Systèmes dynamiques **Vezin Lomàn**

MAT551 Date de rendu : 20/10/2020

Devoir maison 4

EXERCICE 1:

L'application angle de rotation

$$\rho : (\mathrm{Homeo}(\mathbf{R}/\mathbf{Z}), D) \longmapsto \mathbf{R}/\mathbf{Z}$$

est continue.

Démonstration. Soit f un homéomorphisme du cercle et soit F un relèvement. Soit $\varepsilon > 0$. Soit g un autre homéomorphisme et G un relèvement.

Puisque F, G sont des relèvements on a

$$\pi \circ F = f \circ \pi, \quad \text{et} \quad \pi \circ G = g \circ \pi.$$

Ainsi en utilisant la surjectivité de la projection π,

$$\begin{aligned}
D(f,g) &= \sup_{x\in\mathbf{R}/\mathbf{Z}} d(f(x), g(x)) \\
&= \sup_{x\in\mathbf{R}} d(f\circ\pi(x), g\circ\pi(x)) \\
&= \sup_{x\in\mathbf{R}} d(\pi\circ F(x), \pi\circ G(x)) \\
&= \sup_{x\in\mathbf{R}} \min_{\substack{\pi(X)=\pi(F(x)) \\ \pi(Y)=\pi(G(x))}} |X-Y| \\
&\geq \sup_{x\in[0,1]} \min_{\substack{\pi(X)=\pi(F(x)) \\ \pi(Y)=\pi(G(x))}} |X-Y| \\
&\geq \sup_{x\in[0,1]} \min_{p,q\in\mathbf{Z}} |F(x)+p-G(x)-q|.
\end{aligned}$$

D'autre part comme $\phi_F := F - Id$ et $\phi_G := G - Id$ sont continues 1-périodiques on obtient

$$\begin{aligned}\|F-G\|_\infty &= \sup_{x\in\mathbf{R}} |F(x)-G(x)| \\ &= \sup_{x\in\mathbf{R}} |F(x)-x-(G(x)-x)| \\ &= \sup_{x\in[0,1]} |F(x)-G(x)|.\end{aligned}$$

Comme les relèvements ne sont définis qu'à une constante entière près on en déduit

$$D(f,g) \geq \|F-G\|_\infty,$$

pour un bon choix de G.

On regarde à présent le nombre de rotation de f et de g. Par convergence uniforme

$$\frac{F^k - Id}{k} \to \rho(F) \quad \text{et} \quad \frac{G^k - Id}{k} \to \rho(G),$$

on a l'existence d'un rang $K > 0$ tel que pour tout $k \geq K$

$$|\frac{F^k(0)}{k} - \rho(F)| \leq \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{et} \quad |\frac{G^k(0)}{k} - \rho(G)| \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

En utilisant l'inégalité triangulaire on trouve

$$\begin{aligned}|\rho(F)-\rho(G)| &\leq |\rho(F) - \frac{F^k(0)}{k}| + |\frac{F^k(0)-G^k(0)}{k}| + |\frac{G^k(0)}{k} - \rho(G)| \\ &\leq \frac{1}{k}\|F^k - G^k\|_\infty + \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

On montre que F est uniformément continue, pour cela il suffit de remarquer que pour $x, y \in \mathbf{R}$ on a

$$\begin{aligned}|F(x)-F(y)| &\leq |F(x)-x+x-y+y-F(y)| \\ &\leq |\phi_F(x)-\phi_F(y)| + |x-y|,\end{aligned}$$

et le résultat découle de la continuité uniforme de ϕ_F, continue et 1-périodique.

Ainsi en utilisant encore une fois l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned}\|F^k - G^k\|_\infty &\leq \|F \circ F^{k-1} - F \circ G^{k-1}\|_\infty + \|F \circ G^{k-1} - G \circ G^{k-1}\| \\ &\leq \|F \circ F^{k-1} - F \circ G^{k-1}\|_\infty + \|F - G\|_\infty.\end{aligned}$$

Puisque F est uniformément continue $\|F^k - G^k\|_\infty$ est contrôlée par $\|F^{k-1} - G^{k-1}\|_\infty$, par itération directe k fois, on peut alors trouver un $\delta > 0$ tel que pour G satisfaisant $\|F - G\|_\infty < \delta$ on ait

$$\|F^k - G^k\|_\infty \leq \frac{k\varepsilon}{2}.$$

Il en découle alors directement que

$$|\rho(F) - \rho(G)| \leq \varepsilon.$$

Ainsi lorsque $D(f,g)$ est assez petite on peut trouver F, G deux relèvements respectivement de f, g satisfaisants

$$\|F - G\|_\infty \leq D(f,g).$$

En prenant $D(f,g) \leq \delta$ on obtient $|\rho(F) - \rho(G)| \leq \varepsilon$, puisque le nombre de rotation d'un homéomorphisme n'est pas dépendant du choix de relèvement on en déduit

$$\lim_{D(f,g)\to 0} |\rho(f) - \rho(g)| = 0$$

ce qui garanti la continuité de ρ. $\square$

EXERCICE 2:

