ANALYSE III

CLÉMENT HONGLER

Organisation

— Dans ce cours, nous allons étudier l'Analyse Complexe (9-10 semaines) et les théorèmes et concepts important de l'Analyse Vectorielle des Champs (4-5 semaines).
— Il y aura un test blanc autour de la 11ème semaine.
— Les exercices, leurs solutions, les anciens examens et les notes de cours peuvent être trouvés sur le site de l'assistant principal www.fspadaro.org.
— Il y aura des heures de bureau virtuelles, qui seront annoncées plus tard.

Introduction

Analyse Complexe.

- Dans cette partie du cours, on va traiter de l'Analyse des fonctions d'une variable complexe.
- L'idée de traiter des problèmes grâce aux nombres complexes est très profonde, et elle permet d'obtenir des résultats hautement non triviaux.
- Pour vous donner une idée, voici quelques résultats qui seront obtenus dans ce cours :

Affirmation. De nombreuses intégrales utiles de fonctions dont on ne connaît pas les primitives peuvent être calculées : par exemple

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\xi x)}{1+x^2} \mathrm{d}x = \pi e^{-|\xi|} \qquad \text{pour } \xi \in \mathbb{R}$$

Théorème (Théorème des nombres premiers)**.** *Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\pi(n) = \#\{p \leq n\}$ le nombre de nombres premiers plus petits que n. Alors quand $n \to +\infty$, on a $\pi(n) \sim n/\log(n)$ (au sens où $\frac{\pi(n)\log n}{n} \to 1$).*

Théorème. *Soient deux ouverts $\Omega_1, \Omega_2 \subsetneq \mathbb{C}$ qui n'ont pas de "trous". Alors il existe une application conforme $\varphi : \Omega_1 \to \Omega_2$ (c'est-à-dire un difféomorphisme qui préserve localement les angles).*

Remarque. C'est complètement faux en dimensions 3 et plus, et c'est le plus souvent faux si les domaines ont des trous (par exemple, on ne peut pas envoyer un anneau de rayons $1, 2$ vers un anneau de rayons $1, 3$ par une application conforme).

Analyse Vectorielle des Champs.

- Dans cette partie du cours, on étudiera les opérateurs gradient, rotationnel, divergence, laplacien qui apparaissent dans notre compréhension du monde (gravitation, électromagnétisme, etc.)
- Le but sera de comprendre intuitivement ce que ces opérateurs veulent dire, ce qui nous permettra de comprendre des équations comme

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}E &= 4\pi\rho \\
\mathrm{div}B &= 0 \\
\mathrm{rot}E &= -\frac{1}{c}\partial_t B \\
\mathrm{rot}B &= \frac{1}{c}\left(4\pi J + \frac{\partial E}{\partial t}\right).
\end{aligned}$$

- On étudiera leur équivalents intégraux.
- Finalement, on verra comment les simuler facilement avec un ordinateur.

Rappels sur l'analyse des fonctions de plusieurs variables

Le but est de faire un rappel des notions et des notations. On regarde des fonctions à n variables, définies sur un ouvert $D \subset \mathbb{R}^n$, typiquement connexe, ce qu'on appelle un domaine.

Exercice 1. Pourquoi regarde-t-on un ouvert ?

0.1. Différentiation.

On regarde des fonctions à n variables, définies sur un ouvert $D \subset \mathbb{R}^n$ (typiquement connexe : on dit un domaine).

Définition 2. Une fonction $f : D \to \mathbb{R}^m$ est dite différentiable (ou dérivable) en $x \in D$ s'il existe une application linéaire $Df|_x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (en général identifiée à une matrice $m \times n$ dans $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$) telle que $f(x+h) = f(x) + Df\big|_x h + o(h)$, avec $o(h)$ tel que

$$\frac{\|o(h)\|_{\mathbb{R}^m}}{\|h\|_{\mathbb{R}^n}} \underset{\substack{h \to 0 \\ \neq}}{\longrightarrow} 0$$

.

Remarque 3. Une fonction f différentiable en x est continue, ce qui est strictement plus fort que l'existence de dérivées partielles /directionnelles en x

Exercice 4. Trouver une fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ avec des dérivées directionnelles dans toutes les directions en $(0,0)$ qui valent toutes 0, mais qui n'est pas continue en $(0,0)$.

Définition 5. Une fonction $f : D \to \mathbb{R}^m$ est dite C^1 sur D si elle est dérivable (différentiable) en tout point de D et si $x \mapsto Df\big|_x$ est continue.

Exercice 6. Que veut dire que $x \mapsto Df\big|_x$ est continue (en termes de ϵ, δ) ?

Proposition 7. *Une fonction $f : D \to \mathbb{R}^m$ est C^1 sur D si et seulement si ses dérivées partielles*

$$\partial_{x_1} f, \ldots, \partial_{x_n} f : D \to \mathbb{R}^m$$

existent et sont continues.

Exercice 8. Pourquoi ?

Proposition 9. *Si $f(D) \subset E$ où E est un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et si $g : E \to \mathbb{R}^p$ est différentiable (respectivement C^1), on a que $g \circ f : D \to \mathbb{R}^p$ est différentiable (respectivement C^1) avec $D(g \circ f)\big|_x = Dg\big|_{f(x)} Df\big|_x$, (où le membre de droite est compris comme composition d'applications linéaires ou produit matriciel).*

Exercice 10. Pourquoi ?

0.2. Formule de Taylor du 2ème ordre.

Définition 11. Une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ de classe C^1 est dite C^2 si ses dérivées partielles

$$\partial_{x_1} f, \ldots, \partial_{x_n} f$$

sont C^1 ; de même on dit qu'elle est C^{k+1} si ses dérivées partielles sont C^k.

Définition 12. On note par $\nabla f(x)$ le gradient de f en x et par Hf_x la Hessienne de f en x, définis par

$$\begin{aligned}\nabla f(x) &= \left(Df\big|_x\right)^T = \left(\partial_{x_1} f(x), \ldots, \partial_{x_n} f(x)\right) \\ &= \begin{pmatrix}\partial_{x_1} f(x) \\ \vdots \\ \partial_{x_n} f(x)\end{pmatrix}, \\ Hf\big|_x &= \begin{pmatrix}\partial^2_{x_1} f(x) & \cdots & \partial_{x_1}\partial_{x_n} f(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{x_n}\partial_{x_1} f(x) & \cdots & \partial^2_{x_n} f(x)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Théorème 13 (Taylor multivariable à l'ordre 2)**.** *Si une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est C^2, pour tout $x \in D$ on a que*

$$\begin{aligned}f(x+h) = f(x) &+ (\nabla f(x))^T h + \frac{1}{2} h^T Hf\big|_x h \\ &+ o\left(h^2\right),\end{aligned}$$

où

$$\left|o\left(h^2\right)\right| / \|h\|^2_{\mathbb{R}^n} \underset{\substack{h \to 0 \\ \neq}}{\longrightarrow} 0.$$

Exercice 14. Que peut-on dire pour une fonction C^3 et pour des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^m$?

0.3. **Fonctions inverses et implicites.**

Théorème 15 (Théorème de la fonction inverse). *Si $f : D \to \mathbb{R}^n$ est une fonction C^1 sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^n$ et si*

$$Df\big|_x \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) := \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$$

est inversible, on a qu'il existe un voisinage ouvert U de x dans D (un ouvert tel que $x \in U \subset D$) et un voisinage ouvert V de $f(x)$ tel que la restriction $f\big|_U : U \to V$ soit une bijection avec inverse $f^{-1} : V \to U$ de classe C^1, de dérivée

$$D\left(f^{-1}\right)\big|_{f(x)} = \left(Df\big|_x\right)^{-1}.$$

Exercice 16. Donner une bijection différentiable dont l'inverse n'est pas différentiable.

Exercice 17. Sous les hypothèses du théorème de la fonction inverse, montrer qu'il existe un voisinage ouvert U' de x où $Df\big|_{x'}$ est inversible pour tout $x' \in U'$.

Exercice 18. Sous les mêmes hypothèses, montrer qu'avec un changement de variable affine, on peut supposer que $x = 0$ et que $Df|_x = \mathrm{Id}$.

Exercice 19. Montrer que l'existence de l'inverse $f^{-1} : V \to U$ est équivalente à l'existence d'un point fixe de $x \mapsto x + y - f(x) = x$ sur U pour tout $y \in V$.

Exercice 20. Montrer que cette application est une contraction si U est suffisamment petit.

Exercice 21. Montrer que l'existence de l'inverse suit du théorème du point fixe de Banach.

Exercice 22. Qu'est-ce qu'il faudrait montrer pour conclure la preuve du théorème de la fonction inverse ?

Théorème 23 (Théorème de la fonction implicite). *Soit $f : D \times E \to \mathbb{R}^n$ est C^1 sur $D \times E$ avec $D \subset \mathbb{R}^n, E \subset \mathbb{R}^p$, et*

$$D_x f = \left(\partial_{x_1} f(x,z) \; .. \partial_{x_n} f(x,z)\right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),$$
$$D_z f = \left(\partial_{z_1} f(x,z) \; .. \partial_{z_p} f(x,z)\right) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}).$$

Si $D_x f$ est inversible en $(x,z) \in D \times E$ (avec $x \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}^p$), alors il existe un voisinage W de z et un voisinage U de x et une fonction $g : W \to U$ de classe C^1 telle que $f(g(\cdot), \cdot)$ est constante sur W et $Dg\big|_z = -(D_x f)^{-1} D_z f$.

Exercice 24. Montrer le théorème si f est linéaire.

Exercice 25. Expliquer pourquoi on pense usuellement au théorème comme à la résolution d'un système (typiquement non linéaire) de n équations avec n inconnues et p paramètres.

Exercice 26. Montrer le théorème de la fonction implicite en utilisant le théorème de la fonction inverse.

Exercice 27. Expliquer comment le théorème est relié à ce qui nous fait passer de la forme implicite d'une paramétrisation de surface (de type $x^2 + y^2 + z^2 = 1$) à sa forme explicite (de type : $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$)

Théorème 28 (Version C^k des théorèmes de la fonction inverse et de la fonction implicite)**.** *Si f est C^k au lieu d'être C^1 dans le théorème de la fonction inverse, on a que l'inverse est C^k ; de même pour la fonction implicite, si f est C^k on a que la fonction implicite est C^k.*

Exercice 29. Montrer la version C^k pour $k \geq 2$ en supposant la version C^1.

Partie I : Analyse complexe

1. Rappels sur les nombres complexes

1.1. Motivation.

- Dans le cours d'Analyse I, on est passé des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ aux nombres réels $\mathbb{R}$ en les complétant de manière à ce que chaque ensemble borné ait une borne inférieure et une borne supérieure (c'est par exemple ainsi qu'on a pu construire $\sqrt{2}$ comme $\sup\left\{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 2\right\}$).
- Cela nous a ensuite amené à considérer des fonctions sur les réels, qui permettent de représenter nombre d'objets naturels pour décrire le monde et d'obtenir beaucoup d'informations et de structures sur de telles fonctions.
- On a vu que de manière un peu surprenante, les objets continus sont souvent plus faciles à étudier, à calculer que leurs equivalents discrets : par exemple, il est facile de calculer $\int_1^\infty \frac{1}{x^3}\mathrm{d}x$, mais on n'a pas de formule pour $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^3}$.
- Dans ce cours, on va étendre les nombres réels $\mathbb{R}$ aux nombres complexes $\mathbb{C}$, en complétant les réels de manière algébrique cette fois, de manière à ce toutes les équations polynomiales aient des solutions (en particulier, i sera solution de $i^2 + 1 = 0$).
- On verra que les fonctions naturelles sur les nombres complexes (d'une variable complexe, à valeurs dans $\mathbb{C}$), en particulier celles qui généralisent la notion de dérivabilité possèdent une structure très riche.
- De même que le passage du discret au continu, le passage du réel au complexe nous permet en fait de calculer beaucoup de quantités plus facilement, et de gagner une intuition et une vision plus profonde de l'analyse des fonctions (en particulier de prouver des théorèmes hautement non triviaux comme le théorème des nombres premiers).

1.2. **Géométrie des nombres complexes.**

— Formellement les nombres complexes forment un corps fait des éléments $\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$ muni de l'addition
$$a + bi + a' + b'i = (a + a') + (b + b')i,$$
de la multiplication
$$(a + bi)(a' + bi) = aa' - bb' + (ab' + a'b)\,i.$$
— Naturellement, on identifie souvent le plan complexe $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$ par
$$\mathbb{C} \ni z = a + bi \leftrightarrow (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$
— Géométriquement, l'addition correspond à l'addition des vecteurs.
— Pour un nombre $z = x + yi$, on note $\mathfrak{Re}\,(z) = x$ sa partie réelle et $\mathfrak{Im}\,(z) = y$ sa partie imaginaire, $\bar{z} = x - iy$ son conjugué, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ son module.
— L'opposé additif de $z = x + iy \in \mathbb{C}$ est $-x - iy$, l'inverse multiplicatif de $z \in \mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ est $\frac{\bar{z}}{|z|^2}$.
— Les nombres réels $\mathbb{R}$ s'identifient naturellement à l'axe réel $\{z \in \mathbb{C} : \mathfrak{Im}\,(z) = 0\}$; les nombres $z \in \mathbb{C}$ tels que $\mathfrak{Re}\,(z) = 0$ sont dits imaginaires purs.

1.3. Représentation polaire.

Remarque 30. On donne ici des représentations géométriques des nombres complexes et on ne définit pas (encore) analytiquement l'exponentielle complexe : ce sera fait un peu plus loin dans ce cours.

— On utilise souvent la représentation polaire des nombres complexes $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$, où $r = |z|$ et $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, et où $\theta \in \mathbb{R}$ est noté $\arg(z)$ (défini modulo 2π) ; on reviendra plus tard sur l'exponentielle complexe.
— Quand on multiplie des nombres complexes, on multiplie leur modules et additionne leurs arguments : si $z = re^{i\theta}, z' = r'e^{i\theta'}$ on a $zz' = rr'e^{i(\theta+\theta')}$ (cela suit naturellement des propriétés du sinus et du cosinus).
— Ainsi on voit que l'application $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $z \mapsto az + b$ pour $a, b \in \mathbb{C}$ correspond à une homothétie de facteur $|a|$, suivie d'une rotation d'angle $\arg(a)$ et ensuite d'une translation de b.
— Grâce à la représentation polaire, il est facile de voir que l'équation $z^n = c$ a n solutions distinctes pour tout $c \in \mathbb{C}^*$.
— Si on essaie d'inverser formellement l'exponentielle complexe, on obtient $\log z = \log|z| + i\arg z$; notons toutefois que comme $\arg z$ n'est défini que modulo 2π, $\log z$ n'est pas une fonction sur $\mathbb{C}^*$ (au mieux c'est une "fonction multivaluée", ce qui n'est pas une fonction).
— Si on choisit une demi-droite de coupure, on peut choisir un détermination de $\arg z$ et par conséquent du $\log$; le choix de coupure le plus fréquent est la demi-droite négative $\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$, ce qui permet de définir $\arg z$ dans $(-\pi, \pi)$ et donne ce qu'on appelle la détermination principale de l'argument / du logarithme.
— Une chose très importante qu'on perd par rapport aux nombres réels est la relation d'ordre.

1.4. **Topologie générale sur les complexes.**

- On discute maintenant des notions d'ensembles ouverts et fermés de $\mathbb{C}$; ces notions et les notations sont consistantes avec ce qui est vu dans les cours de topologie générale.
- En analyse réelle, les sous-ensembles les plus utiles pour travailler avec les notions de base sont les intervalles ouverts de la forme $(x-r, x+r)$ (parfois aussi notés $]x-r, x+r[$) et les intervalles fermés de la forme $[x-r, x+r]$.
- Les analogues appropriés en analyse complexe sont les disques ouverts
$$D(z,r) = \{z' \in \mathbb{C} : |z-z'| < r\}$$
et les disques fermés
$$\bar{D}(z,r) = \{z' \in \mathbb{C} : |z-z'| \leq r\}.$$
On appelle $D(z,r)$ (respectivement $\bar{D}(z,r)$) le disque ouvert (respectivement fermé) de rayon r centré en z.

Définition 31. On dit qu'un sous-ensemble $U \subset \mathbb{C}$ est ouvert si pour tout $z \in U$, il existe $\delta > 0$ tel que $D(z,\delta) \subset U$: en d'autres termes, U est ouvert si autour de chaque point, il y a un peu de place pour bouger dans toutes les directions.

Définition 32. Si pour $z \in U$, on a $D(z,\delta) \subset U$ pour un $\delta > 0$, on dit que $D(z,\delta)$ est un voisinage de z dans U.

Définition 33. Pour $\Omega \subset \mathbb{C}$, on appelle l'intérieur de Ω et on note $\mathrm{Int}(\Omega)$ l'ensemble des $z \in \Omega$ tels qu'il existe un $\delta > 0$ (qui peut dépendre de z) tel que $D(z,\delta) \subset \Omega$; un ensemble U est ouvert si et seulement si $U = \mathrm{Int}(U)$.

Définition 34. On dit qu'un sous-ensemble $F \subset \mathbb{C}$ est fermé si son complémentaire $\mathbb{C} \setminus F$ est ouvert.

Exercice 35. Montrer que F est fermé si et seulement si pour toute suite convergente $(z_n)_{n\geq 0}$ avec $z_n \in F$ pour tout n, on a $\lim_{n\to\infty} z_n \in F$.

Définition 36. Pour $\Omega \subset \mathbb{C}$, on appelle fermeture de Ω et on note $\bar{\Omega}$ l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels qu'il existe une suite $(z_n)_{n\geq 0}$ avec $z_n \in \Omega$ pour tout $n \geq 0$ et $z_n \to z$; un ensemble Ω est fermé si et seulement si $\Omega = \bar{\Omega}$.

Définition 37. On appelle bord de Ω et on note $\partial\Omega$ l'ensemble $\bar{\Omega} \setminus \mathrm{Int}(\Omega)$.

Définition 38. On dit qu'un sous-ensemble $F \subset \mathbb{C}$ est compact s'il est fermé et borné.

Exercice 39. Montrer que si F est compact, une fonction continue $f : F \to \mathbb{R}$ a toujours un minimum et un maximum.

Définition 40. On dit qu'un ensemble $S \subset \mathbb{C}$ est connexe par chemins si pour tous $z, z' \in U$ il existe une courbe $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ avec $\gamma(0) = z, \gamma(1) = z', \gamma([0,1]) \subset U$.

Définition 41. On dit qu'un ouvert $U \subset \mathbb{C}$ est un domaine s'il est connexe par chemins.

Remarque 42. Pour l'analyse de base sur $\mathbb{C}$, de nombreuses propriétés utiles sont héritées du cas réel :

- L'inégalité du triangle $|a+b| \leq |a| + |b|$ et son corollaire $|a-b| \leq |a-c| + |c-b|$ restent les mêmes.
- Les notions de convergence pour les suites et fonctions sur les complexes sont exactement les mêmes (en remplaçant simplement la valeur absolue $|x| = \sqrt{x^2}$ par le module $|a+ib| = \sqrt{a^2+b^2}$).
- En particulier, si $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left|a_{n,k}\right| < \infty$ on a que
$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,k}$$
comme pour les suites réelles.

1.5. Théorème fondamental de l'algèbre.

— On a étendu $\mathbb{R}$ à $\mathbb{C}$ pour avoir les solutions d'équations de la forme $z^2 = c$ pour tout $c \in \mathbb{R}$; ce faisant, on a obtenu un corps plus grand, et on pourrait se poser la question de savoir s'il faut encore ajouter d'autres solutions d'équations polynomiales.
— La réponses est non : une propriété fondamentale de $\mathbb{C}$ est qu'il est algébriquement clos.

Théorème 43 (Théorème fondamental de l'algèbre). *Tout polynôme non constant (avec coeffcients complexes $a_0, \dots, a_n$)*

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

a au moins une racine, c'est-à-dire qu'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $P(z_0) = 0$.

Démonstration. C'est un théorème qui est en fait assez facile à prouver :

Exercice 44. Montrer que $|P(z)| \to \infty$ quand $|z| \to \infty$, c'est-à-dire que pour tout $M \geq 0$ il existe $R \geq 0$ tel que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus D(0, R)$ on a $|P(z)| \geq M$.

Exercice 45. Montrer que $|P(z)|$ a un minimum sur $\mathbb{C}$.

Exercice 46. Si on suppose par l'absurde que $\min_{z \in \mathbb{C}} |P(z)| = |P(z_0)| > 0$ montrer qu'on peut (par changement de variable) supposer que $z_0 = 0$ et que $P(z_0) = 1$ et que donc $P(z) = 1 + z^k Q(z)$ pour un certain $k \geq 1$ et un polynôme Q avec $Q(0) \neq 0$.

Exercice 47. Montrer qu'alors il existe z' tel que $|P(z')| < 1$ et en déduire le théorème.

□

Exercice 48. Montrer (en utilisant la division euclidienne) que tout polynôme de degré n peut s'écrire comme $P(z) = \alpha \prod_{k=1}^{n} (z - z_k)$ pour $\alpha, z_1, \dots, z_k \in \mathbb{C}$.

2. Fonctions analytiques complexes

2.1. Motivation.

— Ce qui fait la force de l'analyse, c'est la capacité d'aller prendre des limites, et ainsi de construire des objets que l'on ne saurait définir autrement.
— La structure de corps nous permet de définir naturellement des polynômes sur $\mathbb{C}$, avec des propriétés importantes suivantes.
— Comme en analyse réelle, on peut naturellement étendre la classe des polynômes en une classe très naturelle et utile en prenant (naïvement) le degré vers l'infini : ce sont les fonctions analytiques $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_*)^k$.
— Des exemples classiques de fonctions analytiques, dont on parlera beaucoup, sont donnés par les séries entières

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} z^n,$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n,$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} n z^n.$$

Exercice 49. Trouver les fonctions usuelles qui correspondent à ces séries.

Comme en analyse réelle, les questions de base sont celles du rayon de convergence, de la nature de la convergence (ponctuelle, uniforme), du produit de séries, de changer le 'centre' z_*.

2.2. **Convergence.**

— Soit $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_*)^k$ une série entière formelle de terme général $(a_k)_{k\geq 0}$ centrée en z_*, avec z comme variable (avec les $a_k \in \mathbb{C}$ arbitraires, et $z_* \in \mathbb{C}$ fixé). En général, pour simplifier la notation, on supposera que $z_* = 0$.

Définition 50. On dit que la série entière converge en $z \in \mathbb{C}$ si la suite $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k (z - z_*)^k$ converge.

Définition 51. On dit qu'elle converge uniformément sur un ensemble K si elle converge et qu'on a

$$\| \sum_{k=0}^{n} a_k (z - z_*)^k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_*)^k \|_{\infty,K} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

où $\|f\|_{\infty,K} := \sup_{z\in K} |f(z)|$.

Définition 52. Pour une suite de fonctions $f_k : U \to \mathbb{C}$ dit que la série $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ converge normalement sur A si pour tout $z \in A$, il existe un voisinage fermé $\bar{D}(z, \epsilon) \subset U$ pour $\epsilon > 0$ sur lequel

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_{\infty,\bar{D}(z,\epsilon)} < +\infty$$

où

$$\|f\|_{\infty,\bar{D}(z,\epsilon)} := \sup_{\zeta\in\bar{D}(z,\epsilon)} |f(\zeta)|.$$

Remarque 53. Par Heine-Borel-Lebesgue, c'est équivalent à dire que pour tout compact $K \subset U$, on a

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_{\infty,K} < \infty.$$

En effet, un compact K peut être recouvert de tous les voisinages $D(z, \epsilon)$ fournis par la définition. De ce recouvrement, on extrait un sous-recouvrement fini

$$(D(z_k, \epsilon_k))_{k=1,\dots,m}$$

et on a que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_{\infty,K} &= \sum_{k=0}^{\infty} \max_{j=1,\dots,m} \left(\|f_k\|_{\infty,\bar{D}(z_j,\epsilon_j)}\right) \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1,\dots,m} \|f_k\|_{\infty,\bar{D}(z_j,\epsilon_j)} \\
&= \sum_{j=1,\dots,m} \sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_{\infty,\bar{D}(z_j,\epsilon_j)} \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Remarque 54. La convergence normale implique la convergence uniforme sur les compacts de la suite des sommes partielles. La notion de de convergence normale est un peu plus forte, mais pour les séries entières sur un ouvert, elle est essentiellement équivalente.

Définition 55. On définit le rayon de convergence ρ de
$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_*)^k$$
comme
$$\sup \left\{ r \in [0,\infty) : \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| r^k < \infty \right\} \in [0,\infty]$$
(ce rayon ne dépend que des a_k, et non pas de z_*). Cette définition est consistente avec la définition de rayon de convergence de série réelle.

Exercice 56. Trouver des séries avec rayons de convergence $0, 1, \infty$, des points de convergence usuelle mais pas normale.

Lemme 57. *Si $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_*)^k$ est une série entière de rayon de convergence $\rho > 0$, alors elle converge (normalement) en tout $z \in D(z_*, \rho)$, et diverge pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \bar{D}(z_*, \rho)$.*

Remarque 58. Comme d'habitude, ce qui se passe sur $\partial D(z_*, \rho)$ est souvent subtil.

Exercice 59. Prouver le lemme 57.

Exercice 60. Prouver ce lemme d'Abel : si $\sup_{k\in\mathbb{N}} |a_k| \rho^k < \infty$ pour $\rho \in (0,\infty)$, alors la série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ converge normalement sur $D(0,\rho)$.

Exercice 61. Trouver une série entière qui a rayon de convergence 1 et qui converge sur $\partial D(0,1)$ sauf en cinq points.

Lemme 62. *Comme en analyse réelle, on peut exprimer le rayon de convergence d'une série entière avec les critères suivants :*

— *critère de d'Alembert : si $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$ existe alors ρ est donné par $\rho^{-1} = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$)*

— *critère de la racine : $\rho^{-1} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$.*

Exercice 63. Prouver ce lemme.

Exercice 64. Soient $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ et $\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ deux séries entières avec rayon de convergence au moins $\rho > 0$. Comme en analyse réelle, on a les propriétés élémentaires :

— Montrer que la série entière $\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) z^k$ a pour rayon de convergence au moins ρ.

— Montrer que pour tout $z \in D(0,\rho)$, si on note
$$\begin{aligned}(a\star b)_k &= \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j} \\ &= \sum_{j=0}^{k} a_{k-j} b_j \\ &= \sum_{j,l:j+l=k} a_l b_j,\end{aligned}$$
on a que la série $\sum_{k=0}^{\infty} (a\star b)_k z^k$ a pour rayon de convergence au moins ρ et que
$$\sum_{k=0}^{\infty} (a\star b)_k z^k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k\right).$$

2.3. Analyticité et Recentrage.

Lemme 65. *Si une série entière $f(z)$ donnée par $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ a rayon de convergence $\rho > 0$, alors on a que les séries entières "dérivées" $f', f'', \ldots, f^{(n)}, \ldots$ obtenues en dérivant terme à terme, données par*

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1},$$
$$f''(z) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k z^{k-2}$$
$$\vdots$$
$$f^{(n)}(z) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k!}{(k-n)!} a_n z^{k-n}$$

ont pour rayon de convergence ρ également :

Exercice 66. Exercice : montrer ceci (en utilisant le lemme d'Abel vu plus haut).

Remarque 67. On n'a pas encore parlé de "dérivées complexes" ; pour le moment, on regarde ces séries formellement et on n'a pas encore dit par exemple que $f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h}$ (mais ce sont bien sûr des dérivées dans un sens très naturel : ce sera expliqué plus loin).

A priori, le fait qu'une fonction $f : U \to \mathbb{C}$ puisse être exprimable en série entière $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_*)^k$ semble dépendre du point z_*. En fait, il n'en est rien : si une fonction peut être exprimée en série entière autour de z_* avec un rayon de convergence ρ, alors on peut l'exprimer comme une série entière autour de n'importe quel point $z' \in D(z_*, \rho)$ (avec des coefficients et un rayon de convergence qui dépendront cependant a priori de z').

Proposition 68 ("Recentrage"). *Si $f(z) = \sum a_k z^k$ est définie par une série entière avec rayon de convergence ρ, alors pour tout $z_* \in D(0, r)$ on a que la série "recentrée"*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(z_*)(z - z_*)^k \tag{2.1}$$

où $f^{(k)}$ est la "série dérivée" définie ci-desssus, a un rayon de convergence au moins égal à $\rho_* = \rho - r_*$ où $r_* = |z_*|$ et pour tout $z \in D(z_*, \rho_*)$ on a

$$f(z) = \sum \tilde{a}_k (z - z_*)^k.$$

Démonstration. Preuve de la Proposition de "recentrage" :

— Faisons d'abord le petit calcul suivant, qui repose simplement sur la formule du binôme et un échange de sommes (on note $\mathbf{1}_{\text{condition}}$ pour désigner le nombre 1 si la condition est vraie et 0 si la condition est fausse)

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left((z - z_*) + z_*\right)^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(\sum_{n=0}^{k} \frac{k!}{n!\,(k-n)!} (z - z_*)^n z_*^{k-n} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_k \frac{k!}{n!\,(k-n)!} (z - z_*)^n z_*^{k-n} \mathbf{1}_{n \le k} \\
&\overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{k!}{n!\,(k-n)!} (z - z_*)^n z_*^{k-n} \mathbf{1}_{n \le k} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} a_k \frac{k!}{n!\,(k-n)!} (z - z_*)^n z_*^{k-n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=n}^{\infty} a_k \frac{k!}{(k-n)!} z_*^{k-n} \right) (z - z_*)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_*) (z - z_*)^n .
\end{aligned}
$$

— La seule étape qui demande justification est $(*)$, que l'on doit montrer pour tout $z \in D(z_*, \rho_*)$. Pour cela, il nous faut pouvoir dire que pour tout $r < \rho_*$, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left| f^{(n)}(z_*) \right| r^n < \infty, \tag{2.2}$$

ce qui permettra de remonter depuis le bas, en utilisant le théorème qui nous permet d'interchanger l'ordre de sommation si on a convergence absolue.

— Montrons (2.2) : c'est un peu la même chose, qu'en haut, à ceci près que l'on s'intéresse juste à majorer les modules des termes, ce qui permet d'échanger les sommes (car tous les termes sont positifs) :

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left| f^{(n)}(z_*) \right| r^n \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{k!}{(k-n)!} |a_k| \, |z_*|^{k-n} \right) r^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} \frac{k!}{(k-n)!} |a_k| \, |z_*|^{k-n} \, r^n \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} \frac{k!}{(k-n)!} |a_k| \, |z_*|^{k-n} \, r^n \right) \mathbf{1}_{k \geq n} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} \frac{k!}{(k-n)!} |a_k| \, |z_*|^{k-n} \, r^n \right) \mathbf{1}_{k \geq n} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{k} \left(\frac{1}{n!} \frac{k!}{(k-n)!} |a_k| \, |z_*|^{k-n} \, r^n \right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \left(|z_*| + r \right)^k \\
&< +\infty.
\end{aligned}
$$

□

Exercice 69. Montrez que pour $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ et $z_* > 0$, l'étape $(*)$ ci-dessus n'est pas valide au-delà de ρ_*.

2.4. **Zéros isolés et prolongement analytique.** Une propriété importante des fonctions analytiques (qui les distingue profondément des fonctions C^∞) est celle des zéros isolés : il est impossible pour une fonction analytique $f : U \to \mathbb{C}$ d'avoir une accumulation de zéros au voisinage d'un point $z_* \in U$.

Exercice 70. Trouver une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ qui est C^∞ et non nulle et qui s'annule sur $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Proposition 71. *Pour une série entière $f(z) = \sum_{k=0}^\infty a_k z^k$ qui a au moins un coefficient non nul et a comme rayon de convergence $\rho > 0$, il existe un rayon r tel que $f(z)$ ne s'annule pas $D(0, r) \setminus \{0\}$.*

Démonstration. La preuve fonctionne comme dans le cas réel :
- Prenons le premier coefficient non nul, appelons-le a_p : on peut écrire $f(z) = z^p g(z)$ avec $g(z) = \sum_{k=0}^\infty a_{k+p} z^k$, où $g(0) \neq 0$ par hypothèse.
- Par continuité (g est analytique, donc sa série converge uniformément au voisinage de 0), il existe un r tel que $g(z) \neq 0$ sur $D(0, r)$, et donc $z \mapsto z^p g(z)$ ne s'annule pas non plus sur $D(0, r) \setminus \{0\}$.

$\square$

Cela implique le corollaire suivant :

Corollaire 72. *Pour une fonction analytique $f : U \to \mathbb{C}$ (où U est un domaine : ouvert connexe) et un point $z_* \in U$ on a un unique développement en série entière au voisinage de z_*.*

Démonstration. C'est une preuve classique d'unicité par linéarité : si on a deux développements $\sum_{k=0}^\infty a_k z^k$ et $\sum_{k=0}^\infty a'_k z^k$ en séries entières autour d'un point de U(on peut supposer que z_* est 0 par changement de variable), alors $\sum_{k=0}^\infty a_k z^k - \sum_{k=0}^\infty a'_k z^k$ ne peut pas s'annuler sur un voisinage (épointé) $D(0, r) \setminus \{0\}$, à moins que $a_k = a'_k$ pour tout k. $\square$

Une autre conséquence très utile et puissante est le principe du prolongement analytique :

Corollaire 73. *Pour un domaine U, si $f, g : U \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions analytiques qui coincident sur un ensemble $\Sigma \subset U$ ayant un point d'accumulation dans U, alors $f = g$.*

Démonstration. Soit $z_* \in U$ le point d'accumulation de Σ. Comme $f - g$ est une fonction analytique on a

$$(f - g)(z) = \sum_{k=0}^\infty a_k (z - z_*)^k .$$

Par le principe de zéros isolés, si un des a_k est non-nul, on a qu'il existe $r > 0$ tel que $\Sigma \cap (D(z_*, r) \setminus \{0\})$ est vide ce qui contredit la définition de z_* comme point d'accumulation. Donc on déduit que tous les a_k sont nuls et $f - g$ s'annule sur un voisinage de z_*.

Pour conclure, il nous faut utiliser la connexité (par chemins) de U (ce qu'on va faire s'appelle précisément une preuve par connexité).

