Systèmes dynamiques **Vezin Lomàn**
MAT551 Date de rendu: 13/11/2020

Devoir maison

EXERCICE 1:

Cobords et mesures invariantes

1. Remarquons dans un premier temps l'inclusion

$$\mathcal{C}_b(X,T) \subset \mathcal{C}_m(X,T),$$

en effet si l'on prend $\phi \in \mathcal{C}_b(X,T)$ avec fonction de transfert $\psi \in \mathcal{C}(X)$, alors pour toute mesure $\mu \in \mathcal{M}(X,T)$

$$\begin{aligned}\int \phi \mathrm{d}\mu &= \int \psi \circ T - \psi \mathrm{d}\mu \\ &= \int \psi \circ T \mathrm{d}\mu - \int \psi \mathrm{d}\mu \\ &= 0 \quad \text{par } T \text{ invariance de } \mu.\end{aligned}$$

En montrant que l'ensemble $\mathcal{C}_m(X,T)$ est un fermé on obtiendra le résultat souhaité

$$\overline{\mathcal{C}_b(X,T)} \subset \overline{\mathcal{C}_m(X,T)} = \mathcal{C}_m(X,T).$$

Comme $\mathcal{C}(X)$ est un espace métrique on peut utiliser un argument séquentiel. Soit $(\phi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de $\mathcal{C}_m(X,T)$ convergeant vers ϕ. Alors pour $n \in \mathbf{N}$

$$\begin{aligned}|\int \phi \mathrm{d}\mu| &= |\int \phi \mathrm{d}\mu - \int \phi_n \mathrm{d}\mu| \\ &\leq \int |\phi - \phi_n| \mathrm{d}\mu \\ &\leq \int \|\phi - \phi_n\| \mathrm{d}\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

La limite appartient donc à $\mathcal{C}_m(X,T)$ qui est donc bien fermé.

2. *i.* On applique un corollaire du théorème de Hahn Banach dans sa formulation géométrique, étant donné un espace vectoriel E, un sous espace vectoriel $M \subset E$ non dense, il existe une forme linéaire continue Λ non nulle qui s'annule sur M. Il est facile de vérifier que $\mathcal{C}_b(X,T)$ et $\mathcal{C}_m(X,T)$ sont des $\mathbf{R}$ espaces vectoriels, le premier sous espace du second. Ils contiennent la fonction nulle sont stables par somme et multiplication par un scalaire réel.

En supposant que l'inclusion $\overline{\mathcal{C}_b(X,T)} \subsetneq \mathcal{C}_m(X,T)$ soit stricte on obtient que $\mathcal{C}_b(X,T)$ n'est pas dense dans $\mathcal{C}_m(X,T)$. On conclut par le corollaire précédent l'existence de Λ telle que

$$\mathcal{C}_b(X,T) \subset \{\phi \in \mathcal{C}(X) \mid \Lambda(\phi) = 0\} \subsetneq \mathcal{C}_m(X,T).$$

On sait de plus que le noyau d'une forme linéaire continue est fermé, ainsi on obtient

$$\overline{\mathcal{C}_b(X,T)} \subset \{\phi \in \mathcal{C}(X) \mid \Lambda(\phi) = 0\} \subsetneq \mathcal{C}_m(X,T).$$

ii. Puisque Λ s'annule sur les cobords, pour toute fonction continue ψ on a

$$\int \psi \circ T - \psi \mathrm{d}\mu = 0 = \int \psi \circ T \mathrm{d}\mu - \int \psi \mathrm{d}\mu.$$

On en déduit que μ est $T-$invariante. Les mesures boréliennes positives $T_\star\mu_+, T_\star\mu_-$ satisfont donc

$$\begin{aligned}
\int \psi \mathrm{d}T_\star\mu_+ - \int \psi \mathrm{d}T_\star\mu_- &= \int \psi \circ T \mathrm{d}\mu_+ - \int \psi \circ T \mathrm{d}\mu_- \\
&= \int \psi \circ T \mathrm{d}\mu \\
&= \int \psi \mathrm{d}\mu \\
&= \int \psi \mathrm{d}\mu_+ - \int \psi \mathrm{d}\mu_-.
\end{aligned}$$

De l'hypothèse d'unicité on en déduit que pour tout borélien A,

$$T_\star\mu_+(A) \geq \mu_+(A) \quad \text{et} \quad T_\star\mu_-(A) \geq \mu_-(A).$$

Remarquons que $T_\star\mu_+, T_\star\mu_-$ sont aussi mutuellement séparées. Si $\mu_+(E) = 1,\ \mu_-(E) = 0$,

$$T_\star\mu_+(E) \geq \mu_+(E) = 1 \quad \text{et,}$$

$$\begin{aligned}
T_\star\mu_-(E) &= \int_E T \mathrm{d}\mu_- \\
&\leq \|T\|_\infty \mu_-(E) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

puisque T est continue sur X compact donc bornée.

