Systèmes dynamiques **Vezin Lomàn**
MAT551 Date de rendu : 13/10/2020

Devoir maison 3

EXERCICE 1:

Pour $\pi : (Y, S) \longmapsto (X, T)$ une semi conjugaison de systèmes topologiques, l'application induite

$$\pi_* : \mathcal{M}(Y, S) \longmapsto \mathcal{M}(X, T)$$

est surjective.

Démonstration. L'application induite π_* est donnée par

$$\begin{aligned} \pi_* : \mathcal{M}(Y, S) &\longmapsto \mathcal{M}(X, T) \\ \mu &\longmapsto \pi_*\mu, \end{aligned}$$

où $\pi_*\mu$ est définie par

$$\pi_*\mu(B) = \mu(\pi^{-1}(B)), \ \forall B \text{ borélien de } X.$$

On peut aisément vérifier que π_* est bien définie. Pour tout ouvert $U \subset Y$ on a par continuité de π que $\pi^{-1}(U) \subset X$ est ouvert. De plus comme les propriétés suivantes sont vérifiées pour un ensemble d'indices I dénombrable

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(\cup_{i \in I} A_i) &= \cup_{i \in I} \pi^{-1}(A_i), \\ \pi^{-1}(\cap_{i \in I} A_i) &= \cap_{i \in I} \pi^{-1}(A_i), \\ \pi^{-1}(A_i)^c &= \pi^{-1}(A_i^c), \end{aligned}$$

la préimage par π d'un borélien de X est un borélien de Y. Il reste à vérifier que $\pi_*\mu$ est bien $T-$invariante. Comme π est un morphisme on a que

$$T \circ \pi = \pi \circ S,$$

on en déduit pour tout borélien $A \subset X$ que

$$\begin{aligned} T_*\pi_*\mu(A) &= \mu([T \circ \pi]^{-1}(A)) \\ &= \mu([\pi \circ S]^{-1}(A)) \\ &= S_*\mu(\pi^{-1}(A)) \\ &= \mu(\pi^{-1}(A)) \ \text{ par } S\text{-invariance} \\ &= \pi_*\mu(A). \end{aligned}$$

On sait par le cours que $\mathcal{M}_e(X,T) = ex(\mathcal{M}(X,T))$, le théorème de Krein Milman nous donne donc

$$\mathcal{M}(X,T) = \overline{\Delta\mathcal{M}_e(X,T)},$$

où $\Delta(A)$ désigne l'enveloppe convexe de A. On montrera en dernier lieu l'inclusion

$$\mathcal{M}_e(X,T) \subset \pi_*(\mathcal{M}(Y,S)), \tag{1}$$

qui donne

$$\mathcal{M}(X,T) = \overline{\Delta\mathcal{M}_e(X,T)} \subset \overline{\Delta\pi_*(\mathcal{M}(Y,S))}.$$

Cela nous motive à montrer $\overline{\Delta\pi_*(\mathcal{M}(Y,S))} = \pi_*(\mathcal{M}(Y,S))$.

Il est clair que $\pi_*(\mathcal{M}(Y,S))$ est convexe par convexité de $\mathcal{M}(Y,S)$ et définition de π_*. Ainsi

$$\Delta\pi_*(\mathcal{M}(Y,S)) = \pi_*(\mathcal{M}(Y,S)).$$

On montre à présent que l'application induite π_* est continue. Comme l'espace $\mathcal{M}(Y,S)$ est métrisable on utilise le critère séquentiel. Soit donc $\mu \in \mathcal{M}(Y,S)$ et $(\mu_n)_n$ une suite de mesures $S-$invariantes qui convergent faiblement-* vers μ, c'est à dire

$$\forall\phi \in \mathcal{C}(Y), \int \phi \mathrm{d}\mu_n \to \int \phi \mathrm{d}\mu.$$

Soit maintenant $\varphi \in \mathcal{C}(X)$ quelconque, par continuité de π la composition est continue, c'est à dire $\varphi \circ \pi \in \mathcal{C}(X)$. De plus,

$$\int \varphi \mathrm{d}\pi_*\mu_n = \int \varphi \circ \pi \mathrm{d}\mu_n \to \int \varphi\pi \mathrm{d}\mu = \int \varphi \mathrm{d}\pi_*\mu.$$

Par définition de la convergence faible-* on a $\pi_*(\mu_n) \rightharpoonup \pi_*(\mu)$, π_* est continue en μ et donc sur $\mathcal{M}(Y,S)$ comme le choix de cette dernière était arbitraire.

