

# Chapitre 1

## La topologie quotient

Dans tout ce chapitre  $X$  dénote un espace *topologique*,  $q$  une surjection. Sauf mention du contraire lorsqu'il est question d'espaces topologiques une application est considérée continue.

**Notation.** Nous introduisons les notations élémentaires qui suivront dans tout le chapitre.

- Le singleton est l'espace  $\star$  il s'agit de l'ensemble à un seul point munit de la topologie discrète.
- L'espace  $D^n$  est la boule unité fermée (disque) dans  $\mathbf{R}^n$  pour la métrique euclidienne usuelle. On notera parfois  $e^n$  pour ce même espace. L'intérieur  $\mathring{D}^n$  ou  $\mathring{e}^n$  est donc la boule ouverte.
- Le bord  $\partial D^n$  de  $D^n$  est la sphère unité  $S^{n-1}$ .
- On utilise le symbole  $\cong$  pour les isomorphismes et les homéomorphismes sans plus de précision tant que le contexte est clair et  $\simeq$  pour les homotopies.
- Les vecteurs sont notés en gras.

### 1.1 Théorie générale

**Définition 1.1.1** (Topologie quotient). Étant donné une application  $q$ , la topologie quotient sur  $Y$  relativement à  $q$  a pour ouverts les sous ensembles  $U \subset Y$  tels que  $q^{-1}(U)$  est ouvert dans  $X$ .

*Remarque.* Une caractérisation équivalente de cette topologie peut se faire en définissant les fermés de  $Y$  par les fermés de  $X$ .

**Définition 1.1.2** (Quotient). On dit qu'une application  $q : X \longrightarrow Y$  est un quotient si elle est surjective, continue et que la topologie quotient induite par  $q$  coïncide avec la topologie de  $Y$ .

**Proposition 1.1.3.** *Si  $q : X \rightarrow Y$  est une application surjective continue et ouverte alors  $q$  est un quotient et  $Y$  est muni de la topologie quotient définie par  $q$ .*

*Démonstration.* Si  $U$  est ouvert dans  $Y$  alors  $q^{-1}(U)$  est ouvert dans  $X$  par continuité de  $q$ . Réciproquement si  $U \subset Y$  et  $q^{-1}(U)$  est ouvert dans  $X$  alors par surjectivité de  $q$

$$q(q^{-1}(U)) = U$$

et on en conclut que  $U$  est ouvert dans  $Y$  puisque  $q$  est ouverte.  $\square$

*Remarque.* Ce critère reste valable si  $q$  est une application fermée, la preuve est identique en remplaçant les ouverts par des fermés.

**Exemple 1.1.4.** Il est cependant important de noter que ce critère bien que suffisant n'est pas nécessaire. Définissons l'application

$$q : [0, 3] \rightarrow [0, 2]$$

$$t \mapsto \begin{cases} t & \text{si } t \leq 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq t \leq 2 \\ t - 1 & \text{sinon} \end{cases}.$$

$q$  est une application continue, c'est un quotient pour la topologie euclidienne sur  $[0, 3]$ ,  $[0, 2]$  mais elle n'est pas ouverte,  $(1, 2)$  est envoyé sur  $\{1\}$ .

**Proposition 1.1.5.** *La composition de deux quotients est également un quotient.*

**Proposition 1.1.6** (Propriété universelle). *La topologie quotient est la plus fine telle que l'application  $q$  soit continue. De plus,  $g : Y \rightarrow Z$  est une application continue si et seulement si  $g \circ q : X \rightarrow Z$  est continue.*

*Démonstration.* Soit  $U$  un ouvert d'une topologie sur  $Y$  telle que  $q$  soit continue. Par continuité  $q^{-1}(U)$  est ouvert dans  $X$  et donc  $U$  est ouvert dans  $Y$  pour la topologie quotient. Si  $g$  est continue,  $g \circ q$  est continue en tant que composition d'applications continues. Réciproquement, si  $g \circ q$  est continue prenons  $V \subset Z$  un ouvert,  $(g \circ q)^{-1}(V)$  est ouvert dans  $X$  par continuité de la composée et de plus

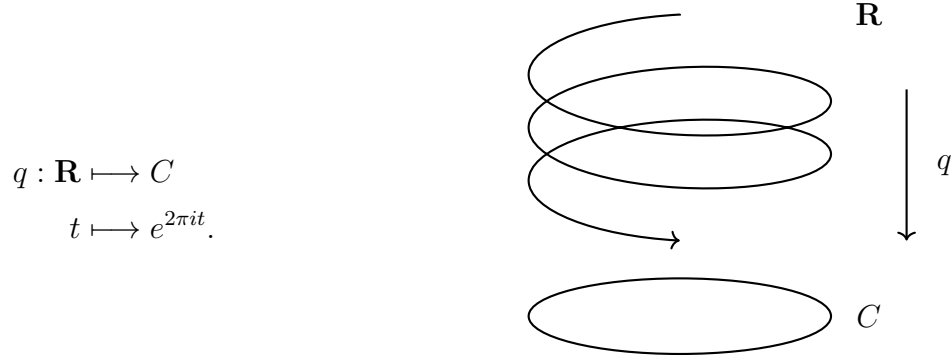
$$q^{-1}(g^{-1}(V)) = (g \circ q)^{-1}(V)$$

est ouvert. Ainsi par définition de la topologie quotient  $g^{-1}(V)$  est ouvert dans  $Y$  ce qui conclut quant à la continuité de  $g$ .  $\square$

**Exemple 1.1.7.** Considérons le cercle unité

$$C := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

On définit  $q$  une application surjective comme suit



Il s'agit d'une application continue surjective et ouverte pour la topologie euclidienne, c'est donc un quotient.

**Proposition 1.1.8.** *Si  $q$  est un quotient  $X \mapsto Y$  et que  $X$  est compact alors  $Y$  est aussi compact.*

*Démonstration.* L'image d'un compact par une fonction continue est un compact.  $\square$

## 1.2 Quotient par une relation

Étant donné une relation d'équivalence  $\sim$  on note  $[x]$  la classe d'équivalence de  $x \in X$ .