En inversant les rôles de μ et $T_\star\mu$ qui sont égales, on obtient l'inégalité inverse et donc l'égalité. Par définition, nous venons de montrer que μ_+, μ_- sont T-invariantes.

iii. Puisque μ_+, μ_- sont $T-$invariantes et finies les mesures $\frac{1}{\mu_+(X)}\mu_+, \frac{1}{\mu_-(X)}\mu_- \in \mathcal{M}(X,T)$. Si $\phi \in \mathcal{C}_m(X,T)$ alors

$$\frac{1}{\mu_+(X)}\int \phi \mathrm{d}\mu_+ = 0 = \frac{1}{\mu_-(X)}\int \phi \mathrm{d}\mu_-.$$

Donc

$$\int \phi \mathrm{d}\mu_+ = 0 = \int \phi \mathrm{d}\mu_-,$$

et il en découle que

$$\Lambda(\phi) = \int \phi \mathrm{d}\mu_+ - \int \phi \mathrm{d}\mu_- = 0.$$

Ainsi nous obtenons une contradiction

$$\mathcal{C}_m(X,T) \subset \{\phi \in \mathcal{C}(X) \mid \Lambda(\phi) = 0\}.$$

3. On raisonne par contraposée. Si pour toutes mesures ergodiques μ_1, μ_2 on a

$$\int \phi \mathrm{d}\mu_1 = \int \phi \mathrm{d}\mu_2 = c \in \mathbf{R},$$

$c < \infty$ comme ϕ est continue sur X compact donc bornée. Alors pour $\mu \in \mathcal{M}(X,T)$, comme les mesures ergodiques sont les points extrémaux des mesures T-invariantes on obtient par le théorème de Choquet l'existence d'une distribution M_μ sur $\mathcal{M}(X,T)$ supportée par les mesures ergodiques telle que

$$\int \phi \mathrm{d}\mu = \int (\int \phi \mathrm{d}\nu) \mathrm{d}M_\mu(\nu), \ \nu \text{ ergodiques.}$$

Comme par hypothèse

$$\int \phi \mathrm{d}\nu = c \quad \forall \nu \in \mathcal{M}_e(X,T),$$

on en déduit

$$\int \phi \mathrm{d}\mu = c \quad \forall \mu \in \mathcal{M}(X,T).$$

Ainsi pour $\mu \in \mathcal{M}(X,T)$

$$\int (\phi - c) \mathrm{d}\mu = \int \phi \mathrm{d}\mu - c\mu(X) = c - c = 0.$$

Donc en posant $\psi = \phi - c$ on obtient $\phi = \psi + c, \ \psi \in \mathcal{C}_m(X,T)$. On a donc bien montré

$$\phi \in \mathcal{C}_m(X,T) + \mathbf{R}.$$

4. Soit $\mu \in \mathcal{M}_e(X,T)$. Par le cours μ presque tout $x \in \{0,1\}^{\mathbf{N}}$ est générique. Il en existe en particulier au moins un. Soit donc $u \in \{0,1\}^{\mathbf{N}}$ générique, c'est à dire

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\delta_{\sigma^k(u)} \to_n \mu.$$

Les points périodiques sont denses dans $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$. En effet pour tout $x \in \{0,1\}^{\mathbf{N}}$ on peut considérer $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite des mots infinis $n-$périodiques tels que la troncature

$$x_n(n) = x(n).$$

Par définition de la métrique d sur $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$ on a

$$d(x_n, x) \leq \frac{1}{2^{n-1}} \to_n 0,$$

soit $x_n \to_n x$.

Prenons alors $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de points $n-$périodiques qui tend vers u. On a alors pour tout $n \in \mathbf{N}$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\delta_{\sigma^k(u_n)} \quad \text{est une mesure périodique,}$$

et j'aimerais dire que

$$\lim_n \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\delta_{\sigma^k(u_n)} = \lim_n \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\delta_{\sigma^k(u)} = \mu.$$

Malheureusement je ne parviens pas à justifier ce point.

