^{S_n} \cdot \mathbf{E}[(\frac{q}{p})^{\xi_{n+1}}|\mathcal{F}_n] \\
&= (\frac{q}{p})^{S_n} \cdot \mathbf{E}[(\frac{q}{p})^{\xi_{n+1}}] \\
&= (\frac{q}{p})^{S_n}.
\end{aligned}
$$

On a utilisé le fait qu'à n fixé $(\frac{q}{p})^{S_n}$ est bornée, $\mathcal{F}_n$-mesurable, que ξ_{n+1} est indépendante de $\mathcal{F}_n$ et que son espérance vaut 1. En effet,

$$
\mathbf{E}[(\frac{q}{p})^{\xi_{n+1}}] = \frac{q}{p} \cdot p + \frac{p}{q} \cdot q = p + q = 1.
$$

On en déduit à présent la valeur de $\mathbf{P}(S_{\tau_{a,b}} = a)$. Comme l'espérance d'une martingale est constante on a d'une part,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}[(\frac{q}{p})^{S_n}] &= \mathbf{E}[(\frac{q}{p})^{S_0}] \\
&= (\frac{q}{p})^{x},
\end{aligned}
$$

et d'autre part comme $\tau_{a,b}$ est fini presque sûrement, ou même par convergence dominée,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}[(\frac{q}{p})^{S_0}] &= \mathbf{E}[(\frac{q}{p})^{S_{\tau_{a,b}}}] \\
&= (\frac{q}{p})^{a} \cdot \mathbf{P}(S_{\tau_{a,b}} = a) + (\frac{q}{p})^{b} \cdot \mathbf{P}(S_{\tau_{a,b}} = b).
\end{aligned}
$$

Comme $\mathbf{P}(S_{\tau_{a,b}} = b) = 1 - \mathbf{P}(S_{\tau_{a,b}} = a)$ cela donne donc

$$
\mathbf{P}(S_{\tau_{a,b}} = a) = \frac{1 - (\frac{q}{p})^{x-b}}{1 - (\frac{q}{p})^{a-b}}.
$$

Pour trouver la limite $p \to \frac{1}{2}$ on peut appliquer la règle de l'Hopital en remarquant que

$q = 1 - p$, on trouve finalement

$$\lim_{p \to \frac{1}{2}} \mathbf{P}(S_{\tau_{a,b}} = a) = \frac{x - b}{a - b},$$

le résultat trouvé en PC pour le cas d'une marche aléatoire symétrique.

3. Posons pour $n \in \mathbf{N}$

$$c_n := x + n(p - q).$$

Puis pour $n \geq 0$ en utilisant la linéarité de l'espérance conditionnelle et comme $\mathbf{E}[\xi_1] = p - q$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[(S_{n+1} - c_{n+1})|\mathcal{F}_n] &= \mathbf{E}[S_n|\mathcal{F}_n] - \mathbf{E}[c_{n+1}|\mathcal{F}_n] + \mathbf{E}[\xi_{n+1}|\mathcal{F}_n] \\
&= S_n - (x + (n+1)(p - q)) + \mathbf{E}[\xi_{n+1}] \\
&= S_n - (x + n(p - q)) \\
&= S_n - c_n
\end{aligned}$$

Ainsi $(S_n - c_n)_n$ est bien une martingale, d'espérance nulle puisque $\mathbf{E}[S_0 - c_0] = 0$. Le processus arrêté en temps $(S_{n \wedge \tau_{a,b}} - c_{n \wedge \tau_{a,b}})_n$ est également une martingale d'espérance nulle. On en déduit

$$\mathbf{E}[S_{n \wedge \tau_{a,b}}] = \mathbf{E}[c_{n \wedge \tau_{a,b}}].$$

Par convergence dominée sur le membre de gauche et convergence simple à droite on a donc

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[S_{\tau_{a,b}}] &= \mathbf{E}[c_{\tau_{a,b}}] \\
&= x + (p - q)\mathbf{E}[\tau_{a,b}]
\end{aligned}$$

Posons $\alpha := \frac{q}{p}$ pour plus de lisibilité, on obtient donc en utilisant les résultats précédents

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[\tau_{a,b}] &= \frac{\mathbf{E}[S_{\tau_{a,b}}] - x}{p - q} \\
&= \frac{1}{p - q} \cdot \left(a \frac{\alpha^b - \alpha^x}{\alpha^b - \alpha^a} + b \frac{\alpha^x - \alpha^a}{\alpha^b - \alpha^a} - x\right)
\end{aligned}$$

4. Commençons par montrer que le processus $(e^{tS_n} s^{-n})_n$ est une martingale. En effet la variable $e^{tS_n}s^{-n-1}$ est $\mathcal{F}_n$ mesurable et bornée à n fixé, de plus

