Distributions et EDP **Vezin Lomàn**
MAT432 Date de rendu: 05/01/2021

Devoir maison

I. *1.* On détermine le support de T_n définie comme dans l'énoncé. On a pour $n \in \mathbf{N}^*$, $h \in \mathbf{R}^*$ et $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{R})$

$$\begin{aligned}\langle T_n, \phi\rangle &= \langle \delta_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{h^k}{k!}\delta_0^{(k)}, \phi\rangle \\ &= \langle \delta_0, \phi\rangle + \sum_{k=1}^{n} \frac{h^k}{k!}\langle \delta_0^{(k)}, \phi\rangle \\ &= \phi(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{h^k}{k!}\phi^{(k)}(0).\end{aligned}$$

Le support de la dirac δ_0 et de ses dérivées $\delta_0^{(k)},\ k \leq n$ est le singleton $\{0\}$. On voit alors facilement que la restriction de T_n à $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ est nulle et donc par définition du support d'une distribution

$$\boxed{\operatorname{supp}(T_n) = \{0\}.}$$

2. Montrons que $\operatorname{supp}(S) \subset K$. Supposons par l'absurde que ce ne soit pas le cas, c'est à dire $\operatorname{supp}(S) \setminus K \neq \emptyset$. Soit Ω un voisinage ouvert de $\operatorname{supp}(S)$. $\Omega \setminus K \neq \emptyset$ et par définition du support $\langle S_n, \phi\rangle = 0$ pour tout $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{R})$ à support dans $\operatorname{supp}(S) \setminus K$ et tout $n \in \mathbf{N}^*$. Aussi par définition du support S n'est pas identiquement nulle sur $\Omega \setminus K$ ce qui nous donne l'existence de $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{R})$ à support dans $\operatorname{supp}(S) \setminus K$ telle que

$$\langle S, \psi\rangle \neq 0.$$

Mais alors pour cette fonction ψ

$$0 = \langle S_n, \psi\rangle \not\to \langle S, \psi\rangle \neq 0,$$

ce qui contredit $S_n \to_n S$ au sens des distributions. On a donc bien

$$\boxed{\operatorname{supp}(S) \subset K.}$$

3. Par définition de T_n on obtient

$$\star = \langle T_n, \phi_{|\mathbf{R}} \rangle = \phi(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{h^k}{k!}(-1)^k \phi^{(k)}(0).$$

En se souvenant que les fonctions holomorphes sur un domaine sont analytiques sur ce domaine, on en déduit en reconnaissant l'expression du développement de Taylor à l'ordre n de $\phi(-h)$ et comme $|h| \leq R$ que

$$\star = \phi(0 - h) + o(h^n) = \phi(-h) + o(h^n).$$

En particulier l'analycité de ϕ garantit

$$\phi(-h) = \phi(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-h)^k}{k!} \phi^{(k)}(0).$$

La suite $\langle T_n, \phi \rangle$ converge donc et on trouve naturellement

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \langle T_n, \phi \rangle = \phi(-h).}$$

4. Dans la question *1.* nous avons montré que le support de T_n est $\mathrm{supp}(T_n) = \{0\}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. On en déduit que la suite de distributions $(T_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ne converge pas au sens des distributions puisque sinon par la question *2.* le support de la limite devrait appartenir au singleton $\{0\}$, ce qui n'est pas le cas comme $h \neq 0$.

II. *1.* Posons pour plus de simplicité $H_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ la $n-$ème somme partielle de la série harmonique. On montre que la suite $H_n - \log(n)$ converge et que sa limite est positive. Fixons $n \in \mathbf{N}_*$.

Dans un premier temps remarquons que sur $\mathbf{R}_+^*$ la fonction inverse $t \longmapsto \frac{1}{t}$ est décroissante. Ainsi pour $1 \leq k \leq n-1$ et $t \in [k, k+1]$ on obtient

$$\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}.$$

On intègre par rapport à t sur les intervalles $[k, k+1]$ pour obtenir par croissance de l'intégrale et comme tous les termes sont positifs