Comme le choix de μ était arbitraire et comme les mesures périodiques sont elles mêmes ergodiques on en déduit que les mesures périodiques sont denses dans les mesures ergodiques.

Par la question **3.** il existe deux mesures ergodiques μ_1, μ_2 satisfaisant

$$\int \phi \mathrm{d}\mu_1 \neq \int \phi \mathrm{d}\mu_2.$$

$\mathcal{M}(X,T)$ muni de la topologie faible-* est métrisable, comme les mesures périodiques sont denses dans les mesures ergodiques μ_1, μ_2 sont toutes deux limites de suites de mesures périodiques. Par définition de la topologie faible-* l'application

$$\mu \longmapsto \int \phi \mathrm{d}\mu$$

et continue, on peut donc trouver au moins deux mesures périodiques, une dans chaque suite, $\tilde{\mu_1}, \tilde{\mu_2}$ disons, satisfaisant

$$\int \phi \mathrm{d}\tilde{\mu_1} \neq \int \phi \mathrm{d}\tilde{\mu_2}.$$

EXERCICE 2:

Ensemble de divergence, quelques généralités

6. On montre que l'ensemble $\mathcal{B}(\phi)$ est T-invariant. Soit $x \in T^{-1}(\mathcal{B}(\phi))$, et soit $y \in \mathcal{B}(\phi)$ tel que $T(x) = y$. Alors pour $n \in \mathbf{N}$ fixé on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\phi \circ T^k(x) &= \frac{\phi(x)}{n} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\phi \circ T^{k-1}(y)\\ &= \frac{\phi(x)}{n} + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\phi \circ T^{k}(y) - \frac{\phi(T^n(x))}{n}.\end{aligned}$$

Comme ϕ est bornée, en prenant la limite inférieure on remarque que

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\phi \circ T^k(x) = \liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\phi \circ T^k(y),$$

de même pour la limite supérieure. Ainsi $x \in \mathcal{B}(\phi)$ qui est donc bien $T-$invariant.

Par le théorème ergodique ponctuel, si $\mu \in \mathcal{M}(X, T)$, alors pour μ presque tout $x \in X$ on a la convergence de la suite

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\phi \circ T^k(x)\right)_{n\in\mathbf{N}}. \tag{1}$$

L'ensemble de divergence des sommes de Birkhoff est donc de μ mesure nulle.

De plus, par le théorème 4.11 des notes de cours lorsque μ est uniquement ergodique la convergence de la suite (1) ci dessus est uniforme vers une constante, on a donc convergence pour tout $x \in X$ et l'ensemble de divergence $\mathcal{B}(\phi)$ est vide.

7. Par la question **2.** nous savons que $\mathcal{C}_m(X, T) = \overline{\mathcal{C}_b(X, T)}$. Prenons donc $\phi \in \mathcal{C}_m(X, T)$ et une suite de cobords $(\phi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ donc ϕ est la limite uniforme. Notons pour tout $n \in \mathbf{N}$

$$\phi_n = \psi_n \circ T - \psi_n, \quad \psi_n \in \mathcal{C}(X),$$

nous obtenons alors pour $x \in X$ quelconque et $j \in \mathbf{N}$

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\phi_j \circ T^k(x) &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(\psi_j \circ T - \psi_j)\circ T^k(x)\\ &= \frac{1}{n}(\psi_j \circ T^n - \psi_j)(x) \xrightarrow{CVU}_n 0\end{aligned}$$

puisque ψ_j est continue sur X qui est compact, et donc bornée.

Par convergence uniforme, en prenant la limite $j \to \infty$ on obtient le résultat souhaité. Puisque le choix de $x \in X$ était arbitraire on a convergence partout et l'ensemble de divergence $\mathcal{B}(\phi)$ est vide.