Montrons que pour tout z' dans U on a $(f - g)(z') = 0$. Parcourant un chemin $\gamma : [0, 1] \to U$ avec $\gamma(0) = z_*$ et $\gamma(1) = z'$, on a que

$$(f - g) \circ \gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$$

s'annule sur un voisinage de 0. Soit

$$\lambda = \sup \{t \in [0, 1] : (f - g) \circ \gamma([0, t]) = \{0\}\} .$$

On a que $\lambda > 0$, $(f - g) \circ \gamma(\lambda) = 0$ et en même temps, si $\lambda < 1$, on pourrait développer $(f - g)$ en série autour de $\gamma(\lambda)$, utiliser qu'elle s'annule sur une collection avec point d'accumulation en $\gamma(\lambda)$, ré-appliquer la première partie de notre preuve et avoir que ce nouveau développement en série serait nul. Mais alors $(f-g)\circ\gamma$ s'annulerait aussi sur $[\lambda-\epsilon,\lambda+\epsilon]$ pour un $\epsilon>0$; ainsi il est impossible que $\lambda<1$. On en conclut que $\lambda=1$ et donc $(f-g)(z')=0$. □

Exercice 74. En supposant que $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est analytique sur $\mathbb{C}^*$ (ce qui sera montré plus bas), voir qu'elle s'annule sur l'ensemble $\left\{\frac{1}{n\pi} : n\in\mathbb{Z}^*\right\}$ qui a un point d'accumulation en 0, et expliquer pourquoi le théorème ne s'applique pas.

3. Exponentielle et Logarithme

Les fonctions analytiques les plus importantes sont probablement l'exponentielle et le logarithme, cette section leur est dédiée.

3.1. **Exponentielle.**

Définition 75. La fonction exponentielle est une fonction analytique $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par la série

$$\exp(z) = e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!},$$

qui a un rayon de convergence infini.

Remarque 76. La propriété fondamentale de l'exponentielle est l'identité

$$\begin{aligned}
e^{z+w} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z+w)^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} \frac{k!}{j!\,(k-j)!} z^j w^{k-j} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!\,(k-j)!} z^j w^{k-j} \mathbf{1}_{j\leq k} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{j!\,(k-j)!} z^j w^{k-j} \mathbf{1}_{j\leq k} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!} \left(\sum_{k=j}^{\infty} \frac{w^{k-j}}{(k-j)!} \right) \\
&= \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!} \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{k!} \right) \\
&= e^z e^w.
\end{aligned}$$

Remarque 77. On obtient facilement à partir de là que $1/e^z = e^{-z}$.

Remarque 78. On a que $\exp$ est strictement positive, strictement croissante sur $\mathbb{R}$, qui tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et 0 en $-\infty$. C'est donc une bijection $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$: c'est évident sur $\mathbb{R}_+$ (tous les coefficients de la série entière sont strictement positifs), et sur $\mathbb{R}_-$ cela se voit grâce à $e^{-x} = 1/e^x$.

Remarque 79. A partir du développement en série, on obtient que pour tout $y \in \mathbb{R}$ $\overline{e^{iy}} = e^{-iy}$ et on en déduit que

$$\left|e^{iy}\right| = \sqrt{e^{iy}\overline{e^{iy}}} = \sqrt{e^{iy}e^{-iy}} = 1,$$

et on voit donc que $\exp$ envoie $i\mathbb{R}$ vers le cercle unité $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ (on le note ainsi car le cercle est aussi la sphère de dimension 1).

3.2. Fonctions trigonométriques.

Définition 80. On définit les fonctions trigonométriques $\cos$ et $\sin$ et hyperboliques $\cosh$ et $\sinh$ sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{aligned}\cos t &= \mathfrak{Re}\left(e^{it}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{it} + e^{-it}\right) \\ &= \cosh(it) = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} - \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} t^{2k},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin t &= \mathfrak{Im}\left(e^{it}\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{it} - e^{-it}\right) \\ &= \sinh(it) = t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120} - \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} t^{2k+1}.\end{aligned}$$

Définition 81. On définit $\cos, \sin, \cosh, \sinh$ sur $\mathbb{C}$ par z

$$\begin{aligned}\cos z &= \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) \\ &= \cosh(iz) \\ &= 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} - \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}, \\ \sin z &= \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) \\ &= \sinh(iz) \\ &= z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}.\end{aligned}$$

Remarque 82. On voit facilement les relations

$$\sin^2 z + \cos^2 z = \cosh^2 z - \sinh^2 z = 1,$$

et (pour le moment sur $\mathbb{R}$) $\sin' t = \cos t$, $\cos' t = -\sin t$, $\sinh' t = \cosh t$, $\cosh' t = \sinh t$ (ces propriétés sont aussi vraies sur $\mathbb{C}$, mais on n'a pas encore parlé de dérivées complexes).

Remarque 83. On peut voir sur le développement en série que $\cos 2 < -\frac{1}{3}$ et comme $\cos 0 = 1$, on en déduit par continuité que l'équation $\cos t = 0$ a au moins une solution dans $[0,2]$ (note : on peut aussi raisonner par l'absurde : si $\cos$ ne s'annule pas, alors la fonction $\sin$ reste grande et donc la dérivée de $\cos$ reste uniformément négative. Le cos ne peut donc pas rester positif sur tout $\mathbb{R}_+$).

Remarque 84. Soit $t_0 \in [0,2]$ le premier zéro positif de $\cos$. On définit $\pi = 2t_0$, de sorte que $t_0 = \frac{\pi}{2}$. Comme $\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, on obtient que $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pm 1$ et comme $\sin'(t) = \cos(t) \geq 0$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ on déduit que $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \geq 0$ et donc $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Remarque 85. Comme $e^{it} = \cos t + i \sin t$, on a $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, et il suit que $e^{\pi i} = i^2 = -1$ et $e^{2\pi i} = 1$; par suite $e^{i(t+2\pi)} = e^{it}$ (la fonction exponentielle est périodique de période $2\pi i$), et ainsi on obtient que $\cos$ et $\sin$ sont périodiques de période 2π.

Remarque 86. Maintenant si $|e^z| = e^{\mathfrak{Re}(z)} = 1$, on a que $\mathfrak{Re}(z) = 0$ ($\exp$ est bijective sur $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$) donc $z \in i\mathbb{R}$ et la seule direction de période est la direction imaginaire.

Lemme 87. *Montrons maintenant que $2\pi i$ est la période minimale :*

Démonstration. Il faut montrer que e^{iy} n'a pas de solution sur $(0, 2\pi)$:

— Si $0 < y < 2\pi$, on a $e^{iy/4} = u + iv$ avec $u, v > 0$; on voit ainsi que

$$\begin{aligned} e^{iy} &= \left(e^{iy/4}\right)^4 = (u+iv)^4 \\ &= u^4 - 6u^2v^2 + v^4 + 4iuv\left(u^2 - v^2\right) = 1 \end{aligned}$$

n'a pas de solution dans $(0, 2\pi)$.

— On doit avoir $u^2 = v^2$ et comme $u^2 + v^2 = 1$ et $u, v > 0$, on obtient $u^2 = v^2 = 1/2$.

— Mais alors

$$e^{iy} = u^4 - 6u^2v^2 + v^4 = -1,$$

ce qui est une contradiction.

□

Remarque 88. On voit maintenant que $y \mapsto e^{iy}$ est surjective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{S}^1$:

— D'abord, par continuité (valeurs intermédiaires) elle est bijective de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{S}^1_{++}$, où $\mathbb{S}^1_{++} = \left[x + iy \in \mathbb{S}^1 : x, y \geq 0\right]$ est le premier cadran.

 — Ensuite, par $e^{i\left(\frac{\pi}{2}+t\right)} = ie^{it}$ on obtient qu'elle est bijective de $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \to i\mathbb{S}^1_{++}$, et ainsi de suite de sorte qu'elle surjective de $[0, 2\pi]$ vers $\mathbb{S}^1$.

Remarque 89. Cela nous donne finalement que $z \mapsto e^z$ est surjective de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}^*$:

— Pour tout nombre complexe $w \in \mathbb{C}^*$, on a $\frac{w}{|w|} \in \mathbb{S}^1$ et donc par surjectivité sur $\mathbb{S}^1$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{w}{|w|} = e^{i\theta}$ et ainsi $w = |w|\, e^{i\theta} = e^{\log|w| + i\theta}$.

— Plus précisément, pour toute paire θ, θ' telle que $w = |w|\, e^{i\theta} = |w|\, e^{i\theta'}$, on a $e^{i(\theta-\theta')} \in \mathbb{S}^1$ et donc $\theta - \theta' \in 2\pi\mathbb{Z}$.

3.3. Logarithme complexe.

- La surjectivité de l'exponentielle $\mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ nous offre la possibilité de l'inverser, du moins si on restreint suffisamment l'ensemble de départ pour obtenir quelque chose de bijectif.
- Pour un nombre w, les nombres complexes z tels que $e^z = w$ sont de la forme $\log|w| + i\arg(z)$, où $\arg(z)$ est défini à 2π près (par exemple : $\arg(-1)$ peut être choisi comme étant π ou $-\pi$ ou encore $\pm 3\pi$, $\pm 5\pi$, etc.).
- Un peu paradoxalement, le fait qu'on ait "le choix" de la détermination de l'argument rend l'inversion beaucoup plus difficile : une fonction ne peut pas prendre plusieurs valeurs à la fois.
- Cela peut sembler assez anodin ici, mais c'est en fait la source de beaucoup de subtilités de l'analyse complexe.
- Pour $U \subset \mathbb{C}^*$, on dit que $f : U \to \mathbb{C}$ est une détermination du logarithme complexe si $e^{f(z)} = z$ pour tout $z \in U$, on dit que $a : U \to \mathbb{R}$ est une détermination de l'argument si $z = |z|\, e^{ia(z)}$ sur $z \in U$.
- Une première subtilité est le théorème suivant :

Théorème 90. *Il n'existe pas de détermination continue du logarithme complexe (et de l'argument) sur $\mathbb{C}^*$.*

Démonstration. Le problème vient du fait que $\mathbb{C}^*$ entoure l'origine : montrons qu'il n'existe en fait pas de détermination continue sur $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

- Supposons qu'il existe une détermination continue du logarithme $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{C}$, et obtenons une contradiction (qui viendra bien sûr des problèmes avec la partie imaginaire de f).
- Posons $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par $u(\theta) = f\left(e^{i\theta}\right)$; on a bien sûr $u(\theta) - i\theta = 2\pi i n(\theta)$ où $n(\theta)$ est un entier (car $e^{u(\theta) - i\theta} = e^{i\theta} e^{-i\theta} = 1$). Comme u doit être continue, $n(\theta)$ doit être constante, i.e. $n(\theta) \equiv n$.
- Mais cela amène à une contradiction car par périodicité
$$u(\theta + 2\pi) = \theta + 2\pi + n = u(\theta) = \theta + n$$
donc $\theta + 2\pi + n = \theta + n$, ce qui donne $2\pi = 0$, donc u n'existe pas donc f n'existe pas.

$\square$

Définition 91. Comme dit avant, la détermination habituelle du logarithme Log est appelée détermination principale et elle est définie sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, avec $\mathfrak{Im}(\mathrm{Log}(z)) \in (-\pi, \pi)$.

Exemple 92. C'est la détermination principale qu'on utilise par exemple pour définir (par convention) a^b par
$$a^b = \exp(b\mathrm{Log}(a))$$
pour $a, b \in \mathbb{C}$ avec $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$: par exemple $i^i = e^{i \cdot i \frac{\pi}{2}} = e^{-\pi/2}$.

4. Fonctions holomorphes

4.1. Motivation.

- Depuis qu'on a introduit les fonctions analytiques, il semble naturel que l'on puisse les dériver comme fonction d'une variable complexe : en tout cas, la dérivation terme à terme fonctionne.
- Une autre possibilité pour regarder les dérivées serait d'utiliser l'identification $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ et de voir une fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ comme une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ et de regarder la dérivée comme une matrice réelle 2×2.
- On va voir qu'être dérivable au sens complexe est (beaucoup) plus fort que d'être dérivable (différentiable) au sens de $\mathbb{R}^2$; c'est le sujet de l'analyse complexe (la dérivabilité sur $\mathbb{R}^2$ est un sujet d'analyse vectorielle).

4.2. Définition et Cauchy-Riemann.

— Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert et soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction.

Définition 93. On dit que f est holomorphe en $z \in U$ s'il existe une limite $f'(z)$ à la quantité

$$\lim_{\substack{h \longrightarrow 0 \\ \neq}} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

prise au sens complexe : pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $h \in D(0,\delta) \setminus \{0\}$ on a

$$\left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - f'(z) \right| \leq \epsilon.$$

Remarque 94. Une manière plus intuitive d'écrire cela est de multiplier par h :

$$f(z+h) = f(z) + f'(z)h + o(h), \tag{4.1}$$

où $\left|\frac{o(h)}{h}\right| \underset{\substack{h \longrightarrow 0 \\ \neq}}{\longrightarrow} 0$, où $f'(z)h$ est une multiplication de nombres complexes (c'est le point important).

Remarque 95. Ce qu'on voit dans l'expression 4.1 est que le comportement de f autour de z (en $z+h$) est donné par une transformation euclidienne de la forme $h \mapsto ah+b$, où $a = f'(z), b = f(z)$; en d'autres termes, f correspond géométriquement, au premier ordre, à la composition d'une homothétie, d'une rotation et d'une translation ; encore en d'autres termes, si $f' \neq 0$, on peut voir que f préserve les angles (infinitésimalement) autour de z.
Si on prend l'identification $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ on qu'on regarde une fonction f comme une fonction $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, avec composantes (f_1, f_2) données par

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2) &= \mathfrak{Re}(f(x_1 + ix_2)) \\ f_2(x_1, x_2) &= \mathfrak{Im}(f(x_1 + ix_2)), \end{aligned}$$

on peut voir l'holomorphie en $z = x_1 + ix_2$ comme la différentiabilité de (f_1, f_2) en (x_1, x_2) avec une contrainte sur la jacobienne :

Proposition 96 (Cauchy-Riemann). *La fonction f est holomorphe en $z = x + iy$ si et seulement si (f_1, f_2) est différentiable en (x, y) et si les dérivées partielles de (f_1, f_2) satisfont les équations de Cauchy-Riemann :*

$$\begin{aligned} \partial_1 f_1(x_1, x_2) &= \partial_2 f_2(x_1, x_2) \\ \partial_1 f_2(x_1, x_2) &= -\partial_2 f_1(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Démonstration. C'est une simple ré-écriture de la $\mathbb{C}$-linéarité de la dérivée.

— On voit en effet qu'être holomorphe en $z = x_1 + ix_2$ équivaut à avoir une expansion de Taylor

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} f_1(x_1 + h_1, x_2 + h_2) \\ f_2(x_1 + h_1, x_2 + h_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(x_1, x_2) & \partial_2 f_1(x_1, x_2) \\ \partial_1 f_2(x_1, x_2) & \partial_2 f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \\ &\quad + o\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

où la matrice 2×2 doit correspondre à la multiplication par $f'(z)$, c'est-à-dire géométriquement à la composition d'une homothétie de facteur $r = |f'(z)|$ et d'une rotation d'angle $\theta = \arg f'(z)$, ce qui s'écrit matriciellement comme

$$\begin{pmatrix} \partial_1 f_1(x_1, x_2) & \partial_2 f_1(x_1, x_2) \\ \partial_1 f_2(x_1, x_2) & \partial_2 f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta & -r\sin\theta \\ r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

— Ceci est équivalent à dire que la jacobienne doit avoir la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, ce qui donne naturellement les équations de Cauchy-Riemann :

$$\begin{aligned} \partial_1 f_1(x_1, x_2) &= \partial_2 f_2(x_1, x_2) \\ \partial_1 f_2(x_1, x_2) &= -\partial_2 f_1(x_1, x_2). \end{aligned}$$

□

Remarque 97. On peut aussi voir f ci-dessus comme une fonction $f : \tilde{U} \to \mathbb{C}$ (l'ensemble de départ $\tilde{U}$ est identifié à $\mathbb{R}^2$, mais pas l'ensemble d'arrivée), et définir les opérateurs différentiels de Wirtinger

$$\begin{aligned} \partial f(z) &= \frac{1}{2}(\partial_1 f - i\partial_2 f)(z) \\ \bar{\partial} f(z) &= \frac{1}{2}(\partial_1 f + i\partial_2 f)(z). \end{aligned}$$

Exercice 98. Soit $f : \tilde{U} \to \mathbb{C}$ une fonction C^1. Montrer que f est holomorphe si et seulement si $\bar{\partial} f(z) = 0$ pour tout $z \in \tilde{U}$ et que dans ce cas $f'(z) = \partial f(z)$.

Définition 99. On dit qu'une fonction $f : U \to \mathbb{C}$ est holomorphe (sur U) si elle est holomorphe en tout z et si $z \mapsto f'(z)$ est continue.

Remarque 100. La condition de continuité de la dérivée f' n'est pas strictement nécessaire, mais simplifie la présentation : il s'avère qu'on peut prouver que la continuité de f' suit de l'existence de f', mais ce n'est pas un résultat complètement trivial.

Exercice 101. Les polynômes complexes sont holomorphes (et leur dérivées correspondent aux dérivées formelles). Les fonctions $z \mapsto |z|$, $z \mapsto \bar{z}$ ne sont holomorphes en aucun point.

Exercice 102. La somme, le produit, la composition de fonctions holomorphes sont holomorphes et les dérivées sont données par les règles de dérivations usuelles.

Exercice 103. Si $f : U \to V$ est bijective et holomorphe et si f' ne s'annule pas sur U, alors la fonction inverse f^{-1} est aussi holomorphe.

4.3. **Les fonctions analytiques sont holomorphes.** Comme on s'en doutait, les fonctions analytiques sont holomorphes :

Proposition 104 (Analyticité implique holomorphie). *Si $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_*)^k$ a rayon de convergence ρ, alors f est holomorphe sur $D(z_*, \rho)$ et f' est donnée par la série $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k (z - z_*)^{k-1}$, qui a aussi comme rayon de convergence ρ.*

Démonstration. La preuve est un peu calculatoire, mais conceptuellement simple :

— On peut supposer que $z_* = 0$. On sait déjà (Section 2.3) que $f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (z - z_*)^{k-1}$ converge sur $D(0, \rho)$, et il ne reste qu'à montrer que

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} - f'(z) \underset{\substack{h \to 0 \\ \neq}}{\longrightarrow} 0,$$

donc que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k (z+h)^k - a_k z^k}{h} - k a_k z^{k-1} \right) \underset{\substack{h \to 0 \\ \neq}}{\longrightarrow} 0.$$

— On voit facilement que pour chaque $k \geq 0$, le terme dans la parenthèse ci-dessus tend vers 0, la difficulté vient du fait qu'il y a un nombre infini de termes.

— Si on arrive à obtenir une borne uniforme sur la série, on pourra la couper en deux morceaux : les termes avec $k \geq n$ pour un n assez grand, qui seront petits (puisque la série converge) et les n premiers termes qui sont petits (puisqu'il y en a un nombre fini et que chacun tend vers 0)

— Pour chercher la borne uniforme on applique (c'est le seul point un peu subtil de la preuve)

$$a^k - b^k = (a - b) \left(a^{k-1} + a^{k-2} b + \cdots + a b^{k-2} + b^{k-1} \right)$$

à $a = z + h$ et $b = h$, on a

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k (z+h)^k - a_k z^k}{h} - k a_k z^{k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \Bigg[\frac{h}{h} \Big((z+h)^{k-1} + (z+h)^{k-2} z + \cdots \\
&\quad + (z+h) z^{k-2} + z^{k-1} \Big) - k z^{k-1} \Bigg] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(\left[\sum_{j=0}^{k-1} (z+h)^{k-1-j} z^j \right] - k z^{k-1} \right)
\end{aligned}$$

— Si on fixe $r \in (|z|, \rho)$, si h est assez petit pour que $z + h \in D(0, r)$ on peut majorer $\left| (z+h)^{k-1-j} z^j \right| \leq r^{k-1}$, ce qui nous donne

$$\begin{aligned}
&\left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(\left[\sum_{j=0}^{k-1} (z+h)^{k-1-j} z^j \right] - k z^{k-1} \right) \right|. \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \left(k r^{k-1} + k r^{k-1} \right) \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \, 2 k r^{k-1} < \infty
\end{aligned}$$

— Ainsi pour tout $\epsilon > 0$, on peut prendre n assez grand pour que $\sum_{k=n}^{\infty} 2|a_k| kr^{k-1} \leq \epsilon/2$ et il existe un $\delta > 0$ tel que si $h \in D(0, \delta) \setminus \{0\}$ on ait

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k (z+h)^k - a_k z^k}{h} - ka_k z^{k-1} \right| \leq \epsilon/2,$$

et en regroupant les deux morceaux ensemble, on obtient

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k (z+h)^k - a_k z^k}{h} - ka_k z^{k-1} \right| \leq \epsilon,$$

ce qui est le résultat désiré.

□

Remarque 105. Il suit immédiatement de ce résultat que toute fonction analytique est C^∞ (au sens où toutes ses n-ième dérivées complexes existent).

Remarque 106. On a de plus qu'une fonction analytique $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_*)^k$ est donnée par sa série de Taylor

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(z_*) (z - z_*)^k .$$

Remarque 107. Remarquablement, la réciproque de la proposition d'analyticité est vraie : une fonction holomorphe est toujours analytique. c'est ce qu'on verra un peu plus tard.

5. Intégration complexe

5.1. **Motivation.**

— Dans cette section, on va voir l'opération inverse de la différentiation complexe, qui est l'intégration complexe.
— La difficulté de l'intégration vient du fait que l'on doit choisir les chemins d'intégration dans le plan complexe : il y a beaucoup de manières d'aller d'un point a à un point b dans le plan complexe, contrairement au cas réel.

5.2. **Définition.** Comme dit avant, on a envie de définir l'intégrale $\int_a^b f(z)\,\mathrm{d}z$ des fonctions $f : U \to \mathbb{C}$ entre deux points $a, b \in U$; le problème est qu'il faut choisir un chemin pour aller de a à b.

Définition 108. On appelle chemin ou contour une application continue $\gamma : [s,t] \to \mathbb{C}$ définie sur un intervalle fermé $[s,t] \subset \mathbb{R}$, qui est C^1 par morceaux et à dérivée bornée

Définition 109. On appelle lacet ou contour fermé un contour avec $\gamma(s) = \gamma(t)$.

Remarque 110. Par la définition, chaque chemin γ a une longueur $\ell(\gamma) = \int_s^t |\gamma'(\tau)|\,\mathrm{d}\tau$ finie, où

$$\gamma'(\tau) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} (\gamma(\tau + h) - \gamma(\tau)) \in \mathbb{C}$$

est la dérivée (définie là où elle existe).

Définition 111. Pour une fonction continue $f : U \to \mathbb{C}$ (pas nécessairement holomorphe) et un chemin $\gamma : [s,t] \to \mathbb{C}$ avec $\gamma([s,t]) \subset U$, on définit l'intégrale de chemin de f le long de γ par

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z := \int_s^t f(\gamma(\tau))\,\gamma'(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Pour un contour fermé γ, on note souvent cette intégrale $\oint_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$.

Remarque 112. Le point important de cette formule est que l'on prend le produit des nombres complexes $f(\gamma(t))$ et $\gamma'(t)$.

Remarque 113. L'idée est de pondérer les valeurs de f le long de γ par la "vitesse" de γ (de sorte que quand on passe "vite" à un endroit, le poids est plus grand), ce qui permet de ne dépendre que du chemin, et pas de sa paramétrisation précise. On a en effet l'invariance par reparamétrisation : si $\varphi : [u,v] \to [s,t]$ est un difféomorphisme et $\tilde{\gamma} : [u,v] \to \mathbb{C}$ est défini par $\gamma \circ \varphi$, alors par la formule de changement de variables (facilement adaptée des réels aux complexes)

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_s^t f(\gamma(\tau))\,\gamma'(\tau)\,\mathrm{d}\tau \\
&= \int_u^v f(\gamma(\varphi(\varsigma)))\,\gamma'(\varphi(\varsigma))\,\varphi'(\varsigma)\,\mathrm{d}\varsigma \\
&= \int_u^v f(\tilde{\gamma}(\varsigma))\,\tilde{\gamma}'(\varsigma)\,\mathrm{d}\varsigma \\
&= \int_{\tilde{\gamma}} f(z)\,\mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

Ainsi, la paramétrisation spécifique n'est pas importante, et on peut choisir celle qui nous convient le mieux.

Définition 114. Si γ est un contour fermé qui est le bord d'un domaine $U \subset \mathbb{C}$ mais non orienté et sans point de départ (par exemple $\gamma = \mathbb{S}^1$), on note

$$\oint_{\partial U} f(z)\,\mathrm{d}z = \oint_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z,$$

en prenant γ orienté dans le sens trigonométrique (le choix du point de départ n'est pas important – on va le voir plus tard).

5.3. Exemples.

Exemple 115. Pour $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ défini par $\gamma(t) = (1-t)z + tw$ où $z, w \in \mathbb{C}$, on a

$$\int_\gamma 1 \mathrm{d}\zeta = w - z$$

$$\int_\gamma \zeta \mathrm{d}\zeta = \frac{w^2 - z^2}{2}.$$

Exemple 116. Pour $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$ défini par $\gamma(t) = e^{it}$, et $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$ on a

$$\begin{aligned}\oint_\gamma z^n \mathrm{d}z &= \int_0^{2\pi} e^{int} i e^{it} \mathrm{d}t \\ &= i \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} \mathrm{d}t = \left. \frac{e^{i(n+1)t}}{n+1} \right|_0^{2\pi} = 0.\end{aligned}$$

Exemple 117. Pour $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$ défini par $\gamma(t) = e^{it}$, on a

$$\oint \frac{1}{z} \mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} e^{-it} i e^{it} \mathrm{d}t = 2\pi i.$$

Exemple 118. Pour un contour fermé γ, si f est constante le long de γ, on a $\oint_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

5.4. Propriétés de base.

Remarque 119. Pour un contour fermé γ, par un argument similaire à ce qui a été discuté plus haut, on a que $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ ne dépend pas du choix du point de départ et d'arrivée $\gamma(0) = \gamma(1)$, mais il faut faire attention au sens dans lequel le contour est paramétrisé.

Remarque 120. Si on a un contour $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ et qu'on inverse son sens, en regardant $\tilde{\gamma} : [0,1] \to \mathbb{C}$ défini par $-\gamma(t) = \gamma(1-t)$, on obtient

$$\int_{-\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Remarque 121. Si on a un contour $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ avec $\gamma(0) = u$, $\gamma(1) = v$ et un autre contour $\tilde{\gamma} : [0,1] \to \mathbb{C}$ avec $\tilde{\gamma}(0) = v$ et $\tilde{\gamma}(1) = w$, on a que la concaténation $\gamma \oplus \tilde{\gamma} : [0,1] \to \mathbb{C}$ définie par $\gamma \oplus \tilde{\gamma}(t) = \mathbf{1}_{[0,\frac{1}{2}]}(t)\gamma(2t) + \mathbf{1}_{[\frac{1}{2},1]}(t)\tilde{\gamma}(2t-1)$ est un contour de u à w et que

$$\int_{\gamma\oplus\tilde{\gamma}} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\tilde{\gamma}} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Une propriété clef est l'analogue complexe du théorème fondamental du calcul intégral :

Proposition 122. *Si $f : U \to \mathbb{C}$ est holomorphe alors si $\gamma : [0,1] \to U$ est un chemin de w à z*

$$\int_\gamma f'(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = f(w) - f(z),$$

et en particulier $\int_\gamma f'(z)\,\mathrm{d}z$ ne dépend que des extrémités w et z de γ (et pas du reste du chemin), et si γ est un lacet $\oint_\gamma f'(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = 0$.

Démonstration. Cela suit directement de la définition et de la version réelle du théorème fondamental du calcul intégral. □

On a également l'intégration par parties :

Proposition 123. *Si $f, g : U \to \mathbb{C}$ sont holomorphes et $\gamma \subset U$ est un lacet, alors on a la formule d'intégration par parties*

$$\oint_\gamma f'(\zeta)g(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = -\oint_\gamma f(\zeta)g'(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta.$$

Démonstration. On a que

$$\begin{aligned}&\oint_\gamma f'(\zeta)g(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta + \oint_\gamma f(\zeta)g'(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta\\ &= \oint_\gamma (fg)'(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = 0.\end{aligned}$$

□

Finalement, comme dans le cas réel, on peut majorer l'intégrale par la longueur du chemin d'intégration :

Proposition 124. *Si $f : U \to \mathbb{C}$ est continue et $\gamma : [0,1] \to U$ est un chemin, on a*

$$\left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le \ell(\gamma)\max_{z\in\gamma}|f(z)|.$$

Démonstration. Cela suit du cas réel. □

6. Déformations de contours et primitives

6.1. Motivation.

- On a vu comment définir des intégrales le long de contours.
- On aimerait faire le chemin inverse de la dérivation complexe : l'idée serait de pouvoir définir une intégrale qui ne dépend que des extrémités du chemin. Pour cela il faut comprendre comment l'intégrale de contour dépend du choix de contour.
- Si deux contours $\gamma, \tilde{\gamma} : [0,1] \to U$ ont les mêmes extrémités $\gamma(0) = \tilde{\gamma}(0) = a$ et $\gamma(1) = \tilde{\gamma}(1) = b$, on a pour toute fonction continue $f : U \to \mathbb{C}$,
$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{\tilde{\gamma}} f(z)\,\mathrm{d}z = \oint_{\gamma \ominus \tilde{\gamma}} f(z)\,\mathrm{d}z,$$
où $\gamma \ominus \tilde{\gamma}$ est le contour fermé fait de la concaténation de γ avec $-\tilde{\gamma}$.
- Comprendre la dépendance par rapport au choix du contour revient donc à comprendre la valeur des intégrales le long des contours fermés.
- Pour comprendre une telle dépendance, on peut poser la question : que se passe-t-il si on essaie de bouger un tout petit peu un contour γ autour d'un point ? Il faut comprendre ce qui se passe dans l'intégration d'un petit contour fermé.

6.2. **Intégrale de contour fermé infinitésimal.** Un contour fermé avec lequel il est pratique de travailler est un petit carré $Q(z,\epsilon)$ de taille de côté $\epsilon > 0$ centré en z et parallèle aux axes, dont le bord $\partial Q(z,\epsilon)$ est orienté dans le sens trigonométrique.

Proposition 125. *Si $f : U \to \mathbb{C}$ est C^1, pour tout $z \in U$, on a*

$$\oint_{\partial Q(z,\epsilon)} f(z) = 2i\epsilon^2 \bar{\partial} f(z) + o\left(\epsilon^2\right)$$

où $\bar{\partial}$ est la dérivée de Wirtinger introduite plus haut.

Démonstration. La preuve se base sur le développement de Taylor :

— Le contour $\partial Q(z,\epsilon)$ est donné par $\mathbf{d} \oplus \mathbf{h} \oplus \mathbf{g} \oplus \mathbf{b}$ où les contours $\mathbf{d}, \mathbf{h}, \mathbf{g}, \mathbf{b} : [0,1] \to \mathbb{C}$ notent les côtés droit, haut, gauche et bas du carré, avec

$$\begin{aligned}
\mathbf{d}(t) &= z + \frac{\epsilon}{2} + i\epsilon\left(t - \frac{1}{2}\right)\\
\mathbf{h}(t) &= z + \frac{i\epsilon}{2} - \epsilon\left(t - \frac{1}{2}\right)\\
\mathbf{g}(t) &= z - \frac{\epsilon}{2} - i\epsilon\left(t - \frac{1}{2}\right)\\
\mathbf{b}(t) &= z - \frac{i\epsilon}{2} + \epsilon\left(t - \frac{1}{2}\right).
\end{aligned}$$

— Si on suppose que f est C^1 (pas forcément holomorphe, simplement avec dérivées partielles continues quand on la voit comme une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$), en faisant l'expansion de Taylor de f autour de z, on obtient

$$\begin{aligned}
&\oint_{\partial Q(z,\epsilon)} f(z)\\
&= \int_{\mathrm{d}} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\mathbf{h}} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\mathbf{g}} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\mathbf{b}} f(z)\,\mathrm{d}z\\
&= \epsilon \int_0^1 \left(if(\mathbf{d}(t)) - f(\mathbf{h}(t)) - if(\mathbf{g}(t)) + f(\mathbf{b}(t))\right)\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

— Maintenant

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{d}(t)) &= f(z) + \frac{\epsilon}{2}\partial_1 f(z) + \epsilon\left(t - \frac{1}{2}\right)\partial_2 f(z) + o(\epsilon)\\
f(\mathbf{h}(t)) &= f(z) + \frac{\epsilon}{2}\partial_2 f(z) - \epsilon\left(t - \frac{1}{2}\right)\partial_1 f(z) + o(\epsilon)\\
f(\mathbf{g}(t)) &= f(z) - \frac{\epsilon}{2}\partial_1 f(z) - \epsilon\left(t - \frac{1}{2}\right)\partial_2 f(z) + o(\epsilon)\\
f(\mathbf{b}(t)) &= f(z) - \frac{\epsilon}{2}\partial_2 f(z) + \epsilon\left(t - \frac{1}{2}\right)\partial_1 f(z) + o(\epsilon).
\end{aligned}$$

— Si on additionne ces quatre termes avec coefficients $i, -1, -i, 1$ pour obtenir $\int_{Q(z,\epsilon)} f(z)$, on voit que le premier terme de chacun des membres de droite apparaît avec ces quatre coefficients, ce qui donne zéro ; si on intègre le terme $\left(t - \frac{1}{2}\right)$ entre 0 et 1, on obtient 0.

— En additionant le deuxième terme de chacun des membres de droites, on obtient

$$\oint_{\partial Q(z,\epsilon)} f(z) = \epsilon^2\left(i\partial_1 f(z) - \partial_2 f(z)\right) + o\left(\epsilon^2\right) = 2i\bar{\partial} f(z) \cdot \epsilon^2 + o\left(\epsilon^2\right),$$

ce qui est le résultat souhaité.

□

Remarque 126. Cette proposition peut être généralisée à tout triangle Δ_ϵ (et par extension à tout polygone) contenant z de diamètre $O(\epsilon)$, et on obtient

$$\oint_{\partial\Delta_\epsilon} f(z)\,\mathrm{d}z = 2i\mathrm{Aire}(\Delta_\epsilon)\bar{\partial}f(z) + o\left(\epsilon^2\right).$$

On peut la prouver en utilisant l'expansion de Taylor pour les fonctions C^1 :

$$f(z+h) = f(z) + \partial f(z)\,h + \bar{\partial} f(z)\,\bar{h} + o(h).$$

Remarque 127. Cette proposition nous suggère que pour les fonctions holomorphes, les contours peuvent être déformés "localement" sans affecter l'intégrale :

— Si on déforme un contour "petit carré par petit carré", on change très peu l'intégrale de contour quand les carrés sont petits.

— Pour faire un mouvement macroscopique, on a besoin de $O\left(\frac{1}{\epsilon^2}\right)$ modifications de carrés.

— Comme l'intégrale de contour totale de chacun de ces petits carrés d'une fonction holomorphe est $o\left(\epsilon^2\right)$, on obtient le résultat qui tend vers 0 quand $\epsilon \to 0$.

— Cette idée peut être formalisée pour être rendue rigoureuse, mais c'est un peu long, et nous ne le ferons pas ici ; en un sens, elle forme la base de ce qu'on appelle l'analyse discrète.