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[e^{tS_{n+1}}s^{-n-1}|\mathcal{F}_n] &= \mathbf{E}[e^{tS_n}e^{t\xi_{n+1}}s^{-n-1}|\mathcal{F}_n] \\
&= e^{tS_n}s^{-n-1}\mathbf{E}[e^{t\xi_{n+1}}|\mathcal{F}_n] \\
&= e^{tS_n}s^{-n-1}\mathbf{E}[e^{t\xi_{n+1}}] \\
&= e^{tS_n}s^{-n-1}\cdot(pe^t+qe^{-t}) \\
&= e^{tS_n}s^{-n}.
\end{aligned}$$

On a utilisé une fois encore la proposition du cours permettant de sortir ce qui est connu et l'indépendance de ξ_{n+1} par rapport à la tribu $\mathcal{F}_n$.

On en déduit que le processus arrêté $(e^{tS_{n\wedge\tau_{a,b}}}s^{-n\wedge\tau_{a,b}})_n$ est également une martingale par une proposition du cours et la remarque du point **1.**

L'espérance d'une martingale étant constante on trouve

$$\begin{aligned}
e^{tx} &= \mathbf{E}[e^{tS_0}] \\
&= \mathbf{E}[e^{tS_{\tau_{a,b}}}s^{\tau_{a,b}}] \\
&= e^{at}\mathbf{E}[s^{-\tau_{a,b}}\mathbf{1}_{S_{\tau_{a,b}}=a}] + e^{bt}\mathbf{E}[s^{-\tau_{a,b}}\mathbf{1}_{S_{\tau_{a,b}}=b}].
\end{aligned}$$

On a implicitement utilisé le fait que $\tau_{a,b}$ est fini presque sûrement et donc que la martingale $(e^{tS_{n\wedge\tau_{a,b}}}s^{-n\wedge\tau_{a,b}})_n$ atteindra presque sûrement, pour n assez grand, le terme $e^{tS_{\tau_{a,b}}}s^{-\tau_{a,b}}$, on peut aussi utiliser la convergence dominée.

5. En utilisant le rôle symétrique joué par e^t et $\frac{q}{p}e^{-t}$ on peut remplacer l'un par l'autre on obtient

$$\begin{aligned}
(\frac{q}{p})^x e^{-tx} &= (\frac{q}{p})^a e^{-at}\mathbf{E}[s^{-\tau_{a,b}}\mathbf{1}_{S_{\tau_{a,b}}=a}] + (\frac{q}{p})^b e^{-bt}\mathbf{E}[s^{-\tau_{a,b}}\mathbf{1}_{S_{\tau_{a,b}}=b}] \\
e^{tx} &= e^{at}\mathbf{E}[s^{-\tau_{a,b}}\mathbf{1}_{S_{\tau_{a,b}}=a}] + e^{bt}\mathbf{E}[s^{-\tau_{a,b}}\mathbf{1}_{S_{\tau_{a,b}}=b}].
\end{aligned}$$

On en déduit donc

$$\mathbf{E}[s^{-\tau_{a,b}}\mathbf{1}_{S_{\tau_{a,b}}=b}] = \frac{e^{(x-a)t} - (\frac{q}{p})^{x-a}e^{(x-a)t}}{e^{(b-a)t} - (\frac{q}{p})^{b-a}e^{(b-a)t}},$$

et

$$\mathbf{E}[s^{-\tau_{a,b}}\mathbf{1}_{S_{\tau_{a,b}}=a}] = \frac{e^{(x-b)t} - (\frac{q}{p})^{x-b}e^{(x-b)t}}{e^{(b-a)t} - (\frac{q}{p})^{a-b}e^{(a-b)t}}.$$

6. On a en utilisant la continuité monotone et les résultats précédents

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\tau_b < +\infty) &= \mathbf{P}\Big(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} \{S_{\tau_{-n,b}} = b\}\Big) \\ &= \lim_{n \to \infty} \mathbf{P}(S_{\tau_{-n,b}} = b) \\ &= \lim_{n \to \infty} (1 - \mathbf{P}(S_{\tau_{-n,b}} = -n)) \\ &= \lim_{n \to \infty} \Big(1 - \frac{\alpha^b - \alpha^x}{\alpha^b - \alpha^{-n}}\Big).\end{aligned}$$

Ainsi on peut conclure

$$\mathbf{P}(\tau_b < +\infty) = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha < \frac{1}{2} \\ \frac{\alpha^x}{\alpha^b} < 1 & \text{si } \alpha > \frac{1}{2} \end{cases},$$

et τ_b n'est pas toujours fini presque sûrement.