**Définition 1.2.1** (Espace quotient). On définit une application

$$\begin{aligned} q : X &\mapsto X / \sim \\ x &\mapsto [x] \end{aligned}$$

alors l'espace quotient de  $X$  par  $\sim$  est l'ensemble  $X / \sim$  munit de la topologie quotient induite par  $q$ .

*Remarque.* On peut munir une partition  $X^*$  de  $X$  de la topologie quotient en définissant une relation d'équivalence  $\sim$  sur  $X^*$  comme suit

$$x \sim y \iff \exists A \in X^* \text{ tel que } x, y \in A.$$

**Exemple 1.2.2.** Le cercle  $C$  défini précédemment peut être vu comme espace quotient de  $[0, 1]$  par la relation

$$x \sim y \iff \begin{cases} x = y \\ x, y \in \{0, 1\} \end{cases}.$$

**Proposition 1.2.3** (Propriété universelle). *Soit  $\sim$  une relation d'équivalence sur un espace  $X$ , pour toute application  $f : X \mapsto Y$  vérifiant  $x \sim x' \implies f(x) = f(x')$  il existe une unique application  $\hat{f} : X/\sim \mapsto Y$  telle que  $\hat{f} \circ q = f$ . On dit que  $f$  **passse au quotient** et induit une application  $\hat{f}$ .*

Le diagramme suivant résume cette propriété,  $\hat{f}$  est l'unique fonction le faisant commuter.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{q} & X/\sim \\ & \searrow f & \downarrow \exists! \hat{f} \\ & & D \end{array}$$

*Démonstration.* Comme on veut  $\hat{f} \circ q = f$  on doit avoir  $\hat{f}([x]) = \hat{f}(q(x)) = f(x)$  et l'unicité est garantie. Cette application est bien définie puisqu'on a imposé que  $f$  soit compatible avec  $\sim$ . Pour vérifier la continuité de  $\hat{f}$  il suffit de réaliser que la composition  $\hat{f} \circ q$  est continue puisqu'il s'agit de  $f$  et d'appliquer la **Proposition 0.1.6**. □

Soit  $A \subset X$  un sous espace.

**Définition 1.2.4** (Collapse). Le collapse de  $X$  par  $A$  est le quotient  $X/\sim$  où

$$x \sim x' \iff \begin{cases} x = x' \\ x, x' \in A \end{cases}.$$

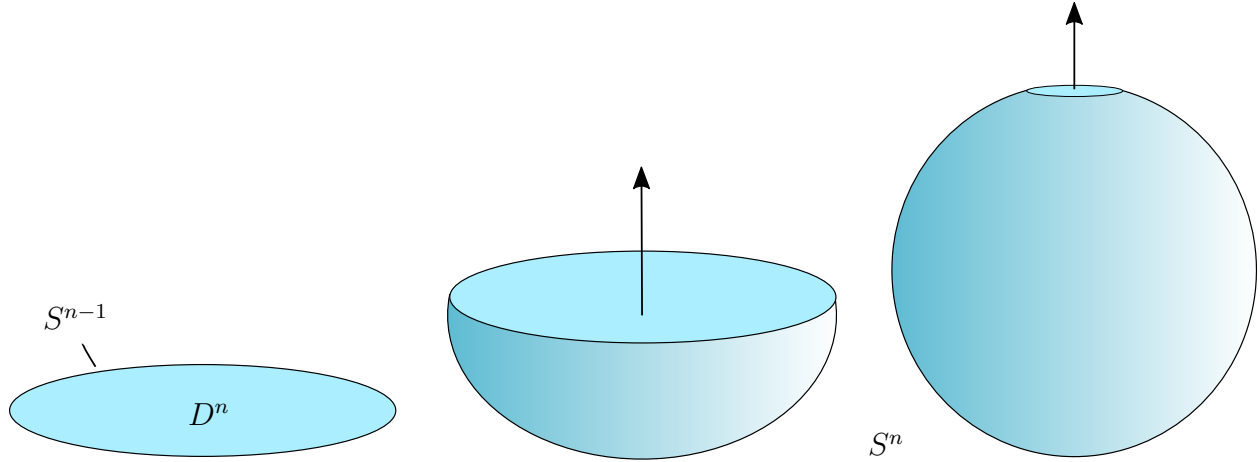
On le note  $X/A$ .

**Exemple 1.2.5.** Le cercle unité défini précédemment s'écrit comme le collapse  $C = [0, 1]/\{0, 1\}$ .

**Exemple 1.2.6.** On cherche à montrer ici que le collapse  $D^n/S^{n-1}$  est homéomorphe à la sphère unité  $S^n$ . Le cas  $n = 2$  est très visuel. On exhibe à présent l'homéomorphisme dans le cas général

$$f : D^n \mapsto S^n$$

$$\mathbf{x} \mapsto \begin{cases} (2\mathbf{x}, \sqrt{1 - \|2\mathbf{x}\|^2}) & \text{si } \|\mathbf{x}\| \leq \frac{1}{2} \\ ([4 - 4\|\mathbf{x}\|]\mathbf{x}, -\sqrt{1 - [4 - 4\|\mathbf{x}\|]^2\|\mathbf{x}\|^2}) & \text{si } \frac{1}{2} \leq \|\mathbf{x}\| \leq 1 \end{cases}.$$

FIGURE 1.1 – Illustration de ce quotient dans le cas  $n = 2$ .

Tout point du bord de  $D^n$ , donc de norme 1, est envoyé sur  $(\mathbf{0}, -1)$ , cette application passe donc au quotient et induit une application  $\hat{f} : D^n / S^{n-1} \mapsto S^n$ . Puisque c'est une bijection continue d'un espace compact vers un espace séparé il s'agit d'un homéomorphisme.

**Définition 1.2.7** (Union disjointe). Étant donné une famille d'ensembles  $\{X_i \mid i \in I\}$  indexés par un ensemble d'indices  $I$ , l'union disjointe est l'ensemble

$$\coprod_{i \in I} X_i := \bigcup_{i \in I} \{(x, i) \mid x \in X_i\}.$$

On définit une topologie sur cet ensemble telle que les inclusions canoniques

$$\begin{aligned} \varphi_i : X_i &\mapsto \coprod X_i \\ x &\mapsto (x, i) \end{aligned}$$

soient continues. De façon explicite un sous ensemble  $U \subset \coprod X_i$  est ouvert si et seulement si sa préimage  $\varphi_i^{-1}(U) \subset X_i$  est ouverte pour tout  $i \in I$ . Cette topologie est appelée topologie coproduit.