EXERCICE 3:

Ensemble de divergence pour des dynamiques minimales

8. (X, T) est un espace métrique nous pouvons appliquer un argument séquentiel. Soit $n \geq N$, la somme

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\phi \circ T^k$$

est une application continue comme somme de compositions d'applications continues. Si l'on considère une suite $(x_j)_{j\in\mathbf{N}}$ de $W(N, \varepsilon)$ convergeant vers $x \in X$, alors nous obtenons par passage à la limite et continuité

$$\begin{aligned}\lim_{j\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\phi \circ T^k(x_j) &\geq \int \phi \mathrm{d}\mu + \varepsilon && \text{d'une part,}\\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\phi \circ T^k(x) && \text{d'autre part.}\end{aligned}$$

Comme $n \geq N$ était arbitraire $x \in W(N, \varepsilon)$ qui est donc fermé.

Si par l'absurde $W(N, \varepsilon)$ n'est pas d'intérieur vide il contient un ouvert non vide U. Comme (X, T) est minimal il existe pour cet ouvert U un entier $J > 0$ tel que

$$X = \bigcup_{0\leq j\leq J} T^{-j}U.$$

Alors comme $U \subset W(N, \varepsilon)$, pour tout $x \in X$ il existe $j \in \{0, \ldots, J\}$ tel que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \phi \circ T^{k+j}(x) \geq \int \phi \mathrm{d}\mu + \varepsilon,\ \forall n \geq N.$$

De plus on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+j}\sum_{k=0}^{n+j-1} \phi \circ T^{k}(x) &= \frac{1}{n+j}\sum_{k=0}^{j-1} \phi \circ T^{k}(x) + \frac{n}{n+j}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \phi \circ T^{k+j}(x) \\ &\geq \frac{1}{n+j}\sum_{k=0}^{j-1} \phi \circ T^{k}(x) + \frac{n}{n+j}(\int \phi \mathrm{d}\mu + \varepsilon). \end{aligned}$$

On en déduit comme j est fixe que

$$\lim_n \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \phi \circ T^{k}(x) = \lim_n \frac{1}{n+j}\sum_{k=0}^{n+j-1} \phi \circ T^{k}(x) \geq \int \phi \mathrm{d}\mu + \varepsilon.$$

Mais alors

$$\lim_n \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \phi \circ T^{k}(x) > \int \phi \mathrm{d}\mu.$$

$x \in X$ étant arbitraire et μ ergodique X est donc de mesure nulle par le théorème de Birkhoff, ce qui est absurde.

9. Nous venons de montrer que pour tous $N > 0, \varepsilon > 0$ l'ensemble $W(N, \varepsilon)$ est maigre. En effet comme il est fermé nous avons

$$\overline{W(N, \varepsilon)} = W(N, \varepsilon) \quad \text{et donc} \quad \left(\overline{W(N, \varepsilon)}\right)^{\mathrm{o}} = W(N, \varepsilon)^{\mathrm{o}} = \emptyset.$$

Nous savons que le complémentaire d'un ensemble maigre contient un sous ensemble dense. Aussi

$$\begin{aligned} W(N, \varepsilon) &= \{x \in X \mid \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \phi \circ T^{k}(x) \geq \int \phi \mathrm{d}\mu + \varepsilon,\ \forall n \geq N\} \\ &= \{x \in X \mid \liminf_n \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \phi \circ T^{k}(x) \geq \int \phi \mathrm{d}\mu + \varepsilon\}. \end{aligned}$$

Comme le résultat est valable pour tout $\varepsilon > 0$, que μ est une mesure ergodique et en remarquant que

$$\mathcal{B}(\phi)^c = \{x \in X \mid \liminf_n \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \phi \circ T^k(x) \geq \limsup_n \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \phi \circ T^k(x)\},$$

on en conclut que $\mathcal{B}(\phi)$ contient un sous ensemble dense de X.

EXERCICE 4:

Ensemble de divergence pour le décalage sur $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$

10. Commençons par remarquer que

$$h_{top}(\{0,1\}^{\mathbf{N}}) = \limsup_n \frac{1}{n} \# C_n = \log(2)$$

puisque C_n est une partition de $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$ de cardinal 2^n.

Considérons $L \subset \{0,1\}^{\mathbf{N}}$ le sous ensemble des suites dont l'orbite est dense dans $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$. L n'est pas vide comme le décalage est transitif. Par définition de L et comme les n-cylindres sont des ouverts de $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$ on obtient directement

$$h_{top}(L) = \log(2).$$

On montre que la convergence des sommes de Birkhoff est indépendante du choix de $x \in L$ pour garantir l'aspect uniforme.

