Analyse Complexe **Vezin Lomàn**
MAT431 Date de rendu : 13/11/2020

Devoir maison 2

THÉORÈME 1:

Les conditions suivantes sont équivalentes pour une application $f \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$

$\star$ f est propre et df_x est inversible pour tout $x \in \mathbf{R}^n$
$\star\star$ f est un difféomorphisme $\mathcal{C}^2$ de $\mathbf{R}^n$ dans lui même.

Démonstration. **1.** On montre que $\star\star$ implique $\star$. Comme f est un $\mathcal{C}^2$ difféomorphisme f^{-1} est en particulier continue, ainsi pour tout compact $K \subset \mathbf{R}^n$, $f^{-1}(K)$ est compact et donc f est propre. Fixons $x \in \mathbf{R}^n$, comme

$$f^{-1} \circ f = Id,$$

remarquons que la formule de dérivation d'une fonction composée nous donne

$$d(f^{-1})_{f(x)} df_x = I_n,$$

et ainsi df_x est inversible.

Supposons à présent et pour le reste de l'exercice $\star$. Montrons dans un premier temps que f est surjective. Pour ce faire montrons que $f(\mathbf{R}^n)$ est un ouvert fermé de $\mathbf{R}^n$, comme cet ensemble est non vide et que $\mathbf{R}^n$ est connexe on en déduira $f(\mathbf{R}^n) = \mathbf{R}^n$.

Soit $y_0 \in f(\mathbf{R}^n)$ et $x_0 \in \mathbf{R}^n$ satisfaisant $f(x_0) = y_0$. Par hypothèse nous savons que df_{x_0} est inversible, par le théorème d'inversion locale il existe donc deux voisinages ouverts $U \subset \mathbf{R}^n$ et $V \subset f(\mathbf{R}^n)$ contenant respectivement x_0 et y_0 tels que

$$f(U) = V \subset f(\mathbf{R}^n).$$

Nous venons de montrer que $f(\mathbf{R}^n)$ est ouvert. Montrons à présent qu'il est fermé.

Soit $(y_k)_{k\in\mathbf{N}}$ une suite dans $f(\mathbf{R}^n)$, convergente avec pour limite y, et soit $(x_k)_{k\in\mathbf{N}}$ une suite de $\mathbf{R}^n$ satisfaisant

$$f(x_k) = y_k \quad \forall k \in \mathbf{N}.$$

L'ensemble

$$K := \{y_k,\ k \in \mathbf{N}\} \cup \{y\} \subset \mathbf{R}^n$$

est compact puisque fermé et borné par convergence de $(y_k)_k$ vers y. Comme nous avons supposé f propre $f^{-1}(K)$ est aussi compact et contient chacun des x_k pour $k \in \mathbf{N}$. Nous pouvons alors exhiber une sous suite convergente vers une limite que nous pouvons noter x

$$x_{k_j} \underset{j \to \infty}{\longrightarrow} x.$$

Par continuité de f et comme la convergence de la suite y_k entraine la convergence vers la même limite de la sous suite extraite y_{k_j} on obtient

$$\begin{aligned} y = \lim_{j \to \infty} y_{k_j} &= \lim_{j \to \infty} f(x_{k_j}) \\ &= f(\lim_{j \to \infty} x_{k_j}) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Ainsi $y \in f(\mathbf{R}^n)$ qui est donc fermé. Nous pouvons conclure.

2. On étudie à présent l'injectivité de f. Fixons $z \in \mathbf{R}^n$ et considérons l'ensemble

$$\begin{aligned} S_z &:= \{x \in \mathbf{R}^n \mid f(x) = f(z)\} \\ &= \{x \in \mathbf{R}^n \mid g(x) = 0\}, \end{aligned}$$

où g est la fonction auxiliaire donnée par

$$\begin{aligned} g : \mathbf{R}^n &\longmapsto \mathbf{R}^n \\ x &\longmapsto f(x) - f(z). \end{aligned}$$

Puisque f est propre on en déduit directement que g l'est aussi. Ainsi S_z est compact comme préimage du singleton $\{0\}$ lui même compact. De plus on voit facilement que f et g ont la même différentielle. Si par l'absurde S_z disposait d'un nombre infini de points il contiendrait un point d'accumulation, a disons. Comme dg_a est inversible nous pouvons appliquer à nouveau le théorème d'inversion locale pour trouver un voisinage ouvert U de a tel que

$$g : U \longmapsto g(U)$$

soit une bijection. Soit $(x_k)_{k \in \mathbf{N}}$ une suite de S_z convergeant vers a, on peut trouver au moins un x_i de cette suite dans U mais alors

$$g(x_i) = 0 = g(a)$$

comme $x_i, a \in S_z$, ce qui contredit l'injectivité de la restriction de g à U. S_z est donc nécessairement fini.