6.3. Déformation.

- Pour que l'intégrale le long d'un chemin ne dépende que de ses extrémités, on a vu qu'il fallait que les intégrales le long de contours fermés soient nulles.
- Le calcul de l'intégrale le long d'un petit contour carré nous a appris que pour les fonctions holomorphes, on peut en principe "bouger" localement dans un domaine les contours sans changer les valeurs de l'intégrale (tant que les bouts sont maintenus ou que les contours restent fermés).
- Attention au "localement" : on ne peut pas déformer n'importe quel contour localement, même pour une fonction holomorphe.

Exercice 128. Pour la fonction $z \mapsto \frac{1}{z}$, si on intègre le long du contour $[0, \pi] \to \mathbb{C}$ de 1 à -1 défini par $t \mapsto e^{it}$ ou le long du contour de 1 à -1 défini par $t \mapsto e^{-it}$, observer qu'on obtient des résultats différents.

Les contours fermés qui émergent quand on fait des déformations locales forment une classe particulière :

Définition 129. Un lacet $\gamma : [0,1] \to U$ est dit homotope à un autre lacet $\tilde{\gamma} : [0,1] \to U$ s'il existe une application continue $\Gamma : [0,1] \times [0,1] \to U$ telle que $\Gamma(0,\cdot) = \tilde{\gamma}(\cdot)$, $\Gamma(1,\cdot) = \gamma(\cdot)$, telle que $\Gamma(s,\cdot)$ soit un contour fermé dans U pour tout $s \in (0,1)$.

Définition 130. Un lacet $\gamma : [0,1] \to U$ est dit contractible s'il est homotope au lacet trivial $\tilde{\gamma}(t) = c \in U$ pour $t \in [0,1]$.

Définition 131. Un domaine U est dit simplement connexe si tout lacet de U est contractible dans U.

Le théorème suivant nous dit qu'on peut en effet faire des déformations locales avec les fonctions holomorphes.

Théorème (Théorème 139 ci-dessous). *Soit U un ouvert, soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et soit γ un lacet contractible dans U. On a que*

$$\oint_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

On va d'abord prouver le théorème pour une classe particulière d'ouverts, celle des ouverts étoilés, puis l'étendre aux ouverts non nécessairement étoilés.

Définition 132. On dit qu'un ouvert U est étoilé s'il existe un centre $z_* \in U$ tel que pour tout $w \in U$, on a $[z_*, w] \subset U$, où $[z_*, w]$ est le segment $\{sz_* + (1-s)w : s \in [0,1]\}$.

Remarque 133. C'est une notion plus faible que la notion de convexité, mais plus forte que la simple connexité.

Définition 134. On dit qu'un lacet γ dans U est rétractable s'il existe $z_* \in U$ tel que l'application $\Gamma : [0,1] \times [0,1] \to U$ définie par $\Gamma(s,t) = s\gamma(t) + (1-s)z_*$ soit une homotopie dans U.

Remarque 135. Si U est un ouvert étoilé en z_*, tout contour fermé $\gamma : [0,1] \to U$ est rétractable.

Proposition 136. *Si $f : U \to \mathbb{C}$ est holomorphe et $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ est un contour rétractable, alors*

$$\oint_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Démonstration. Par changement de variable, on peut supposer que γ est rétractable en $z_* = 0$. L'idée est de déformer le contour $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ vers 0, et de voir que l'intégrale de f le long du contour qui se déforme ne change pas.

— Pour $s, t \in [0,1]$, posons $\gamma_s(t) = s\gamma(t)$.
— Regardons la fonction $I : [0,1] \to \mathbb{C}$ définie par

$$\begin{aligned} I(s) &= \oint_{\gamma_s} f(z)\,\mathrm{d}z \\ &= \int_0^1 f(s\gamma(t))\, s\gamma'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= s\oint_\gamma f(sz)\,\mathrm{d}z \end{aligned}$$

— Si on dérive par rapport à s, on a

$$I'(s) = \oint_\gamma f(sz)\,\mathrm{d}z + s\oint_\gamma f'(sz)\,z\mathrm{d}z,$$

où on a utilisé que f est holomorphe et que f' est continue.
— Maintenant, en intégrant par partie, on obtient

$$\begin{aligned} &\oint_\gamma f(sz)(z)'\,\mathrm{d}z + s\oint_\gamma f'(sz)\,z\mathrm{d}z \\ =&\oint_\gamma f(sz)(z)'\,\mathrm{d}z + \oint_\gamma \left(\frac{\partial}{\partial z} f(sz)\right) z\mathrm{d}z \\ =&\oint_\gamma f(sz)(z)'\,\mathrm{d}z - \oint_\gamma f(sz)(z)'\,\mathrm{d}z \\ =&0 \end{aligned}$$

— Comme $I(0) = 0$ et que I est constante, on en déduit que $\oint_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = I(1) = 0$, ce qui donne le résultat.

□

Corollaire 137. *Si U est un ouvert étoilé, et $f : U \to \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe, alors pour tout contour γ fermé dans U, on a $\oint_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.*

Remarque 138. L'idée de la preuve est assez facile à visualiser quand le contour est un cercle : quand on varie s, le contour varie par rapport à sa normale, et la variation d'intégrale est donnée par la dérivée de f dans la direction normale au contour. Mais grâce aux équations de Cauchy-Riemann, on peut dire que la dérivée normale est i fois la dérivée tangente, et l'intégrale des dérivées tangentes fait zéro, car le contour est fermé.

On peut maintenant améliorer la proposition 137 pour obtenir le théorème-clé :

Théorème 139. *Soit U un ouvert, soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et soit γ un lacet contractible dans U. On a que*

$$\oint_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Démonstration. On peut déformer γ en un contour trivial (constant) en un nombre fini d'étapes $\gamma = \gamma_0 \rightsquigarrow \gamma_1 \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow \gamma_n$ de manière à ce que $\gamma_{i-1} \ominus \gamma_i$ soit un lacet retractable pour chaque i, et donc on obtient

$$\begin{aligned}
\oint_{\gamma_0} f(z)\,\mathrm{d}z &= \oint_{\gamma_0 \ominus \gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \oint_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z \\
&= \oint_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z \\
&= \cdots \\
&= \oint_{\gamma_{n-1} \ominus \gamma_n} f(z)\,\mathrm{d}z + \oint_{\gamma_n} f(z)\,\mathrm{d}z \\
&= \oint_{\gamma_n} f(z)\,\mathrm{d}z \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

Remarque 140. On n'est pas très précis sur les détails spécifiques du nombre fini d'étapes qui sont un peu pénibles à écrire et ne sont pas très intéressants.

Un corollaire utile est le résultat de déformation suivant :

Corollaire 141. *Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et soient $\gamma, \tilde{\gamma} \subset U$ deux lacets homotopes. Alors*

$$\oint_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = \oint_{\tilde{\gamma}} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Démonstration. On applique la même preuve que pour le théorème 139 : on peut déformer γ en $\tilde{\gamma}$ en un nombre fini d'étapes $\gamma = \gamma_0 \rightsquigarrow \gamma_1 \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow \gamma_n = \tilde{\gamma}$. □

6.4. **Existence des primitives.** Grâce à nos résultats jusqu'à présent, nous sommes maintenant en mesure d'étudier les primitives :

Définition 142. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction continue. On dit que $F : U \to \mathbb{C}$ est une primitive holomorphe de f si F est holomorphe et $F' = f$.

Remarque 143. Les primitives holomorphes ne sont définies qu'à constante près.

Remarque 144. On verra plus loin si f a une primitive holomorphe, alors f est automatiquement holomorphe.

L'idée pour construire une primitive est d'intégrer à partir d'un point de base $z_* \in U$ et de considérer pour tout $z \in U$ l'intégrale $\int_{\gamma_{z_*,z}} f(z)\,\mathrm{d}z$ où $\gamma_{z_*,z}$ est un chemin de z_* à z. Comme on l'a vu, il faut que la valeur $\int_{\gamma_{z_*,z}} f(z)\,\mathrm{d}z$ soit indépendante du choix de $\gamma_{z_*,z}$. Cela suggère la définition suivante :

Définition 145. On dit qu'une fonction continue $f : U \to \mathbb{C}$ satisfait la condition de Morera si pour tout lacet $\lambda \subset U$, on a $\oint_\lambda f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

Remarque 146. On verra plus loin que la condition de Morera garantit l'holomorphie de f.

Lemme 147. *Si $f : U \to \mathbb{C}$ satisfait la condition de Morera, l'intégrale $\int_{\gamma_{z_*,z}} f(z)\,\mathrm{d}z$ est indépendante du choix de $\gamma_{z_*,z}$.*

Démonstration. Si $\gamma_{z_*,z}, \tilde{\gamma}_{z_*,z}$ sont deux choix de chemins de z_* à z, on a

$$\int_{\gamma_{z_*,z}} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{\tilde{\gamma}_{z_*,z}} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_{z_*,z}\ominus\tilde{\gamma}_{z_*,z}} f(z)\,\mathrm{d}z = 0,$$

car $\gamma_{z_*,z} \ominus \tilde{\gamma}_{z_*,z}$ est un lacet. □

Ce lemme nous permet de définir une intégrale qui ne dépend pas du chemin :

Définition 148. Si $f : U \to \mathbb{C}$ satisfait la condition de Morera, pour $z_*, z \in U$, on note $\int_{z_*}^z f(z)\,\mathrm{d}z$ la valeur commune (par le lemme 147) de l'intégrale $\int_{\gamma_{z_*,z}} f(z)\,\mathrm{d}z$ pour tous les chemins $\gamma_{z_*,z} \subset U$ reliant z_* à z.

Remarque 149. Si $f : U \to \mathbb{C}$ satisfait la condition de Morera, on a les règles usuelles :

$$\int_a^b f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_b^a f(z)\,\mathrm{d}z$$

$$\int_a^b f(z)\,\mathrm{d}z + \int_b^c f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^c f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Cela nous amène au théorème important :

Théorème 150. *Une fonction continue $f : U \to \mathbb{C}$ a une primitive holomorphe si et seulement si elle satisfait la condition de Morera.*

Démonstration. Montrons d'abord la direction $\Longleftarrow$ (le "si".

— Soit $z_* \in U$ et posons $F : U \to \mathbb{C}$, définie par

$$F(z) = \int_{z_*}^z f(z)\,\mathrm{d}z.$$

— Montrons que F est une primitive holomorphe de f :

— Pour $h \in \mathbb{C}^*$, on a

$$\begin{aligned}\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z) =& \frac{1}{h}\left(\int_z^{z+h} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta\right) - f(z)\\ =& \frac{1}{h}\int_z^{z+h} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta\\ &- \frac{1}{h}\int_z^{z+h} f(z)\,\mathrm{d}\zeta\\ =& \frac{1}{h}\int_z^{z+h} (f(\zeta)-f(z))\,\mathrm{d}\zeta\end{aligned}$$

— Maintenant, on aimerait que cette quantité tende vers 0 quand $h \underset{\neq}{\longrightarrow} 0$: on choisit le chemin le plus court $[z, z+h]$ de z à $z+h$ et on majore

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{h}\int_z^{z+h} f(\zeta)-f(z)\,\mathrm{d}\zeta\right|\\ &\leq \frac{1}{h}\mathrm{longueur}\,([z,z+h]) \max_{\zeta\in D(z,h)} |f(\zeta)-f(z)|\\ &= \max_{\zeta\in D(z,h)} |f(\zeta)-f(z)|\\ &\underset{\substack{h\to 0\\ \neq}}{\longrightarrow} 0,\end{aligned}$$

par continuité de f.

— Montrons maintenant la direction $\Longrightarrow$ (le "seulement si") :
  — Si f a une primitive F, alors le résultat suit de l'analogue complexe du théorème fondamental du calcul intégral (Proposition 122).

□

A priori, la propriété d'avoir une primitive requiert des conditions non locales (contrairement au cas de $\mathbb{R}$), car il faut avoir des intégrales nulles le long des lacets ; en fait, le corollaire suivant nous dit que pour les ouverts simplement connexes, c'est bon.

Corollaire 151. *Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur un ouvert simplement connexe. Alors f a toujours une primitive.*

Démonstration. Par le théorème 139, la condition de Morera est satisfaite pour f. Par le théorème 150, f a une primitive. □

Exercice 152. Montrer que la fonction $\mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ définie par $z \mapsto \frac{1}{z}$ n'a pas de primitive, mais que sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$, elle a une primitive donnée par la détermination principale du logarithme :

$$\int_1^z \frac{1}{\zeta}\mathrm{d}\zeta = \mathrm{Log}\,(z).$$

6.5. **Indice d'un point par rapport à un lacet.** Dans un sens, la fonction $z \mapsto \frac{1}{z}$ est la seule qui pose problème pour l'intégration, en ceci qu'elle n'a pas de primitive à cause des problèmes de déterminations de logarithme (d'argument). Cela motive l'utilisation de l'intégrale de cette fonction le long d'un lacet pour mesurer la relation topologique entre un lacet et un point :

Proposition 153. *Pour tout lacet $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ et tout $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma[0,1]$, l'intégrale*

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{1}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta$$

prend toujours une valeur entière.

Démonstration. On veut montrer que $\exp\left(\oint_\gamma \frac{1}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta\right) = 1$, ce qui impliquera $\oint_\gamma \frac{1}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta \in 2\pi i\mathbb{Z}$ comme souhaité :

— Posons $\varphi : [0,1] \to \mathbb{C}$, définie par
$$\varphi(t) = \exp\left(\int_0^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z}\right) \mathrm{d}s.$$

— On a
$$\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z},$$
sauf aux temps S de discontinuité de $\gamma'(t)$.

— En injectant $\varphi'(t) = \gamma'(t)\varphi(t)/(\gamma(t) - z)$, on obtient, sur $[0,1] \setminus S$
$$\begin{aligned}\left(\frac{\varphi(t)}{\gamma(t) - z}\right)' &= \frac{\varphi'(t)}{\gamma(t) - z} - \frac{\varphi(t)\gamma'(t)}{(\gamma(t) - z)^2} \\ &= \frac{\varphi(t)\gamma'(z)}{(\gamma(t) - z)^2} - \frac{\varphi(t)\gamma'(z)}{(\gamma(t) - z)^2} \\ &= 0.\end{aligned}$$

— Comme la fonction $t \mapsto \varphi(t)/(\gamma(t) - z)$ est continue et que sa dérivée est nulle sur $[0,1] \setminus S$, elle est constante.

— Ainsi
$$\frac{\varphi(t)}{\gamma(t) - z} = \frac{\varphi(0)}{\gamma(0) - z} = \frac{1}{\gamma(0) - z}.$$

— Comme $\gamma(1) = \gamma(0)$, on a $\varphi(1) = \varphi(0) = 1$, ce qui est le résultat désiré.

□

Exercice 154. Expliquer géométriquement ce qui se passe dans cette preuve.

Définition 155. La quantité

$$\mathrm{Ind}_z(\gamma) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{1}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta$$

est appelée l'indice de γ autour de z.

Remarque 156. L'indice mesure le nombre de tours que γ effectue autour de z, comptés positivement dans le sens trigonométrique et négativement dans le sens horaire.

Remarque 157. L'indice est un invariant d'homotopie : si $\gamma, \tilde{\gamma} \subset U$ sont homotopes dans $U \setminus \{z_*\}$ alors $\mathrm{Ind}_{z_*}(\gamma) = \mathrm{Ind}_{z_*}(\tilde{\gamma})$.

6.6. **Détermination du logarithme et des racines.** Le cas particulier de l'intégrale de $\zeta \mapsto \frac{1}{\zeta - z}$ est aussi fondamental pour construire le logarithme et les racines carrées :

Proposition 158 (Détermination du log). *Soit U un domaine simplement connexe qui ne contient pas 0. Alors pour $z_* \in U$ et tout w_* tel que $e^{w_*} = z_*$ la fonction holomorphe $L : U \to \mathbb{C}$ définie par*

$$L(z) = \int_{z_*}^{z} \frac{1}{\zeta} \mathrm{d}\zeta + w_*,$$

est telle que $\exp(L(z)) = z$ pour tout $z \in U$.

Démonstration. Comme U est simplement connexe, la fonction L est clairement bien définie.

— On a $L(\exp(w_*)) = w_*$ par construction.

— Sur un voisinage de w_*, on a

$$(L(\exp(w)))' = \frac{1}{\exp(w)} \exp(w) = 1$$

— Sur ce voisinage de w_*, on a donc que

$$L(\exp(w)) = w,$$

et donc

$$\exp(L(\exp(w))) = \exp(w).$$

— Comme $\exp$ est inversible au voisinage de w_*, on déduit $\exp(L(z)) = z$ sur un voisinage de z_*.

— Par le principe du prolongement analytique pour les fonctions holomorphes (corollaire 170 dans la section suivante), on déduit que $\exp(L(z)) = z$ pour tout $z \in U$.

□

Un corollaire particulièrement utile est l'existence de déterminations des racines n-ièmes.

Corollaire 159 (Racines n-ièmes). *Soit U un domaine simplement connexe qui ne contient pas 0. Alors pour tout $n \geq 1$, il existe une détermination de la racine n-ième sur U, c'est-à-dire une fonction holomorphe $r_n : U \to \mathbb{C}$ telle que $(r_n(z))^n = z$ pour tout $z \in U$.*

Démonstration. Il suffit de prendre $\exp\left(\frac{1}{n} L(z)\right)$, où $L(z)$ est donnée par la proposition 158. □

Une version légèrement plus forte de la proposition 158 est donné par l'existence de logarithmes de fonctions :

Proposition 160 (Log de fonctions). *Soit U un ouvert simplement connexe et $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe qui ne s'annule pas sur U. Soit $z_* \in U$ et soit ℓ_* tel que $e^{\ell_*} = f(z_*)$. Alors la fonction $L_f : U \to \mathbb{C}$ donnée par*

$$L_f(z) = \int_{z_*}^{z} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} \mathrm{d}\zeta + \ell_*$$

est telle que $\exp\left(L_f(z)\right) = f(z)$ pour tout $z \in U$.

Démonstration. On procède comme pour la proposition 158.

— Prenons une détermination L du logarithme telle que $\exp\left(L_f(z)\right) = f(z)$ pour tout $z \in D(z_*, \epsilon)$ pour $\epsilon > 0$ suffisamment petit.

— On a $L(f(z))' = f'(z)/f(z)$ et donc $L(f(z)) = L_f(z)$ pour $z \in D(z_*, \epsilon)$.

— Ainsi $\exp\left(L_f(z)\right) = f(z)$ sur $D(z_*, \epsilon)$ et par le principe du prolongement analytique pour les fonctions holomorphes (corollaire 170 dans la section suivante), l'identité est vraie pour tout U.

□

Corollaire 161 (Racines n-ièmes de fonctions)**.** *Soit U un domaine simplement connexe et f une fonction qui ne s'annule pas sur U. Alors pour tout $n \geq 1$, il existe une détermination de la racine n-ième de U sur U, c'est-à-dire une fonction holomorphe $f_n : U \to \mathbb{C}$ telle que $(f_n(z))^n = f(z)$ pour tout $z \in U$.*

Démonstration. Comme avant, il suffit de prendre $\exp\left(\frac{1}{n}L_f(z)\right)$ dans la proposition 160. □

7. Formule de Cauchy

7.1. Motivation.

- Dans les sections précédentes, on a vu que toute fonction analytique est holomorphe.
- On va maintenant voir la réciproque : toute fonction holomorphe est analytique, et les coefficients de la série entière correspondante sont donnés par des intégrales de contour.

7.2. Formule de Cauchy.

Théorème 162. *Soit $f : D(z,\rho) \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. On a*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta,$$

pour tout lacet $\gamma \subset D(z,\rho)$ homotope (dans $D(z,\rho) \setminus \{z\}$) à un cercle (orienté dans le sens trigonométrique) autour de z.

Démonstration. Par changement de variable, on peut supposer $z = 0$.

- Comme le contour est homotope à $\partial D(0,\epsilon)$ pour tout $\epsilon < \rho$, on a que le membre de droite est égal à
$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D(0,\epsilon)} \frac{f(\zeta)}{\zeta}\mathrm{d}\zeta.$$
- L'idée est maintenant de prendre $\epsilon \to 0$.
- Dans ce cas, $f(\zeta)$ devrait être très proche de $f(0)$ et on se retrouverait à calculer l'intégrale de la fonction $\zeta \mapsto \frac{1}{\zeta}f(0)$ (qu'on a déja calculée en haut). Cela se formalise simplement :
- On écrit
$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D(0,\epsilon)} \frac{f(\zeta)}{\zeta}\mathrm{d}z - f(0)\\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D(0,\epsilon)} \frac{f(\zeta)}{\zeta}\mathrm{d}z - \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D(0,\epsilon)} \frac{f(\zeta)}{\zeta}\mathrm{d}z\\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D(0,\epsilon)} \frac{f(\zeta) - f(0)}{\zeta}\mathrm{d}\zeta\\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D(0,\epsilon)} \left(f'(0) + \frac{o(\zeta)}{\zeta}\right)\zeta z.
\end{aligned}$$
- Quand $\epsilon \to 0$, on a que l'intégrande est borné et la longueur du contour est $2\pi\epsilon$, donc cela tend clairement vers 0.

□

On peut énoncer le résultat de la manière équivalente :

Corollaire 163. *Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe, $z \in U$, $\epsilon > 0$ tel que $\bar{D}(z,\epsilon) \subset U$ et γ un lacet dans U homotope (dans U) à $\partial D(z,\epsilon)$, alors on a*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta.$$

Remarque 164. La formule de Cauchy nous montre que l'holomorphie est une propriété très forte : la valeur d'une fonction à l'intérieur d'un contour est complètement déterminée par la valeur sur ce contour. Plus précisément, la valeur de f en un point z est donnée par une moyenne pondérée complexe des valeurs de $f(\zeta)$ le long du contour, où la pondération est donnée par le noyau de Cauchy $\frac{\mathrm{d}z}{z-z_*}$.

Remarque 165. Par la suite, il sera très utile d'exploiter la liberté que l'on a dans le choix du contour γ ; un degré de liberté supplémentaire est que l'on peut "repondérer" l'intégrale : si on multiplie f par une fonction holomorphe g telle que $g(z_*) = 1$, on a

$$f(z_*) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)\,g(z)}{z-z_*}\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma f(z)\,\frac{g(z)}{z-z_*}\mathrm{d}z.$$

7.3. **Holomorphie et analyticité.** Grâce à la formule de Cauchy, il est facile d'obtenir le résultat surprenant d'analyticité des fonctions holomorphes.

Théorème 166. *Si $f : D(z_*, \rho) \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe, elle est analytique et a un développement en série entière*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_*)^n,$$

de rayon de convergence $\geq \rho$, où

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_*)^{n+1}} \mathrm{d}z,$$

pour tout contour $\gamma \subset D(z_*, \rho)$ homotope (dans $D(z_*, \rho) \setminus \{z_*\}$) à un cercle (orienté dans le sens trigonométrique) autour de z_*.

Démonstration. Supposons $z_* = 0$. L'idée est simplement d'utiliser la formule de Cauchy et d'utiliser le développement en série géométrique du noyau de Cauchy $\frac{1}{\zeta - z}$.

— Pour tout $z \in D(0, \rho)$, et si $\gamma : [0,1] \to D(0, r)$ est un contour assez grand pour que $|\gamma(t)| > |z|$ pour tout $t \in [0,1]$
$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{1}{\zeta} f(\zeta) \frac{1}{1 - \frac{z}{\zeta}} \mathrm{d}\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{1}{\zeta} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^n f(\zeta) \mathrm{d}\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} z^n \mathrm{d}\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} \mathrm{d}\zeta. \end{aligned}$$
— Le développement en série géométrique est uniformément convergent pour les ζ qui apparaissent sur le chemin, et le résultat suit immédiatement.
— Comme la série converge pour tout $z \in D(0, \rho)$, on a que le rayon de convergence est $\geq \rho$.

□

Remarque 167. Il est facile de deviner la formule pour les a_n si on suppose que f est analytique (prenons $z_* = 0$)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \right) \frac{\mathrm{d}z}{z^{n+1}} &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{z^k}{z^{n+1}} \mathrm{d}z \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \mathbf{1}_{\{k\}}(n) \\ &= a_n, \end{aligned}$$

où l'échange de série et d'intégrale est facilement justifiable par la convergence uniforme de la série entière sur les compacts de $D(0, \rho)$.

Remarque 168. Les dérivées de f sont données par (si on prend $z_* = 0$)

$$f^{(n)}(0) = n!a_n = \frac{n!}{2\pi i}\oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\mathrm{d}z.$$

Un corollaire de ce théorème est qu'il est plus facile d'être holomorphe que d'avoir une primitive holomorphe.

Corollaire 169. *Si une fonction $f : U \to \mathbb{C}$ a une primitive holomorphe F, cette primitive est analytique et $F' = f$ est donc aussi analytique et donc holomorphe.*

Un autre corollaire très utile est le principe du prolongement analytique pour les fonctions holomorphes (qu'on a déjà utilisé, sans le montrer, dans la preuve des propositions 158 et 160 de la section précédente) :

Corollaire 170. *Si $f, g : U \to \mathbb{C}$ sont des fonctions holomorphes et si $f(z) = g(z)$ pour tout $z \in K$ où K a un point d'accumulation dans U, alors $f = g$.*

7.4. **Théorème de Morera.** Un autre corollaire de la formule de Cauchy est le théorème de Morera, qui donne une condition qui permet garantir l'holomorphie en termes d'intégrales de contours :

Corollaire 171 (Théorème de Morera)**.** *Si $f : U \to \mathbb{C}$ est continue et satisfait $\oint_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$ pour tout contour contractible, alors f est holomorphe.*

Démonstration. Il suffit de montrer que pour tout $z \in U$, f est holomorphe sur $D(z,\epsilon)$ pour un $\epsilon > 0$. Comme f satisfait la condition de Morera sur $D(z,\epsilon)$, par le théorème 150, elle admet une primitive $D(z,\epsilon)$ et elle est donc holomorphe par le corollaire précédent. □

Remarque 172. La réciproque est vraie : elle est donnée par le théorème 139.

Une conséquence particulièrement importante du théorème de Morera est qu'il nous permet de contrôler les suites de fonctions holomorphes :

Proposition 173. *Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions holomorphes $f_n : U \to \mathbb{C}$ qui converge uniformément sur les compacts de U vers $f : U \to \mathbb{C}$ quand $n \to \infty$. Alors f est holomorphe.*

Démonstration. Il faut montrer que f est continue et satisfait localement la condition de Morera :
- On a que f est continue par la convergence normale (la limite uniforme de fonctions continue est toujours continue ; c'est la même preuve qu'en Analyse réelle).
- Soit $z \in U$ et $\epsilon > 0$ tel que $D(z,\epsilon) \subset U$; on veut montrer que f est holomorphe sur $D(z,\epsilon)$.
- Soit $\gamma \subset D(z,\epsilon)$ un lacet ; comme f_n converge uniformément sur un voisinage de γ, on a

$$\oint_\gamma f_n(z)\,\mathrm{d}z \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \oint_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z.$$

- Mais comme $\oint_\gamma f_n(z)\,\mathrm{d}z = 0$ par holomorphie de f_n, on a $\oint_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.
- En conséquence, f satisfait la condition de Morera sur $D(z,\epsilon)$ et elle est donc holomorphe sur $D(z,\epsilon)$; elle est donc holomorphe au voisinage de tout point $z \in U$ et donc sur tout U.

□

Comme corollaire, on obtient naturellement que les séries convergentes de fonctions holomorphes sont holomorphes :

Corollaire 174. *Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions holomorphes $f_n : U \to \mathbb{C}$ avec pour tout compact $K \subset U$,*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_{\infty,K} < +\infty,$$

où $\|f_n\|_{\infty,K} = \sup_{z\in K} |f(z)|$. Alors la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$$

converge normalement vers une fonction holomorphe.

Démonstration. La convergence normale de la suite des sommes partielles $S_N = \sum_{n=0}^{N} f_n$ est garantie par la convergence de $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_{\infty,K}$, et on peut appliquer la proposition 173. □

8. Applications de la formule de Cauchy

8.1. **Motivation.**

— Grâce à la formule de Cauchy, on a vu que la condition d'holomorphie garantit des propriétés remarquables.
— En particulier, les valeurs qu'une fonction holomorphe peut prendre sont fortement contraintes par le fait que les valeurs le long d'un contour déterminent les valeurs à l'intérieur.
— On va voir des propriétés qualitatives fondamentales du comportement global des fonctions holomorphes.
— Les deux outils que nous allons utiliser sont des dérivés de la formule de Cauchy, appelés inégalités de Cauchy et formule de Parseval.

8.2. **Inégalités de Cauchy.** Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et $z \in U$ et soit $f(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\zeta - z)^n$ son développement en série. A partir de la formule de Cauchy, on obtient des inégalités sur les coefficients du développement en série de f.

Proposition 175 (Inégalités de Cauchy). *Pour tout entier $n \geq 0$ et tout $r > 0$ tel que $\bar{D}(z,r) \subset U$, on a*

$$|a_n| \leq r^{-n} \max_{\zeta \in \partial D(z,r)} |f(\zeta)|.$$

Démonstration. Cela suit d'une majoration directe :

$$\begin{aligned} |a_n| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(z,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} \mathrm{d}\zeta \right| \\ &\leq r^{-n+1} \frac{\ell(\partial D(z,r))}{2\pi} \sup_{\zeta \in \partial D(z,r)} |f(\zeta)| \\ &\leq r^{-n} \sup_{\zeta \in \partial D(z,r)} |f(\zeta)|. \end{aligned}$$

□

8.3. **Formule de Parseval.** On a un contrôle plus fin sur les coefficients grâce (une variante de) la formule de Parseval :

Proposition 176 (Formule de Parseval). *Pour tout $r > 0$ tel que $\bar{D}(z,r) \subset U$, on a*

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^{2n} |a_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f\left(z + re^{i\theta}\right)\right|^2 \mathrm{d}\theta$$

Remarque 177. L'idée conceptuelle derrière cette formule et que l'on calcule deux fois le carré la norme de $f : \partial D(z,r) \to \mathbb{C}$: à droite de manière "directe", à gauche en prenant la somme des coefficients de f dans la "base orthonormée" $(z \mapsto z^n)_{n=0,1,\dots}$ (cela deviendra plus clair dans le cours d'Analyse de Fourier).

Démonstration. On écrit et on intègre :

— On écrit les valeurs en terme du développement en série :

$$\begin{aligned}\left| f\left(z + re^{i\theta}\right)\right|^2 &= f\left(z + re^{i\theta}\right) \overline{f\left(z + re^{i\theta}\right)} \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta}\right) \overline{\left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m r^m e^{im\theta}\right)} \\ &= \sum_{n,m=0}^{\infty} a_n \bar{a}_m r^{n+m} e^{i(n-m)\theta}.\end{aligned}$$

— Maintenant si on intègre par rapport à θ et divise par 2π on obtient

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{n,m=0}^{\infty} a_n \bar{a}_m r^{n+m} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta} \mathrm{d}\theta,$$

et comme

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta} \mathrm{d}\theta = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \bar{a}_n r^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}.$$

□

8.4. **Principe du maximum.** Une première conséquence remarquable des inégalités de Cauchy est le principe du maximum (du module d'une fonction holomorphe).

Théorème 178 (Principe du maximum)**.** *Soit U un domaine et $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Si $|f|$ admet un maximum local en un point $z \in U$, alors f est constante.*

Démonstration. Supposons que $z = 0$.

— Si $|f|$ admet un maximum local en 0, il existe un $r > 0$ tel que

$$|f(0)| \geq \max_{\zeta \in \partial D(0,r)} |f(\zeta)| .$$

— Mais en même temps, par la formule de Parseval

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} r^{2n} |a_n|^2 &= \sum_{n=0}^{\infty} r^{2n} |a_n|^2 - |a_0|^2 \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\left| f\left(re^{i\theta}\right) \right|^2 - |f(0)|^2 \right] \mathrm{d}\theta \\ &\leq \max_{\zeta \in \partial D(0,r)} \left[|f(\zeta)|^2 - |f(0)|^2 \right] .\end{aligned}$$

— On en déduit que tous les a_n avec $n \geq 1$ doivent rêtre nuls, donc f est constante au voisinage de 0.

— Par le principe de zéros isolés, f est constante.

□

8.5. Fonctions entières et théorème de Liouville.

Définition 179. Une fonction holomorphe $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est dite entière.

Théorème 180 (Théorème de Liouville)**.** *Une fonction entière bornée est constante.*

Démonstration. Montrons que la dérivée de f est nulle en tout point.

— Pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tout $r > 0$, on a, par l'inégalité de Cauchy :
$$|f'(z)| \leq \frac{1}{r} \max_{\zeta \in \partial D(z,r)} |f(\zeta)|.$$
— En faisant tendre $r \to \infty$, si $\sup_\zeta |f(\zeta)| < \infty$, on obtient $f'(z) = 0$.
— Comme c'est vrai pour tout z, on en déduit que f est constante.

□

Exercice 181. Montrer qu'une fonction telle que que $\frac{|f(z)|}{(1+|z|^n)}$ est bornée est nécessairement un polynôme de degré $\leq n$.

Exercice 182. Trouver une fonction holomorphe $f : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \to \mathbb{C}$ bornée et non constante.

8.6. **Théorème fondamental de l'algèbre (bis).** Grâce au théorème de Liouville, on arrive à une preuve particulièrement simple du théorème fondamental de l'algèbre :

Théorème 183 (Théorème fondamental de l'algèbre (Gauss-d'Alembert))**.** *Soit* $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ *un polynôme non constant. Alors il existe* z_* *tel que* $P(z_*) = 0$.

Démonstration. C'est une preuve par l'absurde :

- Supposons que P est un polynôme non constant qui ne s'annule pas.
- La fonction $z \mapsto \frac{1}{P(z)}$ est alors une fonction entière.
- De plus, elle tend vers 0 à l'infini, puisque $|P(z)| \to \infty$ quand $|z| \to \infty$ (voir première preuve du théorème).
- Donc elle est bornée, et donc constante, contradiction.

□

Remarque 184. Une autre manière de voir ce théorème est de dire que les polynômes prennent toutes les valeurs.

Remarque 185. Les fonctions entières ne prennent pas toutes les valeurs (par exemple la fonction $\exp$ ne s'annule pas) ; un théorème (que nous ne prouverons pas) dit qu'en fait elles peuvent éviter au plus une valeur.

8.7. **Densité de l'image d'une fonction holomorphe.** On va voir maintenant une conséquence simple et intéressante du théorème de Liouville qui est une version faible de la remarque 185 ci-dessus.

Proposition 186. *Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction entière non constante. On a que $f(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathbb{C}$.*

Démonstration. On procède à nouveau par l'absurde
- Supposons qu'il existe une valeur $w \in \mathbb{C}$ telle que w ne soit pas dans l'adhérence de $f(\mathbb{C})$.
- Dans ce cas, il existe $\epsilon > 0$ tel que $|f(z) - w| \geq \epsilon$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.
- On déduit alors que $\frac{1}{f(z)-w}$ est entière et bornée, car $\left|\frac{1}{f(z)-w}\right| \leq \frac{1}{\epsilon}$.
- Elle est donc constante, contradiction.

