**Analyse complexe** **Vezin Lomàn**
MAT431 Date de rendu : 05/10/2020

**Devoir maison 1**

EXERCICE 1:

On étudie les fonctions holomorphes injectives $f$ satisfaisant $f(0) = 0,\ f'(0) = 1$. On nomme $\mathcal{S}$ l'ensemble de telles fonctions

**1.** Soit K un compact du plan dont le bord est un lacet simple $\gamma$ pouvant être vu comme fonction de $\mathbf{R}^2 \longmapsto \mathbf{R}^2$

$$\gamma(x,y) = (\gamma_1(x,y), \gamma_2(x,y))$$

ou par identification comme une fonction de $\mathbf{C} \longmapsto \mathbf{C}$

$$\gamma(z) = \gamma_1(z) + i\gamma_2(z)$$

avec $\gamma_1, \gamma_2$ à valeurs réelles. Posons les applications $\mathcal{C}^1(\mathbf{R}^2)$

$$P : (x,y) \longmapsto -\frac{y}{2} \qquad Q : (x,y) \longmapsto \frac{x}{2}$$

de telle sorte que $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$

Ainsi d'une part :

$$\begin{aligned}
\text{Aire}(K) = \iint_K 1 \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint_K \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_\gamma P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y \quad \text{par Green Riemann} \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 -\gamma_2(t)\gamma_1'(t) + \gamma_1(t)\gamma_2'(t)\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

D'autre part on a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2i}\int_\gamma \bar{z}\mathrm{d}z &= \frac{1}{2i}\int_0^1 \overline{\gamma_1(t) + i\gamma_2(t)} \cdot (\gamma_1'(t) + i\gamma_2'(t))\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2i}\int_0^1 \gamma_1(t)\gamma_1'(t) + \gamma_2(t)\gamma_2'(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_0^1 -\gamma_2(t)\gamma_1'(t) + \gamma_1(t)\gamma_2'(t)\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

On montre que la première intégrale est nulle pour pouvoir en déduire le résultat.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2i}\int_0^1 \gamma_1(t)\gamma_1'(t)+\gamma_2(t)\gamma_2'(t)\mathrm{d}t &= \frac{1}{4i}\int_0^1 (\gamma_1^2)'(t)+(\gamma_2^2)'(t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{4i}(\gamma_1^2(1)+\gamma_2^2(1)-\gamma_1^2(0)-\gamma_2^2(0)) \\ &= 0 \quad \text{comme } \gamma \text{ est un lacet.}\end{aligned}$$

**2.** Considérons $f \in S$. Puisque $f$ est injective son seul zéro est en $z^* = 0$ et comme $f'(0) \neq 0$ ce zéro est d'ordre 1. Ainsi la fonction

$$\varphi : z \longmapsto \frac{z}{f(z)}$$

est méromorphe sur le disque unité, prolongeable en une fonction holomorphe $\phi$ sur ce même disque. On peut en effet écrire

$$f(z) = (z - z^*)g(z) = zg(z), \quad g(z^*) \neq 0.$$

La condition d'injectivité garantit quant à elle $g(z) \neq 0 \ \forall z \in \mathbf{D}$.
De plus

$$\phi(0) = \lim_{z\to 0}\frac{z}{f(z)} = \lim_{z\to 0}\frac{1}{g(z)} = \frac{1}{f'(0)} = 1.$$

Par analycité des fonctions holomorphes ceci signifie qu'au voisinage de $z^* = 0$ il existe une suite $(\tilde{b}_k)_{k\geq 0}$ avec $\tilde{b}_0 = \phi(0)$ et telle que

$$\begin{aligned}\phi(z) = \frac{z}{f(z)} &= \phi(0) + \sum_{k\geq 1}\tilde{b}_k z^k \\ &= 1 + \sum_{k\geq 1}\tilde{b}_k z^k.\end{aligned}$$

En divisant par $z$ et en posant la suite $(b_k)_k,\ b_k = \tilde{b}_{k+1},\ \forall k$ on trouve alors le résultat désiré

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{k\geq 0} b_k z^k.$$

Comme $\phi$ est holomorphe sur le disque unité la série entière $\sum_{k\geq 0}\tilde{b}_k z^k$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1, c'est donc aussi le cas de la série entière $\sum_{k\geq 0} b_k z^k$ par définition de $(b_k)_k$.

**3.** On note $(a_k)_k$ les coefficients dans le développement de $f$ en série entière au voisinage de 0. On a par le point précédent $b_0 = \tilde{b}_1 = \phi'(0)$. Aussi en écrivant $\phi(z) = \frac{1}{g(z)}$ on obtient

$$\phi'(z) = -\frac{g'(z)}{g^2(z)}.$$

Aussi $g'(0) = \frac{f''(0)}{2}$ et $g(0) = f'(0) = 1$ donc $b_0 = -\frac{f''(0)}{2} = -a_2$.