**Proposition 1.2.8** (Propriété universelle). *L'union disjointe d'une famille d'ensembles munie des injections canoniques est caractérisée par la propriété universelle suivante.*

Pour tout espace  $Y$  et toute application continue  $f_i : X_i \mapsto Y$  pour  $i \in I$ , il existe une unique application continue

$$f : \coprod X_i \mapsto Y$$

telle que  $f \circ \varphi_i = f_i$ . Cette propriété est résumée par le diagramme suivant.

$$\begin{array}{ccc} X_i & \xrightarrow{\varphi_i} & \coprod X_i \\ & \searrow f_i & \downarrow \exists! f \\ & & Y \end{array}$$

**Proposition 1.2.9.** La topologie coproduit est la moins fine telle que les projections canoniques soient continues.

**Définition 1.2.10** (Wedge). Si  $(X_i, x_i)$  est un espace épointé pour  $i \in I$  un ensemble d'indices non vide, alors le wedge ou *bouquet* en français, noté  $\bigvee_{i \in I} X_i$ , est le quotient de l'union disjointe des  $X_i$  par la relation

$$x \sim x' \iff \begin{cases} x = x' \\ x, x' \in \{x_i \mid i \in I\} \end{cases}.$$

**Exemple 1.2.11.** Le wedge  $S^1 \vee S^1$  est un huit, par abus de notation on admet de mentionner le point de base lorsque le choix de ce dernier n'a pas d'importance.

**Définition 1.2.12** (Cylindre et cône de base  $X$ ). Pour un espace  $X$ , le cylindre de base  $X$  est  $X \times I$  avec le plus souvent  $I = [0, 1]$ . Le cône de base  $X$  est le quotient  $X \times I / X \times 0$ , on le note  $CX$ .

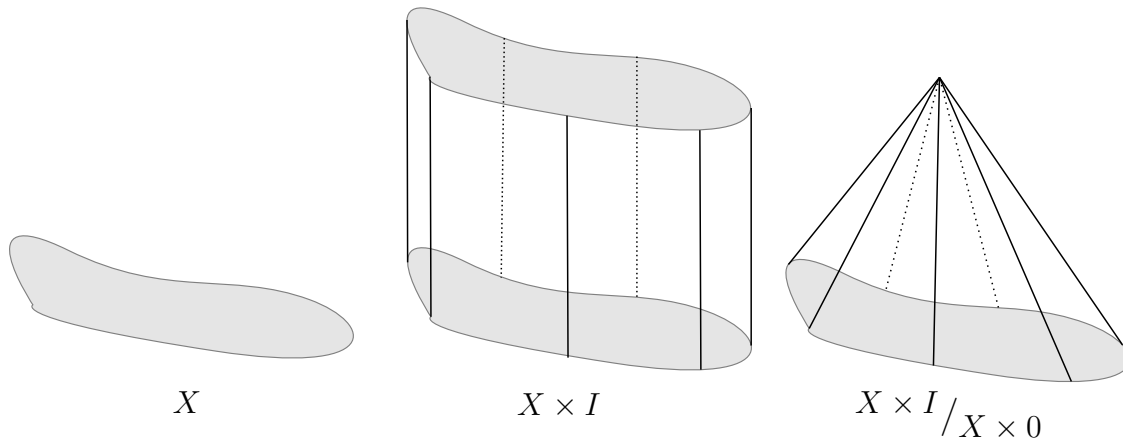


FIGURE 1.2 – Illustration du cylindre et du cône de base  $X$ .

**Définition 1.2.13** (Suspension). La suspension d'un espace  $X$  s'obtient à partir du cylindre  $X \times I$  en collapsant  $X \times 0$  ce qui donne le cône de base  $X$  puis en collapsant  $X \times 1$ . On la note

$$\Sigma X := CX / X \times 1.$$

**Définition 1.2.14** (Homotopie). Deux fonctions  $f, g : X \mapsto Y$  sont dites homotopes et on note  $f \simeq g$  s'il existe une application  $H : X \times I \mapsto Y$  telle que pour tout  $x$  dans  $X$

$$H(x, 0) = f(x)$$

$$H(x, 1) = g(x).$$

On dit alors que  $H$  est une homotopie de  $f$  vers  $g$ .

**Définition 1.2.15** (Type d'homotopie). On dit que deux espaces  $X$  et  $Y$  ont le même type d'homotopie s'il existe des applications  $f : X \mapsto Y$  et  $g : Y \mapsto X$  telles que  $f \circ g \simeq Id_Y$  et  $g \circ f \simeq Id_X$ . On note alors  $X \simeq Y$  et on appelle  $f$  et  $g$  des équivalences d'homotopie.

**Proposition 1.2.16.** *Le cône  $CX$  est toujours contractile, c'est à dire qu'il a le même type d'homotopie qu'un singleton.*

*Démonstration.* On définit

$$H : X \times I \times I \mapsto X \times I$$

$$(x, s, t) \mapsto (x, st).$$

Cette application est clairement continue, elle passe aux quotients et induit une application

$$\overline{H} : CX \times I \mapsto CX$$

$$([x, s], t) \mapsto [x, st].$$

Cette dernière application est bien définie puisque  $H(x, 0, t) = (x, 0)$ . Cette application  $\overline{H}$  est une homotopie entre  $\overline{H}|_{CX \times 0}$  qui est l'application constante sur  $[x, 0]$  et  $\overline{H}|_{CX \times 1} = Id_{CX}$ . Ainsi  $\overline{H}$  est une contraction du cône sur un point.  $\square$

## 1.3 Quotient et séparabilité

Dans toute cette section séparé et Hausdorff sont synonymes. En général le quotient d'un espace Hausdorff n'est pas nécessairement Hausdorff. On se demande sous quelle condition sur  $X$  le quotient  $X / \sim$  est séparé.

