

Réurrence

Initialisation

$$\begin{array}{l} \text{pour } n=2 \quad \sum_{i=0}^1 2^i = 2^0 + 2^1 \\ \qquad \qquad \qquad = 3 \\ \qquad \qquad \qquad 2^2 - 1 = 3 \end{array} \quad \left. \vphantom{\sum_{i=0}^1} \right\} \text{VRAI au rang } n=2$$

Hérédité

On cherche à montrer que $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$

$$\begin{aligned} \text{partons de } \sum_{i=0}^n 2^i &= 2^n + \sum_{i=0}^{n-1} 2^i \\ &= 2^n + 2^n - 1 \\ &= 2 \cdot 2^n - 1 \\ &= 2^{n+1} - 1 \end{aligned} \quad \text{Vérifié au rang } n+1.$$

Conclusion

Par hérédité, $\sum_{i=0}^{n-1} 2^i = 2^{n+1} - 1$ pour tout $n > 1$.