De même on a $b_1 = \tilde{b}_2 = \frac{\phi''(0)}{2}$. On calcule donc

$$\phi''(z) = \frac{2g'(z)^2}{g^3(z)} - \frac{g''(z)}{g^2(z)}.$$

et donc $\phi''(0) = 2g'(0)^2 - g''(0)$, soit

$$b_1 = a_2^2 - a_3.$$

Ainsi si $f(z) = z + \sum_{k\geq 2} a_k z^k$ dans un voisinage de 0, on obtient par le point précédent

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{k\geq 0} b_k z^k = \frac{1}{z} - a_2 + \sum_{k\geq 1} b_k z^k.$$

On en déduit que pour $|z| > 1$ on peut écrire

$$a_2 + \frac{1}{f(1/z)} = z + \sum_{k\geq 1} \frac{b_k}{z^k}$$

qui est le résultat souhaité.

**4.** Remarquons dans un premier temps que la définition de $g$ nous donne deux choses

$$\lim_{|z|\to\infty} |g(z)| = \infty,$$

et la continuité de $g$ sur le cercle de rayon $R$, $C_R$ pour $R > 1$. Le bord de l'ensemble $\{g(z),\ |z| > R\}$ est donc égal à $\{g(z),\ z \in C_R\}$. $C_R$ est compact donc son image par $g$ l'est aussi et ainsi le bord de l'ensemble $\{g(z),\ |z| > R\}$ est borné. Par la première observation, $K := \mathbf{C} \setminus \{g(z),\ |z| > R\}$ est la partie bornée délimitée par $g(C_R) = \{g(z),\ z \in C_R\}$.

On peut donc appliquer le premier point à $K$. Soit $\gamma : [0,1] \longmapsto C_R$ un lacet simple. $g$ étant injective la composition $g \circ \gamma$ l'est encore, il s'agit donc d'un lacet simple paramétrant $g(C_R)$.

Ainsi on obtient

$$\begin{aligned}\int_{g(C_R)} \overline{z} dz &= \int_{g\circ\gamma} \overline{z} \mathrm{d}z \\ &= \int_0^1 \overline{g(\gamma(t))}\gamma'(t)g'(\gamma(t))\mathrm{d}t \\ &= \int_{C_R} \overline{g(z)}g'(z)\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

Soit donc

$$\mathrm{Aire}(\mathbf{C} \setminus \{g(z),\ |z| > R\}) = \frac{1}{2i}\int_{C_R} \overline{g(z)}g'(z)\mathrm{d}z.$$

Ensuite, en utilisant la paramétrisation classique de $C_R$ et le développement de $g$ en série entière on obtient

$$\begin{aligned}\int_{c_R} \overline{g(z)}g'(z)\mathrm{d}z &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \overline{g(Re^{it})}g'(Re^{it})Re^{it}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (Re^{-it} + \sum_{n=0}^{\infty} \overline{b_n}R^{-n}e^{-int})(Re^{it} + \sum_{k=1}^{\infty} kb_kR^{-k}e^{ikt})\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

On développe et on permute somme et intégrale, ce qui est licite par convergence absolue de la série des $(b_k/R^{-k})_k$. En se souvenant que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(k-n)t}\mathrm{d}t = \begin{cases} 1 \text{ si } k = n \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \quad ,$$

on obtient

$$\frac{1}{2i}\int_{C_R} \overline{g(z)}g'(z)\mathrm{d}z = \pi R^2 - \pi\sum_{k=1}^{\infty} R^{-2k}k|b_k|^2.$$

Comme le résultat est valable pour tout $R > 1$ on prend la limite

$$\lim_{R\to 1} \pi[R^2 - \sum_{k=1}^{\infty} R^{-2k}k|b_k|^2] = \pi[1 - \sum_{k=1}^{\infty} k|b_k|^2].$$

