Systèmes dynamiques **Vezin Lomàn**
MAT551 Date de rendu: 29/09/2020

Exercice à rendre 1

Soit $\alpha \notin \mathbf{Q}$ et f la dynamique du tore $\mathbf{T}^2$ définie par

$$f(x,y) = f(x+\alpha, x+y).$$

On vérifie dans un premier temps que la mesure de Lebesgue sur le tore est $f-$invariante. On commence par remarquer que f est une bijection du tore dans lui même d'inverse

$$f^{-1}(x,y) = (x-\alpha, y-x+\alpha).$$

Aussi par la formule du changement de variable, en remarquant que $|\det d_f| = 1$ on obtient pour tout borélien $\mathcal{A}$

$$\mu(f^{-1}(\mathcal{A})) = \int_{f^{-1}(\mathcal{A})} 1\mathrm{d}\mu = \int_{\mathcal{A}} |\det d_f| \mathrm{d}\mu = \int_{\mathcal{A}} 1\mathrm{d}\mu = \mu(\mathcal{A}).$$

Ce qui donne le résultat voulu.

On montre à présent que le système probabiliste $(\mathbf{T}^2, \mathcal{B}, f, \mu)$ est ergodique.
Pour cela on applique un corollaire du cours et on vérifie que l'espace propre de l'opérateur de Koopman associé à la valeur propre 1 est de dimension 1, c'est à dire que les seules fonctions $L^2(Leb)$ invariantes sont constantes. On considère pour cela la base hermitienne $(e_k)_{k\in\mathbf{Z}^2}$ de L^2 définie par $e_k(x) := e^{\langle k,x\rangle}$.

Soit donc $\phi \in L^2$ satisfaisant $\phi \circ f = \phi$ et soit $\sum_{k_1,k_2} a_{(k_1,k_2)} e_{(k_1,k_2)}$ sa série de Fourier. On regarde les coefficients de Fourier de $\phi \circ f$.

$$
\begin{aligned}
a_{(k_1,k_2)}(\phi\circ f) &= \int_{\mathbf{T}^2} \phi(f(x_1,x_2))e^{-2i\pi\langle (k_1,k_2),(x_1,x_2)\rangle}\mathrm{d}Leb \\
&\text{Par la formule de changement de variable et le fait que } |\det d_{f^{-1}}| = 1 \\
&= \int_{\mathbf{T}^2} \phi(x_1,x_2)e^{-2i\pi\langle (k_1,k_2),f^{-1}(x_1,x_2)\rangle}\mathrm{d}Leb \\
&= \int_{\mathbf{T}^2} \phi(x_1,x_2)e^{-2i\pi\langle (k_1,k_2),(x_1-\alpha,x_2-x_1+\alpha)\rangle}\mathrm{d}Leb \\
&= e^{2i\pi\alpha(k_1-k_2)}\int_{\mathbf{T}^2} \phi(x_1,x_2)e^{-2i\pi\langle (k_1-k_2,k_2),(x_1,x_2)\rangle}\mathrm{d}Leb \\
&= e^{2i\pi\alpha(k_1-k_2)}a_{(k_1-k_2,k_2)}(\phi).
\end{aligned}
$$

La relation $\phi = \phi\circ f$ garantit alors

$$
a_{(k_1,k_2)}(\phi) = e^{2i\pi\alpha(k_1-k_2)}a_{(k_1-k_2,k_2)}(\phi). \tag{1}
$$

Ce qui donne en passant au module au carré

$$
|a_{k_1,k_2}|^2 = |a_{k_1-nk_2,k_2}|^2 \qquad \forall n\in\mathbf{Z}^*. \tag{2}
$$

Puisque par hypothèse ϕ est L^2 la série des $|a_{(k_1,k_2)}|^2(\phi)$ converge, la relation (2) impose

$$
a_{(k_1,k_2)}(\phi) = 0 \text{ si } k_2 \neq 0
$$

puisque sinon la série comprendrait un nombre infini de termes égaux et strictement positifs, une contradiction.

Finalement comme α est irrationnel $e^{2ik_1\pi\alpha} \neq 1 \quad \forall k_1\in\mathbf{Z}^*$, ce qui garantit par la relation (1) que

$$
a_{(k_1,k_2)}(\phi) = 0 \text{ si } k_1 \neq 0.
$$

Puisque seul le coefficient $a_{0,0}$ peut être non nul ϕ est une constante.

On montre finalement que le système n'est pas mélangeant. Par le cours on sait que si le système est mélangeant alors 1 est l'unique valeur propre de l'opérateur de Koopman U_f. Il suffit alors de trouver une valeur propre différente de 1 pour notre opérateur. Définissons une application mesurable et L^2 sur le tore

$$
\begin{aligned}
\phi : \mathbf{T}^2 &\longmapsto \mathbf{T}^2 \\
(x,y) &\longmapsto (\frac{x}{\alpha},0).
\end{aligned}
$$

On remarque que le passage au quotient sur le tore nous permet d'écrire

$$\phi(x,y) = (\frac{x}{\alpha}, 0) = (\frac{x}{\alpha} + 1, 0) = \frac{1}{\alpha}(x + \alpha, 0) = \frac{1}{\alpha}(\phi \circ f)(x,y).$$

Soit donc

$$U_f(\phi) = \alpha\phi.$$

α est donc valeur propre de U_f et comme $\alpha \notin \mathbf{Q}, \alpha \neq 1$. Cela montre le résultat et conclut l'exercice.