MAT432 Distributions **Vezin Lomàn**
MAT432 Date de rendu: 11/03/2021

Exercices contrôle continu

Exercice 5 *f.* On montre l'égalité suivante

$$-\partial_x^2 u_n(x) + x^2 u_n(x) = (2n+1)u_n(x).$$

On part de $u_n(x) = C_n \cdot \exp(-\frac{x^2}{2})H_n(x)$ avec C_n une constante multiplicative ne dépendant que de n donnée dans le point *e*.

Ainsi

$$\partial_x u_n(x) = C_n \cdot (-x\exp(-\frac{x^2}{2})H_n(x) + \exp(-\frac{x^2}{2})H_n'(x)),$$

et

$$\partial_x^2 u_n(x) = C_n \cdot (-\exp(-\frac{x^2}{2})H_n(x) + x^2\exp(-\frac{x^2}{2})H_n(x) - 2x\exp(-\frac{x^2}{2})H_n'(x) + \exp(-\frac{x^2}{2})H_n''(x)).$$

On obtient donc finalement en se souvenant de l'expression u_n et après simplifications

$$-\partial_x^2 u_n(x) + x^2 u_n(x) = C_n \cdot (\exp(-\frac{x^2}{2})H_n(x) + 2x\exp(-\frac{x^2}{2})H_n'(x) + \exp(-\frac{x^2}{2})H_n''(x)').$$

On utilise à présent la relation sur H_n'' établie au point *d*, ce qui donne après simplifications des termes en $H_n'(x)$

$$-\partial_x^2 u_n(x) + x^2 u_n(x) = C_n \cdot (\exp(-\frac{x^2}{2})H_n(x) + 2n\exp(-\frac{x^2}{2})H_n(x)).$$

On factorise par $u_n(x)$ pour trouver finalement le résultat attendu

$$\boxed{-\partial_x^2 u_n(x) + x^2 u_n(x) = (2n+1)u_n(x).}$$

g. On montre que la fonction ψ donnée est bien continue en temps, L^2 en x.

Comme ψ^{in} et u_n sont des fonctions L^2, on a

$$\begin{aligned}|\int_{\mathbf{R}} \psi^{in}(y)u_n(y)\mathrm{d}y| &\leq \int_{\mathbf{R}} |\psi^{in}(y)u_n(y)|\mathrm{d}y \\ &\leq (\int_{\mathbf{R}} \psi^{in}(y)^2\mathrm{d}y)^{\frac{1}{2}} \cdot (\int_{\mathbf{R}} u_n(y)^2\mathrm{d}y)^{\frac{1}{2}} \\ &< +\infty,\end{aligned}$$

où la deuxième inégalité est l'inégalité de Hölder. Le terme indépendant de x, t est borné et donc ψ est bien définie. Pour simplifier la rédaction on omettra dorénavant cette constante.

On montre la continuité en t. Pour tout $n \in \mathbf{N}$ la fonction

$$f_n(t,x) := \exp(-i\frac{2n+1}{2}t)u_n(x)$$

est continue en t sur $\mathbf{R}$. De plus

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbf{N}} |f_n(t,x)| &\leq \sum_{n\in\mathbf{N}} |u_n(x)| \\ &\leq \frac{1}{\pi^{\frac{1}{4}}} \sum_{n\in\mathbf{N}} \frac{\exp(-x^2)^{(n)}}{\sqrt{2^n n!}} < +\infty.\end{aligned}$$

La série converge normalement indépendamment de $t \in \mathbf{R}$ donc uniformément, la continuité de chaque f_n garantit celle de ψ.

On regarde l'intégrale

$$\int_{\mathbf{R}} \psi(t,x)^2\mathrm{d}x.$$

Le développement du carré de la somme nous donne la somme des termes au carré plus la double somme des termes croisés. Par le point *e.* nous savons que les $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ forment une base de Hilbert de L^2, ils sont donc orthogonaux. La convergence normale nous permet de plus d'intervertir somme et intégrale. Les termes croisés sont donc tous nuls et il reste

$$\int_{\mathbf{R}} \psi(t,x)^2\mathrm{d}x = \sum_{n\in\mathbf{N}} \exp(-i(2n+1)t) \int_{\mathbf{R}} u_n(x)^2\mathrm{d}x.$$

On utilise la définition de u_n pour trouver

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}} \psi(t,x)^2\mathrm{d}x &= \sum_{n\in\mathbf{N}} \frac{\exp(-i(2n+1)t)}{2^n n!} \int_{R} (\exp(-x^2)^{(n)})^2\mathrm{d}x \\ &< +\infty.\end{aligned}$$

Ainsi ψ est bien L^2 par rapport à x.