Soient $x, y \in L$. Par le théorème de Tychonoff $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$ est compact, ϕ continue sur $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$ est donc uniformément continue. Soit $\varepsilon > 0$. Par continuité uniforme de ϕ il existe $\delta > 0$ tel que

$$d(x,y) \leq \delta \implies |\phi(x) - \phi(y)| \leq \varepsilon.$$

Puisque l'orbite de x est dense dans $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$ il existe $j > 0$ tel que

$$d(\sigma^j(x), y) \leq \delta.$$

On en déduit l'encadrement suivant

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \phi \circ \sigma^{k+j}(x) - \varepsilon \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \phi \circ \sigma^k(y) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \phi \circ \sigma^{k+j}(x) + \varepsilon.$$

Comme le choix de $\varepsilon > 0$ est arbitraire et j fixe on en déduit

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \phi \circ \sigma^k(x) = \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \phi \circ \sigma^k(y).$$

Ce qui était le résultat voulu. Par le même argument en prenant $x \in L,\ y \in \{0,1\}^{\mathbf{N}}$ tel que

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \phi \circ \sigma^k(y) \to_n \int \phi \mathrm{d}\mu_{\max},$$

dont l'existence est donnée par le corollaire 3.9 du cours[1], on obtient que cette limite vaut $\int \phi \mathrm{d}\mu_{\max}$.

11. *i.* Dans un premier temps remarquons que

$$\begin{aligned} q_{2k+1} - q_{2k} &= |w_1| m_k + l_{2k} \\ q_{2k+2} - q_{2k+1} &= |w_2| n_k + l_{2k+1}. \end{aligned}$$

Ainsi l'hypothèse $\frac{q_{2k+1}}{q_{2k}} \to_k \infty$ implique asymptotiquement que

$$\begin{aligned} q_{2k+1} &\sim |w_1| m_k + l_{2k} \\ q_{2k+2} &\sim |w_2| n_k + l_{2k+1}. \end{aligned}$$

Et donc

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \lim_k \frac{l_{2k}}{q_{2k+1}} \\ \delta_2 &= \lim_k \frac{l_{2k+1}}{q_{2k+2}}. \end{aligned}$$

Soit C_{q_j} l'ensemble des q_j cylindres. Pour chaque mot u_{2k+1} on a au moins $2^{l_{2k}}$ choix possibles correspondant au choix de la troncature $w(l_{2k}),\ w \in L$. De même pour les mots u_{2k+2} on a au moins $2^{l_{2k+1}}$ choix. Cela nous donne les deux inégalités ci dessous

$$\begin{aligned} \#\{C \in C_{q_{2k+1}} \mid C \cap K \neq \emptyset\} &\geq 2^{l_{2k}} \\ \#\{C \in C_{q_{2k+2}} \mid C \cap K \neq \emptyset\} &\geq 2^{l_{2k+1}}. \end{aligned}$$

[1] corollaire du théorème ergodique ponctuel dans le cas d'une mesure ergodique

On en conclut en prenant le logarithme et par passage à la limite que

$$h_{top}(K) = \limsup_n \frac{1}{n} \#\{C \in C_n \mid C \cap K \neq \emptyset\} \geq \max_i \delta_i \log(2).$$

ii. Soit $\varepsilon > 0$, par continuité uniforme de ϕ il existe un $\delta > 0$ tel que

$$d(x,y) < \delta \implies |\phi(x) - \phi(y)| < \varepsilon.$$

Rappelons la définition de la métrique d sur $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$,

$$d(x,y) = \sum_{n \in \mathbf{N}} \frac{\delta_{x_n,y_n}}{2^n}.$$

Sur un r-cylindre cette distance vaut au plus $\frac{1}{2^{r-1}}$. On peut donc trouver r assez grand tel que $\frac{1}{2^{r-1}} < \delta$ ce qui donne le résultat.

iii. Commençons par la première inégalité. Lorsque $n = q_{2k+1}$ pour un $k \in \mathbf{N}$, on obtient

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \phi \circ \sigma^i(u) = \frac{1}{q_{2k+1}} (\sum_{i=0}^{q_{2k}-1} \phi \circ \sigma^i(u) + \sum_{i=q_{2k}}^{q_{2k}+l_{2k}-1} \phi \circ \sigma^i(u) + \sum_{i=q_{2k}+l_{2k}}^{q_{2k+1}-1} \phi \circ \sigma^i(u)).$$

ϕ est bornée puisque continue sur $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$ qui est compact. Ainsi si M borne ϕ on peut majorer le premier terme

$$\frac{1}{q_{2k+1}} \sum_{i=0}^{q_{2k}-1} \phi \circ \sigma^i(u) \leq \frac{q_{2k}}{q_{2k+1}} M \to_k 0.$$

puisque par hypothèse $\frac{q_{2k+1}}{q_{2k}} \to_k \infty$.

