Introduction aux chaînes de Markov **Vezin Lomàn**
MAP432 Date de rendu: 05/01/2021

Devoir Maison 1

I. *1.* On montre que pour $i, j \in \mathbf{N}$ quelconques il existe un $n \in \mathbf{N}$ tel que

$$P^n(i,j) > 0.$$

Si $i = j$ on a $P(i,j) = \frac{1}{2} > 0$, supposons alors sans perte de généralité que $j > i$. On obtient en posant $n := j - i$

$$P^n(i,j) = \prod_{k=i}^{j} p_k > 0, \quad \text{comme } p_k > 0 \ \forall k \in \mathbf{N}.$$

La matrice P est donc irréductible, la chaîne associée l'est aussi.

2. Commençons par considérer les mesures réversibles. Soit $i \in \mathbf{N}$, si π est une mesure réversible sur la chaîne alors par définition

$$\pi(i)P(i,i+1) = \pi(i+1)P(i+1,i),$$

soit

$$\pi(i+1) = \frac{p_i}{q_{i+1}}\pi(i).$$

Par itération directe on obtient pour $i \in \mathbf{N}$

$$\pi(i) = \pi(0) \cdot \frac{p_0 p_1 \cdots p_i}{q_1 \cdots q_i}.$$

Les mesures réversibles sont donc les multiples scalaire de

$$\gamma(i) := \frac{p_0 p_1 \cdots p_i}{q_1 \cdots q_i}.$$

On sait que les mesures réversibles sont invariantes, on montre à présent que les mesures invariantes sont toutes de cette forme. Soit π une mesure invariante, posons $\mathcal{P}$ l'hypothèse de récurrence sur $\mathbf{N}$, avec $\mathcal{P}(i)$ l'hypothèse $\pi(i)$ est un multiple scalaire de $\gamma(i)$.

Si π est invariante, pour $i \in \mathbf{N}^*$ nous avons

$$\pi(i) = \pi(i-1)P(i-1,i) + \pi(i)P(i,i) + \pi(i+1)P(i+1,i),$$

soit donc par définition de P

$$\frac{\pi(i)}{2} = \pi(i-1)p_{i-1} + \pi(i+1)q_{i+1}.$$

Pour $i = 0$ on obtient simplement

$$\pi(0) = \frac{\pi(0)}{2} + q_1\pi(i),$$

soit comme $p_0 = \frac{1}{2}$

$$\pi(1) = \frac{p_0}{q_1}\pi(0) = \pi(0)\gamma(0)$$

et $\mathcal{P}(1)$ est vérifiée.

Soit $i \in \mathbf{N}^*$, supposons que $\mathcal{P}(0), \ldots, \mathcal{P}(i)$ soient vérifiées. Alors l'équation précédente se réécrit

$$\pi(i+1)q_{i+1} = \frac{1}{2}\pi(i) - \pi(i-1)p_{i-1}.$$

Ainsi on obtient par hypothèse de récurrence en utilisant l'expression de $\gamma(i)$ et $\gamma(i-1)$

$$\begin{aligned}
\pi(i+1)q_{i+1} &= \frac{1}{2}\frac{p_0 \ldots p_{i-1}}{q_1 \ldots q_i}\pi(0) - \frac{p_0 \ldots p_{i-1}}{q_1 \ldots q_{i-1}}\pi(0) \\
&= \pi(0)\frac{p_0 \ldots p_{i-1}}{q_1 \ldots q_{i-1}}(\frac{1}{2q_i} - 1) \\
&= \pi(0)\frac{p_0 \ldots p_{i-1}}{q_1 \ldots q_{i-1}}\frac{2p_i}{2q_i}.
\end{aligned}$$

En divisant de part et d'autre par $q_{i+1} > 0$ on obtient finalement

$$\pi(i+1) = \pi(0)\gamma(i+1)$$

et $\mathcal{P}(i+1)$ est toujours vérifiée. On conclut par l'axiome de récurrence que

$$\pi(i) = \pi(0)\gamma(i), \quad \forall i \in \mathbf{N}.$$

3. Par la question *2.* nous savons que les mesures invariantes sont des multiples scalaire de γ et par la question *1.* nous savons que la chaîne est irréductible. Par le théorème **4.6** des notes de cours, la chaîne est donc récurrente positive si et seulement si il existe une mesure de probabilité invariante, si et seulement si donc

$$\sum_{i \in \mathbf{N}} \gamma(i) < +\infty$$

puisqu'alors on peut normaliser l'unique expression des mesures invariantes pour trouver une mesure de probabilité invariante.

