Zusammenfassung - Logik und Logikprogrammierung

Marcus Faulstich

15. August 2020

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Aussagenlogik

1.1 Definition Atomare Formeln

Eine atomare Formel hat die Form p_i. Diese Formeln werden durch folgenden Induktiven Prozess definiert:

- Alle atomaren Formeln und $\bot$ sind Formeln
- Falls φ und ψ Formeln sind, sind auch $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \to \psi)$ und $\neg\varphi$ Formeln
- Nichts ist Formel, was sich nicht mittels dieser Regeln erzeugen lässt

Bezeichungen:

- Falsum: $\bot$
- Konjunktion: $\wedge$
- Disjunktion: $\vee$
- Einseitige Implikation: $\to$
- Gegenseitige Implikation: $\leftrightarrow$
- Negation: $\neg$

Präzedenz der Operatoren:

$\leftrightarrow$ bindet am schwächsten
$\to$ ...
$\vee$ ...
$\wedge$ ...
$\neg$ bindet am stärksten

Inhaltsverzeichnis

1.2 Natürliches Schließen

Ein mathematischer Beweis zeigt, wie die Behauptung aus den Voraussetzungen folgt. Analog zeigt ein **Beweisbaum** (*Herleitung, Deduktion*), wie eine Formel aus anderen Formeln folgt.

Diese Deduktionen sind Bäume, deren Knoten mit Formeln beschriftet sind.

- an den Blättern stehen Voraussetzungen (Hypothesen)
- an den inneren Knoten stehen Teilergebnisse und Begründungen
- an der Wurzel steht die Behauptung (Konklusion)

1.3 Konstruktion von Deduktionen

1.3.1 Konjuktionseinführung/-elimination

$$\frac{\varphi \qquad \psi}{\varphi \land \psi}$$

$$\frac{\varphi \land \psi}{\varphi} \qquad\qquad \frac{\varphi \land \psi}{\psi}$$

1.3.2 Implikationseinführung/-elimination

$$\frac{\begin{array}{c}[\varphi]\\ \vdots \\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi}$$

$$\frac{\varphi \qquad \varphi \to \psi}{\psi}$$

1.3.3 Disjunktionseinführung/-elimination

$$\frac{\varphi}{\varphi \lor \psi} \qquad\qquad \frac{\psi}{\varphi \lor \psi}$$

$$\frac{\varphi \lor \psi \qquad \begin{array}{c}[\varphi]\\ \vdots \\ \sigma\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\psi]\\ \vdots \\ \sigma\end{array}}{\sigma}$$

Inhaltsverzeichnis

1.3.4 Negationseinführung/-elimination

$$\frac{\begin{array}{c}[\varphi] \\ \vdots \\ \bot\end{array}}{\neg\varphi}$$

$$\frac{\neg\varphi \qquad \varphi}{\bot}$$

1.3.5 Reductio ad absurdum

$$\frac{\begin{array}{c}[\neg\varphi] \\ \vdots \\ \bot\end{array}}{\varphi}$$

1.4 Definition Syntaktische Folgerung, Theorem

Für eine Formelmenge Γ und eine Formel φ schreiben wir

$$\Gamma \vdash \varphi$$

wenn es eine Deduktion gibt mit Hypothesen aus Γ und Konklusion φ. Wir sagen "φ ist eine syntaktische Folgerung von Γ"

Eine Formel φ ist ein Theorem, wenn $\emptyset \vdash \varphi$ gilt.

1.5 Satz

Für alle Formeln φ und ψ gelten

$$\{\neg(\varphi \vee \psi)\} \vdash \neg\varphi \wedge \neg\psi$$

$$\{\neg\varphi \wedge \neg\psi\} \vdash (\neg\varphi \vee \psi)$$

$$\{\neg\varphi \vee \neg\psi\} \vdash \neg(\varphi \wedge \psi)$$

$$\{\neg(\varphi \wedge \psi) \vdash \neg\varphi \vee \neg\psi\}$$

Inhaltsverzeichnis

1.6 Definition Wahrheitswertemengen

- Boolsche Logik $B = \{0, 1\}$
- Kleene-Logik $K_3 = 0, \frac{1}{2}, 1$
- Fuzzy-Logik $F = [0, 1]$
- unendl. Boolsche Logik $B_{\mathbb{R}} =$ Menge der Teilmengen von $\mathbb{R}$
- Heyting-Algebra $H_{\mathbb{R}} =$ Menge der offenen Teilmengen von $\mathbb{R}$

1.7 Definition W-Belegung

Sei W eine Menge von Wahrheitswerten. Eine W-Belegung ist eine Abbildung $\mathcal{B}: V \to W$, wobei $V \subseteq \{p_0, p_1, \dots\}$ eine Menge atomarer Formeln ist.

Die W-Belegung $\mathcal{B}: V \to W$ *passt* zur Formel φ, falls alle atomaren Formeln aus φ zu V gehören.