3. Posons
$$X(x) := (dg_x)^{-1}g(x),$$
et considérons l'équation différentielle donnée par

$$\mathcal{E}_z : \quad \begin{cases} x'(t) = -X(x(t)) \\ x(0) = x_0 \in \mathbf{R}^n \end{cases} .$$

a. Comme f est $\mathcal{C}^2$, g l'est aussi et X est $\mathcal{C}^1$. Par Cauchy $\mathcal{E}_z$ admet pour un $\alpha > 0$ une solution maximale x sur $[0, \alpha[$. Montrons que $\alpha = +\infty$ en utilisant le lemme des bouts (Théorème VIII.3.9). Soit $t \in [0, \alpha[$, on a

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(g(x(t))) &= dg_{x(t)}x'(t), && \text{par la formule de dérivation composée} \\ &= -dg_{x(t)}(dg_{x(t)})^{-1}g(x(t)), && \text{comme } x \text{ est solution} \\ &= -g(x(t)). \end{aligned}$$

On en déduit que
$$g(x(t)) = e^{-t}g(x_0),$$
et donc comme $t > 0$ on obtient

$$\|g(x(t))\| \leq \|g(x_0)\|.$$

Comme g est propre $g^{-1}(\overline{B(0, \|g(x_0)\|)})$ est compact et comme

$$x(t) \in g^{-1}(\overline{B(0, \|g(x_0)\|)}), \quad \forall t \in [0, \alpha[,$$

par le lemme des bouts $\alpha = +\infty$.

b. Notons $S_z = \{z_1, \dots, z_m\}$. Remarquons dans un premier temps par définition de S_z que

$$g(z_i) = 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}.$$

Par hypothèse df_{z_i} est inversible et $dg_x = df_x$ $\forall x \in \mathbf{R}^n$. On en déduit par le théorème d'inversion locale l'existence d'un $\delta_i > 0$ et d'un voisinage V de 0, tel que la restriction de g

$$g : B(z_i, \delta_i) \longmapsto V$$

soit un difféomorphisme.

Soit $y \in V$ et $x_0 := g^{-1}(y)$. Considérons l'application

$$h : t \longmapsto g^{-1}(e^{-t}y),$$

montrons qu'il s'agit d'une solution, on pourra conclure par unicité. En effet $h(0) = g^{-1}(y) = x_0$ et

$$\begin{aligned} h'(t) &= d(g^{-1})_{e^{-t}y}(-e^{-t}y) \\ &= -d(g^{-1})_{g(h(t))}g(h(t)) \\ &= -(dg_{h(t)})^{-1}g(h(t)) \\ &= -X(h(t)). \end{aligned}$$

On obtient finalement par unicité de la solution que

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} h(t) = \lim_{t\to\infty} g^{-1}(e^{-t}y) = g^{-1}(0) = z_i.$$

Puisque le choix de $y \in V$ et donc de $x_0 \in B(z_i, \delta_i)$ était arbitraire on a le résultat voulu.

c. Soit $x_0 \in \mathbf{R}^n$ et x une solution de $\mathcal{E}_z$ satisfaisant $x(0) = x_0$. Par *a.* x reste dans un compact pour tout $t > 0$ donc l'image de $[0, +\infty[$ par x doit avoir au moins un point d'accumulation, disons l. Soit donc $(t_j)_{j\in\mathbf{N}}$ une suite strictement croissante, $t_j \to_j \infty$, telle que

$$x(t_j) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} l.$$

Par le point *b.* $g(x(t)) = e^{-t}g(x_0)$, on en déduit donc par passage à la limite

$$g(l) = \lim_{j\to\infty} g(x(t_j)) = \lim_{j\to\infty} e^{-t_j}g(x_0) = 0.$$

Ainsi $l \in S_z$ et donc $l = z_i$ pour un $i \in \{0, \dots, m\}$.

Par convergence de la suite $(x(t_j))_j$, pour le δ_i du point *b.* on peut trouver $J > 0$ suffisamment grand de sorte que

$$x(t_j) \in B(z_i, \delta_i),\ \forall j \geq J.$$

En particulier par le point *b.* la solution h satisfaisant $h(0) = x(t_J)$ converge vers z_i. Remarquons que la solution

$$\tilde{h}(t) = x(t + t_J),$$

satisfait également $\tilde{h}(0) = x(t_J)$ et donc par unicité globale on obtient

$$x(t + t_J) = h(t) \quad \text{et} \quad \lim_{t\to\infty} x(t) = z_i.$$

d. Chaque A_i est bien défini par unicité globale des solutions, garantie par la proposition VIII.3.1 du cours [1], puisque $\mathcal{C}^1$ implique localement Lipschitz.