□

8.8. **Théorème de l'application ouverte.** Un théorème qui est souvent utile (en particulier pour prouver le théorème de l'application conforme de Riemann) dit que l'image d'un ouvert par une fonction holomorphe est toujours ouvert :

Théorème 187 (Théorème de l'application ouverte)**.** *Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe non constante. Alors pour tout ouvert $V \subset U$, l'image $f(V) = \{f(u) : u \in U\}$ est un ouvert.*

Démonstration. Pour $z_* \in U$, montrons qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que $D(f(z_*), \epsilon) \subset f(V)$.

— Par changement de variable, on peut supposer que $z_* = 0$, et en remplaçant f par $f - f(z_*)$, on peut supposer que $f(z_*) = 0$.

— Si on écrit le de développement de f en $z_* = 0$, on a, en utilisant $f(0) = 0$:

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k.$$

— Si on note $n = \min\{k \geq 1 : a_k \neq 0\} \geq 1$ l'indice du premier coefficient non nul, on a que

$$f(z) = z^n g(z),$$

où $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n+k} z^k$, avec $\varphi(0) \neq 0$.

— Comme $g(0) \neq 0$ et g est continue, il existe $\epsilon > 0$ tel que $g(z) \neq 0$ pour tout $z \in D(0, \epsilon)$.

— Par le corollaire 158, il existe une détermination de la racine n-ième $z \mapsto \sqrt[n]{g(z)}$ sur $D(0, \epsilon)$.

— Notons φ la fonction $z \mapsto z\sqrt[n]{g(z)}$, de sorte qu'au voisinage de 0, on a $f(z) = \varphi^n(z)$ au voisinage de 0, où $\varphi'(z) \neq 0$.

— Par le théorème de la fonction inverse, φ est un difféomorphisme au voisinage de 0, et donc φ envoie un voisinage de 0 vers un voisinage de 0.

— Il suit que l'image de f contient un voisinage de 0 à la puissance n, ce qui est toujours un voisinage de 0.

$\square$

8.9. **Limites de fonctions holomorphes.** Une conséquence de la formule de Cauchy très utile nous garantit la convergence des dérivées des fonctions holomorphes :

Proposition 188. *Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions holomorphes $f_n : U \to \mathbb{C}$ qui converge uniformément sur les compacts vers une fonction $f : U \to \mathbb{C}$. Alors f est holomorphe et toutes les dérivées k-ièmes $f_n^{(k)} : U \to \mathbb{C}$ convergent uniformément sur les compacts vers les dérivées k-ièmes $f^{(k)}$ de f.*

Démonstration. On a déjà vu que f est holomorphe dans la proposition 173.

— Sur tout disque fermé $\bar{D}(z_*, 2\epsilon) \subset U$, les valeurs des dérivées peuvent être exprimées en termes d'une intégrale de contour de
$$\frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}$$
sur le lacet $\partial D(z, 2\epsilon)$.

— Sur un voisinage de γ (pour tout k fixé) la fonction
$$\zeta \mapsto \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}},$$
converge vers
$$\zeta \mapsto \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}},$$
où la convergence est uniforme par rapport à $z \in \bar{D}(z_*, \epsilon)$: cela suit du fait que $\frac{1}{(\zeta - z)^{k+1}}$ est uniformément bornée par rapport à $z \in \bar{D}(z_*, \epsilon)$ et à $\zeta \in \partial D(z_*, 2\epsilon)$.

— Ainsi
$$\oint_\gamma \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} \mathrm{d}\zeta \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \oint_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} \mathrm{d}\zeta$$
et ainsi on obtient la convergence des dérivées.

□

9. Singularités, zéros et fonctions méromorphes

9.1. **Motivation.**

— En analyse réelle, on ne peut pas diviser des fonctions sans faire attention aux divisions par zéro, qui peuvent se produire partout.

— En analyse complexe, on ne peut pas diviser par la fonction identiquement nulle, mais pour tout autre fonction, le principe des zéros nous dit que l'on créera des "explosions", appelées singularités, en des points isolés.

— Il se trouve que l'on peut très bien travailler avec des fonctions holomorphes qui ont des singularités, comme la fonction $z \mapsto \frac{1}{z}$: on les appelle des fonctions méromorphes.

— La théorie devient un peu plus subtile, mais on va voir qu'on peut très bien décrire le comportement des fonctions méromorphes autour de leurs pôles, avec des séries entières contenant des termes négatifs.

9.2. **Séries de Laurent.** L'idée des séries de Laurent est de généraliser les séries entières aux degrés négatifs.

Remarque 189. Pour alléger les notations, on va centrer les séries en 0 : pour considérer les séries centrées en z_*, il suffit de remplacer z par $z - z_*$.

Définition 190. Une série de Laurent (formelle) centrée en 0 est une expression de la forme $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k$ où $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est une suite bi-infinie, indicée par les entiers relatifs ; la série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ est appelée la partie régulière de la série et la série $\sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} z^{-k}$ est appelée la partie singulière (ou principale).

Définition 191. On dit que la série de Laurent $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k$ converge en z si les séries $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ et $\sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} z^{-k}$ convergent.

9.3. **Anneau de convergence.** La question la plus fondamentale pour étudier les séries entières est celle de leur rayon de convergence.

Définition 192. On appelle anneau (ou couronne) ouvert centré en z_* de rayons $r, R \in [0, \infty]$ avec $r < R$ l'ensemble $A(z_*, r, R)$ défini par

$$\begin{aligned} A(z, r, R) &= \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_*| < R\} \\ &= D(z_*, R) \setminus \bar{D}(z_*, r). \end{aligned}$$

Remarque 193. Pour les séries de Laurent : si la partie régulière $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ converge sur le disque $D(0, R)$ et la partie singulière $\sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} w^k$ (en posant $w = \frac{1}{z}$) converge pour $w \in D(0, \rho)$, on a que $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k$ converge dès que $|z| < R$ et $|z| = \frac{1}{|w|} > \frac{1}{\rho}$, c'est-à-dire si $z \in A\left(0, \frac{1}{\rho}, R\right)$.

Définition 194. On appelle anneau de convergence de la série de Laurent $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k$ l'anneau $A(0, r, R)$ où R est le rayon de convergence de la partie régulière et $r = \frac{1}{\rho}$ où ρ est l'inverse du rayon de convergence de la partie singulière en fonction de $w = \frac{1}{z}$, donnée par $\sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} w^k$.

Lemme 195. *La série de Laurent définit une fonction holomorphe sur son anneau de convergence. La convergence est uniforme sur les sous-ensembles compacts de l'anneau de convergence.*

Démonstration. Il suffit d'utiliser que la partie régulière est holomorphe en fonction de z et que la partie singulière est holomorphe en fonction de w (mais donc aussi en fonction de z par composition, car $w = \frac{1}{z}$). □

Remarque 196. On peut dériver terme à terme les séries de Laurent exactement de la même manière que les séries entières.

Exemple 197. La série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ avec $a_k = 1$ pour tout $k \geq 0$ et $a_k = 2^k$ pour $k < 0$ a pour annneau de convergence $A\left(0, \frac{1}{2}, 1\right)$.

Exercice 198. La série $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|k|!} z^k$ a pour anneau de convergence $A(0, \infty) = \mathbb{C}^*$.

9.4. Formule de Cauchy sur l'anneau.

- Le lemme 195 nous dit que les séries de Laurent définissent des fonctions holomorphes sur les anneaux.
- On va montrer maintenant la réciproque : à toute fonction holomorphe sur un anneau $A(0,r,R)$ est associée une série de Laurent qui converge sur l'anneau.
- L'outil central pour cela est la formule de Cauchy sur l'anneau.

Proposition 199 (Formule de Cauchy sur l'anneau). *Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe où $U \supset \bar{A}(0,r,R)$. Pour tout $z \in A(0,r,R)$ on a*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(0,R)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(0,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta.$$

Remarque 200. Une manière peut-être plus intuitive de comprendre le signe – devant le deuxième terme du membre de droite est de se dire qu'on fait une intégrale de contour $\partial D(0,r)$ dans le sens horaire (le sens inverse du sens trigonométrique).

Démonstration. C'est une simple preuve par déformation de contour.

- Pour simplifier les notations, supposons que z est dans l'anneau fendu $A(0,r,R) \setminus \mathbb{R}_-$.
- On part d'un petit lacet $\partial D(z,\epsilon) \subset A(0,r,R)$ centré en z, pour lequel on a
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(z,\epsilon)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta$$
par la formule de Cauchy.
- On agrandit ce lacet dans l'anneau jusqu'au moment où il touche les bords de l'anneau tout en restant un contour simple (sans point double), et qu'il devient de la forme $\partial\Omega_\theta$, où
$$\Omega_\theta = \{z \in A(0,r,R) : \mathrm{Arg}(z) \in (-\theta,\theta)\}.$$
- Quand $\theta \to \pi$, le lacet n'est plus simple : il parcourt deux fois $A(0,r,R) \cap \mathbb{R}_-$ dans deux sens opposés.
- Les contributions qui ne s'annulent pas sont celles de $\partial D(0,R)$ et $\partial D(0,r)$; ce dernier est orienté dans le sens horaire.
- On peut orienter $\partial D(0,r)$ dans le sens trigonométrique en changeant le signe de l'intégrale, ce qui donne le résultat.

□

9.5. **Holomorphie sur l'anneau et séries de Laurent.** De même que la formule de Cauchy implique l'analyticité, la formule de Cauchy sur l'anneau implique l'existence d'une représentation en série de Laurent :

Théorème 201. *Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe où $U \supset \bar{A}(0, r, R)$. On a que f a une représentation en série de Laurent convergente sur (uniformément sur les compacts de) $A(0, r, R)$:*

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k,$$

où

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{k+1}} \mathrm{d}\zeta,$$

pour tout γ homotope à $\partial D(0, R)$ dans U.

Démonstration. La preuve est similaire à celle qui donne l'analyticité des fonctions holomorphes :

— Par la formule de Cauchy sur l'anneau, on obtient, pour tout $z \in A(0, r, R)$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(0,R)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(0,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta$$

— Pour $\zeta \in \partial D(0, R)$, on développe

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta} \frac{1}{1 - \frac{z}{\zeta}} = \frac{1}{\zeta} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\zeta^{n+1}}$$

comme avant.

— Pour $\zeta \in \partial D(0, r)$, on développe

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{z} \frac{1}{1 - \frac{\zeta}{z}} \\ &= \frac{1}{z} \frac{1}{\frac{\zeta}{z} - 1} \\ &= \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta}{z}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta^n}{z^{n+1}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta^{n-1}}{z^n} \\ &= \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{z^n}{\zeta^{n+1}}. \end{aligned}$$

— En regroupant les morceaux, on obtient

$$\begin{aligned} f(z) =& \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D(0,R)} f(\zeta)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\zeta^{n+1}}\right)\mathrm{d}\zeta \\ &+ \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D(0,r)} f(\zeta)\left(\sum_{n=-1}^{\infty}\frac{z^n}{\zeta^{n+1}}\right)\mathrm{d}\zeta \\ =& \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D(0,R)}\frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\mathrm{d}\zeta\right) z^n \\ &+ \sum_{n=-1}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D(0,r)}\frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\mathrm{d}\zeta\right) z^n. \end{aligned}$$

— Maintenant, comme $f(\zeta)/\zeta^{n+1}$ est holomorphe sur $A(0,r,R)$ on a que

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D(0,R)}\frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\mathrm{d}\zeta = a_n,$$

où les a_n sont comme dans l'énoncé du théorème.

— Finalement, on obtient

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=-1}^{-\infty} a_n z^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n,$$

comme désiré.

□

A partir de ce théorème, on obtient le résultat un peu plus agréable (et strictement équivalent) :

Corollaire 202. *Soit $f : A(0,r,R) \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe, on a que f a une représentation en série de Laurent*

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k$$

qui converge uniformément sur les compacts de $A(0,r,R)$, où

$$a_k = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta^{k+1}}\mathrm{d}\zeta,$$

où γ est homotope au cercle $\partial D\left(0, \frac{r+R}{2}\right)$ dans $A(0,r,R)$.

Démonstration. Cela suit directement du théorème. □

Corollaire 203. *Pour une fonction holomorphe $f : A(0,r,R) \to \mathbb{C}$, il existe une fonction holomorphe $f_{\text{int}} : D(0,R) \to \mathbb{C}$ et une fonction holomorphe $f_{\text{ext}} : \mathbb{C} \setminus \bar{D}(0,r) \to \mathbb{C}$ telles que sur $A(0,r,R)$, on ait $f = f_{\text{int}} + f_{\text{ext}}$.*

Démonstration. On prend simplement les fonctions holomorphes f_{int} et f_{ext} données par la partie régulière et la partie singulière du développement en série de Laurent de f. La partie régulière a rayon de convergence au moins R, la partie singulière en fonction de $w = \frac{1}{z}$ a rayon de convergence au moins $\frac{1}{r}$, et le résultat suit. □

9.6. **Singularités.** Le cas le plus simple de fonction holomorphe définie sur un anneau est celui d'une fonction définie sur un disque épointé $D(z_*, r) \setminus \{z_*\} = A(z_*, 0, r)$.

Définition 204. On dit qu'une fonction holomorphe $f : U \to \mathbb{C}$ a une singularité en $z_* \notin U$ s'il existe $\epsilon > 0$ tel que $A(z_*, 0, \epsilon) \subset U$.

Remarque 205. Une fonction holomorphe avec singularité en z_* admet un développement en série de Laurent qui converge par le corollaire 202.

Définition 206. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe avec développement en série de Laurent en z_* :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_*)^n.$$

On appelle valuation de f en z_* et on note $v_{z_*}(f) \in \mathbb{N} \cup \{\pm\infty\}$ la quantité $\inf\{n \in \mathbb{Z} : a_n \neq 0\}$.

Remarque 207. La valuation dénote l'indice du premier terme non nul, s'il existe ; si tous les coefficients sont nuls, on a $v_{z_*}(f) = +\infty$ et s'il y a un nombre infini de coefficients négatifs, on a $v_{z_*}(f) = -\infty$.

Définition 208. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Soit $z_* \notin U$ une singularité, soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_*)^n$ le développement de f en série de Laurent.
- On dit que z_* est une singularité effaçable (ou illusoire) si la partie singulière est nulle : $a_k = 0$ pour tout $k < 0$: en d'autres termes $v_{z_*}(f) \geq 0$.
- On dit que z_* est méromorphe en z_* (ou a un pôle en z_*) si la partie singulière contient un nombre fini de termes non nuls : en d'autres termes $v_{z_*}(f) \in -\mathbb{N}^*$.
- On dit que z_* a une singularité essentielle en z_* si la partie singulière contient un nombre infini de termes non nuls : en d'autres termes $v_{z_*}(f) = -\infty$.

Définition 209. On dit qu'une fonction méromorphe en z_* a un pôle d'ordre n si le coefficient de $\frac{1}{(z-z_*)^n}$ est non nul et c'est le plus grand avec cette propriété (on appelle un pôle d'ordre 1 un pôle simple, un pôle d'ordre 2 un pôle double, etc.) : en d'autres termes $n = -v_{z_*}(f) \in \mathbb{N}^*$.

Exemple 210. La fonction $z \mapsto \sin(1/z)$ a une singularité essentielle en 0.

Exemple 211. La fonction $z \mapsto 1/\sin(z)$ a des pôles simples sur $\pi\mathbb{Z}$.

Exercice 212. Que dire des singularités de la fonction $z \mapsto 1/\sin(1/z)$ et de la fonction $z \mapsto \sin(1/\sin(1/z))$?

Les singularités effaçables sont faciles à caractériser.

Proposition 213. *Une fonction holomorphe $f : U \to \mathbb{C}$ a une singularité effaçable en $z_* \notin U$ si et seulement si $|f|$ est bornée au voisinage de z_*.*

Démonstration. La direction $\Longrightarrow$ (le "seulement si") est claire par continuité. On va suivre un analogue de la preuve des inégalités de Cauchy pour la partie singulière.
- Supposons $z_* = 0$ et écrivons $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$; on veut montrer $a_n = 0$ pour tout $n < 0$.
- Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$|a_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(0,r)} \frac{f(z)}{z^{n+1}} \mathrm{d}z \right| \leq r^{-n} \max_{z \in \partial D(0,r)} |f(z)|.$$

- Maintenant, si $n < 0$, comme f est bornée au voisinage de 0, on obtient $a_n = 0$ en faisant tendre $r \to 0$.

— On obtient donc $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ qui converge sur un voisinage de 0, et l'extension en 0 est bien sûr par a_0.

□

Proposition 214. *Une fonction holomorphe $f : U \to \mathbb{C}$ a un pôle d'ordre $N > 0$ si et seulement si N est le plus petit entier tel que $z \mapsto |z - z_*|^N |f(z)|$ soit bornée au voisinage de z_*.*

Démonstration. On procède comme dans la preuve de la proposition précédente.

— Supposons $z_* = 0$ et écrivons $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$; on veut montrer $a_n = 0$ pour tout $n < 0$.

— Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a
$$|a_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(0,r)} \frac{f(z)}{z^{n+1}} \mathrm{d}z \right| \leq r^{-n} \sup_{z \in \partial D(0,r)} |f(z)|.$$

— Pour tout $k > 0$, on a
$$|a_{-N-k}| \leq r^k \sup_{z \in \partial D(0,r)} r^N |f(z)| \underset{\substack{r \to 0 \\ >}}{\longrightarrow} 0,$$
et ainsi $|a_{-N-k}| = 0$ pour tout $k > 0$, et il ne reste qu'à montrer que $a_{-N} \neq 0$.

— Maintenant, si a_{-N} était nul, on aurait que
$$z \mapsto z^{N-1} f(z)$$
serait bornée au voisinage de $z_* = 0$, ce qui contradirait la minimalité de N.

□

Corollaire 215. *Si pour tout $N \geq 1$, la fonction $z \mapsto |z - z_*|^N |f(z)|$ n'est pas bornée au voisinage de z_*, f a une singularité essentielle en z_*.*

Exercice 216. Si une fonction $f : U \to \mathbb{C}$ a un pôle d'ordre N en z_*, alors
$$|f(z)| |z - z_*|^{N-1} \underset{\substack{z \to z_* \\ \neq}}{\longrightarrow} +\infty.$$

Les singularités essentielles ont quant à elles un comportement qui semble a priori un peu étrange :

Théorème 217 (Casorati-Weierstrass)**.** *Si une fonction $f : U \to \mathbb{C}$ a une singularité essentielle en z_*, alors pour tout $w \in \mathbb{C}$, il existe une suite $(z_n)_n$ avec $z_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} z_*$ telle que $f(z_n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} w$.*

Démonstration. Supposons que cela ne soit pas le cas :

— Il existe alors $w \in \mathbb{C}$ tel que $|f(z) - w| \geq a$ sur un voisinage de z_*.

— Alors la fonction $g : z \mapsto \frac{1}{f(z) - w}$ est bornée au voisinage de z_* et elle a donc un prolongement en 0.

— Comme f n'est pas bornée au voisinage de z_*, on doit avoir $g(z_*) = 0$ (et g a un zéro "d'ordre fini" comme toute fonction analytique).

— Mais alors comme $f = \frac{1}{g} + w$, f a un pôle en z_*, ce qui contredit l'hypothèse qu'on avait une singularité essentielle en z_*.

□

9.7. **Fonctions méromorphes.** La classe des fonctions méromorphes est particulièrement utile en analyse complexe.

Définition 218. On dit que f est méromorphe sur U si f est holomorphe sur $U \setminus K$, où K est fait de points isolés tels que f est méromorphe (c'est-à-dire qu'elle a un pôle) sur les points de K.

Lemme 219. *Soient $f, g : U \to \mathbb{C}$ deux fonctions holomorphes non identiquement nulles. Alors $\frac{f}{g}$ est une fonction méromorphe sur U. Si f est méromorphe non nulle, les zéros de $1/f$ correspondent aux pôles de f et vice versa.*

Démonstration. Par le principe des zéros isolés, les zéros de g forment un ensemble de points isolés ; ce sont précisément les points où $\frac{f}{g}$ peut avoir des pôles. Si on développe f en série de Laurent, on a que $|f(z)| \to +\infty$ au voisinage de chacun des pôles et donc que $1/f(z) \to 0$ et si $f(z) \to 0$ quand $z \to z_*$, on a que $\frac{(z-z_*)^N}{f(z)}$ est borné au voisinage de z_* pour N correspondant à l'ordre du zéro de f. $\square$

L'exercice suivant justifie l'intérêt de la classe des fonctions méromorphes en tant qu'objet algébrique :

Exercice 220. L'ensemble des fonctions méromorphes sur un domaine U forme un corps pour l'addition et la multiplication point à point.

9.8. **Zéros, pôles et dérivée logarithmique.** Une construction de fonction méromorphe particulièrement utile est la dérivée logarithmique f'/f d'une fonction méromorphe.

Remarque 221. Si f a un logarithme, on a bien sûr que la dérivée de $\log \circ f$ est $\frac{1}{f} f'$, ce qui justifie le nom ; en fait la fonction f n'a pas besoin d'avoir un logarithme pour qu'on puisse le dériver. si f ne s'annule pas elle a de toute manière un log au voisinage de tout point, ce qui permet de le dériver, et si f s'annule, on aura une expression comme $\log(z - z_*)$ qu'on peut aussi très bien dériver sans que la détermination du logarithme existe.

Définition 222. Si $f : U \setminus \{z_*\} \to \mathbb{C}$ est holomorphe avec une singularité en z_*, on appelle résidu de f en z_* et on note $\mathrm{res}(f, z_*)$ le coefficient du terme de degré -1 dans le développement de f en série de Laurent en z_*.

Proposition 223. *Si f est une fonction méromorphe sur U non nulle, alors f'/f est aussi méromorphe sur U, elle n'a que des pôles simples aux positions des zéros et pôles de f, avec des résidus comme suit :*

— *Chaque zéro z_* d'ordre n de f correspond à un pôle simple avec résidu n.*
— *Chaque pôle z_* d'ordre n de f correspond à un pôle simple avec résidu $-n$.*

Démonstration. Clairement, f'/f n'a de pôles qu'aux zéros et pôles de f ; le résultat s'obtient simplement en développant autour de chaque zéro :

— Si f a un zéro d'ordre n en z_*, on a
$$f(z) = (z - z_*)^n h(z),$$
avec h holomorphe au voisinage de z_* et $h(z_*) \neq 0$, et ainsi
$$f'(z) = n(z - z_*)^{n-1} h(z) + (z - z_*)^n h'(z),$$
d'où
$$\begin{aligned}\frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{n(z - z_*)^{n-1} h(z) + (z - z_*)^n h'(z)}{(z - z_*)^n h(z)} \\ &= \frac{n}{z - z_*} + (z - z_*)\frac{h'(z)}{h(z)}\end{aligned}$$
et ainsi on a un pôle simple en z_* de résidu n.

— Si f a un pôle d'ordre n en z_*, on a $f(z) = (z - z_*)^{-n} h(z)$ avec h holomorphe au voisinage de z_* et $h(z_*) \neq 0$, et ainsi
$$f'(z) = -n(z - z_*)^{-n-1} h(z) + (z - z_*)^{-n} h'(z),$$
d'où
$$\begin{aligned}\frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{-n(z - z_*)^{-n-1} h(z) + (z - z_*)^{-n} h'(z)}{(z - z_*)^{-n} h(z)} \\ &= (z - z_*)^n \frac{-n(z - z_*)^{-n-1} h(z) + (z - z_*)^{-n} h'(z)}{h(z)} \\ &= \frac{-n}{z - z_*} + \frac{h'(z)}{h(z)}\end{aligned}$$
et ainsi on a un pôle simple en z_* de résidu $-n$.

□

9.9. **Sphère de Riemann.**

— Un cadre élégant pour comprendre les fonctions méromorphes sur U est de dire qu'elles prennent leurs valeurs dans $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$: si f a un pôle en $z \in U$, on pose simplement $f(z) = \infty$.

Définition 224. On définit la sphère de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$ par $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, comme l'image de la sphère

$$\mathbb{S}^2 = \left\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a^2 + b^2 + c^2 = 1\right\}$$

par l'application de projection stéréographique φ définie par

$$(a, b, c) \overset{\varphi}{\mapsto} \begin{cases} \frac{a+ib}{1-c} & \text{si } c \neq 1 \\ \infty & \text{si } c = 1. \end{cases}$$

Remarque 225. Cette application correspond à faire l'identification suivante :

— On imagine le plan complexe avec le plan $P_S = \{(u, v, -1) : u, v \in \mathbb{R}\}$ perpendiculaire à l'axe Nord-Sud $\{(0, 0, c) : c \in \mathbb{R}\}$ passant par le pôle Sud $(0, 0, -1)$

— On projette la sphère en considérant pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{S}^2$ la droite $D_{a,b,c}$ qui relie le pôle Nord $(0, 0, 1)$ à (a, b, c) (si $(a, b, c) \neq (0, 0, 1)$) et on prend l'intersection $D_{a,b,c} \cap P_S$, qu'on note $(u, v, -1)$.

— On identifie (u, v) avec $u + iv$.

Afin de pouvoir donner un sens à $z_n \longrightarrow \infty$ comme étant "tendre vers l'infini" (comme si ∞ était un point normal, dont on peut se rapprocher), la sphère de Riemann est naturellement équipée d'une topologie :

Définition 226. On dit qu'une suite $(z_n)_{n\geq 0}$ avec $z_n \in \hat{\mathbb{C}}$ tend vers $z \in \hat{\mathbb{C}}$ quand $n \longrightarrow +\infty$ quand :

— Si $z \in \mathbb{C}$, on a $|z_n - z| \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow +\infty$ (en particulier, $|z_n|$ est bornée).

— Si $z = \infty$, on a $|z_n| \longrightarrow +\infty$ quand $n \longrightarrow +\infty$ (en particulier $1/|z_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$).

Avec cette définition, on obtient une notion de continuité, ce qui nous permet d'obtenir :

Proposition 227. *Une fonction méromorphe f sur $U \subset \mathbb{C}$ s'étend de manière continue à une fonction $\hat{f} : U \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}$.*

Démonstration. Il suffit d'étendre la fonction en posant $\hat{f}(z_*) = \infty$ à tous les pôles. □

Si f est une fonction holomorphe définie "au voisinage de l'infini", on peut aussi parler d'holomorphie ou de méromorphie au point ∞ par :

Définition 228. Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction définie sur $U \supset A(0, r, \infty)$ pour un $r > 0$.

— On dit que f est holomorphe à l'infini si $w \mapsto f(1/w)$ a une singularité illusoire en 0.

— On dit que f est méromorphe en l'infini, avec un pôle d'ordre n si $w \mapsto f(1/w)$ a un pôle d'ordre n en 0.

— On dit que f a une singularité essentielle à l'infini si $w \mapsto f(1/w)$ a une singularité essentielle en 0.

Exemple 229. Un polynôme P de degré $n \geq 1$ est méromorphe en le point ∞ et y a un pôle d'ordre n.

Exemple 230. Pour polynôme P de degré $n \geq 1$, la fonction $z \mapsto \frac{1}{P(z)}$ est méromorphe sur $\hat{\mathbb{C}}$ avec des pôles au points où $P(z) = 0$ et elle est holomorphe au point ∞.

Remarque 231. Les règles de calcul sur la sphère de Riemann sont simples : $\infty^n = \infty$ pour $n \geq 1$, $\infty^n = 0$, $0^n = \infty$ pour $n \leq -1$.

Remarque 232. On évite de définir d'autres choses comme $\infty + \infty$ ou ∞/∞, mais cela ne pose pas trop de problème, car les fonctions qu'on regarde n'ont que des zéros et des pôles isolés et les valeurs autour sont donc des nombres dans $\mathbb{C}^*$.

Remarque 233. Dans un sens, la sphère de Riemann n'est qu'un outil formel pour simplifier les notations ; dans un autre, il permet vraiment de comprendre ce qui se passe globalement.

Exercice 234. Pour une fonction $f : U \to \mathbb{C}$ qui est méromorphe au voisinage de l'infini, montrer qu'on peut écrire un développement de Laurent en l'infini de la forme

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{-k}}{z^k}$$

convergent sur $A(0, r, \infty)$ pour r assez grand.

10. Théorème des résidus

10.1. Motivation.

- Dans la section sur l'intégration, on a vu comment si $f : U \to \mathbb{C}$ est holomorphe, on peut déplacer les contours de manière homotope dans U sans changer les valeurs d'intégrales.
- Comme on l'a vu plusieurs fois, si on force un contour à traverser un pôle d'ordre 1, on attrape une intégrale de contour de type $\oint_{\partial D(0,\epsilon)} \frac{1}{z} \mathrm{d}z = 2\pi i$.
- Pour les fonctions holomorphes avec des singularités isolées, on va voir que les règles pour bouger les contours sont simples : il suffit de prendre en compte le terme devant $\frac{1}{z-z_*}$ de la partie singulière.
- C'est exactement ce que nous dit le théorème des résidus.

10.2. **Résidus.** Le résidu d'une fonction en un point est simplement le coefficient devant le terme de degré -1 :

Définition 235. Si une fonction $f : U \to \mathbb{C}$ a un développement en série de Laurent au voisinage de z_* donné par

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_*)^n,$$

on appelle résidu en z_* et on note $\mathrm{res}(f, z_*)$ le coefficient a_{-1}.

Exercice 236. Calculer le résidu en 0 des fonctions : $z \mapsto e^{1/z}$, $z \mapsto \cos(1/z)$ et $z \mapsto 1/\sin(z)$.

Le rôle du résidu dans l'intégration est expliqué par le lemme suivant :

Lemme 237. *Le résidu de f en z_* est l'unique nombre complexe A tel que la fonction*

$$z \mapsto f(z) - \frac{A}{z - z_*}$$

ait une primitive sur un voisinage épointé de z_*.

Démonstration. On exhibe simplement la primitive de la fonction $g(z) = f(z) - \mathrm{res}(f, z_*)/(z - z_*)$ en termes des sa série de Laurent en z_* :

— Autour de z_*, on a

$$g(z) = \sum_{n=-2}^{-\infty} a_n (z - z_*)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_*)^n$$

— Une primitive G de g est donnée par

$$G(z) = \sum_{n=-2}^{-\infty} \frac{a_n}{n+1} (z - z_*)^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (z - z_*)^{n+1},$$

où il est clair que la série a le même rayon de convergence que celle de g.

— Comme la fonction $z \mapsto 1/(z - z_*)$ n'a pas de primitive autour de z_*, on voit que le seul choix pour a est $\mathrm{res}(f, z_*)$.

□

Remarque 238. Ce lemme est simplement une formalisation du fait que le résidu est la seule obstruction d'intégration.

Le calcul des résidus pour les fonctions méromorphes se fait de manière très simple.

Lemme 239. *Soient f, g deux fonctions méromorphes sur un domaine $U \subset \mathbb{C}$ et soit $z_* \in U$:*

— *Si f a un pôle simple en z_*, on a*

$$\mathrm{res}(f, z_*) = \lim_{\substack{z \to z_* \\ \neq}} (z - z_*) f(z)$$

.

— *Si f a un pôle d'ordre k en z_*, on a*

$$\mathrm{res}(f, z_*) = \lim_{\substack{z \to z_* \\ \neq}} \frac{1}{(k-1)!} \frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}z^{k-1}} \Big((z - z_*)^k f(z) \Big)$$

— *Si f est holomorphe en z_* et si g a un zéro simple (c'est-à-dire $v_{z_*}(g) = 1$), on a*

$$\mathrm{res}\left(\frac{f}{g}, z_*\right) = \frac{f(z_*)}{g'(z_*)}.$$

— *La fonction f/f' est méromorphe sur U. Ses pôles sont donnés par les zéros et les pôles de f et on a*

$$\operatorname{res}\left(\frac{f'}{f}, z_*\right) = v_{z_*}(f).$$

Démonstration. La preuve consiste simplement à faire des développements de Laurent de f et de g :

— Pour les deux premières assertions : multiplier par $(z - z_*)^k$ sert simplement à décaler les coefficients vers la partie positive et dériver à faire descendre les coefficients de la partie positive.

— Pour les deux dernières assertions : cela suit d'une simple mise en évidence de $(z - z_*)^{v_{z_*}(f)}$ et de $(z - z_*)^{v_{z_*}(g)}$ dans le développement en série.

□

10.3. **Théorème.** Le théorème des résidus formalise simplement le calcul des intégrales pour des fonctions holomorphes avec un nombre fini de singularités :

Théorème 240 (Théorème des résidus)**.** *Soit U un ouvert simplement connexe et soit $f : U \setminus F \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe où F est fini. Soit $\gamma \subset U \setminus F$ un lacet. Alors on a*

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{z_*\in F} \mathrm{res}(f, z_*)\,\mathrm{Ind}_\gamma(z_*).$$

Démonstration. L'idée est de "neutraliser" tous les résidus "artificiellement" et de compter ce qu'on a retranché pour faire ça :

- Soit $g : U \setminus F \to \mathbb{C}$ la fonction définie par
$$g(z) = f(z) - \sum_{z_*\in F} \frac{\mathrm{res}(f, z_*)}{z - z_*}.$$
- La fonction admet une primive localement autour de chaque z_* par le lemme 237.
- Pour tout lacet $\lambda : U \setminus F \to \mathbb{C}$, on a que $\frac{1}{2\pi i}\oint_\lambda g(z)\,\mathrm{d}z = 0$: tout lacet peut être contracté à travers les points de F sans changer l'intégrale, grâce au fait que g a une primitive autour de chacun des points de F.
- Ainsi
$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z &= \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \sum_{z_*\in F}\frac{\mathrm{res}(f, z_*)}{z - z_*}\\ &= \sum_{z_*\in F} \mathrm{res}(f, z_*)\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{1}{z - z_*}\\ &= \sum_{z_*\in F} \mathrm{res}(f, z_*)\,\mathrm{Ind}_\gamma(z_*).\end{aligned}$$

□

Remarque 241. La manière intuitive de penser à ce théorème est en se disant qu'on veut contracter le contour γ jusqu'à ce qu'il soit un point (à ce moment l'intégrale de contour vaudra 0). A chaque fois que l'on passe par un point, on prend un terme qui vient de son résidu.

