Théorème 0.0.1 (σ sous additivité)**.** *Soit* $(E_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *des ensembles, alors*

$$mes(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} mes(E_n).$$

Démonstration. Soit $\epsilon > 0, n \in \mathbf{N}_{\geq 1}$, alors $\exists (I^{\epsilon}_{n,m})_{m=1}^{\infty}$ des intervalles ouverts tels que $E_n \subset \cup_{m=1}^{\infty} I^{\epsilon}_{n,m}$ et $\sum_{m=1}^{\infty} long(I^{\epsilon}_{n,m}) - \frac{\epsilon}{2} \leq mes(E_n)$
Alors $\cup_{n=1}^{\infty} E_n \subset \cup_{n=1}^{\infty} \cup_{m=1}^{\infty} I^{\epsilon}_{n,m}$ on a donc $mes(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} long(I^{\epsilon}_{n,m})$ car $(I^{\epsilon}_{n,m})_{n,m=1}^{\infty}$ reste une famille dénombrable d'intervalles. Alors

$$mes(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} long(I^{\epsilon}_{n,m}).$$

$\square$