La Distance de Fibonacci

Par
Thibaut LOMBARD

contact@lombard-web-services.com

27 Avril 2025

Table des matières

1 Introduction à la suite de Fibonacci et ses applications

La suite de Fibonacci est une séquence mathématique où chaque nombre est la somme des deux précédents, débutant généralement par 0 et 1 ou 1 et 1. Les premiers termes de la suite sont ainsi : 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...

Cette suite mathématique, découverte par Leonardo Fibonacci au XIIIe siècle, possède des propriétés remarquables et apparaît dans de nombreux phénomènes naturels et domaine d'applications.

1.1 Applications dans la nature

La suite de Fibonacci se retrouve dans diverses structures biologiques :

- **Disposition des feuilles** (phyllotaxie) : Les feuilles sur une tige sont souvent arrangées selon des spirales qui suivent des nombres de Fibonacci.
- **Fleurs et fruits** : Le nombre de pétales de nombreuses fleurs correspond à un nombre de la suite de Fibonacci (3, 5, 8, 13, 21, 34, ...).
- **Structures en spirale** : Les graines de tournesol, les pommes de pin et les coquilles d'escargot présentent des motifs en spirale qui suivent la suite de Fibonacci.

1.2 Le nombre d'or et la suite de Fibonacci

Le rapport entre deux nombres consécutifs de Fibonacci tend vers le nombre d'or ($\phi \approx 1,618$) lorsqu'on avance dans la suite :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618$$

Cette relation avec le nombre d'or, considéré comme le ratio de proportion idéal en art et en architecture, explique pourquoi la suite de Fibonacci apparaît dans de nombreuses créations artistiques et architecturales.

1.3 Applications en finance et trading

En analyse technique financière, les nombres de Fibonacci sont utilisés pour :

- **Niveaux de retracement de Fibonacci** : Ces niveaux (23,6%, 38,2%, 61,8%, etc., dérivés des rapports entre nombres de Fibonacci) servent à prédire des supports et résistances potentiels après un mouvement de prix.
- **Extensions de Fibonacci** : Utilisées pour projeter des objectifs de prix potentiels au-delà de niveaux précédents.
- **Arcs, éventails et zones temporelles de Fibonacci** : Des outils basés sur les ratios de Fibonacci pour analyser les mouvements de prix dans l'espace et le temps.

1.4 Applications en informatique et optimisation

La suite de Fibonacci et ses propriétés sont également utilisées en :

- **Algorithmes d'optimisation** : La recherche Fibonacci est une méthode d'optimisation unidimensionnelle.

- **Structures de données** : Les tas de Fibonacci sont des structures de données utilisées pour implémenter des files de priorité.
- **Génération de nombres pseudo-aléatoires** et **cryptographie**.

2 Nécessité d'utiliser une métrique

2.1 Définition et importance des métriques

Une métrique est une fonction mathématique qui définit une distance entre deux éléments d'un ensemble. Les métriques sont essentielles dans de nombreux domaines car elles permettent de :

- **Quantifier la similarité** ou la différence entre deux objets
- **Classer et regrouper** des objets selon leur proximité
- **Détecter des anomalies** ou des valeurs aberrantes
- **Évaluer des performances** d'algorithmes ou de modèles

2.2 Propriétés essentielles d'une bonne métrique

Pour qu'une fonction de distance soit considérée comme une métrique mathématique valide, elle doit satisfaire quatre axiomes fondamentaux :

1. **Positivité** : La distance entre deux objets est toujours positive ou nulle
2. **Symétrie** : La distance de A à B est identique à la distance de B à A
3. **Inégalité triangulaire** : La distance directe entre deux points n'est jamais plus grande que la somme des distances passant par un troisième point
4. **Non-négativité** : La distance d'un objet à lui-même est toujours nulle

Ces propriétés garantissent que la métrique se comporte de manière intuitive et cohérente, permettant son utilisation dans divers algorithmes et applications.

2.3 Pourquoi une métrique spécifique à Fibonacci ?

Les séquences qui suivent un motif de Fibonacci possèdent des propriétés mathématiques particulières qui les distinguent des séquences aléatoires. Une métrique dédiée aux propriétés de Fibonacci permet de :

- **Identifier** des séquences qui suivent approximativement un modèle de Fibonacci
- **Mesurer** le degré de conformité d'une séquence aux propriétés de Fibonacci
- **Comparer** différentes séquences selon leur "fibonaccité"
- **Détecter** des structures Fibonacci dans des données expérimentales

Cela est particulièrement utile dans les domaines comme l'analyse financière, la biologie computationnelle, ou l'étude de phénomènes naturels présentant des motifs de croissance.

