# Autovettori, Autovalori e Metodo del Cambiamento di Base

Andrea Zanin, Nicola Lombardi

8 Giugno 2017

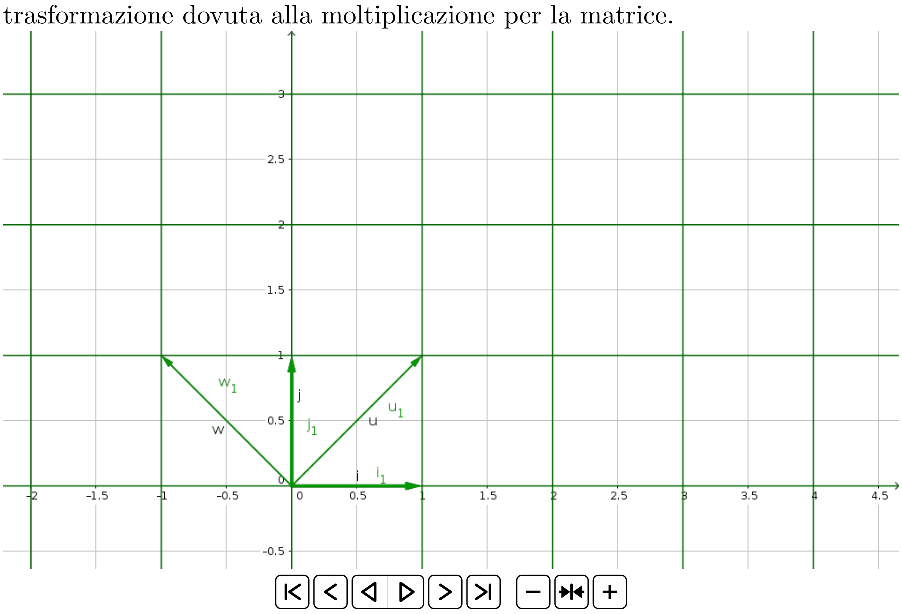
## 1 Autovettori e autovalori

**Definizione 1.1.** *Un vettore* $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$ *è detto autovettore della matrice* $M$ *se* $M\mathbf{v} \parallel \mathbf{v}$*, cioè:*

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} | M(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$$

$\lambda$ *è detto autovalore di* $M$*.*

Una visualizzazione dell'effetto di una matrice su vari vettori. **i** e **j** sono le basi canoniche del piano cartesiano, **u** è un autovettore e **w** è un vettore generico. In verde è visualizzata la trasformazione dovuta alla moltiplicazione per la matrice.




**Teorema 1.2.** $\lambda$ è autovalore di $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} a - \lambda & c \\ b & d - \lambda \end{pmatrix} = 0.$

*Dimostrazione.*

Siano:
$a, b, c, d, \lambda \in \mathbb{R}$

$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ autovettore di M riferito a $\lambda \qquad v_1, v_2 \in \mathbb{R}$

Allora, applicando le proprietà di somma e prodotto di vettori e prodotto matrice vettore, otteniamo che:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} &= \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} av_1 + cv_2 \\ bv_1 + dv_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} (a-\lambda)v_1 + cv_2 \\ bv_1 + (d-\lambda)v_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a-\lambda & c \\ b & d-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Se esiste un autovettore la funzione associata alla matrice $\begin{pmatrix} a-\lambda & c \\ b & d-\lambda \end{pmatrix}$ non può essere iniettiva in quanto l'autovettore e il vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ hanno entrambi come immagine $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, quindi, dato che la funzione associata ad una matrice non è iniettiva $\Leftrightarrow \det M = 0$,

$$\lambda \text{ è autovalore di } M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} a-\lambda & c \\ b & d-\lambda \end{pmatrix} = 0.$$

$\square$

**Osservazione 1.3.** Tutti i vettori paralleli ad un autovettore sono anch'essi autovettori riferiti allo stesso autovalore.

*Dimostrazione.*

Siano:
$M$ matrice
$\lambda$ autovalore di M
$\mathbf{u}$ autovettore riferito a $\lambda$
Allora:

$$M(\mathbf{u}) = \lambda\mathbf{u}$$

Moltiplico entrambi i membri per $k \in \mathbb{R}$

$$k(M(\mathbf{u})) = k(\lambda\mathbf{u})$$

Dato che la funzione associata alla matrice è lineare, posso scrivere che

$$M(k\mathbf{u}) = \lambda k\mathbf{u}$$

Chiamando $k\mathbf{u} = \mathbf{v}$

$$M(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$$

Di conseguenza anche tutti i vettori $\mathbf{v}$, paralleli a $\mathbf{u}$ per costruzione, sono autovettori di $M$ riferiti a $\lambda$.

$\square$

**Definizione 1.4.** *Una matrice si dice simmetrica se è del tipo* $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$.