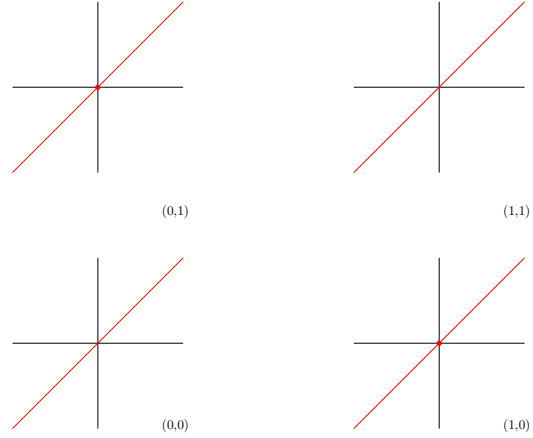
**Exemple 1.3.1.** L'exemple classique est la droite avec deux origines  $D$  obtenue comme quotient de  $\mathbf{R} \times \{0, 1\}$  par la relation

$$(x, s) \sim (y, t) \iff \begin{cases} (x, s) = (y, t) \\ x = y \neq 0 \end{cases}.$$

On ne peut pas séparer ces deux origines par des ouverts. On peut s'intéresser au graphe de cette relation défini comme

$$\Gamma := \{(d, d') \in (\mathbf{R} \times \{0, 1\})^2 \mid d \sim d'\}.$$

L'origine n'est pas incluse pour le graphe de la classe  $(0, 1)$  et celui de la classe  $(1, 0)$ .



**Proposition 1.3.2.** Si  $X/\sim$  est séparé, alors le graphe de la relation  $\sim$  est fermé.

Pour arriver à ce résultat nous aurons besoin du Lemme suivant.

**Définition 1.3.3** (Diagonale). La diagonale d'un espace  $X$  est définie comme le sous ensemble du produit cartésien

$$\Delta := \{(x, x) \in X \times X\}$$

**Lemme 1.3.4.** Un espace est Hausdorff si et seulement si sa diagonale est fermée.

*Démonstration.* Soient  $x \neq y \in X$  et  $x \in U, y \in V$  des voisinages distincts. Alors  $U \times V$  est un voisinage ouvert de  $(x, y) \in X \times Y$  muni de la topologie produit. On observe que  $U \cap V \neq \emptyset \iff (U \times V) \cap \Delta = \emptyset$ . On peut séparer  $x$  et  $y$  par des ouverts si et seulement si  $\Delta^c$  est ouvert.  $\square$

*Démonstration de la proposition.* Si le quotient  $X/\sim$  est séparé, la diagonale  $\Delta \subset (X/\sim)^2$  est fermée par le **Lemme 0.3.4**. On considère  $q \times q : X \times X \mapsto (X/\sim) \times (X/\sim)$  le quotient et on identifie

$$(q \times q)^{-1}(\Delta) = \{(x, y) \in X \times X \mid [x] = [y]\} = \Gamma$$

qui est donc fermé.  $\square$

Bien que nécessaire, notons que cette condition n'est pas suffisante. Le critère suivant fournit quant à lui une condition suffisante, bien que non nécessaire.

**Définition 1.3.5** (Saturé). On appelle saturé de  $A$  l'ensemble  $q^{-1}(q(A))$  pour  $A \subset X$ .



**Proposition 1.3.6.** *Si  $X$  est un espace séparé tel que  $q^{-1}(q(x))$  est compact pour tout  $x \in X$  et  $q^{-1}(q(F))$  est fermé dans  $X$  pour tout  $F$  fermé dans  $X$ , alors  $X / \sim = q(X)$  est séparé*

*Démonstration.* Prenons deux classes disjointes du quotient  $[x] \neq [y]$ . Puisque  $X$  est séparé on peut trouver deux ouverts disjoints de  $X$ ,  $U$  et  $V$ , avec  $q^{-1}(x) \in U$  et  $q^{-1}(y) \in V$  puisque  $q^{-1}([x])$  et  $q^{-1}([y])$  sont compacts. En regardant les complémentaires fermés on a que

$$U^c \subset q^{-1}(q(U^c)) \text{ et } V^c \subset q^{-1}(q(V^c)).$$

Soient donc

$$U' := X \setminus (q^{-1}(q(U^c))) \subset U \text{ et } V' := X \setminus (q^{-1}(q(V^c))) \subset V.$$

On va prouver que  $q(U')$  et  $q(V')$  sont des voisinages ouverts et disjoints de  $[x]$  et  $[y]$  respectivement. D'abord  $[x] \in q(U')$  car  $x \notin q^{-1}(q(U^c))$  et de même  $[y] \in q(V')$ . Pour montrer que  $q(U')$  est ouvert, on montre que  $U' = q^{-1}(q(U'))$ . La première inclusion est toujours vérifiée, montrons la seconde. Soit  $u \in q^{-1}(q(U'))$ , alors  $q(u) \in q(U')$  et donc  $q(u) \notin q(U^c)$ . Ainsi  $u \notin q^{-1}(q(U^c))$ , donc  $u \in U'$  par construction de  $U'$ , de même pour  $V'$ . Pour terminer la preuve, montrons que  $q(U')$  et  $q(V')$  sont disjoints. Supposons par l'absurde que ce ne soit pas le cas. Soit  $[z] \in q(U') \cap q(V')$ , il existe donc  $u' \in U'$  tel que  $[z] = q(u') \in q(V')$ . Ainsi  $u' \in q^{-1}(q(V')) = V'$  mais  $U'$  et  $V'$  sont disjoints, contradiction.  $\square$

**Corollaire 1.3.7.** *Si  $A \subset X$  est un sous espace compact et  $X$  séparé, alors  $X / \sim_A$  est séparé.*

*Démonstration.* Le critère précédent est vérifié puisque la saturation d'un point

$$q^{-1}(q(x)) = \begin{cases} A & \text{si } x \in A \\ \{x\} & \text{sinon} \end{cases}.$$

Dans les deux cas ce sont des compacts. Si  $F \subset X$  est fermé alors

$$q^{-1}(q(F)) = \begin{cases} F & \text{si } A \cap F = \emptyset \\ F \cup A & \text{sinon} \end{cases}.$$

Notons que  $F$  est fermé puisque compact dans un espace séparé, ce qui implique que  $F \cup A$  l'est également.  $\square$

**Exemple 1.3.8.** On montre à travers cet exemple que cette proposition n'est *pas* nécessaire. On définit sur  $\mathbf{R}^2$  la relation

$$\mathbf{x} \sim \mathbf{y} \iff \exists \mathbf{a} \in \mathbf{Z}^2 \mid \mathbf{x} + \mathbf{a} = \mathbf{y}.$$

Alors  $\mathbf{R}^2 / \sim$  est compact et séparé mais  $q^{-1}(q(\mathbf{0})) = \mathbf{Z}^2$  n'est pas compact.