Une aire étant toujours positive on obtient $\sum_{k=1}^{\infty} k|b_k|^2 \leq 1$. Comme tous les termes de cette suite sont positifs on en déduit que

$$1 \cdot |b_1| = |a_2^2 - a_3| \leq 1.$$

**5.** Comme précédemment puisque $f(0) = 0$ on peut écrire

$$f(z^2) = z^2 \tilde{f}(z), \ \tilde{f}(z) \neq 0 \ \forall z \in \mathbf{D}.$$

Comme $\tilde{f}$ ne s'annule pas sur $\mathbf{D}$ qui est un ouvert simplement connexe on peut définir le logarithme de $\tilde{f}$ sur $\mathbf{D}$, une fonction $L_{\tilde{f}}$ satisfaisant

$$\exp(L_{\tilde{f}}) = \tilde{f}.$$

On peut alors poser pour $z \in \mathbf{D}$

$$g(z) = z \exp(\frac{1}{2} L_{\tilde{f}}(z)).$$

On vérifie à la main que $g(0) = 0$ et $g'(0) = f'(0) = 1$ et

$$g^2(z) = z^2 \exp(L_{\tilde{f}}(z)) = z^2 \tilde{f}(z) = f(z^2).$$

Quant à l'injectivité si pour $z_1, z_2 \in \mathbf{D}$ on a $g(z_1) = g(z_2)$ alors

$$g^2(z_1) = g^2(z_2) \implies f(z_1^2) = f(z_2^2).$$

Puis par injectivité de $f$ on en déduit que $z_1 = \pm z_2$. Comme $g$ est impaire on a $z_1 = z_2$ et $g$ est injective. Par abus de notation on écrira $g(z) = \sqrt{f(z^2)}$

**6.** En utilisant le point précédent on peut définir $g \in \mathcal{S}$ comme $g(z) = \sqrt{f(z^2)}$. On peut alors définir $h$ sur $\mathbf{C} \setminus \mathbf{D}$ injective comme $h(z) = \frac{1}{g(1/z)}$ par le point **3.** et le développement de $f$ nous permet d'obtenir celui de $h$. Si on dénote ses coefficients $(h_k)_k$ alors en particulier $h_1 = \frac{a_2}{2}$. Le résultat du point **4.** s'applique à $h$, c'est à dire

$$\sum_{k=1}^{\infty} k|b_k|^2 \leq 1.$$

On en déduit que $|h_1|^2 = \frac{|a_2|^2}{4} \leq 1$ soit $|a_2| \leq 2$.

**7.** On considère $z \notin f(\mathbf{D})$ et $g$ la fonction définie sur $\mathbf{D}$ par

$$g(\zeta) = \frac{z f(\zeta)}{z - f(\zeta)}.$$

Cette fonction est clairement holomorphe sur $\mathbf{D}$, de plus comme $f$ est injective et que l'application $\zeta \longmapsto \frac{z\zeta}{z-\zeta}$ l'est aussi $g$ est injective comme composition d'applications injectives. On vérifie une nouvelle fois à la main que $g(0) = 0$ et $g'(0) = 1$, cela découle des propriétés de $f$, ainsi $g \in \mathcal{S}$.

On calcule à la main les premiers coefficients $(c_k)_k$ de $g$ dans son développement en série entière autour de 0. On trouve en particulier à partir du développement de $f$ les développements de

$$zf(\zeta) \quad \text{et} \quad \frac{1}{z - f(\zeta)}$$

et en particulier par multiplication des développement on trouve $c_2 = a_2 + \frac{1}{z}$. Ainsi par inégalité triangulaire et le point précédent

$$|\frac{1}{z}| \leq |-a_2 + a_2 + \frac{1}{z}| \leq |a_2 + \frac{1}{z}| + |a_2| \leq |c_2| + |a_2| \leq 2 + 2.$$

Ainsi donc $|z| \geq \frac{1}{4}$ et donc le disque $D(0, \frac{1}{4})$ est nécessairement inclus dans l'image de $f$.

**8.** Soit $|\alpha \leq 1|$. $\varphi_\alpha$ est méromorphe sur $\mathbf{D}$ comme quotient de fonctions holomorphes sur $\mathbf{D}$. Elle n'a de plus pas de pôles puisque ceux-ci correspondent aux zéros de $(1-\alpha z)^2$ et de tels zéros sont de module supérieur à 1 comme $|\alpha| \leq 1$. Ainsi $\varphi_\alpha$ est holomorphe sur $\mathbf{D}$.

On vérifie à la main que $\varphi_\alpha(0) = 0$ et

$$\varphi'_\alpha(z) = \frac{(1-\alpha z)^2 + 2\alpha z(1-\alpha z)}{(1-\alpha z)^4}$$

soit donc $\varphi'_\alpha(0) = 1$.

