Systèmes Dynamiques **Vezin Lomàn**
MAT551 Date de rendu: 23/11/2020

Exercices à rendre

EXERCICE 1:

1. Le rayon de convergence de la série entière u est $\frac{1}{\rho(A)}$.
2. On a $e^{u(z)} = \frac{1}{\det(I_d - zA)}$.

1. Par le cours on sait que
$$\#Per_n(\Sigma_A, \sigma) = tr(A^n).$$
On applique le critère de Cauchy pour trouver le rayon de convergence R de la série entière u.

Il est facile de voir que
$$\lim_n \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1.$$
On cherche alors à calculer la limite suivante
$$\limsup_n \sqrt[n]{|tr(A^n)|}.$$
Puisque la trace d'une matrice est la somme de ses valeurs propres et que les valeurs propres de A^n sont les puissances $n-$ème des valeurs propres de A on a asymptotiquement
$$|tr(A^n)| \sim_n \rho(A)^n.$$
On en déduit donc
$$\limsup_n \sqrt[n]{\frac{\#Per_n(\Sigma_A, \sigma)}{n}} = \rho(A).$$
Le critère de Cauchy donne donc
$$R = \frac{1}{\rho(A)}.$$
Il est en particulier infini lorsque toutes les valeurs propres de A sont égales à 0 puisqu'alors le terme général de u vaut 0.

2. La convergence de u sur $]-R, R[$ nous permet d'écrire sur ce domaine

$$\begin{aligned} e^{u(z)} &= \exp(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\# Per_n(\Sigma_A)}{n} z^n) \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} \exp(\frac{\# Per_n(\Sigma_A)}{n} z^n) \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} \exp(\frac{\mathrm{Tr}((zA)^n)}{n}) \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} (\exp(\mathrm{Tr}((zA)^n))^{\frac{1}{n}}. \end{aligned}$$

Et comme pour une matrice B

$$\exp(\mathrm{Tr}(B)) = \det(\exp(B)),$$

on obtient

$$e^{u(z)} = \prod_{n=1}^{\infty} (\det(\exp((zA)^n))^{\frac{1}{n}}.$$

On remarque une expression très semblable à celle recherchée mais je ne parviens pas à conclure.

EXERCICE 2:

1. La période $p(i)$ d'une matrice irréductible $A \in \mathcal{M}_d(\{0,1\})$ est indépendante de $i \in \{1, \ldots, d\}$.
2. Une matrice irréductible est primitive si et seulement si sa période vaut 1.
3. Le système (Σ_A, σ) est topologiquement mélangeant si et seulement si A est primitive.

1. Soit A une telle matrice supposée irréductible, soient $i, j \in \{1, \ldots, d\}$. Comme A est irréductible il existe par définition des entiers $n, m > 0$ tels que

$$(A^m)_{ij} > 0 \quad \text{et} \quad (A^n)_{ji} > 0.$$

Soit de plus un entier $s > 0$ tel que

$$(A^s)_{jj} > 0,$$

son existence est encore garantie par irréductibilité de A.

Remarquons que $(A^{2s})_{jj} > 0$, en effet

$$\begin{aligned}(A^{2s})_{jj} &= \sum_{k=1}^{d} (A^s)_{jk}(A^s)_{kj} \\ &\geq (A^s)_{jj}(A^s)_{jj} > 0,\end{aligned}$$

puisque les coefficients de A sont dans $\{0,1\}$.

En utilisant cette majoration et l'expression du produit matriciel deux fois on obtient par la suite

$$\begin{aligned}(A^{m+s+n})_{ii} &= \sum_{k=1}^{d} (A^{m+s})_{ik}(A^n)_{ki} \\ &\geq (A^{m+s})_{ij}(A^n)_{ji} \\ &\geq \sum_{k=1}^{d} (A^)m)_{ik}(A^s)_{kj}(A^n)_{ji} \\ &\geq (A^m)_{ij}(A^s)_{jj}(A^n)_{ji} > 0,\end{aligned}$$

par hypothèse sur n, m, s.

On en déduit par définition de $p(i)$ que $p(i) \mid m + n + s$ et par notre première observation

$p(i) \mid m+n+2s$ ainsi,

$$p(i) \mid s = m+2s+n-(m+s+n).$$

Comme s est arbitraire avec cette propriété et comme $p(j)$ est le pgcd de tels s on doit avoir

$$p(i) \leq p(j).$$

Le problème étant symétrique on peut montrer par le même raisonnement $p(j) \leq p(i)$ et donc

$$p(i) = p(j).$$

Puisque le choix de $i, j \in \{1, \ldots, d\}$ était arbitraire nous pouvons conclure.

2. Supposons A primitive. Soit donc un entier $l > 0$ tel que

$$(A^l)_{ij} > 0, \quad \forall i, j \in \{1, \ldots, d\}.$$

Fixons $i \in \{1, \ldots, d\}$, on a en particulier $(A^l)_{ii} > 0$. Par définition du produit matriciel cela implique que toute colonne de A doit contenir au moins un 1. On en déduit alors

$$(A^{l+1})_{ii} = \sum_{k=1}^{d} (A^l)_{ik}(A)_{ki} > 0.$$

Ainsi $p(i)$ divise l et $l+1$, on a donc $p(i) = 1$. Par la question 1. on peut conclure que la période de A vaut 1.