**Proposition 1.3.9.** *L'espace  $X / \sim$  est T1, ou de Fréchet, si et seulement si chaque classe d'équivalence de  $\sim$  est fermée dans  $X$ .*

Dans le cas où  $X$  est un espace compact on a des équivalences plus satisfaisantes.

**Proposition 1.3.10.** *Soit  $X$  un espace compact, alors  $X / \sim$  est séparé si et seulement si le graphe de la relation  $\sim$  est fermé.*

**Définition 1.3.11** (Espace projectif réel). Soit  $S^n \subset \mathbf{R}^{n+1}$  la sphère unité et  $\sim$  la relation définie par  $x \sim y \iff x = \pm y$  pour  $x, y \in S^n$ . L'espace projectif réel  $\mathbf{RP}^n$  est le quotient  $S^n / \sim$ .

**Proposition 1.3.12.**  *$\mathbf{RP}^n$  est compact et séparé.*

*Démonstration.*  $S^n$  est compact le quotient l'est aussi. De plus  $q^{-1}(q(x)) = \{\pm x\}$  est compact et  $q^{-1}(q(F)) = F \cup -F$  est fermé comme union de deux fermés et donc par la proposition précédente le quotient est séparé.  $\square$

On passe de  $\mathbf{R}$  à  $\mathbf{C}$  et on remplace les nombre réels de valeur absolue 1 par  $S^1 \subset \mathbf{C}$  les nombres complexes de module 1.

**Définition 1.3.13** (Espace projectif complexe). Soit  $S^{2n+1} \subset \mathbf{C}^{n+1}$  la sphère unité et la relation  $\sim$  définie par  $x \sim y \iff x = a \cdot y$  pour un  $a \in S^1$ . Le quotient  $\mathbf{CP}^n$  est l'espace projectif complexe de dimension  $n$ .

## 1.4 Quotient par des actions de groupe

**Définition 1.4.1** (Groupe topologique). Un groupe topologique  $(G, \star)$  est un groupe munit d'une topologie pour laquelle les applications de multiplication et d'inversion

$$G^2 \longrightarrow G : (x, y) \longmapsto x \star y \quad \text{et} \quad G \longrightarrow G : x \longmapsto x^{-1}$$

soient continues. Il est bon de noter qu'ici  $G^2$  est munit de la topologie produit.

**Proposition 1.4.2.** *Un groupe  $(G, \star)$  munit d'une topologie est un groupe topologique si et seulement si l'application*

$$G^2 \longrightarrow G : (x, y) \longmapsto x \star y^{-1}$$

*est continue.*

Afin d'alléger les notations, dans la suite de cette section lorsque cela ne prête pas à confusion on omettra de noter explicitement la loi de  $G$ .

**Exemple 1.4.3.** On donne quelques exemples de base de groupes topologiques

1. Tout groupe munit de la topologie discrète est un groupe topologique, il est parfois noté  $G^\delta$ .
2.  $(\mathbf{R}^n, +)$  est un groupe topologique pour la topologie euclidienne.
3.  $(GL_n(\mathbf{R}), \cdot)$  est un groupe topologique muni de la topologie de sous espace de  $M_n(\mathbf{R}) \cong \mathbf{R}^{n^2}$ . La multiplication et l'inversion de matrices sont des applications continues.

**Lemme 1.4.4.** *Tout sous groupe d'un groupe topologique est encore un groupe topologique.*

**Définition 1.4.5.** Une action d'un groupe topologique  $G$  à droite sur un espace  $X$  est donnée par une application continue

$$\begin{aligned} X \times G &\longmapsto X \\ (x, g) &\longmapsto x \cdot g \end{aligned}$$

satisfaisant

1.  $x \cdot 1_G = x$
2.  $x \cdot (gh) = (x \cdot g) \cdot h$

**Définition 1.4.6** (Espace des orbites). Soit  $X$  un espace sur lequel  $G$  agit. L'espace des orbites  $X/G$  est le quotient de  $X$  par la relation  $x \sim y \iff \exists g \in G \mid x = y \cdot g$ .

**Exemple 1.4.7.** 1. Le groupe  $C_2$  agit sur  $S^n \subset \mathbf{R}^{n+1}$  par l'action antipodale, le générateur  $g \in C_2$  agit par  $x \cdot g = -x$ . Alors  $S^n / C_2 \cong \mathbf{RP}^n$ .

2. Le groupe  $S^1 := \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}$  agit par multiplication à droite sur les coordonnées de  $S^{2n+1} \subset \mathbf{C}^{n+1}$ . Pour  $z \in S^1$  et  $a = (a_0, \dots, a_n) \in S^{2n+1}$ ,  $a \cdot z = (a_0 z, \dots, a_n z)$ . Le quotient  $S^{2n+1} / S^1 \cong \mathbf{CP}^n$ .

3. Le groupe (discret)  $(\mathbf{Z}^2, +)$  agit par translation sur le plan  $\mathbf{R}^2$ , le quotient  $\mathbf{R}^2 / \mathbf{Z}^2$  est un tore.

4. Le groupe  $S^1$  agit par rotations d'axe vertical sur  $S^2$ , les orbites sont les parallèles et les pôles. Le quotient  $S^2 / S^1 \cong I$ , les classes des pôles sont les extrémités de l'intervalle.

*Remarque.* Étant donné un groupe  $G$  et un sous groupe  $H < G$ ,  $H$  agit naturellement sur  $G$  par multiplication

$$\begin{aligned} G \times H &\longmapsto G \\ (g, h) &\longmapsto gh. \end{aligned}$$

L'espace quotient  $G/H$  est l'espace des orbites  $gH$ . En particulier ces dernières ont toutes le même cardinal. Lorsque  $H \triangleleft G$ , l'espace quotient  $G/H$  hérite d'une structure de groupe.

