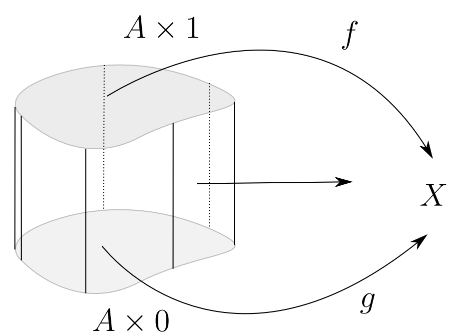
Chapitre 1

Le théorème de Seifert Van Kampen

1.1 Classes d'homotopie et composantes connexes par arcs

Rappel. On rappelle la notion d'homotopie

$f, g : A \longmapsto X$ sont *homotopes* s'il existe une homotopie $H : A \times I \longmapsto X$ avec $H(a, 0) = f(a)$ et $H(a, 1) = g(a)$ pour tout $a \in A$.



Soient $a_0 \in A$, $x_0 \in X$ des points de base de ces espaces

Définition 1.1.1 (Homotopie au sens pointé)**.** Deux applications pointées $(A, a_0) \mapsto (X, x_0)$, qui envoient a_0 sur x_0, sont homotopes s'il existe une homotopie $H : A \times I \longmapsto X$ telle que $H(a_0, t) = x_0 \; \forall t \in I$. Une telle homotopie est dite *pointée*, on note $f \simeq_* g$.
On note $[A, X]$ l'ensemble des classes d'homotopie d'applications $A \longmapsto X$ et on note $[A, X]_*$ l'ensemble des classes d'homotopie pointée d'applications pointées.

Définition 1.1.2 (Fonctorialité)**.** Soit $f : X \longmapsto Y$ et A un espace. Alors f induit

$$\begin{aligned} f_* : [A, X] &\longmapsto [A, Y] \\ [u] &\longmapsto [f \circ u]. \end{aligned}$$

Cette application est bien définie. En effet si $u \simeq v$ alors nous avons $H : A \times I \longmapsto X$ qui induit $f \circ H : A \times I \longmapsto Y$ avec $(f \circ H)(a,0) = f(H(a,0)) = (f \circ u)(a)$ et $(f \circ H)(a,1) = f(H(a,1)) = (f \circ v)(a)$, une homotopie entre $f \circ u$ et $f \circ v$.

Lemme 1.1.3. *Si $f \simeq g$, alors $f_* = g_*$.*

Démonstration. Soit $u : A \longmapsto X$, on doit montrer que $f \circ u \simeq g \circ u$. Soit $F : X \times I \longmapsto Y$ une homotopie entre f et g. On recompose cette application par $u \times Id : A \times I \longmapsto X \times I$ pour obtenir

$$\begin{aligned} H : A \times I \longmapsto X \times I \quad &\xmapsto{F} Y \\ (a,t) \longmapsto (u(a),t) &\longmapsto F(u(a),t). \end{aligned}$$

On obtient alors

$$H(a,0) = F(u(a),0) = (f \circ u)(a) \quad \text{et} \quad H(a,1) = F(u(a),1) = (g \circ u)(a).$$

Donc H est une homotopie entre $f \circ u$ et $g \circ u$ et ainsi

$$f_*(u) = [f \circ u] = [g \circ u] = g_*(u).$$

□

Proposition 1.1.4. *Si $X \simeq Y$, alors $[A,X] \cong [A,Y]$ au sens de bijection d'ensembles.*

Démonstration. Comme $X \simeq Y$ il existe des applications $f : X \longmapsto Y$ et $g : Y \longmapsto X$ telles que $g \circ f \simeq Id_X$ et $f \circ g \simeq Id_Y$.
Considérons alors les compositions suivantes

$$\begin{aligned} [A,X] \xmapsto{f_*} [A,Y] &\xmapsto{g_*} [A,X] \\ [u] \longmapsto [f \circ u] &\longmapsto [g \circ f \circ u] = [u]. \end{aligned}$$

Ainsi $f_* \circ g_* = Id_{[A,X]}$ et de même $g_* \circ f_* = Id_{[A,Y]}$ et donc f_* et g_* sont inverses l'une de l'autre. □

On illustre ces notions d'homotopie avec les composantes connexes.