Sei W ein Wahrheitswertebereich und $\mathcal{B}$ eine W-Belegung. Induktiv über den Formelaufbau definieren wir den Wahrheitswert $\hat{\mathcal{B}}(\varphi) \in W$ jeder zu $\mathcal{B}$ passenden Formel φ:

$$\hat{\mathcal{B}}(\bot) = 0_W$$

$$\hat{\mathcal{B}}(p) = \mathcal{B}(p) \qquad \text{falls } p \text{ atomare Formel}$$

$$\hat{\mathcal{B}}(\varphi \wedge \psi) = \hat{\mathcal{B}}(\varphi) \wedge_W \hat{\mathcal{B}}(\psi)$$

$$\hat{\mathcal{B}}(\varphi \vee \psi) = \hat{\mathcal{B}}(\varphi) \vee_W \hat{\mathcal{B}}(\psi)$$

$$\hat{\mathcal{B}}(\varphi \to \psi) = \to_W (\hat{\mathcal{B}}(\varphi), \hat{\mathcal{B}}(\psi))$$

$$\hat{\mathcal{B}}(\neg\varphi) = \neg_W(\hat{\mathcal{B}}(\varphi))$$

Im folgenden schreiben wir anstatt $\hat{\mathcal{B}}(\varphi)$ nur $\mathcal{B}(\varphi)$

1.8 Definition Abbildungen von Wahrheitswerten

Sei W eine Menge und $R \subseteq W \times W$ eine binäre Relation.

- R ist reflexiv, wenn $(a, a) \in R$ für alle $a \in W$ gilt
- R ist antisymmetrisch, wenn $(a, b), (b, a) \in R$ impliziert, dass $a = b$ gilt
- R ist transitiv, wenn $(a, b), (b, a) \in R$ impliziert, dass $(a, c) \in R$ gilt
- R ist eine Ordnungsrelation, wenn R reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist. In diesem Fall heißt das Paar (W, R) eine partiell geordnete Menge

1.9 Definition Schranken von Wahrheitswertemengen

Sei $(W, \leq)$ partiell geordnete Menge, $M \subseteq W$ und $a \in W$.

- a ist obere Schranke von M, wenn $m \leq a$ für alle $m \in M$ gilt
- a ist kleinste obere Schranke oder Supremum von M, wenn a obere Schranke von M ist und wenn $a \leq b$ für alle oberen Schranken b von M gilt
- a ist untere Schranke von M, wenn $a \leq m$ für alle $m \in M$ gilt
- a ist größte untere Schranke oder Infimum von M, wenn a untere Schranke von M ist und wenn $b \leq a$ für alle unteren Schranken b von M gilt.

1.10 Definition Verband

Ein (vollständiger) Verband ist eine partiell geordnete Menge $(W, \leq)$, in der jede Menge $M \subseteq W$ ein Supremum und ein Infimum hat.

In einem Verband $(W, \leq)$ definieren wir:

- $0_W = \inf W$ und $1_W = \sup W$
- $a \wedge_W b = \inf a, b$ und $a \vee_W b = \sup a, b$ für $a, b \in W$

Inhaltsverzeichnis

1.11 Definition Wahrheitswertebereiche

Ein Wahrheitswertebereiche ist ein Tupel $(W, \leq, \rightarrow_W, \neg_W)$, wobei $(W, \leq)$ ein Verband und $\rightarrow_W\colon\ W^2 \rightarrow W$ und $\neg_W :\ W \rightarrow W$ Funktionen sind

- Boolscher Wahrheitswertebereich B

  Grundmenge: $B = 0, 1$ Ordnung: $\leq$

  $\neg_B(a) = 1 - a$ $\rightarrow_B(a, b) = \max(b, 1 - a)$

  $0_B = 0$ $1_B = 1$

  $a \wedge_B b = \min(a, b)$ $a \vee_B b = \max(a, b)$

- Kleenescher Wahrheitswertebereich K_3

  Grundmenge: $K_3 = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ Ordnung: $\leq$

  $\neg_{K_3}(a) = 1 - a$ $\rightarrow_{K_3}(a, b) = \max(b, 1 - a)$

  $0_{K_3} = 0$ $1_{K_3} = 1$

  $a \wedge_{K_3} b = min(a, b)$ $a \vee_{K_3} b = \max(a, b)$

- Fuzzy-Wahrheitswertebereich

  Grundmenge: $F = [0, 1]$ Ordnung: $\leq$

  $\neg_F(a) = 1 - a$ $\rightarrow_F(a, b) = \max(b, 1 - a)$

  $0_F = 0$ $1_F = 1$

  $a \wedge_F b = \min(a, b)$ $a \vee_F b = \max(a, b)$

- unendl. Boolscher Wahrheitswertebereich

  Grundmenge: $B_\mathbb{R} = \{A \mid A \subseteq \mathbb{R}\}$ Ordnung: $\subseteq$

  $\neg_{B_\mathbb{R}}(A) = \mathbb{R} \backslash A$ $\rightarrow_{B_\mathbb{R}}(A, B) = B \cup \mathbb{R} \backslash A$

  $0_{B_\mathbb{R}} = \emptyset$ $1_{B_\mathbb{R}} = \mathbb{R}$

  $A \wedge_{B_\mathbb{R}} B = A \cap B$ $A \vee_{B_\mathbb{R}} B = A \cup B$

- Heytingscher Wahrheitswertebereich

  Grundmenge: $H_\mathbb{R} = \{A \subseteq \mathbb{R} \mid A \text{ ist offen}\}$ Ordnung: $\subseteq$