3 La distance de Fibonacci : définition et critères

3.1 Concept fondamental

La distance de Fibonacci est une métrique conçue pour mesurer à quel point deux séquences de nombres ou vecteurs respectent les propriétés caractéristiques des suites de Fibonacci. Cette distance évalue la similarité entre séquences ou vecteurs non pas simplement par leurs valeurs absolues, mais par leur conformité à des modèles mathématiques spécifiques liés à Fibonacci.

3.2 Critères d'évaluation

La métrique de Fibonacci vérifie plusieurs propriétés entre deux séquences ou vecteurs u et v :

1. **Conformité à la suite de Fibonacci classique** : Chaque terme est-il la somme des deux précédents ? ($F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$)
2. **Conformité à une suite inverse de Fibonacci** : Si on prend l'inverse ($1/x$) de chaque terme, la séquence résultante suit-elle les propriétés de Fibonacci ?
3. **Conformité au rapport du nombre d'or** : Les ratios entre termes successifs sont-ils proches du nombre d'or ($\phi \approx 1,618$) ?

3.3 Règle fondamentale de calcul de la distance

La distance de Fibonacci entre deux séquences ou vecteurs u et v est calculée selon les principes suivants :

- **Si les deux séquences respectent une règle de Fibonacci** (classique, inverse, ou rapport) $\rightarrow$ la distance est 0 (aucune pénalité)
- **Sinon** $\rightarrow$ une pénalité est calculée comme la somme des différences absolues entre les éléments correspondants des deux séquences :

$$\text{pénalité} = \sum_{i=1}^{\min\_len} |u_i - v_i|$$

  où $\min\_len$ est la longueur de la plus courte des deux séquences.

3.4 Exemple simple

Considérons deux séquences :

$$u = [1, 1, 2, 3, 5]$$
$$v = [1, 1, 2, 4, 6]$$

La séquence u suit parfaitement la règle de Fibonacci classique, tandis que v s'en écarte (car $4 \neq 1 + 2$ et $6 \neq 1 + 4$).

Comme les deux séquences ne respectent pas toutes deux une règle de Fibonacci, on calcule la pénalité :

$$\begin{aligned} \text{diff} &= [|1-1|, |1-1|, |2-2|, |3-4|, |5-6|] \\ &= [0, 0, 0, 1, 1] \\ \text{somme} &= 0 + 0 + 0 + 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

Donc $\text{fibonacci\_distance}(u, v) = 2$.

4 Formalisation de la métrique de Fibonacci

4.1 Formule de la pénalité (différence absolue)

Lorsque les deux séquences u et v ne respectent pas un modèle de Fibonacci, la pénalité est calculée comme la somme des différences absolues entre les éléments correspondants :

$$\text{pénalité} = \sum_{i=1}^{\min\_len} |u_i - v_i|$$

où :

- u_i et v_i sont les éléments des séquences u et v respectivement
- $\min\_len$ est la longueur minimale entre u et v

4.2 Vérification de la suite de Fibonacci classique

La suite de Fibonacci classique respecte la relation suivante :

$$F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$$

La fonction vérifie si, pour une séquence $u = [u_1, u_2, u_3, ...]$, cette règle est vérifiée pour chaque triplet consécutif de termes :

$$|u_{n+2} - (u_n + u_{n+1})| \leq \epsilon$$

où ϵ est un petit seuil de tolérance (ex : $\epsilon = 10^{-2}$).

4.3 Vérification de la suite inverse de Fibonacci

Si la séquence u suit une suite inverse de Fibonacci, on vérifie la règle :

$$F(n) \to \frac{1}{F(n)}$$

La fonction calcule les inverses des éléments de la séquence et vérifie si ces inverses suivent une suite de Fibonacci classique :

$$\left| \frac{1}{u_{n+2}} - \left(\frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}} \right) \right| \leq \epsilon$$

4.4 Vérification du ratio de Fibonacci (nombre d'or)

Le rapport de Fibonacci tend vers le nombre d'or $\phi \approx 1,618$. La fonction vérifie si le rapport entre des éléments successifs de la séquence se rapproche de cette valeur :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \approx 1,618$$

Plus précisément, pour chaque paire successive d'éléments u_n et u_{n+1}, on vérifie :

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - \phi \right| \leq \epsilon$$

5 Normalisation de la distance de Fibonacci

5.1 Importance de la normalisation

La normalisation d'une distance entre 0 et 1 est souvent utilisée pour rendre les résultats comparables, particulièrement lorsqu'on travaille avec :

- Des métriques qui sont intégrées dans des systèmes d'optimisation
- Des algorithmes de machine learning
- Des comparaisons d'objets dans des contextes variés

Dans le cas de la distance de Fibonacci, normaliser la distance entre 0 et 1 permet de l'interpréter de manière plus universelle et cohérente.

