Systèmes Dynamiques **Vezin Lomàn**
MAT551 Due Date : 06/10/2020

Devoir maison 2

Exercice 1:

On considère le système dynamique $(\mathbf{T}^1, \mathcal{B}, f, Leb)$ où f est le doublement de l'angle. Pour $\phi : \mathbf{T}^1 \longmapsto \mathbf{R}$ continue avec $\phi(0) \neq \frac{1}{2}(\phi(\frac{1}{3}) + \phi(\frac{2}{3}))$, la moyenne temporelle $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} U_f^k\phi$ ne converge pas dans $L^\infty(Leb)$.

Démonstration. Soit f le doublement de l'angle donné par

$$\begin{aligned} f : \mathbf{T}^1 &\longmapsto \mathbf{T}^1 \\ x &\longmapsto 2x, \end{aligned}$$

f est en particulier continue sur le cercle. Ainsi la $n-$ème somme

$$U_{n,f} := \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} U_f^k\phi$$

est continue sur le cercle comme somme de compositions de fonctions continues.

On montre que le système étudié est ergodique. On considère le π-système des intervalles ouverts de $\mathbf{T}^1$. Soit (a, b) un tel ouvert, on a d'une part $Leb(a, b) = b - a$ et d'autre part

$$Leb(f^{-1}(a,b)) = Leb((\frac{a}{2}, \frac{b}{2}) \cup (\frac{a}{2} + \frac{1}{2}, \frac{b}{2} + \frac{1}{2})) = b - a$$

comme ces deux ensembles sont disjoints. La mesure de Lebesgue sur $\mathbf{T}^1$ est donc f invariante. De plus pour $\phi : \mathbf{T}^1 \longmapsto \mathbf{R}$ mesurable satisfaisant $\phi \circ f = \phi,\ Leb\ p.p.$ on a

$$\phi(x) = \phi(2x) \text{ pour presque tout } x \in \mathbf{T}^1,$$

soit donc pour $n \in N$ quelconque

$$\phi[0, \frac{1}{2^n}) = \phi[0, \frac{1}{2^{n+1}}).$$

On en déduit que ϕ est constante pour presque tout $x \in \mathbf{T}^1$. Le système est donc ergodique.

Comme ϕ est continue sur $\mathbf{T}^1$ compact elle est bornée donc en particulier L^∞ et

$$\int_{\mathbf{T}^1} |\phi|^2 \mathrm{d}Leb \leq \|\phi\|_{L^\infty}^2 \int_{\mathbf{T}^1} 1 \mathrm{d}Leb < \infty.$$

On en déduit que ϕ est L^2. Par le même raisonnement on obtient directement que ϕ est L^1.

Par le théorème ergodique en moyenne on a alors dans L^2

$$U_{n,f}\phi \underset{n\to\infty}{\rightarrow} E[\phi|\mathcal{J}] = \int_{\mathbf{T}^1} \phi \mathrm{d}Leb.$$

Ainsi $U_{n,f}\phi$ converge dans L^2 vers une constante $c \in \mathbf{R}$.

Supposons par l'absurde que $U_{n,f}\phi$ converge également dans L^∞. La limite uniforme d'une fonction continue est continue, ainsi $U_{n,f}\phi$ converge vers une fonction continue g. De plus

$$\int_{\mathbf{T}^1} |U_{n,f}\phi - g|^2 \mathrm{d}Leb \leq \|U_{n,f}\phi - g\|_{L^\infty}^2 \int_{\mathbf{T}^1} 1 \mathrm{d}Leb \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0.$$

Ainsi $U_{n,f}\phi \to g$ dans L^2 et donc g est constante égale à c par unicité de la limite.