Supposons à présent que A soit de période 1. Fixons $i \in \{1, \ldots, d\}$ et montrons l'existence d'un entier $n_i > 0$ tel que

$$(A^n)_{ii} > 0, \quad \forall n \geq n_i.$$

On pose $P := \{k \in \mathbf{N} \mid (A^k)_{ii} > 0\} \subset \mathbf{N}$. Remarquons d'abord que P est stable par addition. Si $m, n \in P$ alors

$$\begin{aligned}(A^{n+m})_{ii} &= \sum_{k=1}^{d} (A^n)_{ik}(A^m)_{ki} \\ &\geq (A^n)_{ii}(A^m)_{ii} > 0,\end{aligned}$$

comme les coefficients de A sont dans $\{0, 1\}$.

Comme la période de A est 1 par hypothèse, $1 \in P$ et donc le pgcd des éléments de P est forcément 1. Par les propriétés du pgcd on a l'existence de $l > 0, m_j \in \mathbf{Z}, p_j \in P$ tels que

$$\sum_{j=1}^{l} m_j p_j = 1.$$

En séparant les termes positifs dont on nomme la somme P^+ et les termes négatifs dont on nomme la somme P^- on obtient

$$1 = P^+ - P^-, \quad P^+, P^- \geq 0,$$

la stabilité par addition garantit de plus $P^+, P^- \in P$.

Posons maintenant $n_i = P^-(P^- - 1)$ et prenons $n \geq n_i$ alors par division euclidienne on peut écrire

$$n = qP^- + r, \quad 0 \leq r < P^-,\ q \geq 0.$$

On en déduit par définition de n_i que $q > P^- - 1$ et donc $q - r > 0$.

Finalement comme $P^+ - P^- = 1$

$$\begin{aligned} n &= qP^- + r \\ &= qP^- + rP^+ - rP^- \\ &= (q-r)P^- + rP^+ \in P \end{aligned}$$

toujours par stabilité de P pour l'addition. Par définition de P nous avons bien trouvé un entier $n_i > 0$ avec la propriété souhaitée.

Soit n_i avec la propriété souhaitée, fixons $j \in \{1, \ldots, d\}$. Comme A est irréductible il existe un entier $l_j > 0$ tel que $(A^{l_j})_{ij} > 0$. Ainsi pour $n \geq n_i + l_j$ on a

$$\begin{aligned} (A^n)_{ij} &= \sum_{k=1}^{d} (A^{n-l_j})_{ik} (A^{l_j})_{ki} \\ &\geq (A^{n-l_j})_{ii} (A^{l})_{ij} > 0. \end{aligned}$$

En posant

$$N := \sup_{i,j} n_i l_j,$$

bien défini comme $\{1, \ldots, d\}$ est un ensemble fini on obtient par construction

$$(A^N)_{ij} > 0, \quad \forall i, j \in \{1, \ldots, d\}$$

et A est primitive.

3. Supposons tout d'abord (Σ_A, σ) topologiquement mélangeant. Fixons $i, j \in \{1, \ldots, d\}$. Nous savons que la restriction des cylindres $[i], [j]$ dans Σ_A sont des ouverts. L'hypothèse de mélange nous donne donc l'existence d'un N_{ij} tel que

$$\sigma^n[i] \cap [j] \neq \emptyset, \quad \forall n \geq N_{ij},$$

c'est à dire l'existence d'une suite u de Σ_A telle que

$$u_0 = i \text{ et } \sigma^n(u)_0 = u_n = j$$

et donc par définition de la matrice d'adjacence,

$$(A^n)_{ij} > 0.$$

En prenant

$$\tilde{N} := \sup_{i,j} N_{ij}$$

qui est bien défini puisque $\{1, \ldots, d\}$ est fini, on a bien

$$(A^{\tilde{N}})_{xy} > 0 \quad \forall x, y \in \{1, \ldots, d\}.$$

A est primitive.

Supposons réciproquement que A soit primitive. Soit $N > 0$ un entier tel que

$$(A^N)_{ij} > 0, \quad \forall i, j \in \{1, \ldots, d\}.$$

Comme mentionné précédemment cela implique par définition du produit matriciel que chaque colonne de A doit contenir au moins un 1. On en déduit

$$(A^{N+1})_{ij} = \sum_{k=1}^{d} (A^N)_{ik}(A)_{kj} > 0, \quad \forall i, j \in \{1, \ldots, d\}.$$

Une récurrence directe donne alors

$$(A^n)_{ij} > 0, \; \forall n \geq N, \quad \forall i, j \in \{1, \ldots, d\}.$$

Soient $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subset \Sigma_A$ deux ouverts non vides. Ces derniers doivent en particulier contenir une boule ouverte de diamètre strictement positif. Puisque les cylindres forment un recouvrement ouvert de Σ_A dont le diamètre tend vers 0, on peut en intersectant $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ avec des cylindres de diamètre suffisamment petit se ramener à l'étude de ces derniers. Quitte à réduire encore la taille d'un des deux ouverts nous pouvons supposer ces cylindres de longueur égale k. Notons ces deux cylindres $\mathcal{C}_1 := [i_1 \dots i_k]$, $\mathcal{C}_2 := [j_1 \dots j_k]$ et supposons par l'absurde qu'il existe $n \geq N$ tel que $\sigma^n \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \emptyset$. Cela signifie qu'il n'existe pas dans Σ_A de suite u telle que

$$u_0 = i_1 \text{ et } u_n = \sigma^n(u)_0 = j_1$$

puisque sinon on aurait

$$\sigma^n(u) = j_1 \dots j_k \dots \ \in \mathcal{C}_2$$

pour une suite $u \in \Sigma_A$ bien choisie comme le mot $j_1 \dots j_k$ est réalisable dans Σ_A. Mais par définition de la matrice d'adjacence cela signifie pour ce n que

$$(A^n)_{i_1 j_1} = 0,$$

une contradiction avec notre observation précédente. Le système (Σ_A, σ) est donc nécessairement mélangeant.