**Proposition 1.4.8.** *Soit  $G$  un groupe topologique agissant sur un espace  $X$ , alors*

1. *Le quotient  $q : X \mapsto X/G$  est une application ouverte.*
2. *Si  $X$  est compact alors le quotient l'est aussi.*
3. *Si  $X$  et  $G$  sont compact et séparés alors le quotient l'est aussi.*

*Démonstration.* 1. Puisque la multiplication par  $g$  est un homéomorphisme

$$\begin{aligned} X &\longmapsto X \\ x &\longmapsto x \cdot g \end{aligned}$$

si  $U \subset X$  est ouvert alors  $U \cdot g$  l'est aussi. Pour montrer que  $q(U)$  est ouvert dans le quotient on doit montrer par définition de la topologie quotient que la primage est ouverte dans  $X$ . Or  $q^{-1}(q(U)) = \bigcup_{g \in G} U \cdot g$ , est ouvert comme union d'ouverts.

2. L'image d'un compact par une fonction continue est compact.
3. Comme  $X$  est séparé, la diagonale  $\Delta$  est fermée dans  $X \times X$  par le **Lemme 0.3.4** donc compacte. On pose

$$\begin{aligned} X \times X \times G &\longmapsto X \times X \\ (x, y, g) &\longmapsto (x, yg). \end{aligned}$$

L'image de  $\Delta \times G$ , compact, est le graphe  $\Gamma$  de la relation, qui est compact.  $X$  étant séparé  $\Gamma$  est fermé. Soient  $x, y \in X$  avec  $xG \neq yG$ . Comme  $(x, y) \notin \Gamma$ , il existe un voisinage dans  $X \times X$  de  $(x, y)$  disjoint de  $\Gamma$ . On peut choisir ce dernier par définition de la topologie produit comme  $U \times V$  avec  $U, V \subset X$  des ouverts.

On affirme que les ouverts  $q(U)$  et  $q(V)$  (ouverts par le premier point de la proposition) séparent les orbites  $xG$  et  $yG$ . Si  $zG \in q(U) \cap q(V)$  alors  $z = ug_1 = vg_2$  avec  $u \in U, v \in V, g_1, g_2 \in G$ . Mais alors  $(u, v) = (u, ug_1g_2^{-1}) \in U \times V \cap \Gamma$ , contradiction.

□

**Exemple 1.4.9.**  $\mathbf{RP}^n$  et  $\mathbf{CP}^n$  sont compacts et séparés.

## 1.5 Les espaces projectifs

**Définition 1.5.1** (Stabilisateur). Le stabilisateur de  $x \in X$  est l'ensemble

$$G_x := \{g \in G \mid g \cdot x = x\}.$$

**Proposition 1.5.2.** Soit  $G$  un groupe topologique compact qui agit à gauche transitivement sur un espace  $X$  séparé, alors pour tout point  $x \in X$  on a un homéomorphisme

$$G/G_x \cong X.$$

*Démonstration.* On pose l'application

$$\begin{aligned} \varphi_x : G &\longmapsto X \\ g &\longmapsto g \cdot x. \end{aligned}$$

Puisque l'action est transitive on obtient que  $\varphi_x$  est surjective. De plus

$$\varphi_x(g) = \varphi_x(g') \iff g \cdot x = g' \cdot x \iff g^{-1}g' \in G_x$$

. Ainsi  $\varphi_x$  passe au quotient  $\overline{\varphi}_x : G/G_x \longmapsto X$  et on a vu que cette application est surjective et injective. Puisque  $G/G_x$  est compact et  $X$  est séparé c'est un homéomorphisme.  $\square$

**Exemple 1.5.3.** Pour  $n \geq 2$ , le groupe  $\mathcal{SO}(n)$  agit transitivement sur  $S^{n-1} \subset \mathbf{R}^n$  par multiplication matricielle à gauche sur les vecteurs colonnes de norme 1. Le stabilisateur de  $e_n$  est isomorphe à  $\mathcal{SO}(n-1)$ . Par abus de notation on considère  $\mathcal{SO}(n-1)$  comme un sous groupe de  $\mathcal{SO}(n)$ . On a  $\mathcal{SO}(n)/\mathcal{SO}(n-1) \cong S^{n-1}$ .

En petites dimensions on a  $\mathcal{SO}(1) = \{(1)\}$ . Puis  $\mathcal{SO}(2) \cong S^1$ , enfin  $\mathcal{SO}(3)/\mathcal{SO}(2) \cong S^2$ .

*Remarque.*  $\mathbf{RP}^0 \cong \{\pm 1\}/_{-1 \sim 1}$ ,  $\mathbf{RP}^1 \cong S^1$ ,  $\mathbf{RP}^2 \cong D^2/\sim$

**Proposition 1.5.4.** On a un homéomorphisme  $\mathcal{RP}^3 \cong \mathcal{SO}(3)$ .

## 1.6 Recoller des espaces

Soient  $f : A \longmapsto X$  et  $g : A \longmapsto Y$  deux applications continues. On aimerait construire un nouvel espace à partir de  $X$  et  $Y$  en identifiant leur 'partie commune'  $A$ .

**Définition 1.6.1** (Recollement). Le recollement  $X \cup_A Y$  est l'espace quotient  $X \amalg Y / \sim$  où  $\sim$  est la relation d'équivalence engendrée par  $f(a) \sim g(a) \forall a \in A$ , autrement dit la relation d'équivalence la plus fine avec cette propriété. On appelle cet espace le **pushout** de  $X$  et  $Y$ .