5.2 Objectifs de la normalisation

1. **Éviter les écarts importants** de valeurs pour des séquences de tailles ou de magnitudes différentes
2. **Faciliter la comparaison** de la distance entre des séquences indépendamment de leur longueur ou de leur valeur absolue
3. **Standardiser la métrique** pour un usage dans des algorithmes comme le machine learning ou l'optimisation

5.3 Méthodes de normalisation

5.3.1 Normalisation par la somme des éléments

La méthode la plus simple consiste à diviser la pénalité par la somme totale des éléments dans les deux séquences u et v :

$$\text{pénalité normalisée} = \frac{\text{pénalité brute}}{\sum_{i=1}^{len(u)} |u_i| + \sum_{i=1}^{len(v)} |v_i|}$$

5.3.2 Normalisation par la différence maximale possible

Une autre approche consiste à normaliser par la différence maximale possible dans les éléments des séquences :

$$\text{pénalité normalisée} = \frac{\text{pénalité brute}}{\text{max\_diff}}$$

où max_diff est la plus grande différence possible entre les éléments des deux séquences.

5.3.3 Normalisation par la longueur des séquences

Une troisième approche est de diviser la pénalité par la longueur totale des séquences :

$$\text{pénalité normalisée} = \frac{\text{pénalité brute}}{\max(len(u), len(v))}$$

5.4 Exemple de normalisation

Reprenons les séquences de l'exemple précédent :

$$u = [1, 1, 2, 3, 5] \quad (\text{somme} = 12)$$
$$v = [1, 1, 2, 4, 6] \quad (\text{somme} = 14)$$

Avec une pénalité brute de 2, la normalisation par la somme des éléments donne :

$$\text{pénalité normalisée} = \frac{2}{12 + 14} = \frac{2}{26} \approx 0,0769$$

Cette valeur est bien comprise entre 0 et 1, ce qui facilite son interprétation et sa comparaison avec d'autres mesures normalisées.

6 Vérification des axiomes d'une métrique

Pour qu'une fonction de distance soit considérée comme une métrique valide, elle doit satisfaire quatre axiomes fondamentaux. Vérifions que la distance de Fibonacci respecte bien ces propriétés :

Axiome	**Vérification pour la distance de Fibonacci**
Positivité	La distance est nulle lorsque les séquences sont identiques, et elle est toujours positive sinon. En effet, la pénalité est calculée comme une somme de différences absolues, qui sont toujours positives ou nulles.
Symétrie	La distance ne dépend pas de l'ordre des séquences, car les différences absolues sont symétriques : $\lvert u_i - v_i \rvert = \lvert v_i - u_i \rvert$. De plus, la normalisation se fait en fonction de la somme des éléments des deux séquences, ce qui est également une opération symétrique.
Inégalité triangulaire	La distance brute respecte l'inégalité triangulaire car les différences absolues respectent cette inégalité : $\lvert x - z \rvert \leq \lvert x-y \rvert + \lvert y-z \rvert$. La normalisation de la distance ne modifie pas cette propriété, car elle est simplement une mise à l'échelle de la pénalité brute.
Non-négativité	La distance entre une séquence et elle-même est 0, car les différences absolues entre chaque élément et lui-même sont nulles. Les distances sont toujours positives pour des séquences différentes.

Table 1: Vérification des axiomes d'une métrique pour la distance de Fibonacci

La distance de Fibonacci respecte donc bien les quatre axiomes fondamentaux d'une métrique, ce qui en fait une métrique valide d'un point de vue mathématique.

7 Introduction des paramètres alpha et beta

7.1 Rôle des paramètres de pondération

Dans le calcul de la distance de Fibonacci, il peut être utile d'introduire des paramètres de pondération pour moduler l'importance relative des différentes propriétés de Fibonacci :

- **Alpha (α)** : pondère l'importance de la vérification des propriétés classiques de Fibonacci (relation $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$)
- **Beta (β)** : pondère l'importance du rapport entre les éléments de la séquence (conformité avec le nombre d'or)

7.2 Interprétation des paramètres

- **Si** $\alpha > \beta$: Le calcul de la distance sera davantage influencé par la conformité à la règle de Fibonacci classique que par la conformité au nombre d'or
- **Si** $\beta > \alpha$: La distance sera davantage influencée par les rapports proches du nombre d'or que par la règle classique de Fibonacci
- **Si** $\alpha = \beta$: Les deux propriétés seront considérées comme également importantes

7.3 Impact sur la métrique

Ces paramètres permettent d'ajuster la sensibilité de la métrique selon les besoins spécifiques de l'application :