Souvent, on s'intérresse à des lacet simples, qui sont les bords de domaines simplement connexes (par le théorème de Jordan, que l'on ne prouvera pas, mais il est plutôt intuitif). Dans cas, l'indice du lacet devient 1 pour tout point à l'intérieur du domaine et 0 autrement :

Corollaire 242. *Soit U un domaine simplement connexe et $f : U \setminus F \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe, où F est un ensemble fini. Soit $\gamma \subset U \setminus F$ un lacet simple avec $\gamma = \partial\Omega$ où $\Omega \subset U$ est simplement connexe. On a*

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{z_*\in F\cap\Omega} \mathrm{res}(f, z_*).$$

Si on s'intéresse à la valeur d'une fonction holomorphe en un point, on a le corollaire suivant, qui étend la formule de Cauchy :

Corollaire 243. *Si $f : U \to \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe où $U \subset \mathbb{C}$ est un domaine simplement connexe, alors pour tout $z_* \in U$ et tout $\gamma \subset U \setminus \{z_*\}$, on a*

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{z - z_*}\mathrm{d}z_* = \mathrm{Ind}_\gamma(z_*)\,f(z_*).$$

Démonstration. Cela suit du théorème des résidus appliqué à la fonction $z \mapsto f(z)/(z - z_*)$. □

10.4. **Comptage des zéros.** Une application utile du théorème des résidus est au comptage des zéros et pôles d'une fonction holomorphe.

Proposition 244 (Comptage de zéros)**.** *Soit U un ouvert simplement connexe et f une fonction méromorphe sur U avec un ensemble fini F de pôles et de zéros. Pour tout lacet $\gamma \subset U \setminus F$, on a*

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} \mathrm{d}z = \sum_{z_* \in F} v_{z_*}(f) \operatorname{Ind}_\gamma(z_*) .$$

Démonstration. Cela suit directement de la proposition 223 et du théorème des résidus. □

Remarque 245. Dans ce comptage, les zéros sont comptés positivement, pondérés par leurs multiplicités, et les pôles sont comptés négativement, pondérés par leurs ordres.

10.5. **Résidu à l'infini.**

— Sur la sphère de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$, les notions de singularités sont toujours bien définies, et on peut étudier ce qui se passe à l'infini par inversion, comme expliqué dans la section 9.9.

— Si une fonction $f : U \to \mathbb{C}$ est méromorphe au voisinage de l'infini, on a que $w \mapsto f\left(\frac{1}{w}\right)$ est méromorphe au voisinage de 0.

— En appliquant la formule de changement de variables pour $M > 0$ assez grand

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D(0,M)} f(z)\,\mathrm{d}z = \oint_{\partial D(0,\frac{1}{M})} f\left(\frac{1}{w}\right)\left(-\frac{1}{w^2}\right)\mathrm{d}w = -\oint_{\partial D(0,M)} \frac{f(1/w)}{w^2}\mathrm{d}w.$$

— Cela suggère de définir le résidu en l'infini comme celui de $w \mapsto -f(1/w)/w^2$ en 0. 2

Définition 246. Si $f : U \to \mathbb{C}$ est une fonction méromorphe au voisinage de l'infini, on définit le résidu de f en ∞ comme le résidu de h définie par $h(w) = -f(1/w)/w^2$ en 0 :

$$\operatorname{res}(f,\infty) = \operatorname{res}(h,0).$$

Remarque 247. Grâce au résidu à l'infini, on peut déformer un contour pour le faire passer à travers l'infini (il est pratique de visualiser ce qui se passe sur la projetion stéréographique : le contour passe simplement le pôle Nord).

11. Calcul d'intégrales réelles

11.1. **Motivation.**

— On a vu grâce au théorème des résidus que calculer une intégrale de contour le long d'un lacet revient simplement à sommer les résidus aux singularités.

— C'est souvent beaucoup plus simple que les méthodes apprises pour les intégrales réelles, qui consistent à trouver la primitive (or une telle primitive n'est souvent pas disponible).

— Cela pose la question de savoir s'il est possible d'utiliser la méthode des résidus pour calculer les intégrales réelles (sans trouver de primitive, donc).

— La réponse est assez simplement : certaines intégrales réelles peuvent se ramener (par ce qui ressemble à une collection d'astuces) à des calculs d'intégrales complexes.

— Même si cela ne fonctionne a priori que dans des cas particuliers, la classe de ces cas particuliers est assez grande et permet en particulier d'obtenir un grand nombre de résultats très utiles qui seraient difficiles à obtenir autrement.

11.2. **Transformées de Fourier.** Parmi les exemples les plus intéressants d'intégrales réelles calculables avec des méthodes complexes se trouvent les transformées de Fourier.

Définition 248. La transformée de Fourier d'une fonction intégrable (au sens de Riemann impropre sur $(-\infty, \infty)$) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est la fonction $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\xi x} \mathrm{d}x.$$

Remarque 249. Pour motiver la transformée de Fourier (qui sera vue en Analyse IV), on peut simplement donner la formule d'inversion de Fourier

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)\, e^{i\xi} \mathrm{d}\xi,$$

où on voit que f est décomposée en une somme continue (intégrale) de fonctions trigonométriques $x \mapsto e^{i\xi x} = \cos \xi x + i \sin \xi x$ de fréquences ξ.

— Si f est un signal sonore qu'on entend (où x est le temps), $\hat{f}$ contient les intensités des notes / fréquences du signal.
— Si f un signal lumineux qu'on voit sont (où x est le temps), $\hat{f}$ contient les intensités des couleurs.

Grâce à la méthode des résidus, on peut calculer de nombreuses transformées de Fourier :

11.3. **Calcul de transformées de Fourier.**

— Pour les intégrales de la forme

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\xi x}\mathrm{d}x,$$

l'idée est souvent de prendre pour contour d'intégration le bord du demi-disque supérieur Γ_R^+ ou inférieur Γ_R^-, de rayon R centré en 0.

— Typiquement on prend l'union du segment $[-R,R]$ avec un demi-cercle de rayon R supérieur (C_R^+) ou inférieur (C_R^-), où

$$C_R^+ = \left\{Re^{i\theta} : \theta \in [0,\pi]\right\}$$

et

$$C_R^- := \left\{Re^{i\theta} : \theta \in [-\pi,0]\right\}.$$

— Ainsi l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial\Gamma_R} g(z)\,\mathrm{d}\zeta = \sum_{z\in \operatorname{sing}(g)\cap\Gamma_R} \operatorname{res}(z,g),$$

pour tout $R>0$, où $\operatorname{sing}(g)$ désigne l'ensemble des singularités de g.

— Maintenant, s'il se trouve que l'intégrale le long de C_R^+ ou C_R^- tend vers 0 quand $R\to+\infty$ il ne restera que l'intégrale le long de l'axe réel, ce qui est le résultat souhaité.

Le fait que l'un de C_R^+ et de C_R^- est négligeable est donné par le lemme de Jordan :

Lemme 250 (Lemme de Jordan). *Soit f une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec $|f(z)| = o(1/|z|)$ quand*

$$|z|\to\infty.$$

On a que

$$\int_{C_R^+} f(z)\, e^{-i\xi z}\mathrm{d}z \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \textit{pour } \xi<0,$$
$$\int_{C_R^-} f(z)\, e^{-i\xi z}\mathrm{d}z \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \textit{pour } \xi>0.$$

Démonstration. Montrons seulement le cas $\xi<0$ (l'autre cas est identique) :

— On voit que $f(x)\,e^{-i\xi x}$ est borné par $|f(z)| = o(1/|z|)$ en module et donc l'intégrale est bornée.

— On a $\left|e^{-i\xi z}\right| = e^{\xi \Im\mathrm{m}(z)}$, quand $\xi<0$, ce qui nous permet d'espérer que l'essentiel de l'intégrale tend vers 0 sur l'essentiel du contour C_R^+.

— Comme $|f(z)\,z|\to 0$ quand $z\to\infty$, pour tout $\epsilon>0$, on a qu'il existe $\delta>0$ tel que sur le secteur $C_{R,\delta}^+ = \left\{Re^{i\theta} : \theta\in[\delta,\pi-\delta]\right\}$, on ait pour tout $R>0$

$$\left|\int_{C_R^+} f(z)\, e^{-i\xi z}\mathrm{d}z - \int_{C_{R,\delta}^+} f(z)\, e^{-i\xi z}\right|\mathrm{d}z$$
$$\le 2\pi R\delta \max_{f\in C_R^+\setminus C_{R,\delta}^+} |f(z)| \le \epsilon.$$

— Maintenant, en faisant tendre $R\to\infty$, on a

$$\left|\int_{C_{R,\delta}} f(z)\, e^{-i\xi z}\mathrm{d}z\right| \le e^{-R\sin\delta} \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

— Ainsi pour tout $\epsilon > 0$, on a

$$\limsup_{R\to+\infty}\left|\int_{C_R^+} f(z)\, e^{-i\xi z}\mathrm{d}z\right| \le \epsilon,$$

ce qui donne le résultat.

□

Cela nous amène au résultat suivant :

Proposition 251 (Transformées de Fourier par résidus). *On a que*

$$\hat{f}(\xi) = i \sum_{z_*\in \mathrm{sing}(g)\cap\mathbb{H}^+} \mathrm{res}\left(e^{-i\xi z} f(z), z_*\right) \qquad \text{si } \xi < 0$$

$$\hat{f}(\xi) = -i \sum_{z_*\in \mathrm{sing}(g)\cap\mathbb{H}^-} \mathrm{res}\left(e^{-i\xi z} f(z), z_*\right) \qquad \text{si } \xi > 0.$$

Démonstration. Faisons seulement le cas $\xi < 0$; le cas $\xi > 0$ est identique ; grâce au théorème des résidus, et ensuite au de Jordan, on a

$$\begin{aligned} & i \sum_{z_*\in \mathrm{sing}(g)\cap\mathbb{H}^+} \mathrm{res}\left(e^{-i\xi z} f, z_*\right) \\ &= \lim_{R\to+\infty} \int_{C_R^+} f(x)\, e^{-i\xi x}\mathrm{d}x \\ &= \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\, e^{-i\xi x}, \end{aligned}$$

ce qui est le résultat désiré. □

Exemple 252. Si on veut calculer la transformée de Fourier de $1/(x^2+1)$, on a, pour $\xi < 0$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\xi x}}{x^2+1}\mathrm{d}x \\ =& \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\xi x}}{(x+i)(x-i)}\mathrm{d}x \\ =& ie^{-i\xi(-i)}\mathrm{res}(f, i) \\ =& -\frac{i}{2i}e^{-\xi} = \frac{e^{-\xi}}{2}, \end{aligned}$$

et pour $\xi > 0$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\xi x}}{x^2+1}\mathrm{d}x \\ =& \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\xi x}}{(x+i)(x-i)}\mathrm{d}x \\ =& -ie^{-i\xi(i)}\mathrm{res}(f, -i) \\ =& -\frac{i}{-2i}e^{\xi} = \frac{e^{\xi}}{2} \qquad \text{pour } \xi > 0, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\xi x}}{x^2+1}\mathrm{d}x = \frac{e^{-|\xi|}}{2}.$$

11.4. **Autres exemples d'intégrales.** L'intégrale indéfinie d'une fonction analytique f sur $\mathbb{R}$, qui correspond au cas $\xi = 0$ de la transformée de Fourier de f, s'exprime facilement en termes des pôles si f décroît assez vite :

Lemme 253. *Si f est une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec $f(z) = o(1/|z|)$ quand $|z| \to \infty$ et l'ensemble des pôles de f fini, on a*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\,\mathrm{d}z = i\sum_{z\in\operatorname{sing}(f)\cap\mathbb{H}^+}\operatorname{res}(f,z) = -i\sum_{z\in\operatorname{sing}(f)\cap\mathbb{H}^-}\operatorname{res}(f,z).$$

Démonstration. C'est la même preuve que pour la Proposition 251 :

— Si on note $C_\rho^+ = \left\{\rho e^{i\theta} : \theta\in[0,\pi]\right\}$ et $C_\rho^- = \left\{\rho e^{i\theta} : \theta\in[-\pi,0]\right\}$, comme avant on a que l'intégrale

$$\left|\int_{C_\rho^\pm} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq \pi\rho\sup_{z\in C_\rho}|f(z)| \underset{\rho\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

— Par conséquent pour les demi-disques supérieur Γ_ρ^+ et inférieur Γ_ρ^-, on

$$\sum_{z\in\operatorname{sing}(f)\cap\mathbb{H}^+}\operatorname{res}(f,z) = \lim_{\rho\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial\Gamma_R^+} f(z)\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\,\mathrm{d}z$$

$$-\sum_{z\in\operatorname{sing}(f)\cap\mathbb{H}^-}\operatorname{res}(f,z) = -\lim_{\rho\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial\Gamma_R^+} f(z)\,\mathrm{d}z = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\,\mathrm{d}z,$$

ce qui donne le résultat.

□

Une autre classe de fonctions qui peuvent se calculer avec la méthode des résidus est constituée des intégrales de la forme $\int_0^{2\pi} R(\cos t,\sin t)\,\mathrm{d}t$, où R est une fraction rationnelle, c'est-à-dire de la forme P/Q où P et Q sont des polynômes :

Proposition 254. *Si $R(x,y)$ est une fonction rationnelle qui n'a pas de pôles sur $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\right\}$, on a que*

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta = 2\pi i\sum_{z\in\operatorname{sing}(r)\cap D(0,1)}\operatorname{res}(r,z),$$

où

$$r(z) = \frac{1}{iz}R\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right).$$

Démonstration. Comme pour $z = e^{i\theta}\in\partial D(0,1)$, on a $\cos\theta = \frac{1}{2}(z+\bar{z}) = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ et $\sin\theta = \frac{1}{2i}(z-\bar{z}) = \frac{1}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)$, on a

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta = \oint_{\partial D(0,1)}\frac{1}{iz}R\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)\mathrm{d}z = \oint_{\partial D(0,r)} r(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i\sum_{z\in\operatorname{sing}(r)\cap D(0,1)}\operatorname{res}(r,z)$$

□

Exemple 255. Pour $a > 1$, on a

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{a+\sin\theta}\mathrm{d}\theta = \oint_{\partial D(0,1)}\frac{1}{a+\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)}\frac{1}{iz}\mathrm{d}z = \oint_{\partial D(0,)1}\frac{2}{z^2+2iaz-1}\mathrm{d}z,$$

on a deux pôles simples en $z_* := \left(-ia+i\sqrt{a^2-1}\right)$ et $1/z_*$; seul z_* est dans $D(0,1)$ et le résidu y est

$$\operatorname{res}(r,z_*) = \frac{2z_*}{z_*^2+1} = \frac{-i}{\sqrt{a^2-1}},$$

ce qui donne

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a+\sin\theta} \mathrm{d}\theta = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

12. Théorème des nombres premiers

12.1. **Énoncé.** Le théorème des nombres premiers est l'un des plus remarquables théorèmes de toutes les mathématiques.

- Pour $x > 0$, on définit $\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1$ comme le nombre de nombres premiers plus petits que x.
- On note $f(x) \sim g(x)$ quand $x \longrightarrow \infty$ si $f(x)/g(x) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 1$.

Le théorème nous donne la répartition approximative des nombres premiers :

Théorème 256 (Théorème des nombres premiers (Hadamard, de la Vallée Poussin))**.** *Quand $n \longrightarrow \infty$, on a*

$$\pi(n) \sim \frac{n}{\log n}.$$

Démonstration. La preuve est donnée dans la section 12.3. □

12.2. **Les fonctions ζ et Φ.** On va maintenant introduire deux fonctions méromorphes qui seront fondamentales dans notre analyse : la fonction ζ et la fonction Φ. Elles seront définies sur des demi-plans "droits" :

Définition 257. Pour $t \in \mathbb{R}$, on note $\mathbb{H}_t = \{s \in \mathbb{C} : \mathfrak{Re}(s) > t\}$ et $\bar{\mathbb{H}}_t = \{s \in \mathbb{C} : \mathfrak{Re}(s) \geq t\}$.

Les fonctions ζ et Φ sont initialement définies sur $\mathbb{H}_1$ (on les étendra plus loin).

Définition 258. On définit les fonctions ζ et Φ sur $\mathbb{H}_1$ par

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

$$\Phi(s) = \sum_p \frac{\log p}{p^s} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\log p_k}{p_k^s},$$

où la somme est sur la suite des nombres premiers $p_0, p_1, p_2, \ldots = 2, 3, 5, \ldots$.

Remarque 259. Le fait que ces deux fonctions soient bien définies et holomorphes sur $\mathbb{H}_1$ est facile à voir, en utilisant que les séries $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^t}$ et $\sum_p \frac{\log p}{p^s} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^t}$ convergent pour tout $t \in \mathbb{R}$ avec $t > 1$.

Lemme 260. *Pour tout $s \in \mathbb{H}_1$, on a*

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}}.$$

Démonstration. Si on regarde l'ensemble $\mathcal{E}(N)$ des nombres dont les diviseurs premiers sont au plus N, on a

$$\prod_{p \leq N} \frac{1}{1 - p^{-s}} = \prod_{p \leq N} \left(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{p^{3s}} + \cdots\right) = \sum_{n \in \mathcal{E}(N)} \frac{1}{n^s}.$$

En faisant tendre $N \to \infty$, on obtient le résultat. □

Un premier lemme qui nous sera utile :

Lemme 261. *La fonction $s \mapsto \zeta(s) - \frac{1}{s-1}$ a un prolongement holomorphe à $\mathbb{H}_0$.*

12.3. **Preuve du théorème des nombres premiers.** Nous pouvons maintenant passer à la preuve du théorème des nombres premiers. L'idée est la suivante :

— Connecter le comportement asymptotique quand $n \to \infty$ de la fonction π à celui de la fonction $\varphi(x) = \sum_{p \le x} \log p$.
— Connecter le comportement asymptotique de φ à la convergence de l'intégrale $I_1 = \int_1^\infty (\varphi(x) - x)/x^2 \mathrm{d}x$.
— Connecter la convergence de I_1 à l'absence de pôles de $I(s) = \int_1^\infty (\varphi(x) - x)/x^{s+1} \mathrm{d}x$ sur $\overline{\mathbb{H}}_1$.
— Connecter les pôles de I et les pôles de $\Phi(s) = \sum_p \frac{\log p}{p^s}$, où la somme est sur la suite des nombres premiers.
— Connecter les pôles de la fonction Φ aux zéros de la fonction ζ.
— Etudier les zéros de la fonction ζ et montrer qu'elle n'en a pas sur $\bar{\mathbb{H}}_1$.

La connexion entre π et φ est donnée par le lemme suivant :

Lemme 262. *Soit $\varphi(x) = \sum_{p \le x} \log p$, où la somme est sur les nombres premiers $p \le x$. Si $\varphi(n) \sim n$ quand $n \to \infty$, alors $\pi(n) \sim n/\log n$.*

La connexion entre le comportement asymptotique de φ et la convergence de l'intégrale I_1 est donnée par :

Lemme 263. *Si $I_1 = \int_1^\infty (\varphi(x) - x)/x^2 \mathrm{d}x$ converge, alors $\varphi(n) \sim n$.*

La connexion entre la convergence de I_1 et l'absence de pôles de $I(s)$ est donnée par :

Lemme 264. *Si $I(s) = \int_1^\infty (\varphi(x) - x)/x^{s+1} \mathrm{d}x$ a une extension méromorphe à $\mathbb{H}_{\frac{1}{2}}$ sans pôle sur $\bar{\mathbb{H}}_1$, alors I_1 converge.*

La connexion entre I et Φ est donnée par :

Lemme 265. *La fonction I s'étend en une fonction méromorphe sur $\mathbb{H}_{\frac{1}{2}}$ qui satisfait*

$$I(s) = \frac{\Phi(s)}{s} - \frac{1}{s-1}.$$

La connexion entre les pôles de de Φ et ceux de ζ est donnée par :

Lemme 266. *Sur $\mathbb{H}_{\frac{1}{2}}$, la fonction Φ a une extension méromorphe avec des pôles simples qui correspondent aux zéros et aux pôles de la fonction ζ :*
— *Tout zéro d'ordre n de ζ correspond à un pôle simple avec résidu $-n$ de Φ.*
— *Le pôle simple de ζ correspond à un pôle simple avec résidu 1 de Φ.*

Pour les zéros de la fonction ζ on a :

Lemme 267. *Sur $\bar{\mathbb{H}}_1$, la fonction ζ n'a aucun zéro.*

Avec tous ces ingrédients, nous avons maintenant la preuve du théorème des nombres premiers :

Preuve du théorème 256. Avec les lemmes ci-dessus, la preuve est très simple :
— Par le lemme 267, la fonction ζ n'a pas de zéro.
— Par le lemme 266 le seul pôle de la fonction Φ sur $\bar{\mathbb{H}}_1$ est un pôle simple en 1, avec un résidu de 1.
— Par le lemme 265, la fonction I n'a pas de pôle sur $\bar{\mathbb{H}}_1$.
— Par le lemme 264, l'intégrale I_1 converge.
— Par le lemme 263, on a que $\varphi(n) \sim n$.
— Par le lemme 262, on a que $\pi(n) \sim n/\log n$.

□

Remarque 268. Dans les sections ci-dessous, la preuve des lemmes nécessaires est donnée, entre-coupée d'énoncés préliminaires pour la preuve de ces lemmes. Les énoncés se déduisent dans l'ordre linéaire : il n'y a que dans la preuve du théorème 256 qu'on a fait appel à des lemmes prouvés ultiérieurement (il est présenté ainsi pour des raisons de clarté, et pour permettre de voir la structure d'ensemble).

12.4. **Preuve du lemme 261.** Nous montrons maintenant que la fonction ζ s'étend en une fonction méromorphe au-delà de $\mathbb{H}_1$:

Lemme (Lemme 261). *La fonction $s \mapsto \zeta(s) - \frac{1}{s-1}$ a un prolongement holomorphe à $\mathbb{H}_0$.*

Démonstration. L'idée est de couper en morceaux :

— Observons d'abord que $\int_1^\infty \frac{1}{x^s}\mathrm{d}x = \frac{x^{-s+1}}{-s+1}\Big|_1^\infty = \frac{1}{s-1}$.

— On peut ensuite écrire

$$\begin{aligned}\zeta(s) - \frac{1}{s-1} &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{1}{n^s}\mathrm{d}x\right) - \left(\sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{1}{x^s}\mathrm{d}x\right)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s}\right)\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(s),\end{aligned}$$

où

$$\varphi_n(s) = \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s}\right)\mathrm{d}x.$$

— Maintenant, en utilisant la majoration classique $\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq |b-a| \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$ suivie de l'inégalité des accroissements finis, on obtient

$$|\varphi_n(s)| \leq \sup_{x\in[n,n+1]} \left|\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s}\right| \leq \sup_{x\in[n,n+1]} \left|\frac{s}{x^{s+1}}\right| = \frac{|s|}{n^{\Re\mathrm{e}(s)+1}}.$$

— On a gagné un facteur de $\frac{1}{n}$ au dénominateur : comme

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(s)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|s|}{n^{\Re\mathrm{e}(s)+1}} < \infty$$

pour tout $s \in \mathbb{H}_0$, on a que $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n$ converge normalement sur $\mathbb{H}_0$.

— En conséquence $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n$ est un prolongement analytique de $s \mapsto \zeta(s) - \frac{1}{s-1}$ à $\mathbb{H}_0$.

$\square$

12.5. **Preuve du lemme 262.** Nous ramenons maintenant le théorème des nombres premiers à un énoncé sur le comportement asymptotique de φ :

Lemme (Lemme 262)**.** *Soit $\varphi(x) = \sum_{p\le x} \log p$, où la somme est sur les nombres premiers $p \le x$. Si $\varphi(n) \sim n$ quand $n \to \infty$, alors $\pi(n) \sim n/\log n$.*

Démonstration. Montrons que $\pi(x) \sim \varphi(x)/\log(x)$:

— On a
$$\varphi(x) = \sum_{p\le x} \log p \le \sum_{p\le x} \log x = \pi(x)\log(x),$$
ce qui nous donne la direction facile
$$\pi(x) \ge \varphi(x)/\log(x).$$

— Maintenant pout tout $\epsilon > 0$, on a
$$\begin{aligned}\varphi(x) &\ge \sum_{x^{1-\epsilon}\le p\le x} \log(p)\\ &\ge \sum_{x^{1-\epsilon}\le p\le x} \log\left(x^{1-\epsilon}\right)\\ &\ge (1-\epsilon)\sum_{x^{1-\epsilon}\le p\le x} \log(x)\\ &\ge (1-\epsilon)\left(\pi(x) - \pi\left(x^{1-\epsilon}\right)\right)\ln(x)\\ &= (1-\epsilon)\pi(x)\ln(x)\left(1 - \frac{\pi\left(x^{1-\epsilon}\right)}{\pi(x)}\right)\end{aligned}$$
ce qui donne
$$\varphi(x) \ge (1-\epsilon)\left(\pi(x) - \pi\left(x^{1-\epsilon}\right)\right)\log(x) \ge (1-\epsilon)\pi(x)\log(x)\left(1 - \frac{\pi\left(x^{1-\epsilon}\right)}{\pi(x)}\right).$$

— Maintenant, comme $\pi\left(x^{1-\epsilon}\right) \le x^{1-\epsilon}$ et comme $\pi(x) \ge \varphi(x)/\log(x)$ (la direction facile), on a $\pi\left(x^{1-\epsilon}\right)/\pi(x) \le x^{1-\epsilon}\log(x)/\varphi(x)$.

— Maintenant comme $\varphi(x) \sim x$, on a $x^{1-\epsilon}\ln(x)/\varphi(x) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc pour tout $\epsilon > 0$, il existe $M \ge 0$ tel que pour tout $x \ge M$, on ait
$$\varphi(x) \ge (1-\epsilon)\left(\pi(x) - \pi\left(x^{1-\epsilon}\right)\right)\log(x) \ge (1-\epsilon)\pi(x)\log(x)(1-\epsilon) = (1-\epsilon)^2\pi(x)\log(x).$$

— Comme $\epsilon > 0$ est arbitraire, on a que $\lim_{x\to\infty}\pi(x)/\log(x) = 1$, ce qui est ce qu'on voulait montrer.

□

12.6. **Preuve du lemme 263.** Nous connectons maintenant le comportement asymptotique de $\varphi(n)$ avec la convergence de l'intégrale I_1 :

Lemme (Lemme 263)**.** *Si* $I_1 = \int_1^\infty (\varphi(x) - x)/x^2 \mathrm{d}x$ *converge, alors* $\varphi(n) \sim n$.

Démonstration. L'idée est que si $\varphi(x) - x$ devient trop grand ou trop petit (dans les négatifs), cela empêche l'intégrale $F(y) = \int_1^y (\varphi(x) - x)/x^2 \mathrm{d}x$ de se stabiliser quand $y \to \infty$.

— Il suffit de montrer que pour tout $\epsilon > 0$, l'ensemble $\left\{x \in \mathbb{R}_+^* : |\varphi(x) - x| \geq \epsilon x\right\}$ est borné.

— Posons $\lambda = 1 + \epsilon > 1$ et montrons d'abord par l'absurde que $\left\{x \in \mathbb{R}_+^* : \varphi(x) \geq \lambda x\right\}$ est borné

  — Sinon, il existe une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ dans $\mathbb{R}_+^*$ avec $a_n \to +\infty$ telle que $\varphi(a_n) \geq \lambda a_n$.

  — On aurait alors,

$$\int_{a_n}^{\lambda a_n} \frac{\varphi(x) - x}{x^2}\mathrm{d}x \geq \int_{a_n}^{\lambda a_n} \frac{\lambda a_n - x}{x^2}\mathrm{d}x = \int_1^\lambda \frac{\lambda a_n - t a_n}{t^2 a_n^2} a_n \mathrm{d}t = \int_1^\lambda \frac{\lambda - t}{t^2}\mathrm{d}t \geq \frac{1}{\lambda^2}\int_1^\lambda (\lambda - t)\,\mathrm{d}t = \frac{(\lambda - 1)^2}{2\lambda^2} = c(\lambda)$$

  où dans la première inégalité on a utilisé que $\varphi(x) \geq \varphi(a_n) \geq \lambda a_n$ sur $[a_n, \lambda a_n]$ (car φ est croissante) et dans la première égalité on a utilisé le changement de variable $x = t a_n, \mathrm{d}x = a_n \mathrm{d}t$.

  — Ainsi on aurait une suite $a_n \to +\infty$ avec $F(\lambda a_n) - F(a_n) \geq c(\lambda) > 0$ pour tout $n \geq 0$ et donc F ne pourrait pas converger.

— Posons maintenant $\mu = 1 - \epsilon < 1$ et montrons que $\left\{x \in \mathbb{R}_+^* : \varphi(x) \leq \mu x\right\}$ est borné de la même manière.

  — Sinon, il existe une suite $(b_n)_{n\geq 0}$ dans $\mathbb{R}_+^*$ avec $b_n \to +\infty$ telle que $\varphi(b_n) \leq \mu b_n$.

  — On aurait alors, en utilisant les mêmes techniques que pour $(a_n)_{n\geq 0}$ ci-dessus :

$$\int_{\mu b_n}^{b_n} \frac{\varphi(x) - x}{x^2}\mathrm{d}x \leq \int_{\mu b_n}^{b_n} \frac{\mu b_n - x}{x^2}\mathrm{d}x = \int_\mu^1 \frac{\mu - t}{t^2}\mathrm{d}t \leq -(\mu - 1)^2 = \tilde{c}(\mu) < 0.$$

  — Ainsi on aurait une suite $b_n \to +\infty$ avec $F(b_n) - F(\mu b_n) \leq \tilde{c}(\mu) < 0$ et donc F ne pourrait pas converger.

— On en déduit que $\left\{x \in \mathbb{R}_+^* : |\varphi(x) - x| \geq \epsilon x\right\}$ est borné pour tout $\epsilon > 0$ et ainsi $\left|\frac{\varphi(x)}{x} - 1\right| \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui est qu'on voulait démontrer.

□

12.7. **Transformation de Laplace.** Afin de prouver le lemme 264 qui nous permet de conclure de l'existence de l'intégrale $I_1 = \int_1^\infty \frac{\varphi(x)-x}{x^2}$ à partir de l'absence de pôle de $I(s) = \int_1^\infty \frac{\varphi(x)-x}{x^{s+1}}\mathrm{d}x$ sur $\bar{\mathbb{H}}_0$, nous aurons besoin d'un résultat sur la transformation de Laplace.

Définition 269. Pour une fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ bornée et continue par morceaux, on définit sa transformée de Laplace $\mathcal{L}f : \mathbb{H}_0 \to \mathbb{C}$ par

$$\mathcal{L}f(z) = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-zt}\mathrm{d}t.$$

Remarque 270. La convergence de l'intégrale $\mathcal{L}f(z)$ pour $z \in \mathbb{H}_0$ est facile à voir comme f est bornée (et continue par morceaux), grâce à la décroissance exponentielle de e^{zt} quand $t \to +\infty$, et il est facile de voir qu'elle est holomorphe sur $\mathbb{H}_0$ pour les mêmes raisons.

Intuitivement, quand $z \to 0$, sir $\mathcal{L}f$ et f sont assez régulières, on devrait retrouver $\int_0^\infty f(t)\,\mathrm{d}t$; c'est précisément ce que donne le théorème suivant :

Théorème 271. *Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ bornée et continue par morceaux. Si $\mathcal{L}f$ s'étend en une fonction méromorphe sur $\mathbb{H}_{-\delta}$ pour un $\delta > 0$ qui soit sans pôle sur $\bar{\mathbb{H}}_0$, alors $\int_0^\infty f(t)\,\mathrm{d}t$ existe et vaut $\mathcal{L}f(0)$.*

Remarque 272. Malgré sont côté intuitif, ce théorème est vraiment non trivial, en ceci qu'il connecte la présence d'une extension méromorphe à $\mathcal{L}f$ (qui n'a a priori pas forcément d'interprétation en tant qu'intégrale de f) au comportement de f. Comme on le voit dans la preuve, l'idée-clé est que si une fonction a un prolongement analytique, on peut exprimer ses valeurs en termes d'intégrales de contours qui peuvent se promener n'importe où dans la région du prolongement analytique.

Preuve du lemme 271. Pour $T > 0$, définissons la fonction entière $\mathcal{L}_T f(z) = \int_0^T f(t)\, e^{-tz}$; ce qu'il nous faut montrer est que quand $T \to \infty$:

$$\mathcal{L}_T f(0) - \mathcal{L}f(0) = \underset{T\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

- L'idée est d'exploiter la méromorphie de $\mathcal{L}_T f - \mathcal{L}f$ pour exprimer sa valeur en 0 en terme d'une intégrale de contour et de montrer que cette intégrale de contour est aussi petite qu'on veut.
- Pour $R > 0$, posons $\Omega_R = \mathbb{H}_{-\delta/2} \cap D(0, R)$; on décompose le lacet $\partial\Omega_R$ en quatre morceaux (orienté dans le sens trigonométrique) :
  - Le demi-cercle $C_R^+ = \partial\Omega_R \cap \bar{\mathbb{H}}_0$, orienté de bas en haut.
  - La corde $C_R^- = \partial\Omega_R \cap \partial\mathbb{H}_{-\delta/2}$, orientée de haut en bas.
  - Un petit arc de cercle supérieur S_R^+ de longueur $O(\delta)$, orienté de droite à gauche.
  - Un petit arc de cercle inférieur S_R^-, de longueur $O(\delta)$, orienté de gauche à droite.
- Pour R fixé, on peut supposer, quitte à réduire $\delta > 0$, que $\mathcal{L}f$ n'a aucun pôle dans Ω_R (par hypothèse, il n'y a aucun pôle sur $\bar{\mathbb{H}}_0$ et les pôles sur $\mathbb{H}_{-\delta/2} \setminus \bar{\mathbb{H}}_0$ sont isolés).
- On a donc

$$\mathcal{L}_T f(0) - \mathcal{L}f(0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial\Omega_R} (\mathcal{L}_T f(z) - \mathcal{L}f(z))\frac{\mathrm{d}z}{z}.$$

- Maintenant, on peut multiplier par la fonction artificielle $z \mapsto \left(1 + z^2/R^2\right) e^{Tz}$ qui vaut 1 en 0 et n'a pas de pôle (la raison de son choix va devenir claire quand on obtiendra la borne (12.1) ci-dessous) et écrire

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_T f(0) - \mathcal{L}f(0) &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial\Omega_R} (\mathcal{L}_T f(z) - \mathcal{L}f(z))\left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) e^{Tz}\frac{\mathrm{d}z}{z} \\ &= A_{R,T}^+ + A_{R,T}^-\end{aligned}$$

  où $A_{R,T}^+, A_{R,T}^-$ désignent les intégrales le long de C_R^+ et de $\Gamma_R^- = S_R^+ \cup C_R^- \cup S_R^-$ respectivement.