**Teorema 1.5.** Ogni matrice simmetrica ha almeno un autovalore.

*Dimostrazione.*

Cerco gli autovalori di una generica matrice simmetrica

$$\begin{aligned} 0 &= \det\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ b & d-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (a-\lambda)(d-\lambda) - b^2 \\ &= \lambda^2 - \lambda(a+b) + ad - b^2 \end{aligned}$$

Calcolando il discriminante, otteniamo che:

$$\begin{aligned} \Delta &= (a+d)^2 - 4(ad - b^2) \\ &= a^2 + d^2 + 2ad - 4ad + 4b^2 \\ &= (a-d)^2 + 4b^2 \end{aligned}$$

Di conseguenza, essendo una somma tra due quadrati:

$$(a-d)^2 + 4b^2 \geq 0 \quad \forall\, a, b, d \in \mathbb{R}$$

Essendo il $\Delta$ non negativo indifferentemente dalla scelta dei parametri, esiste sempre almeno un autovalore di una matrice simmetrica. $\square$

**Teorema 1.6.** Una matrice simmetrica ha sempre 2 autovettori ortogonali fra loro.

*Dimostrazione.*

Iniziamo dimostrando il caso in cui $b = 0$, quindi in cui $M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$

Applicando la matrice ai vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, otteniamo che:

$$\begin{aligned} M \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ M \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ d \end{pmatrix} \\ &= d \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono quindi due autovettori ortogonali tra loro.

Supponendo poi che $b \neq 0$, per il teorema 1.5, $\Delta > 0$, di conseguenza $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Sia $\mathbf{u}$ un qualsiasi autovettore relativo a $\lambda_1$ e sia $\mathbf{v}$ un qualsiasi autovettore relativo a $\lambda_2$

$$\begin{aligned} M\mathbf{u} &= \lambda_1 \mathbf{u} \\ M\mathbf{v} &= \lambda_2 \mathbf{v} \end{aligned}$$

È un fatto noto che:

$$M(\mathbf{u})\mathbf{v} = M(\mathbf{v})\mathbf{u}$$

Allora, sostituendo dalle prime due equazione $M(\mathbf{u})$ e $M(\mathbf{v})$, si ottiene:

$$\begin{aligned} \lambda_1 \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= \lambda_2 \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \\ (\lambda_1 - \lambda_2)\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= 0 \end{aligned}$$

Avendo dimostrato che $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$, è necessario che $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$, quindi $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono ortogonali. □

# 2 Metodo del cambiamento di base

È un metodo per risolvere un sistema di equazioni lineari.
Partiamo dal sistema

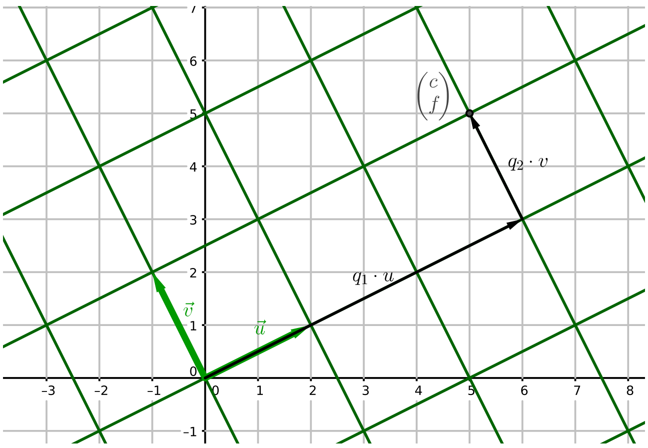
$$\begin{cases} ap_1 + bp_2 = c \\ dp_1 + ep_2 = f \end{cases}$$

e lo trasformiamo in forma matriciale

$$\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix}$$

Troviamo gli autovalori $\lambda_1$ e $\lambda_2$ della matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}$ e un autovalore riferito ad ognuno dei 2 autovalori, chiamamo quest'ultimi $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.
Successivamente troviamo le coordinate $q_1$ e $q_2$ del vettore $\begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix}$ nel sistema di riferimento determinato dai 2 autovettori risolvendo la seguente equazione

$$\begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix} = q_1\mathbf{u} + q_2\mathbf{v}$$




Possiamo quindi ottenere le coordinate $p'_1$ e $p'_2$, corrispondenti di $p_1$ e $p_2$ nel sistema di riferimento determinato dagli autovettori, utilizzando la formula

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = p'_1\mathbf{u} + p'_2\mathbf{v}$$

Con queste coordinate possiamo riscrivere la precedente rappresentazione matriciale del sistema, ma nel nuovo sistema di riferimento

$$\begin{aligned} M(p'_1\mathbf{u} + p'_2\mathbf{v}) &= q_1\mathbf{u} + q_2\mathbf{v} \\ p'_1M(\mathbf{u}) + p'_2M(\mathbf{v}) &= q_1\mathbf{u} + q_2\mathbf{v} \end{aligned}$$

Dato che $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono autovettori

$$\begin{aligned} M\mathbf{u} &= \lambda_1\mathbf{u} \\ M\mathbf{v} &= \lambda_2\mathbf{v} \end{aligned}$$

Posso quindi sostiturli nell'equazione

$$p'_1\lambda_1\mathbf{u} + p'_2\lambda_2\mathbf{v} = q_1\mathbf{u} + q_2\mathbf{v}$$

Dato che le coordinate di un vettore rispetto alle basi del sistema cartesiano sono uniche, l'equazione precedente è equivalente al seguente sistema

$$\begin{cases} \lambda_1 p'_1 = q_1 \\ \lambda_2 p'_2 = q_2 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema troviamo che $p'_1 = \frac{q_1}{\lambda_1}$ e $p'_2 = \frac{q_2}{\lambda_2}$
Possiamo quindi trovare le soluzioni $p_1$ e $p_2$ del sistema iniziale riportando $p'_1$ e $p'_2$ nel sistema di riferimento originale

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = p'_1 \mathbf{u} + p'_2 \mathbf{v}.$$