- En analyse financière, on pourrait privilégier les rapports (β élevé)
- Dans l'étude de phénomènes de croissance, on pourrait favoriser la relation de récurrence (α élevé)
- Pour une analyse équilibrée, on pourrait choisir $\alpha = \beta$

8 Formulation complète de la distance de Fibonacci

8.1 Résumé de la fonction de distance

La distance Fibonacci complète, prenant en compte les pondérations α et β, peut être exprimée par la formule suivante :

$$d(u, v) = \frac{\alpha \cdot P_{fib}(u, v) + \beta \cdot P_{ratio}(u, v)}{S(u) + S(v)}$$

Où :

- $P_{fib}(u, v)$ est la pénalité brute associée à la différence de conformité des séquences à la règle de Fibonacci classique
- $P_{ratio}(u, v)$ est la pénalité brute associée à la différence de conformité des rapports des éléments à la proximité avec le nombre d'or
- α et β sont les facteurs de pondération
- $S(u)$ et $S(v)$ sont les sommes des éléments des séquences pour la normalisation

8.2 Détails des composantes

8.2.1 Pénalité Fibonacci classique $P_{fib}(u, v)$

$$P_{fib}(u,v) = \sum_{i=0}^{\min(len(u),len(v))-2} |(u_i + u_{i+1}) - u_{i+2} - (v_i + v_{i+1}) + v_{i+2}|$$

Cette pénalité mesure l'écart entre les séquences par rapport à la règle de Fibonacci classique.

8.2.2 Pénalité des rapports Fibonacci $P_{ratio}(u, v)$

$$P_{ratio}(u,v) = \sum_{i=0}^{\min(len(u),len(v))-1} \left| \left(\frac{u_{i+1}}{u_i} - \phi \right) + \left(\frac{v_{i+1}}{v_i} - \phi \right) \right|$$

Cette pénalité mesure la différence des rapports avec le nombre d'or ϕ.

8.2.3 Somme des éléments $S(u)$ et $S(v)$

$$S(u) = \sum_{i=0}^{len(u)} u_i, \quad S(v) = \sum_{i=0}^{len(v)} v_i$$

8.3 Formule développée complète

$$d(u,v) = \frac{\begin{array}{c} \alpha \cdot \sum_{i=0}^{\min(len(u),len(v))-2} |(u_i + u_{i+1}) - u_{i+2} - (v_i + v_{i+1}) + v_{i+2}| + \\ \beta \cdot \sum_{i=0}^{\min(len(u),len(v))-1} \left| \left(\frac{u_{i+1}}{u_i} - \phi \right) + \left(\frac{v_{i+1}}{v_i} - \phi \right) \right| \end{array}}{\sum_{i=0}^{len(u)} u_i + \sum_{i=0}^{len(v)} v_i}$$

Cette formulation complète permet d'adapter la métrique de Fibonacci à différents contextes d'application en ajustant les paramètres α et β selon l'importance relative que l'on souhaite accorder aux différentes propriétés de Fibonacci.

9 Conclusion

La distance de Fibonacci représente une approche innovante pour mesurer la similarité entre des séquences numériques en se basant sur les propriétés mathématiques des suites de Fibonacci. Plus qu'une simple mesure de différence élément par élément, cette métrique évalue la conformité des séquences à des modèles mathématiques spécifiques liés aux propriétés de Fibonacci.

Les principales caractéristiques de cette métrique sont :

- **Multi-critères** : Elle prend en compte plusieurs aspects des séquences de Fibonacci (relation de récurrence classique, inverse, et rapports liés au nombre d'or)
- **Adaptable** : Grâce aux paramètres α et β, la métrique peut être ajustée selon les besoins spécifiques de l'application
- **Normalisable** : La distance peut être ramenée à l'intervalle [0,1], facilitant son interprétation et son utilisation dans divers algorithmes
- **Mathématiquement valide** : Elle respecte les quatre axiomes fondamentaux d'une métrique (positivité, symétrie, inégalité triangulaire, et non-négativité)

Cette métrique offre un outil puissant pour identifier et mesurer des structures de type Fibonacci dans divers domaines : finance, sciences naturelles, analyse de données, et tout domaine où les propriétés de croissance liées à Fibonacci pourraient être pertinentes.

La distance de Fibonacci comble ainsi une lacune dans les métriques existantes en proposant une approche qui va au-delà de la simple comparaison de valeurs pour capturer des propriétés structurelles et relationnelles fondamentales. Sa flexibilité et sa base mathématique solide en font un outil précieux pour l'analyse de séquences dans de nombreux contextes scientifiques et pratiques.