Regardons à present le deuxième terme, $i \in \{q_{2k}, \ldots, q_{2k} + l_{2k} - 1\}$. Sauf sur les m_k derniers termes on a par définition de $u \in K$ que $\sigma^i(u)$ coïncide avec $\sigma^{i-q_{2k}}(w)$ pour un $w \in L$. Soit $\varepsilon > 0$, puisque la suite $(m_k)_k$ tend vers $+\infty$ on peut prendre k suffisamment grand de sorte que par le point *ii.*

$$|\phi \circ \sigma^i(u) - \phi \circ \sigma^{i-q_{2k}}(w)| < \varepsilon.$$

Ainsi on en déduit que

$$\frac{1}{q_{2k+1}} \sum_{i=q_{2k}}^{q_{2k}+l_{2k}-1} \phi \circ \sigma^i(u) \leq \frac{l_{2k}}{q_{2k+1}} \frac{1}{l_{2k}} (\sum_{i=0}^{l_{2k}-1} \phi \circ \sigma^i(w) + \varepsilon).$$

Par convergence uniforme des sommes de Birkhoff sur L et puisque le choix de $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on obtient donc par passage à la limite $k \to \infty$

$$\frac{l_{2k}}{q_{2k+1}} \frac{1}{l_{2k}} (\sum_{i=0}^{l_{2k}-1} \phi \circ \sigma^i(w) + \varepsilon) \to_k \delta_1 \int \phi \mathrm{d}\mu_{\max}.$$

On regarde enfin le dernier terme, $i \in \{q_{2k} + l_{2k}, \ldots, q_{2k+1} - 1\}$. On a par définition de u que $\sigma^i(u)$ coïncide avec $\sigma^{i-(q_{2k}+l_{2k})}(w_1)$. Ainsi on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{q_{2k+1}} \sum_{i=q_{2k}+l_{2k}}^{q_{2k+1}-1} \phi \circ \sigma^i(u) &\leq \frac{|w_1|m_k}{q_{2k+1}} \frac{1}{|w_1|m_k} \sum_{i=0}^{|w_1|m_k-1} \phi \circ \sigma^i(w_1) \\ &\to_k (1 - \delta_1) \int \phi \mathrm{d}\mu_1. \end{aligned}$$

Par choix de la mesure μ_1 et comme asymptotiquement $1 - \frac{l_{2k}}{|w_1|m_k+l_{2k}} \sim \frac{|w_1|m_k}{q_{2k+1}}$.

Pour $n \in \mathbf{N}$ quelconque il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que $n \leq q_{2k+1}$ comme $q_{2k+1} \to_k \infty$ et donc par les trois calculs précédents

$$\liminf_n \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \leq 0 + \delta_1 \int \phi \mathrm{d}\mu_{\max} + (1 - \delta_1) \int \phi \mathrm{d}\mu_1.$$

On montre à présent la deuxième inégalité de la question. On prend cette fois $n = q_{2k+2}$ et on applique exactement le même raisonnement. Ainsi on sépare la somme comme précédemment

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \phi \circ \sigma^i(u) = \frac{1}{q_{2k+2}} (\sum_{i=0}^{q_{2k+1}-1} \phi \circ \sigma^i(u) + \sum_{i=q_{2k+1}}^{q_{2k+1}+l_{2k+1}-1} \phi \circ \sigma^i(u) + \sum_{i=q_{2k+1}+l_{2k+1}}^{q_{2k+2}-1} \phi \circ \sigma^i(u)).$$

Le premier terme tends vers 0, pour $\varepsilon > 0$, en prenant k suffisamment grand le second terme satisfait l'inégalité

$$\frac{1}{q_{2k+2}} \sum_{i=q_{2k+1}}^{q_{2k+1}+l_{2k+1}-1} \phi \circ \sigma^i(u) \geq \frac{l_{2k+1}}{q_{2k+2}} \frac{1}{l_{2k+1}} (\sum_{i=0}^{l_{2k+1}-1} \phi \circ \sigma^i(w) - \varepsilon),$$

avec $w \in L$. Ainsi par convergence uniforme des sommes de Birkhoff sur L, comme