II. *1.* On remarque que X_n et Y_n ainsi définies sont des récurrences aléatoires, donc par le théorème **2.2** des notes de cours ce sont des chaînes de Markov. En effet posons

$$\begin{aligned} f : \mathbf{N} \times (\{0,1\} \times [0,1]) &\longmapsto \mathbf{N} \\ i,(\varepsilon,u) &\longmapsto F(i,\varepsilon,u). \end{aligned}$$

On observe alors que

$$X_{n+1} = f(X_n, \alpha_{n+1}) \quad \text{et} \quad Y_{n+1} = f(X_n, \beta_{n+1}),$$

où respectivement

$$\alpha_{n+1} := (\varepsilon_{n+1}, U_{n=1}) \quad \text{et} \quad \beta_{n+1} := (1 - \varepsilon_{n+1}, U_{n+1})$$

sont des variables aléatoires, respectivement identiquement et indépendamment distribuées puisque les variables ε_n et U_n sont supposées indépendantes entre elles. Les variables α_n et β_n ne sont pas nécessairement indépendantes entre elles.

On regarde à présent la matrice de transition de ces chaînes de Markov. Remarquons que la variable aléatoire $1 - \varepsilon_n$ est également une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$. Il suffit donc d'effectuer les calculs pour la chaîne X_n, les calculs pour la chaîne Y_n étant similaires. Appelons Q la matrice de transition de X_n, alors pour $i, j \in \mathbf{N}$ on a

$$\begin{aligned} Q(i,j) &= \mathbf{P}(X_{n+1} = j | X_n = i) \\ &= \mathbf{P}(F(i, \varepsilon_{n+1}, U_{n+1}) = j). \end{aligned}$$

On en déduit donc que $Q(i,j) = 0$ lorsque $j \notin \{i, i+1, i-1\}$ et de plus par indépendance de ε_n et U_n pour tout n, on obtient

$$\begin{aligned} P(i,i) &= \mathbf{P}(\varepsilon_{n+1} = 0)\mathbf{P}(U_{n+1} \in [0,1]) &&= \frac{1}{2} \\ P(i,i+1) &= \mathbf{P}(\varepsilon_{n+1} = 1)\mathbf{P}(U_{n+1} \leq 2p_i) = \frac{1}{2} 2p_i &&= p_i \\ P(i,i-1) &= \mathbf{P}(\varepsilon_{n+1} = 1)\mathbf{P}(U_{n+1} > 2p_i) = \frac{1}{2}(1 - 2p_i) = \frac{1}{2} - p_i &&= q_i. \end{aligned}$$

On voit donc bien $Q = P$ comme souhaité.

Par définition de X_n et Y_n, on a dans un premier temps

$$|X_{n+1} - X_n|, |Y_{n+1} - Y_n| \in \{0, 1\}.$$

On observe de plus presque surement

$$|X_{n+1} - X_n| = 1 \iff \varepsilon_{n+1} = 1 \iff 1 - \varepsilon_{n+1} = 0 \iff |Y_{n+1} - Y_n| = 0.$$

C'est à dire finalement

$$|X_{n+1} - X_n| + |Y_{n+1} - Y_n| = 1 \quad \text{p.s.}$$

On reconnait le même cadre que celui de l'exercice 2 de la PC 4. En posant comme dans la question 1

$$M_n := (X_n, Y_n) \quad \text{et} \quad M_{n+1} = \psi(M_n, \gamma_{n+1})$$

avec $\psi((x,y),(u,v)) = (f(x,u), f(y,v))$ et $\gamma_{n+1} := (\alpha_{n+1}, \beta_{n+1})$ avec f, α_n, β_n comme définis plus haut, on reconnait une fois encore la définition d'une récurrence aléatoire, donc d'une chaîne de Markov.

2. Si $\tau_0 = \tau_0'$ il est clair que $T \le \max(\tau_0, \tau_0') = \tau_0$ puisqu'en τ_0 on a bien $X_n = Y_n$. Par symétrie nous pouvons supposer sans perte de généralité que $\tau_0 < \tau_0'$. Si par l'absurde $T > \tau_0'$ alors la chaîne Y_n rejoins 0 sans croiser la chaîne X_n. Cela n'est possible par définition de ces chaînes que si les deux chaînes font un saut de 1 en même temps, mais ceci contredit le résultat montré au point précédent

$$|X_{n+1} - X_n| + |Y_{n+1} - Y_n| = 1 \quad \text{p.s.}$$

$T \le \max(\tau_0, \tau_0')$ est fini presque surement, puisque τ_0, τ_0', qui sont des temps d'atteinte, sont eux mêmes finis presque surement dans une chaîne récurrente positive. Par l'exercice 2 de la PC 4 nous en déduisons donc que

$$\|\mu P^n - \pi\|_{VT} \le \mathbf{P}(T > n), \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

Ainsi par croissance de la probabilité comme $T \le \max(\tau_0, \tau_0')$,

$$\|\mu P^n - \pi\|_{VT} \le \mathbf{P}(\max(\tau_0, \tau_0') > n), \quad \forall n \in \mathbf{N},$$

et comme la chaîne est récurrente positive

$$\mathbf{P}(\max(\tau_0, \tau_0') > n) \to_n 0.$$

Par encadrement on en déduit le résultat désiré, à savoir

$$\|\mu P^n - \pi\|_{VT} \to_n 0.$$