On peut montrer que la droite $]-\infty, -\frac{1}{4}]$ n'appartient pas à l'image de $\varphi_1$. Soit $x \in \mathbf{R} \cap \mathrm{Im}(\varphi_1)$, alors

$$x = \frac{z}{(1-z)^2}, \quad \text{et donc} \quad x - (2x+1)z + xz^2 = 0.$$

Le discriminant de ce polynôme est $\Delta = 4x + 1$. Si $x < -\frac{1}{4}$ alors $\Delta < 0$ et les racines sont

$$z_{1,2} = \frac{2x + 1 \pm i\sqrt{-1-4x}}{2x}$$

de module au carré

$$|z_{1,2}|^2 = [\frac{2x+1}{2x}]^2 + [\frac{\sqrt{-1-4x}}{2x}]^2 = 1.$$

Ainsi cette demie droite n'est pas dans l'image. Pour $x = -\frac{1}{4}$ on trouve pour seule solution $z = -1$ qui est aussi de module 1. Par le point **7.** on sait que cette demie droite ne peut être prolongée d'avantage. Ce résultat est intéressant, il montre que la valeur $\frac{1}{4}$ trouvée au point précédent est optimale.

EXERCICE 2:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x+x^2} dx = \frac{2\pi \cos(1/2) e^{-\sqrt{3}/2}}{\sqrt{3}}$$

*Démonstration.* On considère le demi cercle supérieur de rayon $R$ paramétré par $\gamma_R$ et la fonction méromorphe

$$f : z \longmapsto \frac{e^{iz}}{1+z+z^2}$$

ses pôles sont les zéros du polynôme $1+z+z^2$. Le seul pôle dans le demi disque de rayon $R$ supérieur est $z^* = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ de module égal à 1. On considère donc $R > 1$ dans la suite de l'exercice.

On factorise ce polynôme puis on calcule le résidu de $f$ dans le demi disque supérieur

$$\mathrm{res}(f, z^*) = \lim_{z \to z^*} \frac{e^{iz}}{z - \overline{z^*}} = \frac{2\pi e^{-\frac{\sqrt{3}+i}{2}}}{\sqrt{3}}.$$

Par la formule des résidus on obtient alors

$$\int_{\gamma_R} f(z) \mathrm{d}z = 2i\pi \cdot \mathrm{res}(f, z^*).$$

On utilise ensuite la paramétrisation suivante de $\gamma_R = \gamma_1 \bigvee \gamma_2$ comme concaténation de

$$\begin{aligned} \gamma_1 : [0,1] &\longmapsto [-R, R] \\ t &\longmapsto -R + 2R \cdot t. \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \gamma_2 : [0,\pi] &\longmapsto C_R \\ t &\longmapsto R \cdot e^{it}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\int_{\gamma_R} f(z) \mathrm{d}z = \int_{[-R,R]} f(z) \mathrm{d}z + \int_{C_R} f(z) \mathrm{d}z.$$

Regardons dans un premier temps la deuxième intégrale. On écrit $z \in C_R$ comme $z = a + ib,\ a, b \in \mathbf{R},\ b \geq 0$.

$$|e^{iz}| = |e^{i(a+ib)}| = |e^{-b}| \cdot |e^{ia}| \leq 1.$$

Ainsi on obtient $\lim_{|z|\to\infty} |zf(z)| = 0$ et on en déduit que

$$\begin{aligned} |\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z| = |\int_{C_R} zf(z)\frac{\mathrm{d}z}{z}| &\leq \int_0^\pi \sup_{C_R} |zf(z)| \frac{R\mathrm{d}t}{R} \\ &\leq \pi \sup_{C_R} |zf(z)| \to 0. \end{aligned}$$

On écrit

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z = 0. \tag{1}$$

On regarde à présent la première intégrale

$$\begin{aligned} \int_{[-R,R]} f(z)\mathrm{d}z &= \int_0^1 f(2Rt - R)2R\mathrm{d}t, && \text{en utilisant la paramétrisation } \gamma_1 \\ &= \int_{-R}^R f(u)\mathrm{d}u, && \text{en posant } u = 2Rt - R \\ &= \int_{-R}^R \frac{e^{iu}}{1+u+u^2}\mathrm{d}u \\ &= \int_{-R}^R \frac{\cos u}{1+u+u^2}\mathrm{d}u + i\cdot \int_{-R}^R \frac{\sin u}{1+u+u^2}\mathrm{d}u. \end{aligned}$$

La première intégrale obtenue va tendre vers $I$ lorsque $R\to\infty$. Remarquons par (1) que

$$\int_{-R}^R \frac{\cos u}{1+u+u^2}\mathrm{d}u + i\cdot \int_{-R}^R \frac{\sin u}{1+u+u^2}\mathrm{d}u \to \int_{\gamma_R} f(z)\mathrm{d}z = \mathrm{res}(f, z^*).$$

Puisque nos deux intégrales sont réelles on en déduit par passage à la limite $R\to\infty$ que

$$I = \Re(res(f,z^*)) = \frac{2\pi\cos(1/2)e^{-\sqrt{3}/2}}{\sqrt{3}}.$$

$\square$