$\frac{l_{2k+1}}{q_{2k+2}} \to_k \delta_2$ et comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on obtient

$$\frac{l_{2k+1}}{q_{2k+2}} \frac{1}{l_{2k+1}} (\sum_{i=0}^{l_{2k+1}-1} \phi \circ \sigma^i(w) + \varepsilon) \to_k \delta_2 \int \phi \mathrm{d}\mu_{\max}.$$

Enfin pour le dernier terme comme cette fois $\sigma^i(u)$ coïncide avec $\sigma^{i-(q_{2k+1}+l_{2k+1})}(w_2)$ on obtient l'inégalité

$$\begin{aligned} \frac{1}{q_{2k+2}} \sum_{i=q_{2k+1}+l_{2k+1}}^{q_{2k+2}-1} \phi \circ \sigma^i(u) \geq \frac{|w_2|n_k}{q_{2k+2}} \frac{1}{|w_2|n_k} \sum_{i=0}^{|w_2|n_k-1} \phi \circ \sigma^i(w_2) \\ \to_k (1-\delta_2) \int \phi \mathrm{d}\mu_2, \end{aligned}$$

par choix de la mesure μ_2.

Pour $n \in \mathbf{N}$ quelconque comme $q_{2k+2} \to_k \infty$ il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que $n \leq q_{2k+2}$. Ainsi en prenant le supremum sur n et par les trois calculs précédents on obtient cette fois

$$\limsup_n \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \geq 0 + \delta_2 \int \phi \mathrm{d}\mu_{\max} + (1-\delta_2) \int \phi \mathrm{d}\mu_2.$$

Nous avons montré les deux inégalités désirées.

iv. Soit $1 > \alpha > 0$, on peut trouver l, m, n trois suites d'entiers strictement croissantes telles que

$$\delta_1 = 1 - \alpha = \delta_2.$$

2

En effet il suffit de montrer qu'on peut trouver deux suites $(u_k)_{k\in\mathbf{N}}, (v_k)_{k\in\mathbf{N}}$ d'entiers strictement croissantes telles que

$$\frac{u_k}{u_k + v_k} \to_k \alpha.$$

Pour δ_1 on posera $m_k := u_k,\ l_{2k} := |w_1|v_k$ on pourra faire de même pour δ_2 quitte à décaler les suites pour garantir la croissance stricte de l.

Par densité de $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$ on peut exhiber deux suites d'entiers $(p_k)_{k\in\mathbf{N}}, (q_k)_{k\in\mathbf{N}}$ que l'on peut supposer strictement croissantes quitte à prendre l'infimum et supprimer les termes redondants. Comme $\alpha < 1$ on peut supposer de plus $p_k < q_k$ et poser

$$u_k := p_k,\ v_k := q_k - p_k,\ \forall k \in \mathbf{N}.$$

[2] une fois le résultat obtenu pour $\alpha < 1$ le cas $\alpha \geq 1$ est évident

On obtient donc par le point *i.*

$$h_{top}(K) \geq (1-\alpha)\log(2).$$

De plus par la question **4.** on peut supposer quitte à changer le choix de $w_1, w_2 \in L$, $\int \phi \mathrm{d}\mu_1 < \int \phi \mathrm{d}\mu_2$. On obtient alors pour $u \in K$ en utilisant les inégalités de *iii.*

$$\liminf_n \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \phi \circ \sigma^k(u) < \limsup_n \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \phi \circ \sigma^k(u).$$

12. Par le point *iv.* de la question précédente $K \subset \mathcal{B}(\phi)$. Ainsi

$$h_{top}(\mathcal{B}(\phi)) \geq h_{top}(K).$$

Toujours par le point *iv.* on a de plus

$$h_{top}(K) \geq (1-\alpha)\log(2), \quad \forall \alpha > 0.$$

Par passage à la limite $\alpha \to 0$, on obtient donc

$$h_{top}(\mathcal{B}(\phi)) \geq \log(2).$$

Nous avons remarqué dans la question **10.**

$$h_{top}(\{0,1\}^{\mathbf{N}}) = \log(2),$$

et cela force donc

$$h_{top}(\mathcal{B}(\phi)) = \log(2).$$