*Remarque.* Pour les applications suivantes le diagramme de droite commute.

$$\begin{array}{ccc} i : X \xrightarrow{i_1} X \amalg Y \xrightarrow{q} X \cup_A Y \\ j : Y \xrightarrow{i_2} X \amalg Y \xrightarrow{q} X \cup_A Y \end{array} \quad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g} & Y \\ f \downarrow & & \downarrow j \\ X & \xrightarrow{i} & X \cup_A Y \end{array}$$

**Proposition 1.6.2** (Propriété universelle). *Pour toutes applications  $\alpha : X \mapsto Z$  et  $\beta : Y \mapsto Z$  telles que  $\alpha \circ f = \beta \circ g$  il existe une unique application  $\gamma : X \cup_A Y \mapsto Z$  telle que  $\gamma \circ i = \alpha$  et  $\gamma \circ j = \beta$ .*

*Le diagramme suivant résume cette propriété,  $\gamma$  est l'unique application le faisant commuter.*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g} & Y \\ f \downarrow & & \downarrow j \\ X & \xrightarrow{i} & X \cup_A Y \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & & \beta \\ & \searrow & \\ & & Z \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & & \alpha \\ & \searrow & \\ & & Z \end{array}$$

$\exists! \gamma$

*Démonstration.* Pour définir  $\gamma$  on pose

$$\begin{aligned} H : X \amalg Y &\mapsto Z \\ x &\mapsto \alpha(x) \\ y &\mapsto \beta(y). \end{aligned}$$

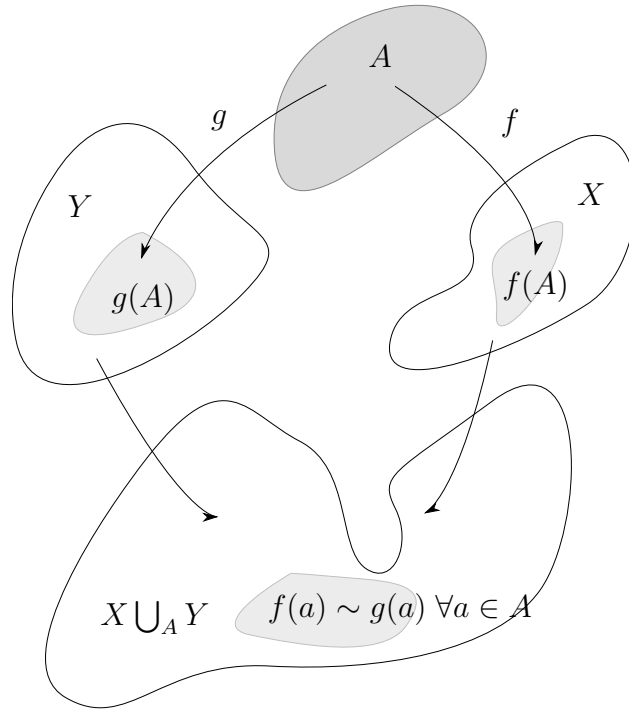
Ce choix passe au quotient car  $H(f(a)) = \alpha(f(a)) = \beta(g(a)) = H(g(a))$ . On pose  $\gamma := \overline{H}$  l'unicité est quant à elle claire.  $\square$

**Lemme 1.6.3.** *Soient  $X, Y$  des espaces séparés,  $A \subset Y$  fermé,  $f : A \mapsto X$  continue. Si  $C \subset X$ , alors  $q^{-1}(q(C)) = C \amalg f^{-1}(C)$ .*

**Lemme 1.6.4.** *Soient  $X, Y$  des espaces séparés,  $A \subset Y$  fermé. Si  $C \subset Y$ , alors*

$$q^{-1}(q(C)) = f(A \cap C) \amalg (C \cup f^{-1}(f(A \cap C))).$$

*Démonstration.* Soit  $y \in C$ . Si  $y \in C \setminus A$ ,  $[y] = \{y\}$ . Sinon  $[y] = f(y) \amalg f^{-1}(f(y))$ . Donc  $q^{-1}(q(C)) = (C \setminus A) \cup (C \cap A) \cup f(C \cap A) \cup f^{-1}(f(C \cap A))$   $\square$

FIGURE 1.3 – Illustration du pushout de  $X, Y$  par leur ‘partie commune’  $A$ .

**Proposition 1.6.5.** *Soient  $X, Y$  des espaces séparés,  $A \subset Y$  compact, alors  $X \cup_A Y$  est séparé.*

*Démonstration.* On vérifie le critère de séparation. Les deux lemmes nous permettent de décrire la saturation d’un fermé arbitraire de  $X \amalg Y$ . Un fermé de  $X \amalg Y$  est une réunion disjointe de fermés, il suffit donc de vérifier ce qui se passe pour  $C \subset X$  fermé et pour  $C$  fermé de  $Y$ .

Dans le premier cas, le **Lemme ??** montre que  $q^{-1}(q(C)) = C \amalg f^{-1}(C)$  est fermé.

Dans le second le **Lemme ??** montre que  $q^{-1}(q(C)) = f(C \cap A) \amalg f^{-1}(f(A \cap C))$ . Ici  $C \cap A$  est fermé dans  $A$ , donc compact. L’image par  $f$  est donc un compact dans  $X$  qui est séparé, elle est donc fermée. On conclut ensuite que  $f^{-1}(f(A \cap C))$  est fermé aussi.

On vérifie finalement que la saturation d’un point est compacte, par exemple si

$$y \in A, q^{-1}(q(y)) = f(y) \amalg f^{-1}(f(y))$$

qui est une union disjointe de compacts donc un compact. □

**Corollaire 1.6.6.** *Soit  $X$  un espace séparé,  $A$  compact et séparé,  $f : A \mapsto X$ . Alors  $X \cup_f CA$  est séparé et compact si  $X$  est compact.*

*Démonstration.* Comme  $A$  est séparé,  $CA$  est séparé, on applique la **Proposition 1.6.5**. □

Un cas particulier et important de la construction du pushout  $X \cup_A Y$  est celui où  $g : A \hookrightarrow CA$  est l'inclusion de la base du cône.

**Définition 1.6.7** (Attachement de cellule). Étant donné une application  $f : A \hookrightarrow X$  on dit que le pushout  $X \cup_A CA$  aussi noté  $X \cup_f CA$  est obtenu de  $X$  en attachant une  $A$ -cellule le long de  $X$ .

Lorsque  $A = S^{n-1}$  on dit que  $X \cup_f e^n$  est obtenu en attachant une  $n$ -cellule le long de  $f$ . L'application  $f$  est appelée *application d'attachement*.