  $\neg_{H_\mathbb{R}}(A) = \text{Inneres}(\mathbb{R} \backslash A)$ $\rightarrow_{H_\mathbb{R}}(A, B) = \text{Inneres}(B \cup \mathbb{R} \backslash A)$

  $0_{H_\mathbb{R}} = \emptyset$ $1_{H_\mathbb{R}} = \mathbb{R}$

  $A \wedge_{H_\mathbb{R}} B = A \cap B$ $A \vee_{H_\mathbb{R}} B = A \cup B$

Inhaltsverzeichnis

1.12 Definition Semantische Folgerung, Tautologie

Sei W ein Wahrheitswertebereich.
Eine Formel φ heißt eine W-Folgerung der Formelmenge Γ, falls für jede W-Belegung $\mathcal{B}$, die zu allen Formeln aus $\Gamma \cup \{\varphi\}$ passt, gilt:

$$\inf\{\mathcal{B}(\gamma) \mid \gamma \in \Gamma\} \leq \mathcal{B}(\varphi)$$

Wir schreiben $\Gamma \vDash_W \varphi$, falls φ eine W-Folgerung von Γ ist.

Eine W-Tautologie ist eine Formel φ mit $\emptyset \vDash_W \varphi$, d.h. $\mathcal{B}(\varphi) = 1_W$ für alle passenden W-Belegungen.

1.12.1 Korrektheitslemma für natürliches Schließen in B

Sei D eine Deduktion mit Hypothesen in der Menge Γ und Konklusion φ. Dann gilt

$$\Gamma \vDash_B \varphi \quad \text{d.h.} \quad \inf\{\mathcal{B}(\gamma) \mid \gamma \in \Gamma\} \leq \mathcal{B}(\gamma)$$

für alle passenden B-Belegungen $\mathcal{B}$.

1.12.2 Korrektheitssatz für natürliches Schließen in B

Für jede Menge von Formeln Γ und jede Formel φ gilt

$$\Gamma \vdash \varphi \;\Rightarrow\; \Gamma \vDash_B \varphi$$

Korollar Jedes Theorem ist eine B-Tautologie.

1.12.3 Korrektheitssatz für natürliches Schließen in $B_{\mathbb{R}}$

Für jede Menge von Formeln Γ und jede Formel φ gilt

$$\Gamma \vdash \varphi \;\Rightarrow\; \Gamma \vDash_{B_{\mathbb{R}}} \varphi$$

Korollar Jedes Theorem ist eine $B_{\mathbb{R}}$-Tautologie.

1.12.4 Korrektheitssatz für natürliches Schließen in $H_{\mathbb{R}}$

Für jede Menge von Formeln Γ und jede Formel φ gilt

$$\Gamma \vdash \varphi \text{ ohne (raa)} \;\Rightarrow\; \Gamma \vDash_{H_{\mathbb{R}}} \varphi$$

Inhaltsverzeichnis

Korollar Jedes (raa)-freie Theorem ist eine $H_{\mathbb{R}}$-Tautologie.

1.13 Definition Konsistente Mengen

Sei Γ eine Menge von Formeln. Γ heißt inkonsistent, wenn $\Gamma \vdash \perp$ gilt. Sonst heißt Γ konsistent.

1.13.1 Lemma

Sei Γ eine Menge von Formeln und φ eine Formel. Dann gilt

$$\Gamma \nvdash \varphi \Longleftrightarrow \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ konsistent}$$

1.13.2 Maximal Konsistente Mengen

Eine Formelmenge Δ ist maximal konsistent, wenn sie konsistent ist und wenn gilt

$$\Sigma \supseteq \Delta \text{ konsistent } \Rightarrow \Sigma = \Delta$$

1.13.3 Satz

Jede konsistente Formelmenge Γ ist in einer maximal konsistenten Formelmenge Δ enthalten.

1.13.4 Lemma 1

Sei Δ maximal konsistent und gelte $\Delta \vdash \varphi$. Dann gilt $\varphi \in \Delta$.

1.13.5 Lemma 2

Sei Δ maximal konsistent und φ Formel. Dann gilt

$$\varphi \notin \Delta \iff \neg\varphi \in \Delta$$

1.14 Definition Erfüllbare Mengen

Sei Γ eine Menge von Formeln.
Γ heißt erfüllbar, wenn es passende B-Belegungen $\mathcal{B}$ gibt mit $\mathcal{B}(\gamma) = 1_B$ für alle $\gamma \in \Gamma$.

1.14.1 Satz

Sei Δ eine maximal konsistente Menge von Formeln. Dann ist Δ erfüllbar.

1.14.2 Lemma

Sei Γ eine Menge von Formeln und φ eine Formel. Dann gilt

$$\Gamma \not\models_B \varphi \iff \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ erfüllbar}$$

1.14.3 Vollständigkeitssatz

Sei Γ eine Menge von Formeln, φ eine Formel und W einer der Wahrheitswertebereiche B, K_3, F, $B_\mathbb{R}$, $H_\mathbb{R}$. Dann gilt

$$\Gamma \models_W \varphi \;\Rightarrow\; \Gamma \vdash \varphi$$

Insbesondere ist jede W-Tautologie ein Theorem.