L'unique homéomorphisme affine par morceaux de ${}^{\mathbf{R}}/_{\mathbf{Z}}$, f_{λ_1,λ_2} donné admet pour nombre de rotations

$$\rho(f_{\lambda_1,\lambda_2}) = \frac{\log \lambda_1}{\log \lambda_1 - \log \lambda_2}.$$

Démonstration. On se propose d'expliciter l'homéomorphisme en question. Si on note $b = f_{\lambda_1,\lambda_2}(0)$ on obtient

$$f_{\lambda_1,\lambda_2}(x) = \begin{cases} b + \frac{1-b}{a}x, & \text{si } 0 \leq x < a \\ \frac{b}{1-a}(x-a), & \text{si } a \leq x < 1 \end{cases}.$$

On a alors bien $\lambda_1 = \frac{1-b}{a} > 1$ et $\lambda_2 = \frac{b}{1-a} < 1$. On propose une illustration ci dessous.

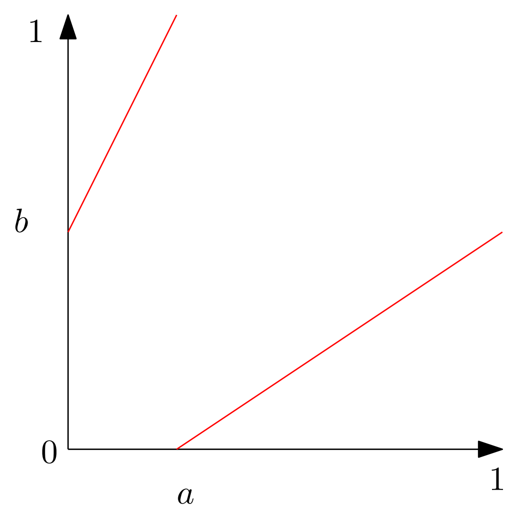

FIGURE 1 – Illustration du graphe de f_{λ_1,λ_2}

On pose $\sigma := \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ et on considère l'homéomorphisme du cercle suivant

$$\begin{aligned} h : {}^{\mathbf{R}}/_{\mathbf{Z}} &\longmapsto {}^{\mathbf{R}}/_{\mathbf{Z}} \\ x &\longmapsto \frac{\sigma^x - 1}{\sigma - 1}. \end{aligned}$$

Cet homéomorphisme préserve l'orientation et un rapide calcul donne son inverse

$$\begin{aligned} h^{-1} : {}^{\mathbf{R}}/_{\mathbf{Z}} &\longmapsto {}^{\mathbf{R}}/_{\mathbf{Z}} \\ y &\longmapsto \frac{\log(1 + (\sigma - 1)y)}{\log \sigma}. \end{aligned}$$

Un second calcul donne sur la première pente de f_{λ_1,λ_2}

$$\begin{aligned} h^{-1} \circ f_{\lambda_1,\lambda_2} \circ h(x) &= h^{-1} \circ f_{\lambda_1,\lambda_2}(\frac{\exp(x \log \sigma)}{\sigma - 1}) \\ &= h^{-1}(b + \frac{1-b}{a}(\frac{\exp(x \log \sigma)}{\sigma - 1})) \\ &= \frac{1}{\log \sigma} \log[\frac{1}{a}(a + \sigma ab + b - ab + \sigma^x - 1 - b\sigma^x)]. \end{aligned}$$

Puis en se rappelant que

$$\sigma = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{(1-b)(1-a)}{ab},$$

on obtient

$$\begin{aligned} h^{-1} \circ f_{\lambda_1,\lambda_2} \circ h(x) &= \frac{1}{\log \sigma} \log[\frac{1-b}{a}\sigma^x] \\ &= x + \frac{\log \frac{1-b}{a}}{\log \sigma}. \end{aligned}$$

Un calcul identique sur la deuxième pente de f_{λ_1,λ_2} donne le même résultat. Ainsi f_{λ_1,λ_2} est conjugué à une rotation d'angle

$$\frac{\log(\frac{1-b}{a})}{\log \sigma} = \frac{\log \lambda_1}{\log \lambda_1 - \log \lambda_2}.$$

L'angle d'une rotation correspond à son nombre de rotation, on sait que deux homéomorphismes conjugués ont le même nombre de rotation, on a donc le résultat. □

Remarque. C'est un résultat intéressant puisqu'il montre qu'un homéomorphisme défini par des coefficients rationnels, même très simple, peut avoir un nombre de rotation irrationnel.