Remarquons que $U_{n,f}\phi(0) = \phi(0)$ comme 0 est un point fixe de f. De plus comme $f(\frac{1}{3}) = \frac{2}{3}$ et $f(\frac{2}{3}) = \frac{1}{3}$ on obtient

$$U_{n,f}\phi(\frac{1}{3}) = \frac{1}{n}\sum_{k}^{n-1} U_f^k \phi(\frac{1}{3}) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\phi(\frac{1}{3}) + \phi(\frac{2}{3})) \text{ si } n \text{ est pair} \\ \frac{n-1}{2n}(\phi(\frac{1}{3}) + \phi(\frac{2}{3})) + \frac{1}{n}\phi(\frac{1}{3}) \text{ sinon} \end{cases}.$$

Ceci implique par passage à la limite en se souvenant que g est continue partout

$$g(0) = \phi(0) = \frac{1}{2}(\phi(\frac{1}{3}) + \phi(\frac{2}{3})) = g(\frac{1}{3}),$$

une contradiction.

$\square$

Exercice 2:

On étudie la capacité orbitale d'un borélien $\mathcal{A}$ d'un espace métrisable compact X pour une application continue $T : X \longmapsto X$.

1. Dans un premier temps on montre que la limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sup_{x\in X} \#\{0 \leq k < n,\ T^k x \in \mathcal{A}\}$$

existe et ainsi que la capacité orbitale de $\mathcal{A}$ est bien définie. On se propose pour cela d'appliquer le lemme de Fekete, il faut donc montrer qu'il existe un rang $N \in \mathbf{N}$ à partir duquel la suite $(u_n)_n$ définie par

$$u_n := \frac{1}{n} \sup_{x\in X} \#\{0 \leq k < n,\ T^k x \in \mathcal{A}\},\ n \in \mathbf{N}$$

devient sous additive.

Si pour aucun $N \in \mathbf{N}$ on a $u_N > 0$ le résultat est évident. Remarquons qu'en vertu du théorème de récurrence de Poincaré cela n'est possible que si $\mu(A) = 0$.
S'il existe en revanche un $N \in \mathbf{N}$ tel que $u_N > 0$ prenons N minimal avec cette propriété et pour $n, m \geq N$ avec sans perte de généralité $m \geq n$ on a

$$\begin{aligned} u_{n+m} &= \frac{1}{m+n} \sup_{x\in X} \#\{0 \leq k < n+m,\ T^k x \in \mathcal{A}\} \\ &\leq \frac{1}{m+n} \sup_{x\in X} \#\{0 \leq k < n,\ T^k x \in \mathcal{A}\} + \frac{1}{m+n} \sup_{x\in X} \#\{n \leq k < n+m,\ T^k x \in \mathcal{A}\} \\ &\leq \frac{n}{m+n} u_n + \frac{1}{m+n} \sup_{x\in X} \#\{n \leq k < n+m,\ T^k x \in \mathcal{A}\}. \end{aligned}$$

On procède par récurrence sur $m \geq n$ pour conclure.

2. On considère le système probabiliste $(X, \mathcal{B}, T, \mu)$. Grâce aux hypothèses on peut définir une mesure de probabilité et $\mathbf{1}_{\mathcal{A}}$ est intégrable. Supposons μ T-invariante ergodique, on a alors par le théorème ergodique ponctuel, en utilisant les notations de l'exercice 1

$$U_{n,T}\mathbf{1}_{\mathcal{A}} \underset{n\to\infty}{\to} E[\mathbf{1}_{\mathcal{A}}|\mathcal{J}] = \int_X \mathbf{1}_{\mathcal{A}} \mathrm{d}\mu = \mu(A).$$

Aussi on peut remarquer que

$$U_{n,T}\mathbf{1}_{\mathcal{A}}(x) = \frac{1}{n}\#\{0 \le k < n,\ T^k x \in \mathcal{A}\}.$$

On en conclut que

$$\operatorname{ocap}(\mathcal{A}) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sup_{x\in X} \#\{0 \le k < n,\ T^k x \in \mathcal{A}\} \ge \mu(\mathcal{A}).$$