1.15 Vollständigkeit und Korrektheit

1.15.1 Satz

Seien Γ eine Menge von Formeln und φ eine Formel. Dann gilt

$$\Gamma \vdash \varphi \;\Leftrightarrow\; \Gamma \models_B \varphi$$

Insbesondere ist eine Formel genau dann eine B-Tautologie, wenn sie ein Theorem ist.

Bemerkung Gilt für jede Boolsche Algebra, also auch $B_\mathbb{R}$, und für Heyting ohne (raa).

1.15.2 Definition Äquivalent

Zwei Formeln α, β heißen äquivlent ($\alpha \equiv \beta$), wenn für alle passenden B-Belegungen $\mathcal{B}$ gilt:

$$\mathcal{B}(\alpha) = \beta$$

1.15.3 Zusammenhänge

Seien α, β zwei Formeln, dann gilt:

$$\alpha \equiv \beta \;\Leftrightarrow\; (\alpha \leftrightarrow \beta) \text{ ist Theorem}$$

$$\alpha \text{ ist Theorem} \;\Leftrightarrow\; \alpha \equiv \neg \bot$$

1.15.4 Kompaktheitssatz

Sei Γ eine unter Umständen unendliche Menge von Formeln. Dann gilt

$$\Gamma \text{ unerfüllbar} \;\Leftrightarrow\; \exists \Gamma' \subseteq \Gamma \text{ endlich}: \;\Gamma' \text{ unerfüllbar}$$

1.16 Erfüllbarkeitsproblem

Eingabe: Formel γ
Frage: existiert eine B-Belegung $\mathcal{B}$ mit $\mathcal{B}(\gamma) = 1_B$

Offensichtliche Lösung: probiere alle Belegungen durch (Wahrheitswertetabelle), jedoch exponentielle Zeit. Ziel ist also ein spezieller Algorithmus für syntaktisch eingeschränkte Formeln.

1.16.1 Definition Hornformeln

Eine Hornklausel hat die Form

$$(\neg \bot \wedge p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n) \rightarrow q$$

für $n \geq 0$, atomare Formeln $p_1, \ldots, p_n$ und q atomare Formel oder $q = \bot$.

Eine Hornformel ist eine Konjuktion von Hornklauseln der Form

$$\bigwedge_{1 \leq i \leq n} (M_i \rightarrow q_i) \text{ oder } \{(M_i \rightarrow q_i) \mid 1 \leq i \leq n\}$$

1.16.2 Markierungsalgorithmus

Eingabe: endliche Menge Γ von Hornklauseln
Ausgabe: {erfüllbar, unerfüllbar}
Algorithmus:

(1) Solange es eine Hornklausel $M \to q$ in Γ gibt, so dass alle $p \in M$ markiert sind (oder $M = \emptyset$) und q unmarkierte atomare Formel ist, dann markiere q in allen Hornklauseln

(2) Wenn Γ eine Hornklausel der Form $M \to \perp$ enthält, in der alle $p \in M$ markiert sind

-> dann gebe "überfüllbar" aus

-> ansonsten gebe "erfüllbar" aus

1.16.3 Definition SLD-Resolution

Sei Γ eine Menge von Hornklauseln. Eine SLD-Resolution aus Γ ist eine Folge $(M_0 \to \perp, M_1 \to \perp, \dots, M_m \to \perp)$ von Hornklauseln mit

- $(M_0 \to \perp) \in \Gamma$
- für alle $0 \leq n < m$ existiert $(N \to q) \in \Gamma$ mit $q \in M_n$ und $M_{n+1} = M_n \backslash \{q\} \cup N$

Kapitel 2

Prädikatenlogik

2.1 Syntax der Prädikatenlogik

2.1.1 Definition Signatur

Eine Signatur ist ein Tripel $\Sigma = (\Omega, \mathtt{Rel}, \mathtt{ar})$, wobei Ω und $\mathtt{Rel}$ disjunkte Mengen von Funktions- und Relationsnamen sind und $\mathtt{ar} : \Omega \cup \mathtt{Rel} \to \mathbb{N}$ eine Abbildung ist.

2.1.2 Definition Σ-Terme

Die Menge der Variablen ist $\mathtt{Var} = \{x_0, x_1, \ldots\}$.

Sei Σ eine Signatur. Die Menge T_Σ der Σ-Terme ist induktiv definiert:

- Jede Variable ist ein Term, d.h. $\mathtt{Var} \subseteq T_\Sigma$
- Ist $f \in \Omega$ mit $\mathtt{ar}(f) = k$ und sind $t_1, \ldots, t_k \in T_\Sigma$, so gilt: $f(t_1, \ldots, t_k) \in T_\Sigma$
- Nichts ist Σ-Term, was sich nicht mittel der obigen Regeln erzeugen lässt.