— On décompose encore
$$A^-_{R,T} = E^-_{R,T} - F^-_{R,T},$$
où
$$E^-_{R,T} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma^-_R} \mathcal{L}_T f(z)\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)e^{Tz}\frac{\mathrm{d}z}{z},$$
$$F^-_{R,T} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma^-_R} \mathcal{L} f(z)\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)e^{Tz}\frac{\mathrm{d}z}{z}.$$

— On va montrer que pour tout $\epsilon > 0$, on peut trouver R assez grand pour que $\left|A^+_{R,T}\right| \leq \epsilon/2$ et que $\left|E^-_R\right| \leq \epsilon/2$ et qu'ensuite pour tout R fixé, $\lim_{T\to\infty} F^-_{R,T} = 0$. Cela donnera $\limsup_{T\to\infty} |\mathcal{L}_T f(0) - \mathcal{L} f(0)| \leq \epsilon$ pour tout ϵ, et ainsi
$$\mathcal{L}_T f(0) \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} \mathcal{L} f(0).$$

— Pour $A^+_{R,T}$:
  — Pour $z \in \mathbb{H}_0$, si on note
$$M = \sup_{t\in\mathbb{R}_+} |f(t)|,$$
  on a
$$|\mathcal{L}_T f(z) - \mathcal{L} f(z)| = \left|\int_T^\infty f(t)e^{-zt}\mathrm{d}t\right| \leq M\int_T^\infty \left|e^{-zt}\mathrm{d}t\right| = \frac{Me^{-\mathfrak{Re}(z)T}}{|\mathfrak{Re}(z)|}. \tag{12.1}$$
  — D'autre part pour $z \in \partial D(0,R)$, on a $R/z = \bar{z}/R$, d'où
$$\left|e^{Tz}\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)\frac{1}{z}\right| = \frac{\left|e^{Tz}\right|}{R}\left|\frac{R}{z}+\frac{z}{R}\right| = \frac{\left|e^{Tz}\right|}{R}\left|\frac{z}{R}+\frac{\bar{z}}{R}\right| = 2\frac{e^{T\mathfrak{Re}(z)}}{R^2}|\mathfrak{Re}(z)|. \tag{12.2}$$
  — On voit que le terme artificiel $e^{Tz}\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)$ a précisément servi à équilibrer la borne supérieure sur $|\mathcal{L}_T f(z) - \mathcal{L} f(z)|$.
  — Ainsi, sur $z \in C^+_R$, on obtient :
$$\left|(\mathcal{L}_T f(z) - \mathcal{L} f(z))\left(e^{Tz}\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)\frac{1}{z}\right)\right| \leq 2\frac{M}{R^2}. \tag{12.3}$$
  — Cela nous permet de majorer l'intégrale $A^+_{R,T}$ en termes de la longueur de C^+_R (qui vaut πR) et du maximum de l'intégrand (qui vaut $2M/R$)
$$\left|A^+_{R,T}\right| = \left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{C^+_R}(\mathcal{L}_T f(z) - \mathcal{L} f(z))\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)e^{Tz}\frac{\mathrm{d}z}{z}\right| \leq \frac{1}{2\pi}\cdot\pi R\cdot\left(2\frac{M}{R^2}\right) = \frac{M}{R}. \tag{12.4}$$
  — Ainsi, pour $R \geq 2M/\epsilon$, on a que $\left|A^+_{R,T}\right| \leq \epsilon/2$ pour tout $T \in \mathbb{R}_+$.

— Pour $E^-_{R,T}$, on procède de manière similaire :
  — Comme $\mathcal{L}_T f$ est une fonction entière, on peut déformer Γ^-_R en O^-_R, le demi-cercle $\{z \in \partial D(0,R) : \mathfrak{Re}(z) \leq 0\}$, et écrire
$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^-_R}\mathcal{L}_T f(z)e^{Tz}\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)\mathrm{d}z\right| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{O^-_R}\mathcal{L}_T f(z)e^{Tz}\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)\mathrm{d}z\right|.$$
  — On ensuite l'inégalité :
$$|\mathcal{L}_T f(z)| = \left|\int_0^T f(t)e^{-tz}\mathrm{d}z\right| \leq M\left|\int_0^T e^{-\mathfrak{Re}(z)t}\mathrm{d}t\right| = M\frac{e^{-\mathfrak{Re}(z)T}-1}{|\mathfrak{Re}(z)|} \leq \frac{Me^{-\mathfrak{Re}(z)T}}{|\mathfrak{Re}(z)|}.$$

— En réutilisant (12.2), pour tout $z \in \partial D(0,R)$, on a

$$\left|e^{Tz}\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)\frac{1}{z}\right| = 2\frac{e^{T\mathfrak{Re}(z)}}{R^2}\left|\mathfrak{Re}(z)\right|,$$

— Cela nous donne la borne similaire à (12.3) :

$$\left|\mathcal{L}_T f(z)\, e^{Tz}\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)\frac{1}{z}\right| \leq 2\frac{M}{R^2}.$$

— On peut majorer l'intégrale $E^-_{R,T}$ comme pour (12.4)

$$\left|E^-_{R,T}\right| = \left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_R^-}\mathcal{L}_T f(z)\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)e^{Tz}\frac{\mathrm{d}z}{z}\right| \leq \frac{1}{2\pi}\frac{Me^{-\mathfrak{Re}(z)T}}{\left|\mathfrak{Re}(z)\right|}\left(2\frac{e^{T\mathfrak{Re}(z)}}{R^2}\left|\mathfrak{Re}(z)\right|\right) \leq \frac{M}{R}.$$

— Ainsi, comme pour $A^+_{R,T}$, pour $R \geq 2M/\epsilon$, on a $\left|E^-_{R,T}\right| \leq \epsilon/2$.

— Pour $F^-_{R,T}$, on observe d'abord que sur $\{z \in \mathbb{C} : \mathfrak{Re}(z) < 0\}$, on a

$$e^{Tz} = e^{\mathfrak{Re}(z)T} \underset{T\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

— Ainsi, pour tout R fixé, on a, comme $\mathcal{L}f(z)\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)$ est indépendant de T,

$$F^-_{R,T} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_R^-}\mathcal{L}f(z)\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)e^{Tz}\frac{\mathrm{d}z}{z} \underset{T\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

— Comme annoncé plus haut, pour tout $\epsilon > 0$, si on prend $R = 2M/\epsilon$, on a que $\left|A^+_{R,T}\right| \leq \epsilon/2$ et $\left|E^-_{R,T}\right| \leq \epsilon/2$ pour tout T. Comme $F^-_{R,T} \underset{T\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ pour tout R fixé, on a

$$\limsup_{T\to+\infty}\left|\mathcal{L}_T f(0) - \mathcal{L}f(0)\right| \leq \epsilon,$$

et donc

$$\limsup_{T\to+\infty}\left|\mathcal{L}_T f(0) - \mathcal{L}f(0)\right| = 0,$$

ce qui nous donne

$$\mathcal{L}_T f(0) \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} \mathcal{L}f(0),$$

comme désiré.

□

12.8. **Estimation de $\varphi(x)/x$.** L'autre ingrédient clé afin de prouver le lemme 264, est une petite estimation a priori sur $\varphi(x)/x$.

Lemme 273. *La fonction $x \mapsto \varphi(x)/x$ est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$.*

Démonstration. L'idée est de borner $\varphi(2x) - \varphi(x)$ par Cx pour une constante $C > 0$:

— Soit $\prod_{p\in[n+1,2n]} p$ le produit des nombres premiers entre $n+1$ et $2n$.

— On a
$$\prod_{p\in[n+1,2n]} p \leq (2n)!/(n!)^2 = \binom{2n}{n},$$
car tous les nombres premiers $p \in [n+1, 2n]$ divisent le numérateur $(2n)!$ et ne sont pas éliminés par le dénominateur $(n!)^2$.

— Comme
$$(1+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \geq \binom{2n}{n},$$
on obtient donc
$$\prod_{p\in[n+1,2n]} p \leq \binom{2n}{n} \leq (1+1)^{2n} = 2^{2n}.$$

— Donc
$$\varphi(2n) - \varphi(n) = \sum_{p\in[n+1,2n]} \log p = \log\left(\prod_{p\in[n+1,2n]} p\right) \leq (2\log(2))\, n,$$
ce qui suggère déjà que φ croît au plus linéairement (ce qui est ce qu'on veut montrer).

— Il faut maintenant généraliser une telle inégalité aux réels : our $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a
$$\varphi(x) \geq \varphi(\lfloor x \rfloor)$$
et
$$\varphi(2x) \leq \varphi(2\lfloor x \rfloor) + \log(2x+1).$$
donc
$$\varphi(2x) - \varphi(x) \leq \varphi(2\lfloor x \rfloor) - \varphi(\lfloor x \rfloor) + \log(2x+1) \leq 2\lfloor x \rfloor \log 2 + \log(2x+1) \leq 2x\log 2 + \log(2x+1)$$

— Comme $\log(2x+1) \leq x$ pour $x \geq 0$ (on égalité en $x = 0$, et on a l'inégalité des dérivées $\frac{2}{2x+1} \leq 1$), on a, en posant $C = \left(\log 2 + \frac{1}{2}\right)$,
$$\varphi(2x) - \varphi(x) \leq 2Cx$$

— Donc
$$\varphi(x) - \varphi\left(\frac{x}{2}\right) \leq Cx$$
et ainsi pour tout $n \geq 1$, on a
$$\begin{aligned}\varphi(x) - \varphi\left(\frac{x}{2^n}\right) &= \varphi(x) - \varphi\left(\frac{x}{2}\right) + \varphi\left(\frac{x}{2}\right) - \varphi\left(\frac{x}{4}\right) + \cdots + \varphi\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right) - \varphi\left(\frac{x}{2^n}\right) \\ &\leq C\left(x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \cdots + \frac{x}{2^{n-1}}\right) \\ &\leq 2Cx\end{aligned}$$

— Il suit que $\varphi(x)/x \leq 2C$, ce qu'on voulait démontrer.

$\square$

12.9. **Preuve du lemme 264.** Nous connectons maintenant la convergence de l'intégrale I_1 à l'analyticité de la fonction $I(s)$:

Lemme (Lemme 264). *Si $I(s) = \int_1^{\infty} (\varphi(x) - x) / x^{s+1} \mathrm{d}x$ a une extension méromorphe à $\mathbb{H}_{\frac{1}{2}}$ sans pôle sur $\bar{\mathbb{H}}_1$, alors I_1 converge.*

Démonstration. Il faut essentiellement se ramener au lemme 271 sur la transformée de Laplace, en garantissant que les conditions soient satisfaites :

— Si on fait le changement de variable $x = e^t$, on a, en posant $f(t) = \left(\varphi\left(e^t\right) - 1\right) e^{-t}$,

,

$$I(s) = \int_1^{\infty} \frac{\varphi(x) - x}{x^{s+1}} \mathrm{d}x = \int_0^{\infty} \frac{\varphi\left(e^t\right) - e^t}{e^{ts+t}} e^t \mathrm{d}t = \int_0^{\infty} \frac{\varphi\left(e^t\right) - 1}{e^t} e^{-t(s-1)} \mathrm{d}t = \int_0^{\infty} f(t) e^{-t(s-1)} \mathrm{d}t = \mathcal{L}f(s-1)$$

— De manière similaire, on a

$$I_1 = \int_1^{\infty} \frac{\varphi(x) - x}{x^2} \mathrm{d}x = \int_0^{\infty} \frac{\varphi\left(e^t\right) - e^t}{e^{2t}} e^t \mathrm{d}t = \int_0^{\infty} \frac{\varphi\left(e^t\right) - 1}{e^t} \mathrm{d}t = \int_0^{\infty} f(t) \, \mathrm{d}t.$$

— Maintenant comme I est méromorphe sur $\mathbb{H}_{\frac{1}{2}}$, on a que $\mathcal{L}f$ est méromorphe sur $\mathbb{H}_{-\frac{1}{2}}$.

— Par le lemme 273, $\varphi\left(e^t\right) / e^t$ est bornée par le lemme. On a donc que f est bornée et continue par morceaux.

— On peut appliquer le théorème 271 pour déduire que si $I(s)$ n'a pas de pôles sur $\bar{\mathbb{H}}_1$,alors I_1 converge.

□

12.10. **Relation entre Φ et ζ sur $\mathbb{H}_{\frac{1}{2}}$.** Nous étudions maintenant la relation entre Φ et ζ, qui nous sera servira pour deux buts :

— Pour relier les pôles de Φ aux zéros de la fonction ζ : c'est l'objet de la proposition 274, qui sera utile pour le lemme 266.

— Pour étendre la fonction Φ en une fonction méromorphe sur $\mathbb{H}_{\frac{1}{2}}$: c'est l'objet du corollaire 275 ci-dessous, qui sera utile pour le lemme 265.

Proposition 274. *Sur $\mathbb{H}_{\frac{1}{2}}$, la fonction $\Phi + \zeta'/\zeta$ s'étend en une fonction holomorphe.*

Démonstration. L'idée est de montrer que

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \Phi(s) = \sum_p \frac{\log p}{p^{2s}} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)},$$

et que le membre de droite converge normalement sur $\mathbb{H}_{\frac{1}{2}}$:

— On écrit ζ'/ζ comme la dérivée du logarithme de ζ :

$$\begin{aligned}
-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\log \prod_p \left(\frac{1}{1-p^{-s}}\right)\right) \\
&= \left(\sum_p \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \log\left(1 - p^{-s}\right)\right) \\
&= \sum_p \frac{p^{-s}\log p}{(1-p^{-s})} \\
&= \sum_p \frac{\log p}{p^s - 1}.
\end{aligned}$$

— Notons que c'est vrai pour $s \in (1, \infty)$ (tout est réel strictement positif, donc on peut prendre le log sans problème), et qu'on peut étendre l'identité par prolongement analytique à $\mathbb{H}_1$ (il est clair que la somme converge).

— Maintenant

$$\frac{1}{p^s - 1} = \frac{1}{p^s}\left(\frac{1}{1-p^{-s}}\right) = \frac{1}{p^s} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{p^{ks}} = \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p^{ks}} = \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}}\left(1 - \frac{1}{p^s}\right).$$

— Il suit que

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_p \frac{\log p}{p^s - 1} = \sum_p \left(\frac{\log p}{p^s} + \frac{\log p}{p^{2s}}\left(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{p^{3s}} + \cdots\right)\right) = \Phi(s) + \sum_p \frac{\log p}{p^{2s}}\left(\frac{1}{1-p^{-s}}\right).$$

— Pour $p \geq 5$ et $s \in \mathbb{H}_{\frac{1}{2}}$, on a

$$\left|\frac{\log p}{p^{2s}}\left(\frac{1}{1-p^{-s}}\right)\right| = \frac{\log p}{\left|p^{2s}\right|\left|1 - \frac{1}{p^s}\right|} \leq \frac{\log p}{\left|p^{2s}\right|\left|1 - \left|\frac{1}{p^s}\right|\right|} \leq \frac{\log p}{\left|p^{2s}\right|\left|1 - \frac{1}{2}\right|} = 2\frac{\log p}{\left|p^{2s}\right|} = 2\frac{\log p}{p^{2\Re\mathrm{e}(s)}},$$

où on a utilisé que $|p^s| = \left|p^{\Re\mathrm{e}(s)}\right| \geq \sqrt{p} \geq 2$.

— Comme pour $t \in \mathbb{R}$ avec $t > \frac{1}{2}$

$$\sum_p \frac{\log p}{p^{2t}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^{2t}} < +\infty$$

on déduit que

$$s \mapsto \sum_p \frac{\log p}{p^{2s}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$$

converge normalement sur $\mathbb{H}_{\frac{1}{2}}$.

— On déduit que

$$s \mapsto -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \Phi(s) = \sum_p \frac{\log p}{p^{2s}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$$

a une extension holomorphe à $\mathbb{H}_{\frac{1}{2}}$, ce qui est le résultat désiré.

□

Afin de prouver le lemme 265 qui connecte la fonction $I(s) = \int_1^\infty (\varphi(x) - x)/x^{s+1}\mathrm{dx}$ à la fonction $\Phi(s) = \sum_p (\log p)/p^s$, nous avons besoin d'un lemme sur la méromorphie de Φ sur $\mathbb{H}_{\frac{1}{2}}$.

Corollaire 275. *La fonction Φ s'étend en une fonction méromorphe sur $\mathbb{H}_{\frac{1}{2}}$.*

Démonstration. Comme la fonction ζ a une extension méromorphe sur $\mathbb{H}_0$ par le lemme 261, on a que ζ'/ζ est méromorphe sur $\mathbb{H}_0$. Le résultat suit donc du lemme 274. □

12.11. **Preuve du lemme 265.** Nous connectons maintenant la fonction I et la fonction Φ, et en particulier leurs pôles. Rappelons d'abord :

Lemme (Lemme 265)**.** *La fonction I s'étend en une fonction méromorphe sur $\mathbb{H}_{\frac{1}{2}}$ qui satisfait*

$$I(s) = \frac{\Phi(s)}{s} - \frac{1}{s-1}. \tag{12.5}$$

Démonstration. Comme on sait que $\Phi(s)$ a une extension méromorphe sur $\mathbb{H}_{\frac{1}{2}}$, par prolongement analytique, il suffit de vérifier (12.5) pour $s \in \mathbb{H}_1$.

— Si on écrit $p_0, p_1, p_2, \ldots = 2, 3, 5, \ldots$ la suite des nombres premiers, on a, en notant $C_n = \sum_{p \le n} \log p$,

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \frac{\varphi(x)}{x^{s+1}} \mathrm{d}x &= \sum_{k=0}^\infty \int_{p_k}^{p_{k+1}} \frac{\varphi(x)}{x^{s+1}} \mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=0}^\infty C_{p_k} \int_{p_k}^{p_{k+1}} \frac{\mathrm{d}x}{x^{s+1}} \\
&= -\frac{1}{s} \sum_{k=0}^\infty C_{p_k} \left(\frac{1}{p_{k+1}^s} - \frac{1}{p_k^s} \right) \\
&\overset{(*)}{=} \frac{1}{s} \sum_{k=0}^\infty \left(C_{p_k} - C_{p_{k-1}} \right) \frac{1}{p_k^s} \\
&= \frac{1}{s} \sum_{k=0}^\infty \frac{\log p_k}{p_k^s} \\
&= \frac{\Phi(s)}{s},
\end{aligned}$$

où en $(*)$ on a utilisé la formule de resommation d'Abel (intégration par partie discrète)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^\infty a_k (b_{k+1} - b_k) &= \sum_{k=0}^\infty a_k b_{k+1} - a_k b_k \\
&= \sum_{k=0}^\infty (a_{k-1} b_k - a_k b_k) \\
&= -\sum_{k=0}^\infty (a_k - a_{k-1}) b_k,
\end{aligned}$$

où on a supposé que les termes à l'infini tendaient vers 0 et que $a_{-1} = 0$.

— Donc

$$\int_1^\infty \frac{\varphi(x) - x}{x^{s+1}} \mathrm{d}x = \int_1^\infty \frac{\varphi(x)}{x^{s+1}} \mathrm{d}x - \int_1^\infty \frac{1}{x^s} \mathrm{d}x = \frac{\Phi(s)}{s} - \frac{1}{s+1}.$$

□

12.12. **Preuve du lemme 266.** Nous connectons maintenant les pôles de Φ avec les zéros de la fonction ζ (ce qui nous intéressera en particulier est d'exclure la présence de pôles autres que celui en $s = 1$). Rappelons d'abord :

Lemme (Lemme 266)**.** *Sur $\mathbb{H}_{\frac{1}{2}}$, la fonction Φ a une extension méromorphe avec des pôles simples qui correspondent aux zéros et aux pôles de la fonction ζ :*

- Tout zéro d'ordre n de ζ correspond à un pôle simple avec résidu $-n$ de Φ.
- Le pôle simple de ζ en $s = 1$ correspond à un pôle simple avec résidu 1 de Φ.

Démonstration. Il s'agit simplement d'utiliser la connexion entre Φ et la dérivée logarithmique $-\zeta'/\zeta$:

- Par la proposition 274, les pôles de Φ et de la dérivée logarithmique $-\zeta'/\zeta$ coïncident sur $\mathbb{H}_{\frac{1}{2}}$.
- Par le lemme 261, la fonction ζ a un seul pôle, qui est un pôle simple en $s = 1$.
- Par la proposition 223, les pôles de ζ'/ζ correspondent aux zéros et au seul pôle de ζ (qui correspondent à des pôles simples de résidus la multiplicité de ces zéros) qui est un pôle simple (qui donne donc un pôle simple de résidu -1 en $s = 1$)
- En changeant les signes, on obtient les pôles de $-\zeta'/\zeta$, qui correspondent à ceux de Φ.

$\square$

12.13. **Preuve du lemme 267.** Le dernier lemme-clé de la preuve du théorème des nombres premier élimine la possibilité de zéros sur $\bar{\mathbb{H}}_1$:

Lemme (Lemme 267)**.** *Sur $\bar{\mathbb{H}}_1$, la fonction ζ n'a aucun zéro.*

Démonstration. Par le lemme 266, les zéros de ζ correspondent à des pôles de Φ. Comme par la remarque 259 Φ n'a pas de pôle sur $\mathbb{H}_1$, il suffit de montrer que Φ n'a pas de pôle sur la droite $\partial\mathbb{H}_1$:

- Supposons que $1 + ib \in \partial\mathbb{H}_1$ avec $b > 0$ soit un zéro d'ordre n de la fonction ζ.
- La définition de ζ donne $\zeta(\bar{s}) = \overline{\zeta(s)}$ et donc $1 - ib = \overline{1 + ib} \in \partial\mathbb{H}_1$ est aussi un zéro de ζ d'ordre n.
- On va regarder les pôles de Φ sur $\partial\mathbb{H}_1$, qui sont des pôles simples avec résidus entiers négatifs (correspondant à l'ordre des zéros de ζ, par le lemme 266), sauf en 1 où on a un pôle simple de résidu 1 (par le lemme 266).
- Comme pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $a^{-ib} = \overline{a^{ib}}$, pour tout $\epsilon > 0$ et tout $b > 0$, on a
$$\sum_p \frac{\log p}{p^{1+\epsilon}} \left(\frac{1}{p^{ib/2}} + \frac{1}{p^{-ib/2}} \right)^4 > 0.$$
- Si on développe
$$\left(p^{ib/2} + p^{-ib/2}\right)^4 = p^{2ib} + p^{-2ib} + 4p^{ib} + 4p^{-ib} + 6,$$
et ainsi
$$\sum_p \frac{\log p}{p^{1+\epsilon}} \left(\frac{1}{p^{ib/2}} + \frac{1}{p^{-ib/2}} \right)^4 = \Phi(1 + 2ib + \epsilon) + \Phi(1 - 2ib + \epsilon) + 4\Phi(1 + ib + \epsilon) + 4\Phi(1 - ib + \epsilon) + 6\Phi(1 + \epsilon) > 0$$
pour tout $b > 0, \epsilon > 0$.
- Comme Φ n'a que des pôles simples sur $\mathbb{H}_{\frac{1}{2}}$, si on multiplie le tout par ϵ et qu'on fait tendre $\epsilon \to 0$, on obtient
$$\begin{aligned}
0 &\leq \lim_{\substack{\epsilon \to 0 \\ >}} \epsilon \sum_p \frac{\log p}{p^{1+\epsilon}} \left(\frac{1}{p^{ib/2}} + \frac{1}{p^{-ib/2}} \right)^4 \\
&= \lim_{\epsilon \to 0} \epsilon \left(\Phi(1 + 2ib + \epsilon) + \Phi(1 - 2ib + \epsilon) + 4\Phi(1 + ib + \epsilon) + 4\Phi(1 - ib + \epsilon) + 6\Phi(1 + \epsilon) \right) \\
&= 6\operatorname{res}(\Phi, 1) + 4\operatorname{res}(\Phi, 1 + ib) + 4\operatorname{res}(\Phi, 1 - ib) + \operatorname{res}(\Phi, 1 + 2ib) + \operatorname{res}(\Phi, 1 - 2ib) \\
&= 6 - 4m - 4m - \operatorname{res}(\Phi, 1 + 2ib) - \operatorname{res}(\Phi, 1 - 2ib) \\
&\leq 6 - 8m,
\end{aligned}$$
où on a utilisé que les résidus de Φ en $\pm 2ib$ étaient nuls ou négatifs, ce qui force $m = 0$.

□

12.14. **L'hypothèse de Riemann.** Dans le lemme 267, on a exclu la présence de zéros de ζ sur $\bar{\mathbb{H}}_1$.

En principe, la fonction ζ n'a pas de zéros sur $\mathbb{H}_{\frac{1}{2}}$ et tous les zéros sur $\mathbb{H}_0$ sont sur la droite $\partial\mathbb{H}_{\frac{1}{2}}$, mais on ne sait pas le prouver : c'est l'objet de la célèbre hypothèse de Riemann.

Si l'hypothèse de Riemann est vraie, on aura l'asymptotique optimale (qui réciproquement impliquerait l'hypothèse de Riemann)

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{1}{\ln(t)} \mathrm{d}t + O\left(\sqrt{x} \log x\right).$$

13. Applications conformes

13.1. **Motivation.**

- Dans les chapitres précédents, on a utilisé des idées géométriques pour comprendre les fonctions holomorphes, en voyant $\mathbb{C}$ comme le plan complexe (ou la sphère de Riemann).
- On va maintenant voir que l'analyse complexe permet de comprendre de manière profonde la géométrie en deux dimensions.

13.2. **Transformations conformes.**

Définition 276. Soient $U, V \subset \mathbb{C}$ des domaines du plan complexe. Une application conforme $f : U \to V$ est une fonction holomorphe bijective entre U et V.

Proposition 277. *La dérivée d'une application conforme ne s'annule pas.*

Démonstration. Par l'absurde, supposons qu'il existe $z_* \in U$ tel que $f'(z_*) = 0$.

- Par changement de variable (et translation de U) et soustraction d'une constante (et translation de V), on peut supposer que $z_* = 0$ et que $f(z_*) = 0$.
- Par conséquent, $f(z) = z^n g(z)$, avec $n \geq 2$ et $g(0) \neq 0$.
- En utilisant le même raisonnement que dans la preuve du théorème de l'application ouverte, il existe $\epsilon > 0$ et une fonction holomorphe $\varphi : D(0, \epsilon) \to \mathbb{C}$ telle $f(z) = \varphi^n(z)$ pour $z \in D(0, \epsilon)$.
- Comme $n \geq 2$, φ ne peut pas être bijective.

□

Corollaire 278. *L'inverse d'une application conforme est conforme.*

Remarque 279. Une application conforme peut être caractérisée comme un difféomorphisme qui préserve les angles localement.

13.3. **Transformation de Möbius.**

Définition 280. Une transformation de Möbius (ou homographie) est une fonction méromorphe de la forme

$$\varphi_{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d},$$

avec $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ et $ad - bc \neq 0$.

Remarque 281. La condition $ad - bc \neq 0$ garantit que l'application est bien définie et non constante ; elle est équivalente à demander que la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ soit dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, le groupe des matrices complexes 2×2 inversibles.

Remarque 282. Les homographies forment une représentation de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$: si $A, B \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, on a

$$\varphi_A \circ \varphi_B = \varphi_{AB},$$

où AB désigne le produit matriciel.

Remarque 283. L'invariance projective $\varphi_A = \varphi_{\lambda A}$ pour tout $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$ fait que l'on peut toujours supposer $\det(A) = 1$ et donc que A est dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, le sous-groupe dit spécial des matrices complexes de déterminant 1.

Remarque 284. On peut aller plus loin et voir que la représentation des homographies passe au quotient par la relation $A \sim \lambda A$ pour $\lambda \in \mathbb{C}^*$, ce qui donne une représentation du groupe dit projectif spécial $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) /\sim$.

Remarque 285. Les transformations de Möbius s'étendent naturellement en des applications conformes $\hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ sur la sphère de Riemann, qui préservent les angles sur la sphère et envoie des cercles sur des cercles.

13.4. **Transformations du disque unité.**

Définition 286. Une transformation de Möbius du disque unité $D(0,1)$ est une transformation de Möbius de la forme
$$z \mapsto e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\bar{a}z} = e^{i\theta}\varphi_a(z) := \varphi_{,\theta}$$
pour $\theta \in \mathbb{R}$ et $a \in D(0,1)$.

Remarque 287. Il est facile de vérifier que l'inverse de l'application φ_a est φ_{-a}, et donc l'inverse de $\varphi_{a,\theta}$ est $\varphi_{-e^{i\theta}a,-\theta}$:
$$w \mapsto \varphi_{-a}\left(e^{-i\theta}w\right) = e^{-i\theta}\frac{w+e^{i\theta}a}{1+\overline{e^{i\theta}a}w} = e^{-i\theta}\varphi_{-e^{i\theta}a}(w).$$

Remarque 288. Il est facile de voir qu'une telle transformation envoie $\partial D(0,1)$ sur $\partial D(0,1)$ par
$$\left|\varphi_a\left(e^{i\theta}\right)\right| = \left|\frac{e^{i\theta}-a}{1-\bar{a}e^{i\theta}}\right| = \left|\frac{e^{i\theta}-a}{e^{i\theta}\left(e^{-i\theta}-\bar{a}\right)}\right| = \left|e^{-i\theta}\right|\left|\frac{e^{i\theta}-a}{e^{-i\theta}-\bar{a}}\right| = 1,$$
et comme de plus $a \in D(0,1)$ est envoyé vers $0 \in D(0,1)$, par le principe du maximum, $D(0,1)$ est envoyé sur $D(0,1)$, et par bijectivité c'est une application conforme $D(0,1) \to D(0,1)$.

Remarque 289. Il est facile de vérifier que le sous-groupe des transformations de Möbius du disque unité vers lui-même est celui des transformations de la forme $z \mapsto e^{i\theta}\varphi_a(z)$.

Le lemme de Schwarz nous aide à voir que les seules transformations conformes du disque unité vers lui-même sont les transformations de Möbius du disque unité.

Lemme 290 (Lemme de Schwarz). *Si $f : D(0,1) \to D(0,1)$ est une fonction holomorphe avec $f(0) = 0$, on a $|f(z)| \leq |z|$ et $|f'(0)| \leq 1$. Si de plus $|f(z_*)| = |z_*|$ pour $z_* \in D(0,1) \setminus \{0\}$ ou $|f'(0)| = 1$, on a $f(z) = e^{i\theta}z$ pour un $\theta \in \mathbb{R}$.*

Démonstration. Regardons la fonction $\varphi : z \mapsto f(z)/z$:
- On a que φ s'étend en une fonction holomorphe sur $D(0,1)$: si $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$, on a $\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}z^n$.
- Comme $|1/z| \to 1$ quand $|z| \underset{<}{\to} 1$, on a que φ atteint son maximum sur $\partial D(0,1)$, qui vaut 1, et donc $|\varphi(z)| \leq 1$ sur $D(0,1)$, avec égalité si et seulement si φ est constante.
- Cela donne $|f(z)| \leq |z|$ pour $z \in D(0,1) \setminus \{0\}$ et comme $\varphi(0) = f'(0)$, on obtient le résultat.

□

Grâce au lemme de Schwarz, on peut faire un grand pas vers la classification des applications conformes $D(0,1) \to D(0,1)$.

Lemme 291. *Si $\varphi : D(0,1) \to D(0,1)$ est une application conforme avec $\varphi(0) = 0$, alors $\varphi(z) = e^{i\theta}z$.*

Démonstration. Soit $\psi : D(0,1) \to D(0,1)$ l'applications inverse, qui est telle que $\psi(0) = 0$. Comme on a $|\psi'(0)| \leq 1$ par le lemme de Schwarz, on a
$$|\varphi'(a)| = \frac{1}{|\psi'(a)|} \geq 1$$
et donc $|\varphi'(a)| \geq 1$. Comme on a $|\varphi'(0)| \leq 1$ par le lemme de Schwarz, on déduit $\varphi(z) = e^{i\theta}z$ pour un certain $\theta \in \mathbb{R}$. □

Théorème 292. *Les applications conformes $D(0,1) \to D(0,1)$ sont des transformations de Möbius du disque unité.*

Démonstration. On a déjà vu que les transformations de Möbius du disque unité (remarque 288) sont des applications conformes $D(0,1) \to D(0,1)$. Il faut montrer la réciproque :

- Soit $\varphi : D(0,1) \to D(0,1)$ une application conforme telle que $\varphi(a) = 0$, où $a = \varphi^{-1}(0)$; on veut montrer que $\varphi(z) = e^{i\theta}\varphi_a(z)$.
- Si on regarde $\varphi \circ \varphi_{-a}$, on a que c'est une application conforme $D(0,1) \to D(0,1)$ qui envoie 0 sur 0.
- Par le lemme 291, $\varphi \circ \varphi_{-a}(z) = e^{i\theta}z$, et donc en $\varphi(w) = e^{i\theta}\varphi_a(w)$, en posant $z = \varphi_a(w)$.

$\square$

13.5. **Transformations du demi-plan supérieur.** Les transformations de Möbius du demi-plan supérieur $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \mathfrak{Im}(z) > 0\}$ sont particulièrement simples :

Définition 293. Les transformations de Möbius du demi-plan $\mathbb{H}$ sont les applications de la forme

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d},$$

avec

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}).$$

Grâce à l'application

$$z \mapsto -i\frac{z-1}{z+1}$$

qui envoie $D(0,1)$ sur $\mathbb{H}$ et son inverse

$$w \mapsto \frac{i-w}{w+i}$$

on peut montrer que les seules applications conformes $\mathbb{H} \to \mathbb{H}$ correspondent à des matrices dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 294. Montrer que les applications conformes $\mathbb{H} \to \mathbb{H}$ sont de la forme

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d},$$

où $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$.

13.6. **Familles normales.** Pour la preuve du théorème de l'application conforme de Riemann, nous aurons besoin d'une petite définition, qui ressemble à la compacité pour les fonctions et la convergence normale :

Définition 295. On dit qu'une famille $\mathcal{F}$ de fonctions holomorphes $U \to \mathbb{C}$ est normale si pour chaque suite $(f_n)_{n\geq 0}$ il existe sous-suite $\left(f_{n_k}\right)_k$ et $f : U \to \mathbb{C}$ holomorphe telle que $f_{n_k} \to f$ uniformément sur les compacts.

Remarque 296. Il n'est pas nécessaire que la limite f soit dans $\mathcal{F}$, donc c'est plus de la précompacité (compacité de l'adhérence) que de la compacité.