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \frac{1}{k}.$$

On en déduit d'une part

$$\frac{1}{k} - \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \geq 0,$$

et d'autre part que

$$\frac{1}{k} - \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

Ces deux inégalités nous donnent donc l'encadrement

$$0 \leq \frac{1}{k} - \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

Comme la série de terme général $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ converge et que tous les termes sont positifs par comparaison la série de terme général

$$\frac{1}{k} - \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \frac{1}{k} - (\log(k+1) - \log(k))$$

converge également et la limite et positive. Finalement sommons sur $1 \leq k \leq n-1$ pour trouver la n-ème somme partielle de la série en question

$$H_{n-1} - \sum_{k=1}^{n-1} \log(k+1) - \log(k) = H_{n-1} - \log(n),$$

en reconnaissant une somme télescopique. En particulier grâce aux encadrements précédents on trouve que la limite est inférieure à 1 comme

$$0 \leq H_n - \log(n) \leq 1.$$

La suite de terme général

$$H_n - \log(n) = H_{n-1} - \log(n) + \frac{1}{n}$$

converge également, vers la même limite, par convergence de la suite de terme général $\frac{1}{n}$, vers 0.

2. On applique le point *c.* du théorème **4.2** du cours, selon lequel si T est une distribution à support compact dans un ouvert $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ et si $(\phi_n)_n$ est une suite de fonctions $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ telle que pour tout $\alpha \in \mathbf{N}^N$ on a

$$\partial^\alpha \phi_n \to_n \partial^\alpha \phi$$

uniformément sur les compacts de Ω alors

$$\langle T, \phi_n \rangle \to_n \langle T, \phi \rangle.$$

Dans notre cas, par hypothèse le support de T est inclus dans $V \subset \Omega$ ouvert donc on peut regarder T comme une distribution à support compact dans V. De plus $\mathcal{C}^\infty(\Omega) \subset \mathcal{C}^\infty(V)$ comme $V \subset \Omega$ et on a

$$\partial^\alpha \phi_n \to_n \partial^\alpha \phi \quad \text{uniformément sur } V,$$

donc en particulier sur tout compact de V.

Avec V qui joue le rôle de Ω dans l'énoncé ci dessus on obtient pour toute suite $(\phi_n)_n$ de $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$, donc de $\mathcal{C}^\infty(V)$ comme ci dessus

$$\langle T, \phi_n \rangle \to_n \langle T, \phi \rangle.$$

3. Soit $m \in \mathbf{N}^*$ et soit $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{R})$, la formule du développement de Taylor d'ordre 1 en 0 avec $h = \frac{1}{k}$ nous donne

$$\begin{aligned}\langle T_m, \phi \rangle &= \sum_{k=1}^{m} \phi(\frac{1}{k}) - m\phi(0) - \log(m)\phi'(0) \\ &= \sum_{k=1}^{m} (\phi(0) + \frac{1}{k}\phi'(0) + o(\frac{1}{k^2})) - m\phi(0) - \log(m)\phi'(0) \\ &= (\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} - \log(m))\phi'(0) + \sum_{k=1}^{m} o(\frac{1}{k^2}).\end{aligned}$$

Par le point *1.* nous savons que la limite suivante existe

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} - \log(m) \to_m \gamma.$$

De plus par convergence de la série des inverses au carré il existe une constante réelle finie C telle que

$$\sum_{k=1}^{\infty} o(\frac{1}{k^2}) \leq C.$$

Ainsi la limite des T_m est bien une distribution que l'on peut nommer T. En exprimant le terme de reste par une intégrale on trouve

$$\boxed{\langle T, \phi \rangle = \gamma\phi'(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{k}} \frac{(\frac{1}{k} - t)^2}{2} \phi^{(2)}(t) \mathrm{d}t.}$$

telle que $\langle T_m, \phi \rangle \to_m \langle T, \phi \rangle$. Par choix arbitraire de $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{R})$ on a

$$T_m \to_m T.$$

4. T a pour support l'ensemble $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbf{N}^*\} \cup \{0\}$. Pour $m \in \mathbf{N}^*$ le support de T_m est quant à lui l'ensemble $\{\frac{1}{k} \mid 1 \leq k \leq m\} \cup \{0\}$.