2.1.3 Definition Atomare Σ-Formeln

Sei Σ Signatur. Die atomaren Σ-Formeln sind die Zeichenketten der Form

- $R(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ falls $t_1, \ldots, t_k \in T_\Sigma$ und $R \in \mathtt{Rel}$ mit $\mathtt{ar}(R) = k$ oder
- $t_1 = t_2$, falls $t_1, t_2 \in T_\Sigma$ oder
- $\perp$

2.1.4 Induktive Definition Σ-Formeln

Sei Σ Signatur. Σ-Formeln werden durch folgenden induktiven Prozess definiert:

- Alle atomaren Σ-Formeln sind Σ-Formeln
- Falls φ, ψ Σ-Formeln, sind auch $(\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \rightarrow \psi)$ Σ-Formeln
- Falls φ eine Σ-Formel ist, ist auch $\neg\varphi$ eine Σ-Formel
- Falls φ eine Σ-Formel und $x \in \mathtt{Var}$, so sind auch $\forall x \varphi$ und $\exists x \varphi$ Σ-Formeln
- Nichts, was sich nicht mittels der obigen Regeln erzeugen lässt, ist Σ-Formel

Ist der Kontext klar, so sprechen wir einfach von Termen, atomaren Formeln bzw. Formeln.

2.1.5 Definition Freie Variablen

Sei Σ eine Signatur. Die Menge $FV(\varphi)$ der freien Variablen eine Σ-Formel φ ist induktiv definiert:

- Ist φ atomare Σ-Formel, so ist $FV(\varphi)$ die Menge der in φ vorkommenden Variablen
- $FV(\varphi \Box \psi) = FV(\varphi) \cup FV(\psi)$ für $\Box \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$
- $FV(\neg\varphi) = FV(\varphi)$
- $FV(\exists x \varphi) = FV(\forall x \varphi) = FV(\varphi) \setminus \{x\}$

Eine Formel φ ist geschlossen oder ein Σ-Satz, wenn $FV(\varphi) = \emptyset$ gilt.

2.1.6 Definition Σ-Struktur

Sei Σ eine Signatur. Eine Σ-Struktur ist ein Tupel $\mathcal{A} = (U_{\mathcal{A}}, (f^{\mathcal{A}})_{f\in\Omega}, (R^{\mathcal{A}})_{R\in\mathtt{Rel}})$, wobei

- $U_{\mathcal{A}}$ ist eine nichtleere Menge, das Universum
- $R^{\mathcal{A}} \subseteq U_{\mathcal{A}}^{\mathtt{ar}(R)}$ eine Relation der Stelligkeit $ar(R)$ für $R \in \mathtt{Rel}$
- $f^{\mathcal{A}} : U_{\mathcal{A}}^{\mathtt{ar}(f)} \rightarrow U_{\mathcal{A}}$ eine Funktion der Stelligkeit $\mathtt{ar}(f)$ für $f \in \Omega$

2.1.7 Definition Variableninterpretation

Im Folgenden sei Σ Signatur, $\mathcal{A}$ Struktur und $\rho : \mathtt{Var} \to U_{\mathcal{A}}$ eine Abbildung (Variableninterpretation).

Die Abbildung $\rho' : T_\Sigma \to U_{\mathcal{A}}$ wird induktiv für $t \in T_\Sigma$ definiert:

- Ist $t \in \mathtt{Var}$, so setze $\rho'(t) = \rho(t)$
- Ansonsten existieren $f \in \Omega$ mit $\mathtt{ar}(f) = k$ und $t_1, \dots, t_k \in T_\Sigma$ mit $t = f(t_1, \dots, t_k)$. Dann setze $\rho'(t) = f^{\mathcal{A}}(\rho'(t_1), \dots, \rho'(t_k))$

Die Abbildung ρ' ist die übliche "Auswertungsabbildung". Zur Vereinfachung wird anstelle von $\rho'(t)$ auch $\rho(t)$ geschrieben.

2.1.8 Gültigkeit einer Σ-Formel

Für eine Formel φ definieren wir die Gültigkeit in einer Struktur $\mathcal{A}$ unter der Variableninterpretation ρ (in Zeichen: $\mathcal{A} \models_\rho \varphi$) induktiv:

- $\mathcal{A} \models_\rho \bot$ gilt nicht
- $\mathcal{A} \models_\rho R(t_1, \dots, t_k)$ falls $(\rho(t_1), \dots, \rho(t_k)) \in R^{\mathcal{A}}$
- $\mathcal{A} \models_\rho t_1 = t_2$ falls $\rho(t_1) = \rho(t_2)$ für $t_1, t_2 \in T_\Sigma$

Für Formeln φ, ψ und $x \in \mathtt{Var}$:

- $\mathcal{A} \models_\rho \varphi \wedge \psi$ falls $\mathcal{A} \models_\rho \varphi$ und $\mathcal{A} \models_\rho \psi$
- $\mathcal{A} \models_\rho \vee\psi$ falls $\mathcal{A} \models_\rho \varphi$ oder $\mathcal{A} \models_\rho \psi$
- $\mathcal{A} \models_\rho \varphi \to \psi$ falls nicht $\mathcal{A} \models_\rho \varphi$ oder $\mathcal{A} \models_\rho \psi$
- $\mathcal{A} \models_\rho \neg\varphi$ falls $\mathcal{A} \models_\rho \varphi$ nicht gilt
- $\mathcal{A} \models_\rho \exists x\varphi$ falls ???
- $\mathcal{A} \models_\rho \forall x\varphi$ falls ???