La proposition suivante nous permet de dire facilement que certaines familles sont normales :

Proposition 297. *Soit $\mathcal{F}$ une famille de fonctions holomorphes $U \to \mathbb{C}$ qui est uniformément bornée sur les compacts de U. Alors $\mathcal{F}$ est une famille normale.*

Démonstration. Cela repose sur un théorème de topologie de l'espace des fonctions :
- Par la formule de Cauchy, on a que la famille des dérivées f' des fonctions $f \in \mathcal{F}$ est aussi uniformément bornée sur les compacts de U : pour tout compact K, on prend un contour $\gamma \subset U \setminus K$ et on exprime les dérivées en terme d'une intégrale de contour sur γ.
- En utilisant le théorème d'Arzelà-Ascoli (qui sera vu dans le cours d'espaces métriques et topologiques), la restriction des fonctions de $\mathcal{F}$ à tout compact K (qui est uniformément équicontinue et bornée dans la terminologie de ce cours) est telle que toute suite admet une sous-suite uniformément convergente sur K.
- Ensuite, on applique un argument d'extraction diagonale :
  - Pour $m \geq 1$, posons $K_m = \left\{z \in U \cap \bar{D}(0,m) : \operatorname{dist}(z, \partial U) \geq \frac{1}{m}\right\}$; on a que $(K_m)_{m\geq 1}$ forme une suite telle que $\bigcup_{m=1}^{\infty} K_m = U$.
  - Pour K_1, il existe une suite $\left(f_{1,n}\right)_{n\geq 0}$ telle que $f_{1,n}$ converge uniformément sur K_1.
  - Pour K_2, on peut extraire de $\left(f_{1,n}\right)_{n\geq 0}$ une sous-suite $\left(f_{2,n}\right)_{n\geq 0}$ (en faisant un petit abus de notation : on devrait écrire $\left(f_{1,n_k}\right)_{k\geq 0}$ avec n_k croissante) telle que $f_{2,n}$ converge uniformément sur K_2.
  - Par récurrence, pour tout $j \geq 3$, on trouve $\left(f_{j,n}\right)_n$, sous-suite de $\left(f_{j-1,n}\right)_n$ telle que $f_{j,n}$ converge uniformément sur K_j.
  - Prenons la suite "diagonale" $\left(f_{j,j}\right)_{j\geq 1}$: pour tout $\ell \geq 1$ on a qu'elle converge sur K_ℓ.
  - Comme pour tout compact K, il existe $L \geq 1$ tel que $K \subset K_L$, on a convergence uniforme de $\left(f_{j,j}\right)$ sur K.
- La limite de la sous-suite $\left(f_{j,j}\right)_{j\geq 1}$ est holomorphe par la proposition 173.

□

13.7. **Théorème de l'application conforme de Riemann.** Le théorème de l'application conforme nous permet d'envoyer tout domaine simplement connexe distinct du plan vers le disque unité, d'une manière essentiellement unique.

Théorème 298 (Théorème de l'application conforme de Riemann)**.** *Soit $U \subsetneq \mathbb{C}$ un domaine simplement connexe et $z_* \in U$. Il existe une unique application conforme $\varphi : U \to D(0,1)$ telle que $\varphi(z_*) = 0$ et $\varphi'(z_*) > 0$.*

Exercice 299. Montrer que l'hypothèse $\neq \mathbb{C}$ est nécessaire et identifier quelle partie de la preuve ne fonctionne pas.

Le théorème de l'application conforme a un corollaire particulièrement utile :

Corollaire 300. *Si $U, V \subsetneq \mathbb{C}$ sont des domaines simplement connexes et $z_* \in U, w_* \in V$, il existe une unique application conforme $\varphi : U \to V$ telle que $\varphi(z_*) = w_*$ et $\varphi'(z_*) > 0$.*

Démonstration. Il suffit de composer $\varphi_V^{-1} \circ \varphi_U$ où $\varphi_U : U \to D(0,1)$ et $\varphi_V : V \to D(0,1)$ sont comme donnés par le théorème. □

L'idée de la partie difficile de la preuve (l'existence) sera d'optimiser sur une classe de fonctions injectives Σ_U :

Définition 301. Soit $U \subsetneq \mathbb{C}$ un domaine simplement connexe et $z_* \in U$. On note Σ_{U,z_*} l'ensemble des applications holomorphes $f : U \to D(0,1)$ qui sont injectives, telles que $f(z_*) = 0$ et telles que $f'(z_*) > 0$.

Montrons d'abord que c'est une classe non vide.

Lemme 302. *Soit $U \subsetneq \mathbb{C}$ un domaine simplement connexe et $z_* \in U$. On a que $\Sigma_{U,z_*} \neq \emptyset$.*

Démonstration. L'idée est que si on pouvait trouver un voisinage entier d'un point $a \in \mathbb{C}$ à distance au moins r de U, on pourrait simplement prendre $z \mapsto \frac{r}{z-a}$; comme ce n'est pas forcément possible (par exemple pour $U = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$), l'idée est de prendre une racine carrée pour réduire le domaine (dans le cas de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, on obtiendrait $\mathbb{H}_0$ de la section précédente) et "faire de la place" dans le complémentaire.

- Soit $w_0 \in \mathbb{C} \setminus U$. Comme U est simplement connexe, il existe une détermination de $z \mapsto \sqrt{z - w_0}$, c'est-à-dire une fonction $\varphi : U \to \mathbb{C}$ telle que $\varphi^2(z) = z - w_0$.
- Comme la fonction $z \mapsto z - w_0$ est injective, on a que φ est injective et qu'il n'y a pas de points $z_1, z_2 \in U$ telle que $\varphi(z_1) = -\varphi(z_2)$.
- Par le théorème de l'application ouverte, $\varphi(U)$ contient un disque $D(b,r)$ avec $0 < r < |b|$ (il suffit de prendre r assez petit).
- Si on pose $a = -b$, on a $D(a,r) \cap \varphi(U) = \emptyset$ et on a que la fonction $\psi : \Omega \to \mathbb{C}$ définie par
$$\psi(z) = \frac{r}{\varphi(z) - (-b)} = \frac{r}{\varphi(z) - a}$$
est telle que $\psi(U) \subset \mathbb{D}$.
- En post-composant ψ avec une transformation de Möbius du disque unité, on peut clairement supposer que $\psi(z_*) = 0$ et $\psi'(z_*) > 0$.

□

Montrons ensuite que si on optimise avec succès la dérivée on obtiendra une application surjective (et donc conforme) :

Lemme 303. *Soit U un domaine simplement connexe, $z_* \in U$ et $\psi : U \to D(0,1)$ avec $\psi \in \Sigma_{U,z_*}$. Si ψ n'est pas surjective sur $D(0,1)$, il existe $\chi \in \Sigma_{U,z_*}$ avec $\chi'(z_*) > \psi'(z_*)$.*

Démonstration. Soit $\alpha \in D(0,1) \setminus \psi(D(0,1))$ (qui existe par hypothèse de non surjectivité) ; on va essayer d'augmenter la dérivée de ψ.

— Soit $\varphi_\alpha : U \to U$ la transformation (conforme) de Möbius définie par

$$\varphi_\alpha(z) = \frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z},$$

dont l'inverse est $\varphi_{-\alpha} : U \to U$ (comme noté plus haut).

— Soit $\psi_0 := \varphi_\alpha \circ \psi$; on a que $\psi \in \Sigma_U$ et que $0 \notin \psi_0(D(0,1))$.

— Comme U est simplement connexe, il existe une détermination ψ_1 de $\sqrt{\psi_0}$, c'est-à-dire une fonction ψ_1 telle que $\psi_1^2 = \psi_0$

— Soit $c : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ l'application de mise au carré, de sorte que $c \circ \psi_1 = \psi_0$.

— Si on pose

$$\chi = \varphi_{\beta,\theta} \circ \psi_1 = e^{i\theta}\varphi_\beta \circ \psi_1,$$

où $\beta = \psi_1(z_*)$, on a $\chi(z_*) = 0$ et avec $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\chi'(z_*) > 0$, on a

$$\begin{aligned} \psi &= \varphi_{-\alpha} \circ c \circ \psi_{-e^{i\theta}\beta,-\theta} \circ \chi \\ &= F \circ \chi, \end{aligned}$$

où $F = \varphi_{-\alpha} \circ c \circ \psi_{-\beta}$.

— On a donc que $\chi \in \Sigma_{U,z_*}$, montrons maintenant que $\chi'(z_*) > \psi'(z_*)$:

  — Si on calcule

$$\psi'(z_*) = F'(0)\,\chi(z_*).$$

  — Montrons que pour toute fonction holomorphe $F : D(0,1) \to D(0,1)$ non injective, on a $|F'(0)| < 1$:

    — En posant $\gamma = F(0)$ on obtient, en appliquant le lemme de Schwarz à $\varphi_\gamma \circ F$,

$$\left|(\varphi_\gamma \circ F)'\right|(0) = \left|\varphi_\gamma'(\gamma)\right| |F'(0)| = \frac{1}{1-|\gamma|^2}\,|F'(0)| < 1.$$

    (si on avait égalité, on aurait que F serait bijective).

    — Cela donne

$$|F'(0)| < 1 - |\gamma|^2 \leq 1.$$

  — Ainsi

$$\chi'(z_0) = \frac{1}{|F'(0)|}\psi'(z_*) > \psi'(z_*).$$

□

Nous sommes maintenant en position de prouver le théorème de l'application conforme de Riemann.

Démonstration. On montre d'abord l'unicité, ensuite l'existence d'une application conforme $U \to D(0,1)$, et finalement l'existence de l'application conforme souhaitée :

— Pour l'existence d'une application conforme $f : U \to D(0,1)$

  — On a que Σ_{U,z_*} est non vide par le lemme 302.

  — Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite dans Σ_{U,z_*} qui optimise la dérivée, c'est-à-dire telle que $f_n'(z_*) \to \sup_{f\in\Sigma_{U,z_*}} f'(z)$ quand $n \to \infty$.

  — Comme Σ_U est une famille normale par la proposition 297, il existe une sous-suite $f_{n_k} \to f$ quand $k \to \infty$.

  — D'abord, remarquons que f est non constante : sa dérivée en z_* est non nulle.

  — Montrons que $f \in \Sigma_{U,z_*}$:

    — Il est évident que $f(z_*) = 0$.

    — Comme $f(U) \subset \bar{D}(0,1)$ (c'est évident par passage à la limite, vu que $f_n(U) \subset D(0,1)$ pour tout $n \geq 0$) et que f est non-constante, par le théorème de l'application ouverte, on a $f(U) \subset D(0,1)$.

    — Montrons que f est injective : soit $z_1 \in U$ et $\alpha = f(z_1)$, on veut montrer qu'il est impossible de trouver $z_2 \in U \setminus \{z_1\}$ tel que $f(z_2) = f(z_1)$:

  - Pour tout $z_2 \in U$, comme f n'est pas constante, par le principe des zéros isolés, on a qu'il existe un voisinage $D(z_2, \delta)$ tel que $z_1 \notin \bar{D}(z_2, \delta)$ et tel que $z \mapsto f(z) - f(z_1)$ n'a pas de zéro sur $\partial D(z_2, \delta)$.
  - D'autre part, on a que $z \mapsto f_n(z) - f_n(z_1)$ n'a pas de zéro sur $D(z_2, \delta)$, par injectivité de f_n et comme $z_1 \notin \bar{D}(z_2, \delta)$.
  - Comme $\xi_n(z) = f_n(z) - f_n(z_1)$ converge uniformément vers $\xi(z) = f(z) - f(z_1)$, on peut compter les zéros sur $D(z_2, \epsilon)$ en calculant
  $$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(z_2,\epsilon)} \frac{\xi_n'(z)}{\xi_n(z)} \mathrm{d}z$$
  et en déduire que $\xi(z) = f(z) - f(z_1)$ n'a pas de zéros sur $D(z_2, \epsilon)$ en passant à la limite $n \to \infty$:
  $$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(z_2,\epsilon)} \frac{\xi_n'(z)}{\xi_n(z)} \mathrm{d}z \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(z_2,\epsilon)} \frac{\xi'(z)}{\xi(z)} \mathrm{d}z.$$
  - Comme $z_2 \in U \setminus \{z_1\}$ était arbitraire, on déduit que $f(z_2) \neq f(z_1)$ pour tout $z_2 \neq z_1$, ce qui donne que f est injective.
- Maintenant par le lemme 303 comme la valeur $f'(z_*)$ ne peut pas être augmentée dans Σ_{U,z_*}, la fonction f est surjective et c'est donc l'application conforme recherchée, ce qui nous permet de conclure.

□

14. Fonctions périodiques et elliptiques

14.1. Motivation.

- Sur $\mathbb{R}$, les fonctions périodiques forment une classe importante de fonctions qui incluent les fonctions trigonométriques $\sin, \cos$.
- Les fonction périodiques $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ correspondent naturellement aux fonctions définies sur le cercle : si par exemple $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est 2π-périodique, on peut définir $\tilde{f} : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{C}$ par $\tilde{f}\left(e^{i\theta}\right) = f(\theta)$ (le point étant que le choix de θ modulo 2π n'importe pas).
- Sur $\mathbb{C}$, de nombreuses fonctions sont périodiques par rapport à une direction : par exemple, la fonction exponentielle est périodique.
- Une fonction périodique $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ correspond naturellement à une fonction définie sur un cylindre.
- Sur $\mathbb{C}$, une fonction peut aussi être périodique par rapport à deux directions indépendantes : c'est ce qu'on appelle une fonction elliptique.
- Les fonctions elliptiques correspondent naturellement à des fonctions définies sur le tore.

14.2. **Fonctions périodiques.** Les fonctions périodiques (avec une période) forment une classe de fonction très riches avec de nombreux exemples utiles.

Définition 304. Une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ est dite périodique de période $T \in \mathbb{C}$ si on a

$$f(z+T) = f(z).$$

Exemple 305. La fonction $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est périodique de période $2\pi i$.

Remarque 306. Une fonction périodique correspond naturellement à une fonction définie sur le cylindre $\mathbb{C}/\sim$ où $\sim$ est la relation d'équivalence $z \sim w \iff z - w \in T\mathbb{Z}$.

Un exemple intéressant de fonction méromorphe périodique est donné par la proposition suivante :

Proposition 307. *On a*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)}.$$

Démonstration. Soient f, g définies par

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}$$
$$g(z) = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)}.$$

Montrons que f est convergente sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ et ensuite que $f = g$ en utilisant le théorème de Liouville :

- La série définissant f converge uniformément (note : les pôles ne sont pas importants, ce qui est important est la convergence de la queue de la série par rapport à n) dans toutes les bandes $[a,b]\times i\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} : \mathfrak{Re}(z) \in [a,b]\}$ pour $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$:
  - On a que
  $$\sum_{n\in\mathbb{Z}\cap(b,+\infty)} \frac{1}{(z-n)^2}$$
  est uniformément convergente sur $[a,b]\times i\mathbb{R}$, car pour $n \in \mathbb{Z}\cap(b,+\infty)$, on
  $$\frac{1}{|z-n|^2} \leq \frac{1}{|b-n|^2}$$
  et
  $$\sum_{n\in\mathbb{Z}\cap(b,+\infty)}^{+\infty} \frac{1}{(b-n)^2} < +\infty.$$
  - De même, on a que
  $$\sum_{n\in\mathbb{Z}\cap(-\infty,a)} \frac{1}{(z-n)^2}$$
  est uniformément convergente sur $[a,b]\times i\mathbb{R}$.
  - La somme $\sum_{n\in\mathbb{Z}\cap[a,b]}$ ne contient qu'un nombre fini de termes, et cela nous donne la convergence uniforme de f dans toutes les bandes $[a,b]\times i\mathbb{R}$.
- Identifions les pôles de f et g :
  - Les fonctions f, g définies par sont clairement 1-périodiques, donc il suffit de montrer qu'elles ont les mêmes pôles en 0.

— Si on fait un développement de Taylor de g en 0, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{\pi^2}{\left(\pi z - \frac{\pi^3 z^3}{6} + O\left(z^5\right)\right)^2} &= \frac{\pi^2}{\pi^2 z^2 - \frac{1}{3}\pi^4 z^4 + O\left(z^6\right)} \\ &= \frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{3}\pi^2 z^2 + O\left(z^4\right)}\right) \\ &= \frac{1}{z^2}\left(1 + \frac{\pi^2}{3}z^2 + O\left(z^4\right)\right) \\ &= \frac{1}{z^2} + \frac{\pi^2}{3} + O\left(z^2\right)\end{aligned}$$

et ainsi on voit que g a le même pôle (ordre 2, coefficient dominant 1, résidu 0) que f en 0.

— Montrons que $f(z), g(z) \to 0$ quand $|\mathfrak{Im}(z)| \to +\infty$.

— Pour f, on a que

$$\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}\right| \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{|z-n|^2} \underset{|\mathfrak{Im}(z)|\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

ce qui est facile à montrer en utilisant

$$\frac{1}{|z-n|^2} = \frac{1}{(\mathfrak{Im}(z))^2 + (\mathfrak{Re}(z) - n)^2}$$

— Pour g on a que $\left|\sin^2(z)\right| = \sin^2(\mathfrak{Re}(z)) + \sinh^2(\mathfrak{Im}(z))$, qui tend vers $+\infty$ quand $|\mathfrak{Im}(z)| \to +\infty$ et donc $g \to 0$.

— On a que $f - g$ se prolonge en une fonction entière, qui bornée et constante, et comme $f - g \to 0$ quand $\mathfrak{Im}(z) \to \infty$, on a $f = g$.

□

Corollaire 308. *On a*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Démonstration. On a que la fonction f donnée par $f(z) = \pi^2/\sin^2(\pi z) - 1/z^2$ peut être prolongée en 0 par $\frac{\pi^2}{3}$ par le développement en série de la preuve de la proposition 307. En même temps, par la proposition 307, on a $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} 1/(z-n)^2$, ce qui donne $f(0) = 2\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$, d'où le résultat. □

Exercice 309. Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}^*}\left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right)$ est normalement convergente sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ et (en dérivant par rapport à z) que

$$\frac{1}{z} + \sum_{n\in\mathbb{Z}^*}\left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right) = \frac{\pi}{\tan \pi z}.$$

14.3. **Fonctions elliptiques.** Les fonctions elliptiques sont les fonctions "doublement périodiques", c'est-à-dire qui ont des périodicités par rapport à deux périodes $T_1, T_2 \in \mathbb{C}^*$ qui sont linéairement indépendantes (quand T_1, T_2 sont identifiées avec des vecteurs de $\mathbb{R}^2$).

Définition 310. Soient $T_1, T_2 \in \mathbb{C}^*$ tels que $T_1/T_2 \notin \mathbb{R}$. On appelle réseau généré par T_1, T_2 l'ensemble $\Lambda_{T_1,T_2} = T_1\mathbb{Z} + T_2\mathbb{Z}$ défini par

$$\Lambda_{T_1,T_2} = \{k_1T_1 + k_2T_2 : k_1, k_2 \in \mathbb{Z}\}.$$

On appelle parallélogramme fondamental le domaine Q_{T_1,T_2} défini par

$$Q(T_1, T_2) = \{\lambda_1T_1 + \lambda_2T_2 : \lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1]\}.$$

Exemple 311. L'exemple le plus classique et utile de réseau est celui généré par $1, i$, qu'on note parfois $\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}[i]$ ou $\mathbb{Z}^2$.

Une fonction elliptique est périodique par rapport à un réseau si elle est invariante par translation du réseau :

Définition 312. Une fonction méromorphe f sur $\mathbb{C}$ est dite elliptique par rapport au réseau Λ_{T_1,T_2} si

$$f(z + \mu) = f(z) \quad \forall \mu \in \Lambda_{T_1,T_2}.$$

Remarque 313. Il est facile de voir que c'est équivalent à exiger $f(z + T_1) = f(z + T_2) = f(z)$.

On peut commencer par voir que les seuls exemples intéressants sont ceux des fonctions qui ont des pôles :

Proposition 314. *Si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe elliptique, alors f est constante.*

Démonstration. Si f est holomorphe bi-périodique, on a

$$\sup_{z\in\mathbb{C}} |f(z)| = \max_{z\in Q(T_1,T_2)} |f(z)| < +\infty$$

car pour tout $z \in \mathbb{C}$, il existe $\mu \in \Lambda_{T_1,T_2}$ tel que $z - \mu \in Q(T_1, T_2)$. Ainsi f est entière et bornée, donc constante par le théorème de Liouville. □

On va étudier la fonction elliptique la plus célèbre : la fonction $\wp$ de Weierstrass (à ne pas confondre avec la fonction pathologique de Weierstrass qui apparaît parfois en analyse réelle).

Définition 315. Soit $\Lambda = \Lambda_{T_1,T_2}$ un réseau. La fonction de Weierstrass $\wp_\Lambda$ est définie par

$$\frac{1}{z^2} + \sum_{\lambda\in\Lambda\setminus\{0\}} \left(\frac{1}{(z-\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2}\right). \tag{14.1}$$

Cette définition a du sens grâce à la proposition suivante :

Proposition 316. *La série dans (14.1) est normalement convergente sur $\mathbb{C} \setminus \Lambda$ et définit une fonction elliptique paire sur $\mathbb{C}$.*

Démonstration. On a

— On observe d'abord que

$$\sum_{\lambda\in\Lambda\setminus\{0\}} \frac{1}{|\lambda|^3} < +\infty.$$

— En effet, si on regarde $A_n = (D(0, n+1) \setminus D(0, n))$, on a $O(n)$ points de Λ dans cet anneau, et

$$\sum_{\lambda\in\Lambda\cap A_n} \frac{1}{|\lambda|^3} = O\left(\frac{n}{n^3}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

— Si on somme sur tous les $n \geq 0$, on arrive donc à une somme convergente.

— Montrons la convergence uniforme sur tous les disques $\bar{D}(0,R)$.
  — On a pour tout $z \in D(0,R)$ et $\lambda \in \mathbb{C} \setminus D(0,2R)$, $\left|2-\frac{z}{\lambda}\right| \leq \frac{5}{2}$ et$\left|1-\frac{z}{\lambda}\right| \geq \frac{1}{2}$, et donc

$$\left|\frac{1}{(z-\lambda)^2}-\frac{1}{\lambda^2}\right| = \left|\frac{\lambda^2-(z-\lambda)^2}{\lambda^2(z-\lambda)^2}\right| = \left|\frac{2\lambda z-z^2}{\lambda^2(z-\lambda)^2}\right| = \frac{\left|z\left(2-\frac{z}{\lambda}\right)\right|}{|\lambda|^3\left|1-\frac{z}{\lambda}\right|^2} \leq 10\frac{R}{|\lambda|^3},$$

  donc la somme

$$\sum_{\lambda\in\Lambda\setminus D(0,2R)}\left(\frac{1}{(z-\lambda)^2}-\frac{1}{\lambda^2}\right)$$

  converge uniformément sur $\bar{D}(0,R)$.
  — On a un nombre fini de termes correspondant à $\lambda \in D(0,2R)$, donc ils n'affectent pas la convergence.
  — On a donc que $\wp_\Lambda$ est une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$.
— La parité de $\wp_\Lambda$ est évidente en utilisant que $-\Lambda = \Lambda$.
— Montrons maintenant la bi-périodicité de $\wp_\Lambda$:
  — La dérivée est obtenue en dérivant terme à terme

$$\wp'_\Lambda(z) = -2\sum\frac{1}{(z-\lambda)^3}.$$

  — On a que $\wp'_\Lambda$ est manifestement bi-périodique.
  — On obtient que pour tout $\mu \in \Lambda$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\wp_\Lambda(z+\mu)-\wp_\Lambda(z)\right) = \wp'_\Lambda(z+\mu)-\wp'_\lambda(z) = 0.$$

  — Il suit que pour $\mu \in \{T_1, T_2\}$ on a

$$z \mapsto \wp_\Lambda(z+\mu)-\wp_\Lambda(z)$$

  est constante, et on peut voir que cette constante est nulle en prenant $z = -\frac{\mu}{2}$ et en utilisant que $\wp_\Lambda$ est paire ; cela implique le résultat.

□

La fonction de Weierstrass a de nombreuses propriétés intéressantes. En particulier, celle-ci sera laissée en exercice :

Exercice 317. Montrer, en utilisant la Proposition 314 et une analyse des pôles, que $\left(\wp'_\Lambda\right)^2(z) = 4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3$ avec

$$g_2 = 60\sum_{\lambda\in\Lambda\setminus\{0\}}\frac{1}{\lambda^4}$$

$$g_3 = 140\sum_{\lambda\in\Lambda\setminus\{0\}}\frac{1}{\lambda^6}.$$

Remarque 318. On peut montrer (avec un peu de travail) que cette équation différentielle un peu mystérieuse permet de construire une bijection entre $\mathbb{C}/\Lambda$ (le tore) à la courbe elliptique

$$C = \left\{(x,y)\in\mathbb{C}^2 : y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3\right\}$$

à travers l'application

$$z \mapsto \left(\wp_\Lambda(z), \wp'_\Lambda(z)\right),$$

ce qui permet d'équiper la courbe C d'une structure de groupe additif (comme $\mathbb{C}\backslash\Lambda$ l'hérite de $\mathbb{C}$). Les groupes elliptiques sont des groupes très étudiés, avec de nombreuses propriétés fascinantes.

Partie II : Analyse vectorielle et opérateurs différentiels

15. Champs scalaires et vectoriels

15.1. Motivation.

— Les idées de Newton ont amené l'idée de force qui permet de comprendre comment les objets se déplacent.

— Une conceptualisation importante des lois de Newton se fait au travers de l'idée de champs : pour comprendre la dynamique d'un objet soumis aux lois de la gravitation, on construit le champ de force gravitationnel qui représente la force totale exercée sur un objet de masse 1.

— A son tour, le champ vectoriel de force gravitationnelle peut être décrit en termes d'un champ scalaire, qui est celui de l'énergie potentielle.

— Cette approche en termes de champs est particulièrement puissante pour l'électromagnétisme, où la dynamique des champs pertinents peut être décrite en termes des équations de Maxwell.

— La mécanique des fluides est complètement en termes d'équations de champs (de vitesses du fluide à différents points), qui suivent des équations compliquées à suivre.

— Le but de cette partie du cours est d'introduire les objets importants associés aux champs, c'est-à-dire aux fonctions $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ avec $d = 2, 3$ en particulier, et leurs propriétés.

15.2. **Définitions.** Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine de $\mathbb{R}^n$ (c'est-à-dire un ouvert connexe).

Définition 319. On appelle une fonction continue $f : \Omega \to \mathbb{R}$ un champ scalaire, et on appelle une fonction continue $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un champ vectoriel.

Remarque 320. On peut en principe aussi considérer des champs à valeurs matricielles ou tensorielles en physique (par exemple en relativité générale), mais on ne le fera pas dans ce cours.

16. Intégrale curviligne et circulation

16.1. **Motivation pour l'intégrale curviligne.**

— Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine

— Pour un champ scalaire $f : \Omega \to \mathbb{R}$ qui est C^1, son gradient $\nabla f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ définit un champ vectoriel.

— On peut se poser la question de comment retrouver f (à constante additive près) à partir de ∇f.

— Une autre question naturelle est de savoir quelles sont les conditions qu'il faut sur un champ vectoriel $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$, pour qu'il existe un champ scalaire C^1 $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$ tel que $X = \nabla\phi$.

16.2. **Intégrale curviligne.**

Définition 321. Soit $f : \mathbb{R}^n \supset \Omega \to \mathbb{R}$ un champ scalaire continu et $\gamma : [0,1] \to \Omega$ un chemin (continu, C^1 par morceaux avec dérivée bornée). On appelle intégrale curviligne de f le long de γ l'intégrale

$$\int f \mathrm{d}s = \int_0^1 f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| \mathrm{d}t.$$

Remarque 322. Il est facile de voir que l'intégrale curviligne ne dépend pas de la paramétrisation de γ, et que l'on peut faire les opérations que l'on a faites en analyse complexe avec les chemins $\int_{\ominus\gamma} f \mathrm{d}s = -\int_\gamma f \mathrm{d}s$, $\int_{\gamma\oplus\tilde{\gamma}} f \mathrm{d}s = \int_\gamma f \mathrm{d}s + \int_{\tilde{\gamma}} f \mathrm{d}s$.

A partir de l'intégrale curviligne de la fonction 1, on peut obtenir la longueur de γ.

16.3. Circulation.

Définition 323. Soit $X : \mathbb{R}^n \supset \Omega \to \mathbb{R}^n$ un champ vectoriel continu et $\gamma : [0,1] \to \Omega$ un chemin (continu, C^1 par morceaux avec dérivée bornée). On appelle circulation de X le long de γ ou circulation de X le long de γ l'intégrale

$$\int X \cdot \mathrm{d}s = \int_0^1 X(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,\mathrm{d}t,$$

où $\cdot$ désigne le produit scalaire de $\mathbb{R}^n$.

Remarque 324. Pour $n = 2$, la différence avec les intégrales de contour complexes est dans le produit scalaire $\cdot$.

Remarque 325. Il est facile de voir que comme pour les intégrales complexes, la circulation ne dépend pas de la paramétrisation du chemin, que

$$\int_{\ominus\gamma} X \cdot \mathrm{d}s = -\int_\gamma X \cdot \mathrm{d}s$$

et que l'on a

$$\int_{\gamma\oplus\tilde{\gamma}} X \cdot \mathrm{d}s = \int_\gamma X \cdot \mathrm{d}s + \int_{\tilde{\gamma}} X \cdot \mathrm{d}s.$$

Remarque 326. En physique, le travail effectué par une force qui déplace un objet le long d'une trajectoire γ est donné par la circulation de la force le long de γ.

16.4. **Circulation d'un gradient.** La circulation du gradient d'une fonction permet bien de retrouver la fonction.

Proposition 327. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine et soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ un champ scalaire C^1. Alors pour tout chemin $\gamma : [0,1] \to \Omega$, on a*

$$\int_\gamma \nabla f \cdot \mathrm{d}s = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)),$$

et en particulier pour tout lacet λ, on a $\int_\lambda \nabla f \cdot \mathrm{d}s = 0$.

Démonstration. Si on suppose γ de classe C^1 preuve se réduit à la règle de dérivation des fonctions composées et à un simple changement de variable en dimension 1 :

$$\int_0^1 \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f \circ \gamma)(t) = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)).$$

Si γ n'est que C^1 par morceaux, il on utilise cet argument sur chacun des morceaux et on obtient le résultat désiré. □

Remarque 328. C'est l'analogue du résultat vu en analyse complexe sur la circulation de la dérivée d'une fonction holomorphe.

16.5. **Existence d'un potentiel scalaire.** Posons-nous maintenant la question de savoir si pour un champ vectoriel X, il existe un champ scalaire f tel que $X = \nabla f$.

Définition 329. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. On dit que $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ dérive d'un potentiel (scalaire) s'il existe un champ scalaire C^1 tel que $\nabla f = X$.

Remarque 330. S'il existe, le potentiel est unique à constante additive près.

Proposition 331. *Soit $X : \mathbb{R}^n \supset \Omega \to \mathbb{R}^n$ un champ vectoriel tel que pour tout lacet $\lambda : [0,1] \to \Omega$, on ait $\int_\lambda X \cdot \mathrm{d}s = 0$. Alors X a un potentiel.*

Démonstration. Soit $x_* \in \Omega$.

— On a que $f(x) = \int_{x_*}^{x} X \cdot \mathrm{d}s$ est bien défini : il ne dépend pas du choix du chemin de x_* à x (si on a deux chemins $\mu, \tilde{\mu}$ qui vont de x à x_* on a que $\mu \ominus \tilde{\mu}$ est un lacet).

— Maintenant pour tout $v \in \mathbb{R}^n$,
$$\partial_v f = \lim_{\substack{h \longrightarrow 0 \\ >0}} \frac{f(x+hv) - f(x)}{h} = \lim_{\substack{h \longrightarrow 0 \\ >0}} \frac{\int_x^{x+hv} X \cdot \mathrm{d}s}{h},$$
où l'intégrale dans le membre de droite ne dépend pas du chemin.

— Si on paramètre le segment $[x, x+hv]$ par $\gamma(t) = x + thv$, par le théorème de la moyenne, pour tout h, il existe $t_h \in [0,1]$ tel que
$$\frac{\int_x^{x+hv} X \cdot \mathrm{d}s}{h} = \frac{X(t_h v) \cdot (hv)}{h} \underset{\substack{h \longrightarrow 0 \\ >0}}{\longrightarrow} X \cdot v.$$

— Ainsi on a $\partial_v f = X \cdot v$ et donc $\nabla f = X$.

□

Remarque 332. C'est l'analogue du résultat vu en analyse complexe sur l'existence d'une primitive sous la condition de Morera ; la preuve est similaire, aussi.

Remarque 333. En physique, les champs de forces dites conservatrices sont celles qui dérivent d'un potentiel, appelée énergie potentielle. Si on déplace un corps dans un champ de force conservatrice, sont énergie potentielle sera modifiée par le travail effectué pendant le déplacement, qui ne dépend pas du chemin.

17. Rotationnel

17.1. **Motivation.**

— Dans la section précédente on a vu que l'existence d'un potentiel pour un champ vectoriel se réduisait à la question de savoir si les circulations dépendent du chemin.

— Cela donnait donc que si le long de tout lacet λ, la circulation de X le long de λ vaut 0, alors X a un potentiel.

— Comme en analyse complexe, cela suggère de regarder les intégrales le long de lacets infinitésimaux.

— En dimension 2, cela se fait comme en analyse complexe, et on obtient un champ scalaire qui décrit les intégrales de contour infinitésimales.

— En dimension 3, c'est plus compliqué car les contours peuvent être dans plusieurs directions, et on obtient un vecteur pour décrire les inte'grales de contour infinitésimales.

— En dimensions $n \geq 4$ c'est plus compliqué (même si conceptuellement simple) : il faut prendre en compte toutes les $\binom{n}{2}$ directions indépendantes où les contours peuvent vivre ; on ne verra pas ce cas (qui est beaucoup moins utilisé en physique).

17.2. **Rotationnel 2D.** Le rotationnel 2D est un opérateur différentiel qui capture l'intégrale de contour le long d'un lacet infinitésimal :

Définition 334. Soit $X : \mathbb{R}^2 \supset \Omega \to \mathbb{R}^2$ un champ vectoriel de classe C^1. On note $\mathrm{rot}X : \Omega \to \mathbb{R}$ le champ scalaire défini par

$$\mathrm{rot}X = \partial_1 X_2 - \partial_2 X_1.$$

En anglais, le rotationnel est appelé curl.

La pertinence du rotationnel 2D pour décrire les intégrales de contour infinitésimales est justifiée par la proposition suivante :

Proposition 335. *Soit $X : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction C^1. Soient $x \in \Omega$ et $T_\epsilon = x + \epsilon T$ où T est un triangle. On a*

$$\oint_{\partial T_\epsilon} X \cdot \mathrm{d}s = \epsilon^2 \mathrm{Aire}(T)\,\mathrm{rot}X + o\left(\epsilon^2\right),$$

où ∂T_ϵ désigne le bord de T_ϵ orienté dans le sens trigonométrique.

Démonstration. Cela suit d'un calcul direct très similaire à ce qui a été vu dans le cas complexe :

— Pour simplifier les calculs on peut supposer que T est un triangle rectangle avec sommets $(0,0),(a,0),(0,b)$: on peut toujours supposer que T est une union (avec intérieurs disjoints) de tels triangles.