Notation. On adopte dans cette section les notations suivantes

- Pour $x \in X$, on note $\overline{x}$ la classe de x dans l'ensemble des composantes connexes de X.
- $\pi_0 X$ dénote l'ensemble des composantes connes de X.

- $S^0 := \{\pm 1\} \subset \mathbf{R}$ est la sphère unité.

Proposition 1.1.5. *Soit (X, x_0) un espace pointé, alors $\pi_0 X \cong [S^0, X]_*$ comme bijection d'ensembles.*

Démonstration. On veut montrer que l'application suivante passe au quotient sur les classes $[S^0, X]$.

$$\begin{aligned} \mathcal{C}((S^0,1),(X,x_0)) \longmapsto \quad X \quad &\longmapsto \pi_0 X \\ f \longmapsto f(-1) &\longmapsto \overline{f(-1)}. \end{aligned}$$

En effet, si $f \simeq_* g$, il existe $H : S^0 \times I \longmapsto X$ une homotopie pointée telle que

$$\begin{aligned} H(\pm 1, 0) &= f(\pm 1) \\ H(\pm 1, 1) &= g(\pm 1) \\ H(1, t) &= x_0. \end{aligned}$$

Ainsi $H(-1,t)$ définit un chemin entre $H(-1,0) = f(-1)$ et $H(-1,1) = g(-1)$ et donc $\overline{f(-1)} = \overline{g(-1)}$.
On a obtenu une application bien définie $[S^0, X]_* \longmapsto \pi_0 X$, on montre dans un premier temps la surjectivité. Soit $x \in X$, on pose

$$\begin{aligned} f_x : S^0 &\longmapsto X \\ 1 &\longmapsto x_0 \\ -1 &\longmapsto x. \end{aligned}$$

Alors $[f_x] \longmapsto \overline{x}$.
Quant à l'injectivité, soient $f, g : S^0 \longmapsto X$ pointées telles que $\overline{f(-1)} = \overline{g(-1)}$. Donc $f(-1)$ et $g(-1)$ sont deux points de X dans la même composante connexe par arcs, il existe donc un chemin $\gamma : I \longmapsto X$ tel que $\gamma(0) = f(-1)$ et $\gamma(1) = g(-1)$. On définit alors une homotopie pointée entre f et g.

$$\begin{aligned} H : S^0 \times I &\longmapsto X \\ (1, t) &\longmapsto x_0 \\ (-1, t) &\longmapsto \gamma(t). \end{aligned}$$

Ainsi $[f] = [g]$ et l'injectivité est établie. □

Remarque. On voit de cette façon l'ensemble des composantes connexes de X comme un ensemble de classes d'homotopies de la 0-sphère S^0 dans X.

1.2 Le groupe fondamental

Définition 1.2.1 (Lacet)**.** Un lacet dans un espace X est une application $\omega : I \longmapsto X$ avec la condition $\omega(0) = \omega(1)$. On peut ainsi voir un lacet comme une application $\gamma : S^1 \longmapsto X$.

Définition 1.2.2 (Le groupe fondamental)**.** On définit le groupe fondamental comme étant $\pi_1 X := [S^1, X]_*$.

Il s'agît comme son nom l'indique d'un *groupe*, sa loi de composition est la *concaténation de chemins*, définie pour $f, g : I \longmapsto X$ par

$$f \star g = \begin{cases} f(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

1.2.1 Pincer et plier

Remarque. On retrouve souvent la nomenclature 'pinch and fold'.