Für $x \in \mathtt{Var}$ und $a \in U_{\mathcal{A}}$ sei $\rho[x \mapsto a] : \mathtt{Var} \to U_{\mathcal{A}}$ die Variableninterpretation, für die gilt:

$$(\rho[x \mapsto a])(y) = \begin{cases} \rho(y) & \text{falls } x \neq y \\ a & \text{sonst} \end{cases}$$

- $\mathcal{A} \models_\rho \exists x\varphi$ falls es $a \in U_{\mathcal{A}}$ gibt mit $\mathcal{A} \models_{\rho[x \mapsto a]} \varphi$
- $\mathcal{A} \models_\rho \forall x\varphi$ falls $\mathcal{A} \models_{\rho[x \mapsto a]} \varphi$ für alle $a \in U_{\mathcal{A}}$

Inhaltsverzeichnis

2.1.9 Definition Modell

Sei Σ eine Signatur, φ eine Formel, Δ eine Menge von Formeln und $\mathcal{A}$ eine Struktur.
$\mathcal{A} \vDash \varphi$ ($\mathcal{A}$ ist Modell von φ), falls $\mathcal{A} \vDash_\rho \varphi$ für alle Variableninterpretation ρ gilt.
$\mathcal{A} \vDash \Delta$, falls $\mathcal{A} \vDash \psi$ für alle $\psi \in \Delta$

2.2 Definiton Erfüllbarkeit, Allgemeingültigkeit, Folgerung

Sei Σ eine Signatur, φ eine Formel, Δ eine Menge von Formeln und $\mathcal{A}$ eine Struktur.

- Δ ist erfüllbar, wenn es eine Struktur $\mathcal{B}$ und Variableninterpretation $\rho : \texttt{Var} \to U_\mathcal{B}$ gibt mit $\mathcal{B} \vDash_\rho \psi$ für alle $\psi \in \Delta$.
- φ ist semantische Folgerung von Δ ($\Delta \vDash \varphi$) falls für alle Strukturen $\mathcal{B}$ und alle Variableninterpretationen ρ gilt

$$(\mathcal{B} \vDash_\rho \psi, \forall \psi \in \Delta) \;\Rightarrow\; \mathcal{B} \vDash_\rho \varphi$$

- φ ist allgemeingültig, falls $\mathcal{B} \vDash_\rho \varphi$ für alle Strukturen $\mathcal{B}$ und alle Variableninterpretationen ρ gilt

Bemerkung

$$\varphi \text{ allgemeingültig } \Leftrightarrow \emptyset \vDash \varphi \Leftrightarrow \{\neg\varphi\} \text{ nicht erfüllbar}$$

Hierfür schreiben wir auch $\vDash \varphi$.

2.3 Substitutionen

Eine Substitution besteht aus einer Variable $x \in \texttt{Var}$ und einem Term $t \in T_\Sigma$, geschrieben $[x := t]$.

Die Formel $\varphi[x := t]$ ist die Anwendung der Substitution $[x := t]$ auf die Formel φ. Sie entsteht aus φ, indem alle freien Vorkommen von x durch t ersetzt werden. *Sie soll über t aussagen, was φ über x ausgesagt hat.*

Dazu wird induktiv defininiert, was es heißt, die freuen Vorkommen von x im Term $s \in T_\Sigma$ zu ersetzen:

- $x[x := t] = t$
- $y[x := t] = t$ für $y \in \mathtt{Var} \setminus \{x\}$
- $(f(t_1, \dots, t_k))[x := t] = f(t_1[x := t], \dots, t_k[x := t])$ für $f \in \Omega$ mit $\mathtt{ar}(f) = k$ und $t_1, \dots, t_k \in T_\Sigma$

2.3.1 Lemma

Seien Σ Signatur, $\mathcal{A}$ Struktur, ρ Variableninterpretation, $x \in \mathtt{Var}$ und $s, t \in T_\Sigma$. Dann gilt

$$\rho(s[x := t]) = \rho[x \mapsto \rho(t)](s)$$

2.3.2 Definition Zulässigkeit

Sei $[x := t]$ Substitution und φ Formel.
Die Substitution $[x := t]$ heißt für φ zulässig, wenn für alle $y \in \mathtt{Var}$ gilt

$$y \text{ Variable in } t \;\Rightarrow\; \varphi \text{ enthält weder } \exists y \text{ noch } \forall y$$

2.3.3 Lemma

Sei Σ Signatur, $\mathcal{A}$ Struktur, ρ Variableninterpretation, $x \in \mathtt{Var}$ und $t \in T_\Sigma$. Ist die Substitution $[x := t]$ für die Formel φ zulässig, so gilt

$$\mathcal{A} \models_\rho \varphi[x := t] \;\Leftrightarrow\; \mathcal{A} \models_{\rho[x \mapsto \rho(t)]} \varphi$$

2.4 Natürliches Schließen

Die Regeln des natürlichen Schließens für aussagelogische Formeln sind auch anwendbar auf prädikatenlogische Formeln.