L'image par une fonction continue d'un compact est un compact, un compact étant fermé dans un espace métrisable on a

$$\overline{\pi_*(\mathcal{M}(Y,S))} = \pi_*\mathcal{M}(Y,S),$$

et on a le résultat.

Pour conclure la preuve on montre donc (1). Par surjectivité du morphisme π les diracs $\delta_x,\ x \in X$ sont toutes dans l'image $\pi_*(\mathcal{M}(Y,S))$ comme image des diracs de Y. Comme $\pi_*(\mathcal{M}(Y,S))$ est convexe il contient toutes les combinaisons linéaires finies de ces diracs, en particulier l'ensemble

$$\{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\delta_{T^k x},\ n \in \mathbf{N}\},$$

qui est par le cours dense dans $\mathcal{M}_e(X,T)$. Puisque $\pi_*(\mathcal{M}(Y,S))$ est compact il doit contenir en particulier l'adhérence

$$\overline{\{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\delta_{T^k x},\ n \in \mathbf{N}\}} = \mathcal{M}_e(X,T).$$

Ceci conclut la preuve.

$\square$

EXERCICE 2:

Avec les notations du devoir de la semaine passée, pour $A \subset X$ un fermé, on a

$$\sup_{\mu \in \mathcal{M}(X,f)} \mu(A) = \sup_{\mu \in \mathcal{M}_e(X,f)} \mu(A) = \mathrm{ocap}(A).$$

Démonstration. Soit $A \subset X$ fermé, comme X est compact A l'est aussi. Dans un premier temps, on montre l'égalité

$$\sup_{\mu \in \mathcal{M}(X,f)} \mu(A) = \sup_{\mu \in \mathcal{M}_e(X,f)} \mu(A).$$

Comme $\mathcal{M}_e(X,f) \subset \mathcal{M}(X,f)$ on a directement

$$\sup_{\mu \in \mathcal{M}(X,f)} \mu(A) \geq \sup_{\mu \in \mathcal{M}_e(X,f)} \mu(A).$$

On montre la deuxième inégalité. Soit d la métrique définie sur X, $\tilde{d}$ la distance induite entre un point x et un sous ensemble A de X donnée par

$$\tilde{d}(x, A) := \inf_{y \in A} d(x, y).$$

On se souvient que cette distance est continue et qu'elle est atteinte pour A compact. Soient de plus $\varepsilon > 0$ et ϕ_ε définie par

$$\begin{aligned} \phi_\varepsilon : X &\longmapsto \mathbf{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 1 - \frac{\tilde{d}(x,A)}{\varepsilon} \text{ si } 0 < \tilde{d}(x,A) \leq \varepsilon \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} . \end{aligned}$$

ϕ_ε est clairement continue. Posons $B_\varepsilon := \{x \in X,\ 0 < \tilde{d}(x, A) \leq \varepsilon\}$, par continuité à droite de la mesure, pour η une mesure

$$\begin{aligned} \int |\mathbf{1}_A - \phi_\varepsilon| \mathrm{d}\eta &\leq \int_{B_\varepsilon} 1 \mathrm{d}\eta \\ &\leq \eta(B_\varepsilon) \underset{\varepsilon \to 0}{\to} 0. \end{aligned}$$

Soit $\mu \in \mathcal{M}(X, f)$, par le théorème de Choquet il existe une unique décomposition ergodique M_μ telle que

$$\begin{aligned}\int \phi_\varepsilon \mathrm{d}\mu &= \int \Big(\int \phi_\varepsilon \mathrm{d}\nu\Big)\mathrm{d}M_\mu(\nu)\\ &\leq \sup_{\nu\in\mathcal{M}_e(X,f)} \int \phi_\varepsilon \mathrm{d}\nu.\end{aligned}$$