**Proposition 1.6.8.** Soient  $f, f' : A \hookrightarrow X$  homotopes. Alors

$$X \cup_f CA \simeq X \cup_{f'} CA.$$

*Démonstration.* On doit trouver deux applications

$$\begin{aligned} h : Y &\hookrightarrow Y' \\ h' : Y' &\hookrightarrow Y \end{aligned}$$

telles que  $h \circ h' \simeq Id_Y$  et  $h' \circ h \simeq Id_{Y'}$ . On construit  $h$  par passage au quotient d'une application

$$\begin{aligned} X \amalg CA &\hookrightarrow Y' \\ x &\longmapsto x \\ [a, t] &\longmapsto \begin{cases} [a, 2(t - \frac{1}{2})] & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \\ H(a, 2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

où  $H : A \times I \hookrightarrow X$  est une homotopie de  $f \hookrightarrow f'$ . La moitié supérieure du cône  $CA$  dans  $Y$  est envoyée sur *tout* le cône de  $Y$ . On vérifie que pour  $t = \frac{1}{2}$ ,

$$[a, 2(t - \frac{1}{2})] = [a, 0] = [f'(a)] = [H(a, 1)] = [H(a, 2 \cdot \frac{1}{2})].$$

Pour  $t = 0$ ,  $H(a, 0) = f(a)$  si bien qu'elle passe au quotient. On procède de même pour  $h'$  avec  $H(\cdot, 1 - t)$ , homotopie de  $f' \hookrightarrow f$ .

Calculons  $h' \circ h$ . On observe que  $(h' \circ h)|_X$  est l'identité, puis que sur  $CA$  on a

$$(h' \circ h)[a, t] = \begin{cases} [a, 2t - 1] \xrightarrow{h'} [a, 4t - 3] & \text{si } \frac{3}{4} \leq t \leq 1 \\ [a, 2t - 1] \xrightarrow{h'} H(a, 3 - 4t) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4} \\ H(a, 2t) \xrightarrow{h'} H(a, 2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \end{cases}.$$



On parcourt le cône  $CA$  de  $Y$  quatre fois plus rapidement sur le quart supérieur, ensuite on utilise  $H$  pour faire le lien entre  $f$  et  $f'$ , puis on revient en arrière avec l'homotopie inverse. On doit enfin construire une homotopie

$$h' \circ h \times I \longmapsto Id_Y.$$

L'idée est de définir  $K : Y \times I \longrightarrow Y$  de sorte qu'au temps  $s$  on commence par l'homotopie  $H$  mais seulement jusqu'au temps  $t = s$ , puis on revient en arrière et on termine avec l'identité. On pose  $K|_{X \times I}$  comme étant la projection sur  $X$  puis on pose

$$K([a, t], s) = \begin{cases} [a, \frac{4}{4-3s}t - \frac{3s}{4-3s}] & \text{si } \frac{3}{4}s \leq t \leq 1 \\ H(a, 3s - 4t) & \text{si } \frac{s}{2} \leq t \leq \frac{3}{4}s \\ H(a, 2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{s}{2} \end{cases}.$$

On vérifie que

$$\begin{aligned} K([a, t], 0) &= [a, t] = Id_{CA}[a, t] \\ K([a, t], 1) &= (h' \circ h)([a, t]). \end{aligned}$$

De même on définit  $K'$  une homotopie de  $Id_{Y'} \longmapsto h \circ h'$ . □

**Corollaire 1.6.9.** *Si  $f \simeq f' : S^{n-1} \longrightarrow X$ , alors  $X \cup_f e^n \cong X \cup_{f'} e^n$ . En particulier si  $f$  est homotope à une fonction constante, alors  $X \cup_f e^n \cong X \vee S^n$ .*

**Proposition 1.6.10.**  $D^n \cong CS^{n-1}$ .

**Exemple 1.6.11.** Le même espace topologique peut admettre des descriptions distinctes comme recollement de cellules. Par exemple  $S^1 \cong \star \cup e^1$  où  $f : S^0 \longrightarrow \star$  est constante, mais on a aussi  $S^1 \cong S^0 \cup_f e^1 \cup_g e'^1$ . La deuxième description est compatible avec l'action antipodale de  $C_2$  tandis que la première ne l'est pas, au sens que si  $g$  engendre  $C_2$ ,  $g \cdot g$  transforme une cellule en cellule, si bien que  $\mathbf{RP}^1 \cong \star \cup e^1 \cong S^1$ .

## 1.7 Quelques surfaces

**Définition 1.7.1** (Surface). Une surface est un espace séparé où tout point admet un voisinage ouvert homéomorphe à un disque ouvert.

**Exemple 1.7.2.**  $S^2, T^2, \mathbf{RP}^2, K$  sont des surfaces.

**Définition 1.7.3** (Somme connexe). La somme connexe  $S \# T$  de deux surfaces  $S$  et  $T$  est obtenue en choisissant deux points  $s \in S, t \in T$  puis deux ouverts contenant chacun un de ces points  $U, V \cong D^2$ ,  $s \in U, t \in V$  et en construisant le quotient

$$(S \setminus U) \amalg (T \setminus V) / x \sim f(x)$$

où  $f : \partial U \xrightarrow{\cong} S^1 \xrightarrow{\cong} \partial V$ .

On peut construire de nouvelles surfaces à l'aide de vieilles surfaces grâce à l'opération de somme connexe.

**Exemple 1.7.4.**  $S \# S^2 \cong S$  par le théorème du disque de Palais (1960), cette construction est bien définie à homéomorphisme près.

**Exemple 1.7.5.**  $T^2 \# T^2$  est homéomorphe à un tore à deux trous.

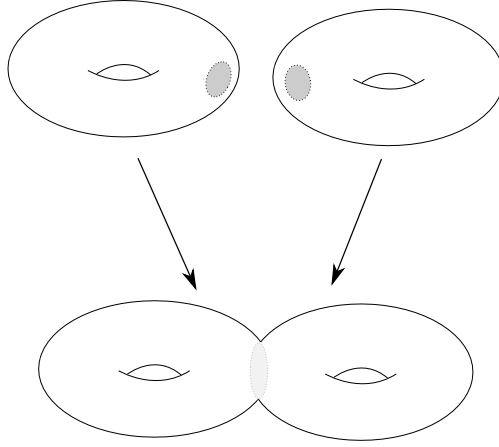


FIGURE 1.4 – Illustration de la somme connexe de deux 2-Tores.