— On paramètre les trois côtés de $x + \epsilon T$ par

$$\begin{aligned}
\gamma_1(t) &= \left(x_1 + \epsilon\left(\frac{a}{2} + \left(t - \frac{1}{2}\right)a\right), x_2\right)\\
\gamma_2(t) &= \left(x_1 + \epsilon\left(\frac{a}{2} - \left(t - \frac{1}{2}\right)a\right), x_2 + \epsilon\left(\frac{b}{2} + \left(t - \frac{1}{2}\right)b\right)\right)\\
\gamma_3(t) &= \left(x_1, x_2 + \epsilon\left(\frac{b}{2} - \left(t - \frac{1}{2}\right)b\right)\right).
\end{aligned}$$

— On a que les dérivées dans le temps de ces chemins sont

$$\begin{aligned}
\gamma_1'(t) &= (\epsilon a, 0)\\
\gamma_2'(t) &= (-\epsilon a, \epsilon b)\\
\gamma_3'(t) &= (0, -\epsilon b)
\end{aligned}$$

— On obtient que l'intégrale vaut l'intégrale $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$, où

$$\begin{aligned}
f(t) =& \epsilon a X_1\left(x_1 + \epsilon\left(\frac{a}{2} + \left(t - \frac{1}{2}\right)a\right), x_2\right)\\
&- \epsilon a X_1\left(x_1 + \epsilon\left(\frac{a}{2} - \left(t - \frac{1}{2}\right)a\right), x_2 + \epsilon\left(\frac{b}{2} + \left(t - \frac{1}{2}\right)b\right)\right)\\
&+ \epsilon b X_2\left(\left(x_1 + \epsilon\left(\frac{a}{2} - \left(t - \frac{1}{2}\right)a\right), x_2 + \epsilon\left(\frac{b}{2} + \left(t - \frac{1}{2}\right)b\right)\right)\right)\\
&- \epsilon b X_2\left(x_1, x_2 + \epsilon\left(\frac{b}{2} - \left(t - \frac{1}{2}\right)b\right)\right)
\end{aligned}$$

— Ensuite on fait un développement de Taylor de X autour de X.
  — Il est facile de voir que les contributions des termes "constant" $X(x)$ vont s'annuler (puisque la somme des trois dérivées $\gamma_1', \gamma_2', \gamma_3'$ vont s'annuler).
  — Le deuxième terme devient une somme de deux termes (on va prendre la dérivée par rapport à la première coordonnée puis la deuxième) ; de même pour le troisième terme.
  — La première partie du deuxième terme s'annule avec le premier terme.

— La deuxième partie du troisième terme s'annule avec le quatrième terme.
— Les seuls termes qui restent sont les "termes croisés" (deuxième partie du deuxième terme et première partie du troisième terme).
— Les termes qui dépendent de t viennent avec $t - \frac{1}{2}$ qui vaut "en moyenne" 0 sur $[0, 1]$, donc ils disparaissent.
— Finalement, il ne reste $\frac{\varepsilon^2 ab}{2} (\partial_2 X_1 (x) - \partial_1 X_2 (x))$, ce qui est le résultat souhaité.

$\square$

Remarque 336. En physique, si F décrit la force exercée par un fluide, on a que le rotationnel en x représente le travail effectué autour d'une hélice infinitésimale attachée en x quand elle fait un tour ; ceci explique le nom.

17.3. **Rotationnel 3D.** Dans le cas tri-dimensionnel, la situation est plus compliquée, en raison du fait qu'il faut choisir la direction de chaque contour infinitésimal.

Définition 337. Soit $X : \mathbb{R}^3 \supset \Omega \to \mathbb{R}^3$ un champ vectoriel C^1. On note $\mathrm{rot} X : \Omega \to \mathbb{R}^3$ le champ vectoriel défini par

$$\mathrm{rot} X = \begin{pmatrix} \partial_2 X_3 - \partial_3 X_2 \\ \partial_3 X_1 - \partial_1 X_3 \\ \partial_1 X_2 - \partial_2 X_1 \end{pmatrix}.$$

Remarque 338. On note parfois le rotationnel 3D par $\nabla \times X$, qui permet de se souvenir de la formule en prenant le produit vectoriel formel

$$\begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}.$$

La proposition suivante justifie l'utilisation du rotationnel 3D pour calculer les intégrales de contour infinitésimales :

Proposition 339. *Soit $X : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction C^1. Soient $x \in \Omega$, $T_\epsilon = x + \epsilon T$ où T est un triangle avec sommets $0, v, w$ (apparaissant dans cet ordre le long de l'orientation de T). On a*

$$\oint_{\partial T_\epsilon} X \cdot \mathrm{d}s = \frac{\epsilon^2}{2} \mathrm{rot} X(x) \cdot (v \times w) + o\left(\epsilon^2\right).$$

Démonstration. Présentons une esquisse de preuve :

- Dans le cas où v et w sont des vecteurs parallèle aux vecteurs de la base canonique $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ ou $(0,0,1)$, l'énoncé suit de la version 2D, en vérifiant la compatibilité des "signes" entre le sens trigonométrique en 2D et le produit vectoriel en 3D.
- En général, on peut représenter l'intégrale de contour comme un somme d'intégrales de contour le long de triangles perpendiculaires aux vecteurs de la base canonique.
- Par linéarité par rapport à v et à w du membre de droite, on obtient le résultat.

□

18. Formule de Green-Riemann et existence de potentiels en 2D

18.1. **Motivation.**

- Dans la section 16.5, on a ramené la question de l'existence d'un potentiel pour un champ vectoriel à celle de la nullité des circulations le long des lacets.
- Dans la section 17, on a vu qu'en 2D et 3D, les circulations infinitésimales donnent le rotationnel.
- Cela suggère que si un champ vectoriel a rotationnel nul et si le domaine est simplement connexe, alors il a un potentiel.
- Pour cela, on a besoin d'une formule qui nous permet d'intégrer le rotationnel : en 2D c'est la formule de Green-Riemann.

18.2. **Formule de Green-Riemann.** La formule de Green-Riemann connecte précisément les circulations macroscopiques (non-infinitésimales) avec le rotationnel d'un champ vectoriel 2D. C'est donc la version macroscopique de la proposition 335

Théorème 340 (Green-Riemann). *Si $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ est un domaine borné tel que $\partial\Omega$ est un lacet C^1 par morceaux et X est un champ vectoriel C^1 défini au voisinage de $\bar{\Omega}$, on a*

$$\iint_{\Omega} \mathrm{rot} X = \oint_{\partial\Omega} X \cdot \mathrm{d}s,$$

où $\partial\Omega$ est orienté dans le sens trigonométrique, et où l'intégrale double est une intégrale de surface usuelle.

Démonstration. On présente simplement une esquisse de preuve :
- On découpe Ω en petits triangles de diamètres $O(\epsilon)$.
- On additionne la version infinitésimale qui est la proposition 335 pour chaque petit triangle :
  - Les circulations internes s'annulent et laissent le membre de droite à une erreur $o(1)$ près.
  - Les intégrales de surface s'additionnent, ce qui donne l'intégrale de surface désirée à une erreur $o(1)$ près : on a $O\left(\frac{1}{\epsilon^2}\right)$ triangles, chacun donne $\epsilon^2 \mathrm{rot} X$ fois son aire, plus une erreur $o\left(\epsilon^2\right)$.
- En faisant tendre $\epsilon \to 0$, on obtient le résultat.

□

Remarque 341. Cette formule est très proche de la formule pour les fonctions complexes $F : \Omega \to \mathbb{C}$ de classe C^1 (au sens des dérivées partielles réelles, pas nécessairement holomorphe) qui donne

$$\iint_{\Omega} \bar{\partial} F = \frac{1}{2i} \oint_{\partial\Omega} F(z)\, \mathrm{d}z,$$

où $\bar{\partial} F = \frac{1}{2}(\partial_1 F + i\partial_2 F)$.

18.3. **Existence de potentiel.** Grâce à Green-Riemann, on obtient le résultat souhaité.

Théorème 342. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un domaine simplement connexe et $X : \Omega \to \mathbb{R}^2$ un champ de vecteur C^1 de rotationnel nul. Alors X dérive d'un potentiel.*

Démonstration. Par la formule de Green-Riemann, et par simple connexité on a que la circulation de X le long de tout lacet simple est nulle ; on déduit (comme en analyse complexe) que la circulation le long de tout lacet est nulle et ainsi que X a un potentiel. □

19. Formule de Kelvin-Stokes et existence de potentiel 3D

19.1. **Motivation.**
- Dans la section 18, on a relié l'existence d'un potentiel 2D à la nullité du rotationnel 2D grâce à la formule de Green-Riemann.
- On va maintenant faire de même en 3D : on a besoin d'une version macroscopique de la proposition 339 : c'est la formule de Kelvin-Stokes.
- Pour introduire la formule de Kelvin-Stokes, on a besoin de comprendre la version intégrale du produit mixte $Y \cdot (v \times w)$ qui apparaît dans la proposition 339 : c'est le flux du champ de vecteur Y à travers une surface (un petit triangle dans ce cas).

19.2. **Surface.** On a déjà besoin de préciser ce qu'on entend par surface : intuitivement, une surface paramétrique est quelque chose qu'on peut paramétrer par deux paramètres :

Définition 343. On dit que $S \subset \mathbb{R}^3$ est une surface paramétrée C^1 de $\mathbb{R}^3$ s'il existe un bornée domaine $U \subset \mathbb{R}^2$ et une application $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ de classe C^1 injective à dérivée bornée de rang 2 telle que $\varphi(U) = S$.

Remarque 344. Une autre manière de demander que la dérivée a rang 2 est de demander que $\partial_1\varphi \times \partial_2\varphi$ ne s'annule pas.

Toutes les surfaces naturelles ne peuvent pas être paramétrées globalement (par exemple la sphère). Intuitivement une surface est un objet qui peut être paramétré localement :

Définition 345. On dit que $S \subset \mathbb{R}^3$ est une surface lisse par morceaux si S est connexe et est donnée par une union disjointe $S = \Lambda \cup S_1 \cup \cdots \cup S_n$ avec S_j des surfaces paramétrées C^1 (avec $n \geq 1$) et Λ une union finie de chemins (courbes C^1 avec dérivées bornées).

Une surface lisse est une surface où l'ensemble Λ ne pose pas de problème :

Définition 346. On dit que $S \subset \mathbb{R}^3$ est une surface lisse si elle est lisse par morceaux et telle que pour tout $x \in S$, il existe $\epsilon > 0$ tel que $S \cap B(x, \epsilon)$ soit une surface paramétrée C^1.

On a maintenant besoin du plan tangent à la surface :

Définition 347. Pour une surface lisse $S \subset \mathbb{R}^3$ avec $x = \varphi(w)$ où $w \in U$ (en suivant la notation de la définition 343), le plan tangent à S en x est le sous-espace affine de $\mathbb{R}^3$ qui contient x et est engendré par les directions $\partial_1\varphi(w), \partial_2\varphi(w)$.

On a finalement besoin d'une orientation :

Définition 348. On dit qu'une surface lisse $S \subset \mathbb{R}^3$ est orientée s'il existe une fonction continue $\nu : S \to \mathbb{S}^3$ (appelé choix de normale) telle que $\nu(x)$ soit orthogonal au plan tangent pour tout $x \in S$.

Remarque 349. Si ν est un choix de normale, $-\nu$ en est aussi un.

Remarque 350. Une surface paramétrée est toujours orientable : on a que la normale canonique $\nu(z) = \frac{\partial_1\varphi(x)\times\partial_2\varphi(x)}{\|\partial_1\varphi(x)\times\partial_2\varphi(x)\|}$ pour $z = \varphi(x) \in S$ convient, de même que $\tilde{\nu}(x) = -\nu(x)$. Le problème de non-orientabilité peut venir du faire que les normales différentes surfaces paramétrées au voisinage des points ne peuvent pas "s'accorder".

Remarque 351. Le ruban de Möbius est une surface lisse non orientable, par exemple.

Remarque 352. Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^3$ dont le bord est une surface lisse, on peut toujours orienter cette surface en prenant ν qui pointe vers l'extérieur de Ω.

19.3. **Intégrales de surface.** A partir des définitions de surface, on arrive à intégrer des champs scalaires sur une surface, qui est essentiellement la valeur moyenne que f prend sur S.

Définition 353. Pour une surface paramétrée $S \subset \mathbb{R}^3$ et un champ scalaire f défini au voisinage de S, on définit l'intégrale de f sur S, notée $\iint_S f \mathrm{d}\sigma$ par

$$\iint_S f \mathrm{d}\sigma = \iint_U f \circ \varphi \|\partial_1 \varphi \times \partial_2 \varphi\|,$$

où l'intégrale à droite est une intégrale 2D usuelle.

Remarque 354. Cette intégrale n'existe pas toujours ; elle est définie si elle existe (si on peut trouver U borné tel l'intégrande soit borné).

Remarque 355. Par la formule de changement de variable, cette intégrale ne dépend pas de la paramétrisation φ (elle est invariante par reparamétrisation).

Ceci nous suggère :

Définition 356. Pour une surface lisse par morceaux S, écrite comme une union disjointe $S = \Lambda \cup S_1 \cup \cdots \cup S_n$ comme dans la définition 345 et un champ scalaire f continu borné défini au voisinage de S, on définit $\iint_S f \mathrm{d}\sigma$ par

$$\iint_S f \mathrm{d}\sigma = \sum_{j=1}^{n} \iint_{S_j} \mathrm{d}\sigma.$$

Remarque 357. On peut montrer que cette intégrale ne dépend pas du choix du découpage en $S_1, \ldots, S_n$.

Cela nous permet de définir l'aire d'une surface :

Définition 358. L'aire d'une surface est définie par

$$\mathrm{Aire}\,(S) = \iint_S 1 \mathrm{d}\sigma$$

Remarque 359. Intuitivement, on peut calculer l'aire d'une surface en l'approchant par des petits triangles (dont les sommets sont sur la surface et les diamètres sont $O\left(\delta\right)$ disons), et en sommant l'aire de ces petits triangles. De même, intégrer une fonction peut être obtenu en moyennant les valeurs de la fonction prises sur les sommets de ces triangles, pondérées par la taille des triangles.

19.4. **Flux d'un champ à travers une surface.** On peut finalement définir le flux d'un champ vectoriel à travers une surface.

Définition 360. Pour une surface paramétrée $S \subset \mathbb{R}^3$ par $\varphi : U \to S$ et un champ vectoriel X continu borné défini au voisinage de S, on définit le flux de X à travers S, noté $\iint_S X \cdot \nu \mathrm{d}\sigma$, par

$$\oiint_S X \cdot \nu \mathrm{d}\sigma = \iint_U (X \circ \varphi) \cdot (\partial_1 \varphi \times \partial_2 \varphi),$$

où l'intégrale est une intégrale 2D usuelle et $\cdot$ désigne le produit scalaire.

Exercice 361. Montrer que $|\oiint X \cdot \nu \mathrm{d}\sigma| \leq \iint_S \|X\| \mathrm{d}\sigma$.

Remarque 362. Par la formule du changement de variable, le flux ne dépend pas de la paramétrisation spécifique.

A partir de cette remarque, on peut définir le flux à travers une surface lisse orientée comme suit :

Définition 363. Pour une surface lisse orientée S avec $S = \Lambda \cup S_1 \cup \cdots \cup S_n$ comme dans la définition 345 avec normale ν, on définit

$$\oiint_S X \cdot \nu \mathrm{d}\sigma = \sum \mathrm{sgn}\left(\nu_{S_j} \cdot \nu\right)_{j=1}^{n} \oiint_{S_j} X \cdot \nu \mathrm{d}\sigma,$$

où ν_{S_j} est la normale canonique associée à la surface S_j et $\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

Remarque 364. On peut montrer que cette intégrale ne dépend pas du choix du découpage en $S_1, \ldots, S_n$.

Remarque 365. On a que $\mathrm{sgn}\left(\nu_{S_j} \cdot \nu\right)$ est constante le long de chaque S_j : en effet si on normalise ν_{S_j}, ν pour avoir norme 1, on a que $\nu_{S_j} \cdot \nu$ est une fonction continue à valeurs dans ± 1, qui est donc constante.

Remarque 366. Dans le cas d'une surface lisse par morceaux $S = \Lambda \cup \cdots$ avec une orientation "naturelle" sur $S \setminus \Lambda$, par exemple si S est le bord d'un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, on peut toujours définir le flux de la même manière.

19.5. **Formule de Kelvin-Stokes.** La formule de Kelvin-Stokes nous permet d'intégrer le résultat de la proposition 339 en termes du flux du rotationnel à travers une surface.

Théorème 367. *Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ est une surface orientée lisse dont le bord ∂S est C^1 par morceaux. Si X est un champ vectoriel C^1 défini au voisinage de S, on a*

$$\oiint_S \mathrm{rot} X \cdot \nu \mathrm{d}\sigma = \oint_{\partial S} X \cdot \mathrm{d}s,$$

où ∂S est orienté dans le sens direct par rapport à la normale de S, c'est-à-dire avec une tangente τ telle que $\nu \times \tau$ pointe dans la direction de S.

Démonstration. On présente seulement une esquisse de preuve :

— Supposons que S est une surface paramétrée par $\varphi : U \to S$ avec U un domaine de $\mathbb{R}^2$.

— On peut découper U en petits triangles τ_ϵ et approcher l'intégrale $\oiint_S \mathrm{rot} X \cdot \nu \mathrm{d}\sigma$ par

$$\sum_{\tau_\epsilon} \mathrm{rot} X \left(\varphi \left(m\left(\tau_\epsilon\right)\right)\right) \cdot \left(\partial_1 \varphi \times \partial_2 \varphi\right)\left(m\left(\tau_\epsilon\right)\right) \mathrm{Aire}\left(m\left(\tau_\epsilon\right)\right),$$

où $m\left(\tau_\epsilon\right)$ désigne un point dans τ_ϵ.

— On a ensuite que φ envoie les sommets de τ_ϵ sur ceux d'un triangle T_ϵ qui satisfait

$$\left\| \left(\partial_1 \varphi \times \partial_2 \varphi\right)\left(m\left(\tau_\epsilon\right)\right) \right\| \mathrm{Aire}\left(m\left(\tau_\epsilon\right)\right) \approx \mathrm{Aire}\left(m\left(T_\epsilon\right)\right)$$

— On obtient

$$\sum_{T_\epsilon} \mathrm{rot} X \left(m\left(T_\epsilon\right)\right) \nu \left(m\left(T_\epsilon\right)\right) \mathrm{Aire}\left(m\left(T_\epsilon\right)\right),$$

où ν est la normale (normalisée) à la surface S en un point proche de T_ϵ.

— Maintenant, en utilisant la proposition 339, , on obtient que

$$\mathrm{rot} X \left(m\left(T_\epsilon\right)\right) \nu \left(m\left(T_\epsilon\right)\right) \mathrm{Aire}\left(m\left(T_\epsilon\right)\right) \approx \int_{\partial T_\epsilon} X \cdot \mathrm{d}s.$$

— Si on somme sur les T_ϵ, les contributions internes s'annulent, laissant seulement la circulation le long du bord de la triangulation (de l'union des triangles).

— En faisant tendre la taille des triangles vers 0, on obtient le résultat désiré.

□

Remarque 368. Si S est une surface orientée bornée sans bord (comme la sphère par exemple), on déduit immédiatement que le flux du rotationnel est nul.

19.6. **Existence d'un potentiel 3D.** A partir de la formule de Kelvin-Stokes, on déduit facilement :

Théorème 369. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ est un domaine simplement connexe, et soit $X : \Omega \to \mathbb{R}^3$ un champ vectoriel de rotationnel nul. Alors X dérive d'un potentiel.*

Démonstration. Esquisse : comme en 2D :
— Il suffit de vérifier que la circulation le long de tout lacet est nulle.
— Comme en 2D, il suffit de le voir le long de tout lacet simple.
— Il est facile de voir que tout lacet simple est le bord d'une surface orientée.
— Par la formule de Kelvin-Stokes, il suit que c'est le cas.

□

20. Divergence

20.1. **Motivation.**
— Dans la section 19.4, on a introduit le flux à travers une surface.
— Par la formule de Kelvin-Stokes, si on intègre le rotationnel d'un champ de vecteur le long d'une surface à bord, ce qu'on obtient ne dépend que du bord.
— Il est naturel de se demander dans quelle mesure une intégrale le long d'une surface à bord dépend de plus que son bord : c'est la question analogue de savoir si la circulation dépend de plus que des extrémités d'un chemin.
— Cela revient à se poser la question du flux d'un champ vectoriel à travers une surface qui est le bord d'un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$: c'est l'analogue de la question de la circulation le long de lacets.
— Pour des ouverts qui sont de diamètre $O(\epsilon)$, on obtient une expression en termes de leur volume et de la divergence du champ de vecteur.

20.2. Divergence.

Définition 370. La divergence d'un champ vectoriel $X : \mathbb{R}^n \supset \Omega \to \mathbb{R}^n$ est le champ scalaire $\mathrm{div} X$ défini par

$$\mathrm{div} X = \partial_{x_1} X_1 + \cdots + \partial_{x_n} X_n.$$

Remarque 371. En d'autres termes, la divergence est la trace de la matrice jacobienne.

Remarque 372. On écrit parfois la divergence $\nabla \cdot X$.

La signification de la divergence en termes du flux est donnée par le résultat suivant :

Proposition 373. *Soit $X : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une fonction C^1 et soit $x \in \Omega$. Soit $T_\epsilon = x + \epsilon T$ où T est un tétrahèdre avec normale orientée vers l'extérieur. On a*

$$\oiint_{\partial T_\epsilon} X \cdot \nu \mathrm{d}\sigma = \epsilon^3 \mathrm{Vol}\,(T)\, \mathrm{div} X\,(x) + o\left(\epsilon^3\right).$$

Démonstration. Cela suit d'un développement de Taylor, comme la preuve de la formule de Green infinitésimale. □

Exercice 374. Proposer une version de cet énoncé en dimension $d = 2$ et en dimension $d \geq 4$.

20.3. **Formule de Gauss-Ostrogradski.** Comme pour les autres formules, la proposition 373 n'est autre que la version infinitésimale d'une formule intégrale, appelée formule de Gauss-Ostrogradski :

Théorème 375. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domaine tel que $\partial\Omega$ est une surface lisse par morceaux avec normale orientée vers l'extérieur, et soit X un champ vectoriel défini au voisinage de $\bar{\Omega}$. Alors on a*

$$\iint_{\partial\Omega} X \cdot \nu \mathrm{d}\sigma = \iiint_{\Omega} \mathrm{div} X,$$

où l'intégrale du membre de droite est une intégrale 3D usuelle.

Démonstration. On peut découper Ω en petits tétraèdres, additionner les flux, ne garder que les contributions extérieures (les contributions internes s'annulent) et faire tendre la taille des tétraèdres vers 0. □

Remarque 376. On voir que si X est C^2 que $\mathrm{div}\,(\mathrm{rot} X) = 0$, ce qui est consistant avec la remarque 368.

20.4. Potentiel vecteur.

Exercice 377. On dit qu'un champ vectoriel$Y : \Omega \to \mathbb{R}^3$ a un potentiel vecteur s'il existe un champ vectoriel $X : \Omega \to \mathbb{R}^3$ tel que $\mathrm{rot} X = Y$. Montrer que si Y est C^1 et a un potentiel vecteur, on a $\mathrm{div} Y = 0$ et que si Y a un potentiel vecteur X, alors pour tout champ scalaire $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe C^2, $X + \nabla f$ en est aussi un.

Exercice 378 ((Difficile, pour réfléchir))**.** Si $Y : \Omega \to \mathbb{R}^3$ est C^1 avec $\mathrm{div} Y = 0$, sous quelles conditions sur Ω a-t-il un potentiel vecteur ?

21. Laplacien

21.1. Motivation.

— Le laplacien est un opérateur classique qui permet d'exprimer de nombreuses équations et objets fondamentaux en physique, en géométrie et en analyse.
— Intuitivement, il représente combien en moyenne les valeurs au voisinage d'un point varient par rapport à ce point.
— Il est fondamental dans presque toutes les équations importantes de la théorie des champs, et de nombreuses propriétés (en particulier son spectre) sont très étudiés de nos jours.

21.2. Définition.

Définition 379. Soit $f : \mathbb{R}^n \supset \Omega \to \mathbb{R}$ un champ scalaire C^2. Le laplacien Δf est défini par

$$\Delta f(x) = \partial_{11} f + \cdots + \partial_{nn} f.$$

Remarque 380. C'est simplement la trace de la hessienne ou la divergence du gradient.

Remarque 381. On écrit aussi parfois $\nabla^2 f$.

Remarque 382. Par la formule de Taylor du deuxième ordre, on a que

$$\Delta f(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\sum_{k=1}^n (f(x + \epsilon e_k) + f(x - \epsilon e_k)) - n f(x)}{\epsilon^2},$$

où $e_1, \ldots, e_n$ sont les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$; on peut en fait choisir n'importe quelle base orthonormale de $\mathbb{R}^n$, ce qui montre que le laplacien est invariant par changement de coordonnées orthogonal.

21.3. **Connexion avec Gauss-Ostrogradski.** En observant que $\Delta f = \mathrm{div}\mathrm{grad} f$, on obtient directement, à partir de la formule de Gauss-Ostrogradski :

Proposition 383. *Soit Ω une surface lisse par morceaux et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ un champ scalaire. On a*

$$\iiint_{\Omega} \Delta f = \oiint_{\partial\Omega} \nabla f \cdot \nu \mathrm{d}\sigma = \iint_{\partial\Omega} \partial_{\nu} f \mathrm{d}\sigma,$$

où la dernière intégrale est simplement une intégrale de surface et $\partial_{\nu} f$ dénote la dérivée de f dans la direction de la normale extérieure.

Démonstration. La première partie suit directement de la formule de Gauss-Ostrogradski appliquée à ∇f, la deuxième partie suit de la définition d'intégrale de surface. $\square$

21.4. **Fonctions harmoniques.** Le laplacien permet de définir parmi les fonctions les plus intéressantes de l'analyse : les fonctions harmoniques.

Définition 384. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un domaine et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction C^2. On dit que u est harmonique sur Ω si $\Delta f(x) = 0$ pour tout $x \in \Omega$.

Remarque 385. Intuitivement, on a qu'une fonction harmonique satisfait la propriété de "valeur moyenne".

Définition 386. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un domaine borné tel que $\partial\Omega$ est lisse par morceaux. Soit $\varphi : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ résout le problème de Dirichlet avec condition au bord φ si f est continue sur $\bar{\Omega}$ et

$$f\big|_{\partial\Omega} = \varphi.$$
$$\Delta f\big|_{\Omega} = 0.$$

Proposition 387. *Si elle existe, la solution du problème de Dirichlet est unique.*

Démonstration. La preuve utilise la linéarité et une sorte de principe du maximum :
— Si on a deux solutions $f, \tilde{f} : \Omega \to \mathbb{R}$, la différence est harmonique.
— Il suffit de montrer que la seule fonction harmonique $f : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ qui est harmonique avec condition au bord 0 est la fonction nulle.
— Il suffit donc de montrer qu'une fonction harmonique avec condition au bord nulle n'a pas de valeur > 0 (en appliquant un argument symétrique, il suivra qu'elle n'a pas de valeur < 0).
— Pour tout $\epsilon > 0$, on a que $f_\epsilon(x) = f(x) + \epsilon\|x\|^2$ ne peut pas avoir de maximum sur Ω : en un point de maximum, on aurait que la trace de la hessienne serait ≤ 0 or on a $\Delta f_\epsilon = 2n\epsilon > 0$.
— Maintenant, si f prend des valeurs $\geq \alpha > 0$ à l'intérieur de Ω, en prenant $\epsilon > 0$ assez petit, on arrive aussi à ce que $\sup_{x\in\Omega} |f_\epsilon(x)| > \max_{x\in\partial\Omega} |f_\epsilon(x)|$: par exemple

$$\epsilon = \frac{1}{2\max_{x\in\bar{\Omega}} \|x\|^2 \left(\sup_{x\in\Omega} |f_\epsilon(x)| - \max_{x\in\partial\Omega} |f(x)|\right)}.$$

— Ceci impliquerait que f_ϵ a un maximum sur Ω, ce qui est impossible.

□

Remarque 388. Cela montre qu'une fonction harmonique est déterminée par ses valeurs au bord.

21.5. **Fonctions harmoniques en 2D et analyse complexe.** En deux dimensions, les fonctions harmoniques et l'analyse complexe sont intimement connectées :

Lemme 389. *Soit $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et soient $f_1, f_2 : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ses parties réelles et imaginaires, vues comme fonctions de deux variables réelles. Alors on a que f_1 et f_2 sont harmoniques.*

Démonstration. Cela suit directement des équations de Cauchy-Riemann, on a que $\Delta = 4\bar{\partial}\partial$ en deux dimensions. □

Lemme 390. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un domaine simplement connexe et $f_1 : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction harmonique. Alors on a qu'il existe une fonction holomorphe $f : U \to \mathbb{C}$ telle que $f_1 = \mathfrak{Re}(f)$.*

Démonstration. On regarde ∂f_1, qui est une fonction holomorphe (car $\bar{\partial}\partial f_1 = 0$). On trouve une primitive holomorphe f telle que $\partial f = \partial f_1$. et telle que que $\mathfrak{Re}(f) = f_1$ en un point, ce qui nous donne la fonction désirée. □

22. Equations de la théorie des champs classique

22.1. **Motivation.**

— La philosophie est de trouver des champs qui décrivent les quantités utiles dans le monde, et des équations que l'évolution de ces champs satisfait.
— L'idée est que si on trouve une solution (exacte ou approximative) de l'équation qui régit un champ, et que l'équation (avec les données connues) a une solution unique, on peut prédire l'évolution du système.
— Pour ces équations, l'existence et l'unicité (sous les bonnes conditions) ne sont pas triviales du tout ; le but est simplement de comprendre ce que ces équations modélisent.

22.2. **Equation de Laplace.** C'est une équation qui nous dit simplement que f est harmonique.

Définition 391. On dit qu'une champ scalaire $f \supset \mathbb{R}^n : \Omega \to \mathbb{R}$ satisfait l'équation de Laplace si

$$\Delta f(x) = 0.$$

Remarque 392. Cette équation différentielle est en 3 dimensions satisfaite par

$$x \mapsto \frac{1}{\|x\|},$$

dont dérive le champ vecteur

$$-\frac{x}{\|x\|^3},$$

qui correspond (à constante multiplicative près) au champ de force gravitationnelle ou électromagnétique. On voit que la décroissance en $1/\|x\|^2$ de la force gravitationnelle est intimement relié à la propriété de valeur moyenne.

22.3. Equation de la chaleur.

Définition 393. On dit qu'une fonction C^2 notée $f : \Omega \times S \to \mathbb{R}$, où $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ et $S \subset \mathbb{R}$ sont des domaines, satisfait l'équation de la chaleur si

$$\partial_t f(x,t) = \Delta f(x,t) \quad \forall (x,t) \in \Omega \times S.$$

Remarque 394. Souvent, quand on étudie un problème physique on a des conditions au bords qui spécifient la fonction au bord du domaine et aux conditions initiales et finales, du type que f a une extension a $\bar{\Omega} \times \bar{S}$ et où on prescrit.

Remarque 395. On voit qu'en chaque point x, son évolution $t \mapsto f(x,t)$ a tendance à la faire revenir à la valeur de la moyenne ; à l'équilibre, on obtient une fonction harmonique.

22.4. **Equation des ondes.** Une équation fondamentale est l'équation des ondes.

Définition 396. On dit qu'une fonction C^2 notée $f : \Omega \times S \to \mathbb{R}$, où $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ et $S \subset \mathbb{R}$ sont des domaines satisfait l'équation des ondes si

$$\partial_t^2 f(x,t) = \Delta f(x,t).$$

Remarque 397. Cette équation nous dit que la différence d'une valeur "avec ses voisines" est proportionnelle à la force qui pousse cette différence. C'est ce que l'on a pour la hauteur d'un matériau élastique (et c'est ainsi que l'on a que les ondes se propagent dans un instrument).

22.5. **Equations de Maxwell.** Les équations de Maxwell gouverenent la propagation du champ électrique et du champ magnétique en termes de la présence de charge et du déplacement de charge.

Définition 398. On dit que $\rho : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ (la densité de charge) et $J : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ (le courant), $E : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ (le champ électrique) et $B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ (le champ magnétique) résolvent les équations de Maxwell (écrites en unités de Gauss) si on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{div} E &= 4\pi\rho \\
\mathrm{div} B &= 0 \\
\mathrm{rot} E &= -\frac{1}{c}\partial_t B \\
\mathrm{rot} B &= \frac{1}{c}\left(4\pi J + \frac{\partial E}{\partial t}\right),
\end{aligned}$$

où $c > 0$ est la vitesse de la lumière.

Remarque 399. On peut écrire ces équations sous forme intégrale pour mieux les comprendre.

— Pour les deux premières, on a, pour tout Ω :

$$\begin{aligned}
\oiint_{\partial\Omega} E \cdot \nu \mathrm{d}s &= 4\pi \iiint_{\Omega} \rho, \\
\oiint_{\partial\Omega} B \cdot \nu \mathrm{d}s &= 0,
\end{aligned}$$

grâce à Gauss-Ostrogradski, où $\iiint_{\Omega} \rho$ désigne maintenant la charge totale dans Ω.

— Pour les deux dernières, on a, pour toute surface orientée S :

$$\begin{aligned}
\int_{\partial S} E \cdot \mathrm{d}s &= -\frac{1}{c} \iint_S (\partial_t B) \cdot \nu \mathrm{d}s \\
\int_{\partial S} B \cdot \mathrm{d}s &= \frac{4\pi}{c} \iint_S J \cdot \nu \mathrm{d}s + \frac{1}{c} \iint_S (\partial_t E) \cdot \nu \mathrm{d}s,
\end{aligned}$$

où $\int_{\partial S} J \cdot \mathrm{d}s$ est le courant qui parcourt ∂S.

Remarque 400. En utilisant que $\mathrm{rotrot}\,(B) = \mathrm{graddiv} B - \vec{\Delta} B$, où $\vec{\Delta} B$ est le Laplacien coordonnée par coordonnée (appelé Laplacien vecteur) on voit que dans le vide, on obtient si B, E sont C^2

$$\partial_{tt} E = c\partial_t \mathrm{rot} B = c\mathrm{rot}\partial_t B = -c^2 \mathrm{rotrot} E = c^2 \vec{\Delta} E,$$

ce qui montre que le champ électrique se comporte comme une onde dans le vide.

22.6. Equations de Navier-Stokes (fluide incompressible).

Définition 401. On dit que le champ de vitesse $u : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ et le champ de pression $p : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfont les équations de Navier-Stokes si

$$\frac{\partial}{\partial t} u_i + \sum_{j=1}^{n} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \nu \Delta u_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + f_i(x,t) \quad \forall i = 1, \ldots, n$$
$$\mathrm{div} u = 0$$

où $\nu > 0$ est une constante (la viscosité) et où $f_i : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la force externe.

Remarque 402. C'est un problème ouvert important de savoir si pour des conditions initiales (disons C^∞) générales, cette équation a une solution.