Soit $i \in \{1, \dots, m\}$ et soit $x_0 \in A_i$. Soit x la solution de condition initiale x_0. En reprenant le δ_i du point *b.* par définition de A_i il existe un $T > 0$ tel que pour tout $t \geq T$

$$|x(t) - z_i| \leq \frac{\delta_i}{2}.$$

Comme les solutions sont continues par rapport au conditions initiales, il existe $\epsilon > 0$ tel que si $|x_0 - y_0| < \varepsilon$ et si y est solution de condition initiale y_0

$$|x(t) - y(t)| \leq \frac{\delta_i}{2}.$$

On conclut par inégalité triangulaire

$$|y(t) - z_i| \leq |y(t) - x(t)| + |x(t) - z_i| \leq \delta_i.$$

Par le point *b.* il en découle que

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = z_i.$$

Ainsi $y_0 \in A_i$. Comme le choix de i et de x_0 étaient arbitraires, nous venons de montrer que A_i est ouvert pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$

e. On a par le point *c.* que

$$\mathbf{R}^n = \bigcup_{i=1}^{m} A_i.$$

Par le point *d.* nous savons de plus que chaque A_i est un ouvert non vide de $\mathbf{R}^n$. Il est clair par unicité des limites dans $\mathbf{R}^n$ que les A_i sont deux à deux disjoints. Par connexité de $\mathbf{R}^n$ on doit donc nécessairement avoir $m = 1$. Ainsi g ne s'annule qu'en un unique point, c'est à dire par définition de g qu'il existe un unique $x \in \mathbf{R}^n$ tel que $f(x) = f(z)$. Puisque le choix de $z \in \mathbf{R}^n$ était arbitraire nous avons bien montré l'injectivité de f.

Nous pouvons en conclure avec le point **1.** que f est une bijection de $\mathbf{R}^n$ dans lui même et cela conclut la preuve. $\square$

4. Une application *a.* Soit $g : \mathbf{R}^n \longmapsto \mathbf{R}^n$ continue avec

$$\lim_{\|x\| \to \infty} \|g(x)\| = +\infty. \tag{1}$$

1. C'est de cette proposition dont on se sert tout du long pour l'unicité globale

Soit $K \subset \mathbf{R}^n$ un compact. Par Borel Lebesgue K est fermé et borné. Par continuité de g, $g^{-1}(K)$ est fermé. Par un argument ensembliste on a de plus

$$g(g^{-1}(K)) \subset K.$$

En particulier comme K est borné, par (1) $g^{-1}(K)$ doit aussi être borné. $g^{-1}(K)$ est donc fermé borné, par Borel Lebesgue c'est donc un compact et g est propre.

b. Par équivalence des normes sur $\mathbf{R}^n$ nous pouvons considérer la norme 2 afin de faciliter les calculs. L'application

$$\begin{aligned} \|.\|^2 : \mathbf{R}^n &\longmapsto \mathbf{R}^n \\ x &\longmapsto \langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{aligned}$$

est $\mathcal{C}^\infty$. L'application induite par $A \in GL_n(\mathbf{R})$ est linéaire donc $\mathcal{C}^\infty$ On en déduit que f est $\mathcal{C}^\infty$ comme somme de compositions de fonctions $\mathcal{C}^\infty$.

f est en particulier continue, nous appliquons le critère précédent pour montrer qu'elle est propre. Dès que $\|x\| > \sqrt{2}$ on a

$$\varphi(\|x\|^2) = 0 \quad \text{donc,} \quad f(x) = x.$$

Ainsi

$$\lim_{\|x\| \to \infty} \|f(x)\| = +\infty,$$

et f est propre.

On calcule à présent la différentielle df_x de f pour tout $x \in \mathbf{R}^n$.

Pour $x \in B(0,1)$ il est facile de voir que $f = A + a$ et donc

$$df_x = A \in Gl_n(\mathbf{R}), \text{ est inversible.}$$

Pour $x \in \mathbf{R}^n \setminus B(0,2)$ on obtient aussi facilement $f = I_n$. f est donc linéaire et

$$df_x = I_n \in GL_n(\mathbf{R}) \text{ est aussi inversible.}$$

Finalement pour $x \in B(0,2) \setminus B(0,1)$, comme $\tilde{\varphi} := \varphi(\|.\|)$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\overline{B(0,2) \setminus B(0,1)}$ compact on a l'existence d'un $M > 0$ tel que

$$|\tilde{\varphi}(x)|, \|d\tilde{\varphi}_x\| \leq M, \quad \forall x \in B(0,2) \setminus B(0,1).$$

Pour un tel x on a donc par inégalité triangulaire en calculant la différentielle de f

$$\begin{aligned}\|df_x(h)\| &\geq \|h\| - 2M\|h\|\|A - I_n\| - \|h\|\|a\|M \\ &\geq \|h\|(1 - 2M\|A - I_n\| - M\|a\|).\end{aligned}$$

En prenant $\varepsilon > 0$ suffisamment petit par exemple $\varepsilon = \frac{1}{4M}$ on obtient

$$\|a\| \leq \varepsilon,\ \|A - I_n\| \leq \varepsilon \implies 1 - 2M\|A - I_n\| - M\|a\| > 0.$$

On en déduit que sous ces conditions le noyau de l'application df_x est nul. Cette dernière est injective donc bijective comme nous travaillons en dimension finie par le théorème du rang. df_x est donc bien inversible.

c. Nous venons de montrer que f est propre et sa différentielle est inversible en tout $x \in \mathbf{R}^n$. Par le théorème de Hadamard que nous venons de démontrer f est un $\mathcal{C}^\infty$ difféomorphisme de $\mathbf{R}^n$ dans lui même.