2.4.1 Reflexivität

Für jeden Term t ist

$$\frac{}{t = t}$$

eine hypothesenlose Deduktion mit Konklusion $t = t$

2.4.2 Gleiches-Für-Gleiches

Idee: "Zunächst zeige ich, dass s die Eigenschaft φ hat. Dann zeige ich, dass $s = t$. Also habe ich gezeigt, dass t die Eigenschaft φ hat."

$$\frac{\varphi[x := s] \qquad s = t}{\varphi[x := t]}$$

Bedingung: Über keine Variable aus s oder t wird in φ quantifiziert.

2.4.3 $\forall$-Einführung/-Elimination

Einführung:

$$\frac{\varphi}{\forall x \varphi}$$

Bedingung: x kommt in keiner Hypothese frei vor

Elimination:

$$\frac{\forall x \varphi}{\varphi[x := t]}$$

Bedingung: Über keiner Variable aus t wird in φ quantifiziert

2.4.4 $\exists$-Einführung/-Elimination

Einführung:

$$\frac{\varphi[x := t]}{\exists x \varphi}$$

Bedingung: Über keine Variable t wird in φ quantifiziert.

Elimination:

$$\frac{\exists x \varphi \qquad \begin{matrix}[\varphi] \\ \vdots \\ \sigma\end{matrix}}{\sigma}$$

Inhaltsverzeichnis

Bedingung: x kommt in den Hypothesen und in σ nicht frei vor

2.5 Vollständigkeit

2.5.1 Definition Konkretisierung

Eine Menge Δ von Formeln hat Konkretisierungen, wenn für alle $\exists x \varphi \in \Delta$ ein variablenloser Term t existiert mit $\varphi[x := t] \in \Delta$

2.5.2 Satz

Sei Δ eine maximal konsistente Menge von Σ-Formeln. Dann existiert eine Signatur $\Sigma^+ \supseteq \Sigma$ und eine maximal konsistente Menge von Σ^+-Formeln mit Konkretisierungen, so dass $\Delta \subseteq \Delta^+$.

2.5.3 Satz

Sei Δ^+ maximal konsistente Menge von Σ^+-Formeln mit Konkretisierungen. Dann ist Δ^+ erfüllbar.

2.5.4 Vollständigkeitssatz der Prädikatenlogik

Sei Γ eine Menge von Formeln und φ eine Formel. Dann gilt

$$\Gamma \models \varphi \;\Rightarrow\; \Gamma \vdash \varphi$$

Insbesondere ist jede allgemeingültige Formel ein Theorem.

Bemerkung: Dieser Satz ist im wesentlichen der Gödelsche Vollständigkeitssatz.

2.5.5 Satz

Sei Γ höchstens abzählbar unendliche und konsistente Menge von Formeln. Dann hat Γ ein höchsts abzählbar unendliches Modell.

2.6 Vollständigkeit und Korrektheit

Seien Γ eine Menge von Formeln und φ eine Formel. Dann gilt

$$\Gamma \vdash \varphi \;\Leftrightarrow\; \Gamma \models \varphi$$

Inhaltsverzeichnis

Insbesondere ist eine Formel genau dann allgemeingültig, wenn sie ein Theorem ist.

2.6.1 Folgerung 1: Kompaktheit

Seien Γ eine u.U. unendliche Menge von Formeln und φ eine Formel mit $\Gamma \vDash \varphi$. Dann existiert $\Gamma' \subseteq \Gamma$ endlich mit $\Gamma' \vDash \varphi$

2.6.2 Kompaktheitssatz

Sei Γ eine u.U unendliche Menge von Formeln. Dann gilt

$$\Gamma \text{ erfüllbar } \Leftrightarrow \forall \Gamma' \subseteq \Gamma \text{ endlich} : \Gamma' \text{ erfüllbar}$$

2.6.3 Satz

Sei Δ eine u.U. unendliche Menge von Formeln, so dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine endliche Struktur $\mathcal{A}_n$ mit $\mathcal{A}_n \vDash \Delta$ existiert, die wenigstens n Elemente hat.

Dann existiert eine unendliche Struktur $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A} \vDash \Delta$.

2.6.4 Folgerung 2: Löwenheim-Skolem

Sei Γ erfüllbare und höchstens abzählbar unendliche Menge von Formeln. Dann existiert ein höchstens abzählbar unendliches Modell von Γ.

2.6.5 Folgerung 3: Semi-Entscheidbarkeit

Die Menge der allgemeingültigen Formeln ist semi-entscheidbar.

2.6.6 Definition Horn-Formel

Eine Horn-Formel ist eine Konjuktion von Formeln der Form

$$\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n((\neg \perp \wedge \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_m) \rightarrow \beta)$$

wobei $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ und β atomare Formeln sind.

2.7 Definition Elementare Theorie

Sei $\mathcal{A}$ eine Struktur. Dann ist $\mathtt{Th}(\mathcal{A})$ die Menge der prädikatenlogischen Formeln φ mit $\mathcal{A} \vDash \varphi$. Diese Menge heißt die (elementare Theorie von $\mathcal{A}$).