Définition 1.2.3 (Pinch)**.** L'application *pinch* de la suspension d'un espace A est obtenue en collapsant la partie centrale $A \times \frac{1}{2}$ sur un point. Plus formellement elle est définie par l'application quotient $p : \Sigma A \longmapsto {}^{\Sigma A}\!/_{A \times \frac{1}{2}}$. Ce denier quotient peut être associé au *wedge* $\Sigma A \bigvee \Sigma A$.

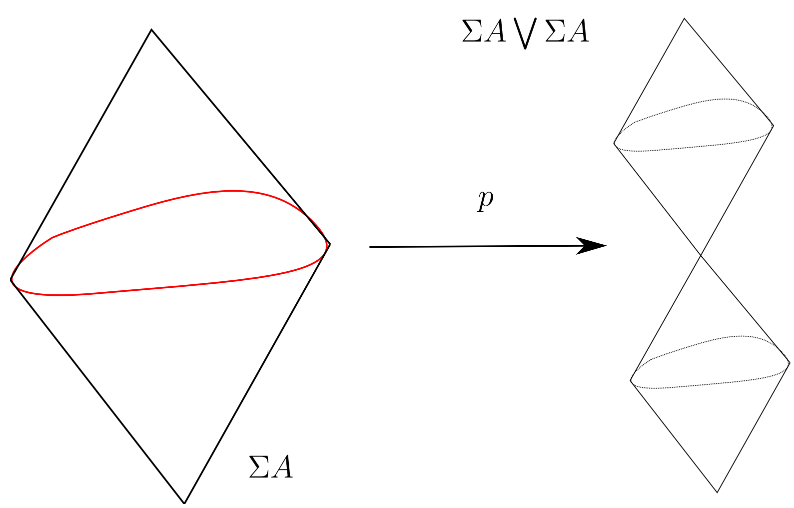


Figure 1.1 – Illustration du pinch de la suspension de A

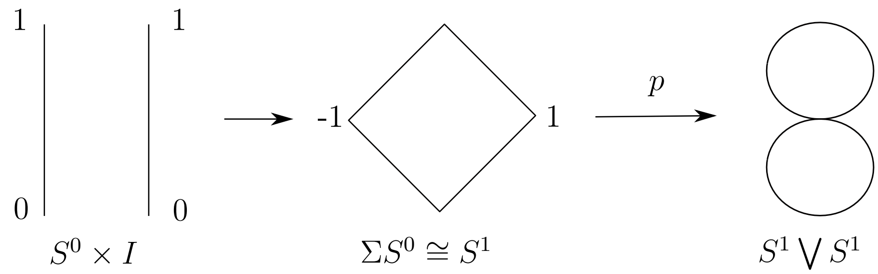


FIGURE 1.2 – Illustration du pinch de S^1

Exemple 1.2.4. On illustre ici l'exemple du cercle unité $S^1 \cong \Sigma S^0$.

On défini à présent l'application de pliage.

Définition 1.2.5 (Fold)**.** L'application de pliage *fold* est définie pour n'importe quel espace pointé (X, x_0) par

$$\nabla : X \bigvee X \longmapsto X := (id_X, id_X).$$

$$\begin{tikzcd}
\star \arrow[r, "x_0"] \arrow[d, "x_0"'] & X \arrow[d] \arrow[ddr, bend left, "id_X"] & \\
X \arrow[r] \arrow[drr, bend right, "id_X"'] & X \bigvee X \arrow[dr, dashed, "\nabla=(id_X,id_X)"] & \\
& & X
\end{tikzcd}$$

Cette construction s'appuie sur la propriété universelle du wedge, plus explicitement on a pour tout $x \in X$

$$\begin{aligned}
\nabla : X \bigvee X &\longmapsto X \\
(x,1) &\longmapsto x \\
(x,2) &\longmapsto x.
\end{aligned}$$

1.2.2 La structure de groupe de $\pi_1 X$

On illustre dans un premier temps la composition de deux lacets dans X vus comme des applications $S^1 \longmapsto X$.