5. L'ordre de T vaut 1. Cela est donné par la majoration de l'intégrale

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{k}} \frac{(\frac{1}{k} - t)^2}{2} \phi^{(2)}(t) \mathrm{d}t \leq \|\phi'\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.}$$

De plus par le point *3.* on obtient pour $m \in \mathbf{N}^*$ et $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{R})$ quelconques

$$|\langle T_m, \phi\rangle| \leq (\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} - \log(m))|\phi'(0)| + \sum_{k=1}^{m} o(\frac{1}{k^2}),$$

en particulier les deux sommes sont bornées puisque convergentes et il existe une constante réelle C telle que

$$\boxed{|\langle T_m, \phi\rangle| \leq C|\phi'(0)|,}$$

ce qui montre que T_m est également d'ordre 1.[1]

6. Soit $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$ nulle sur le support de T. Soit $k \in \mathbf{N}^*$ quelconque, on écrit le développement de Taylor à l'ordre 1 en $\frac{1}{k}$

$$0 = \phi(0) - \phi(\frac{1}{k}) = \frac{1}{k}\phi'(0) + o(\frac{1}{k}).$$

En multipliant par k des deux côtés on obtient donc

$$\phi'(0) = o(\frac{1}{k}) \cdot k.$$

Le résultat étant valable pour tout $k \in \mathbf{N}^*$ on peut passer à la limite $k \to \infty$ et on obtient

$$\phi'(0) = 0.$$

Pour $m \in \mathbf{N}^*$ quelconque, ϕ s'annule sur $\{\frac{1}{k} \mid k \leq m\} \cup \{0\}$ et donc par définition de T_m on a alors $\langle T_m, \phi\rangle = 0$. Puis par convergence au sens des distributions $T_m \to_m T$ on en conclut

$$\boxed{\langle T, \phi\rangle = 0.}$$

7. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $n \in \mathbf{N}$. Pour $x \in \mathbf{R}$ quelconque on a

$$|\phi_n(x) - 0| = \phi_n(x) \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Ainsi pour tout $n \geq \frac{1}{\varepsilon^2}$ on obtient

$$\phi_n(x) \leq \varepsilon,$$

ce qui montre la convergence uniforme $\phi_n \to_n 0$.

[1]Techniquement nous avons montré que T et T_m sont d'ordre au plus 1, pour montrer qu'elles ne peuvent pas être d'ordre 0 on peut exhiber des fonctions test similaires à celles que nous avons utilisées pour établir que la $k-$ème dérivé de la Dirac est d'ordre k.

Par définition de ϕ_n, pour $k \in \mathbf{N}$ quelconque

$$\phi^{(k)}(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbf{R} \setminus [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}].$$

Ainsi les seuls points du support de T où $\phi_n^{(k)}$ n'est pas forcément nulle sont $\{\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\}$. Comme ϕ est $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$ sa dérivée à l'ordre k est en particulier continue et donc

$$\phi^{(k)}(\frac{1}{n}) = \lim_{x \to \frac{1}{n}^+} \phi^{(k)}(x) = 0$$

où la limite est prise par la droite et de même

$$\phi^{(k)}(\frac{1}{n+1}) = \lim_{x \to \frac{1}{n+1}^-} \phi^{(k)}(x) = 0$$

en prenant la limite par la gauche.

$\phi_n^{(k)}$ est donc nulle sur le support de T et converge en particulier uniformément vers 0 sur ce dernier par choix arbitraire de $n \in \mathbf{N}$.

8. Soit $m \in \mathbf{N}^*$ et soit $n \geq 1$, on calcule $\langle T_m, \phi_n \rangle$.

$$\begin{aligned}
\langle T_m, \phi_n \rangle &= \sum_{k=1}^{m} \phi_n(\frac{1}{n}) - m\phi_n(0) - \log(m)\phi_n'(0) \\
&= \sum_{k=1}^{m} \phi_n(\frac{1}{k}) \quad \text{comme par définition on a } \phi_n(0), \phi_n'(0) = 0 \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}} \\
&= \frac{n}{\sqrt{n}}.
\end{aligned}$$

On en déduit par passage à la limite $m \to \infty$

$$\boxed{\langle T, \phi_n \rangle = \frac{n}{\sqrt{n}}.}$$

9. On remarque que $\phi_n \to_n 0$ uniformément sur $\mathbf{R}$ et les dérivées $k-$ème tendent toutes uniformément vers 0 sur le support de T mais contrairement au point *2.* on a

$$\boxed{\langle T, \phi_n \rangle \not\to_n \langle T, 0 \rangle}$$

puisque le premier terme diverge alors que le deuxième vaut 0.

L'hypothèse que les dérivées successives convergent uniformément *au voisinage* du support et non seulement sur ce dernier est donc primordiale.