On en déduit donc

$$\begin{aligned}\mu(A) &\leq \int \phi_\varepsilon \mathrm{d}\mu + \mu(B_\varepsilon)\\ &\leq \sup_{\nu\in\mathcal{M}_e(X,f)} \int \phi_\varepsilon \mathrm{d}\nu + \mu(B_\varepsilon)\\ &\leq \sup_{\nu\in\mathcal{M}_e(X,f)} \nu(A) + \sup_{\nu\in\mathcal{M}_e(X,f)} \int |\mathbf{1}_A - \phi_\varepsilon| \mathrm{d}\nu + \mu(B_\varepsilon)\\ &\leq \sup_{\nu\in\mathcal{M}_e(X,f)} \nu(A) + \nu(B_\varepsilon) + \mu(B_\varepsilon).\end{aligned}$$

On conclut par la remarque précédente que

$$\sup_{\mu\in\mathcal{M}(X,f)} \mu(A) \leq \sup_{\mu\in\mathcal{M}_e(X,f)} \mu(A),$$

en laissant $\varepsilon \to 0$ puis par passage au supremum à gauche.

D'après l'exercice de la semaine précédente, pour toute mesure ergodique μ on a montré que

$$\mu(A) \leq \operatorname{ocap}(A),$$

en passant au supremum on obtient une première inégalité

$$\sup_{\mu\in\mathcal{M}_e(X,f)} \mu(A) \leq \operatorname{ocap}(A).$$

On montre la seconde inégalité.

Pour $N \in \mathbf{N}$ on pose

$$\operatorname{ocap}(A)_N := \frac{1}{N} \sup_{x\in X} \#\{0 \leq k < N,\ f^k x \in A\}.$$

On constate alors que la capacité orbitale est $f-$invariante. En effet

$$\begin{aligned}\mathrm{ocap}(f^{-1}(A))_N &= \frac{1}{N}\sup_{x\in X}\#\{0\leq k<N,\ f^{k+1}x\in A\}\\ &\leq \frac{1}{N}\sup_{x\in X}\#\{0\leq k<N,\ f^{k}x\in A\}+\frac{2}{N},\end{aligned}$$

et de même

$$\mathrm{ocap}(f^{-1}(A))_N \geq \frac{1}{N}\sup_{x\in X}\#\{0\leq k<N,\ f^{k}x\in A\}-\frac{2}{N}.$$

On conclut par encadrement et passage à la limite $N\to\infty$.

Par définition la capacité orbitale satisfait $0\leq \mathrm{ocap}(A)\leq 1$ et cette dernière est *sous additive*. Ainsi en prenant le supremum sur $\mathcal{M}(X,f)$ on obtient

$$\sup_{\mu\in\mathcal{M}_e(X,f)}\mu(A)=\sup_{\mu\in\mathcal{M}(X,f)}\mu(A)\geq \mathrm{ocap}(A),$$

ce qui conclut la preuve. $\square$

Dans le cas où A n'est pas fermé on peut étudier la dynamique du cercle $\mathbf{T}^1$ donnée par

$$\begin{aligned}R_\alpha:\mathbf{T}^1&\longmapsto\mathbf{T}^1\\ x&\longmapsto x+\alpha,\quad \alpha\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q},\end{aligned}$$

que l'on sait uniquement ergodique pour la mesure de Lebesgue par le théorème d'équidistribution de Weyl.

Prenons un ensemble $A:=\{k\alpha,\ k\in\mathbf{N}\}$ non fermé, d'adhérence $\mathbf{T}^1$. Cet ensemble est dénombrable donc de mesure de Lebesgue nulle. En revanche

$$\sup_{x\in\mathbf{T}^1}\#\{0\leq k<n,\ T^kx\in A\}=n-1,$$

comme $T^k(0)=k\alpha\in A,\ \ \forall k\in\mathbf{N}$. Ainsi

$$\mathrm{ocap}(A)=\lim_{N\to\infty}\frac{N-1}{N}=1.$$

On a trouvé un contre exemple dans le cas A non fermé.