Inhaltsverzeichnis

2.7.1 Satz

Die Menge $\mathtt{Th}(\mathcal{N})$ aller Sätze φ mit $\mathcal{N} \vDash \varphi$ ist nicht entscheidbar.

2.8 Semi-Entscheidungsverfahren für allgemeingültige Formeln

Idee:

- Berechne aus Formel ψ eine Menge E von aussagelogischen Formeln mit

$$E \text{ unerfüllbar} \quad \Rightarrow \quad \neg\psi \text{ unerfüllbar} \quad \Rightarrow \quad \psi \text{ allgemeingültig}$$

- Suche endliche unerfüllbare Teilmenge E' von E

2.8.1 Definition Erfüllbarkeitsäquivalenz

Zwei Formeln φ und ψ heißen erfüllbarkeitsäquivalent,wenn gilt:

$$\varphi \text{ erfüllbar} \quad \Rightarrow \quad \psi \text{ erfüllbar}$$

2.8.2 Definition Gleichungsfreiheit

Eine Formel ist gleichungsfrei, wenn sie keine Teilformel der Form $s = t$ enthält.

Notation:

- Sei $\Sigma = (\Omega, \mathtt{Rel}, \mathtt{ar})$ endliche Signatur und φ Formel
- $\Sigma_{\mathtt{Gl}} = (\Omega, \mathtt{Rel} \uplus \{\mathtt{Gl}\}, \mathtt{ar}_{\mathtt{Gl}})$ mit $\mathtt{ar}_{\mathtt{Gl}}(f) = \mathtt{ar}(f)$ für alle $f \in \Omega \cup \mathtt{Rel}$ und $\mathtt{ar}_{\mathtt{Gl}}(\mathtt{Gl}) = 2$
- Für eine Formel φ bezeichnet $\varphi_{\mathtt{Gl}}$ die $\Sigma_{\mathtt{Gl}}$-Formel, die aus φ entsteht, indem alle Vorkommen von Teilformeln $s = t$ durch $\mathtt{Gl}(s, t)$ ersetzt werden

2.9 Kongruenz und Äquivlenz

2.9.1 Definition Kongruenz

Sei $\mathcal{A}$ eine Struktur und $\sim$ eine binäre Relation auf $U_{\mathcal{A}}$. Die Relation $\sim$ heißt Kongruenz auf $\mathcal{A}$, wenn gilt:

Inhaltsverzeichnis

- $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation (reflexiv, transitiv, symmetrisch)
- fü alle $f \in \Omega$ mit $k = \mathtt{ar}(f)$ und alle $a_1, b_1, \dots, a_k, b_k \in U_{\mathcal{A}}$ gilt

$$a_1 \sim b_1,\ a_2 \sim b_2,\ \dots,\ a_k \sim b_k \ \Rightarrow\ f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_k) \sim f^{\mathcal{A}}(b_1, \dots, b_k)$$

- für alle $R \in \mathtt{Rel}$ mit $k = \mathtt{ar}(R)$ und alle $a_1, b_1, \dots, a_k, b_k \in U_{\mathcal{A}}$ gilt

$$a_1 \sim b_1,\ \dots,\ a_k \sim b_k,\ (a_1, \dots, a_k) \in R^{\mathcal{A}} \ \Rightarrow\ (b_1, \dots, b_k) \in R^{\mathcal{A}}$$

2.9.2 Definition Äquivalenzklasse

Sei $\mathcal{A}$ eine Struktur und $\sim$ eine Kongruenz auf $\mathcal{A}$.

- Für $a \in U_{\mathcal{A}}$ sei $[a] = \{b \in U_{\mathcal{A}} \mid a \sim b\}$ die Äquivalenzklasse von a bzgl. $\sim$
- Dann definieren wir den Quotienten $\mathcal{B} = \mathcal{A}/\sim$ von $\mathcal{A}$ bzgl. $\sim$ wie folgt
  - $U_{\mathcal{B}} = U_{\mathcal{A}}/\sim = \{[a] \mid a \in U_{\mathcal{A}}\}$
  - Für jedes $f \in \Omega$ mit $\mathtt{ar}(f) = k$ und alle $a_1, \dots, a_k \in U_{\mathcal{A}}$ setzen wir

$$f^{\mathcal{B}}([a_1], \dots, [a_k]) = [f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_k)]$$

  - Für jedes $R \in \mathtt{Rel}$ mit $\mathtt{ar}(R) = k$ setzen wir

$$R^{\mathcal{B}} = \{([a_1], \dots, [a_k]) \mid (a_1, \dots, a_k) \in R^{\mathcal{A}}\}$$

- Sei $\rho : \mathtt{Var} \to U_{\mathcal{A}}$ Variableninterpretation. Dann definiere die Variableninterpretation

$$\rho/\sim : \mathtt{Var} \to U_{\mathcal{B}} : x \mapsto [\rho(x)]$$

2.9.3 Lemma 1

Sei $\mathcal{A}$ Struktur, $\rho : \mathtt{Var} \to U_{\mathcal{A}}$ Variableninterpretation und $\sim$ Kongruenz. Seien weiter $\mathcal{B} = \mathcal{A}/\sim$ und $\rho_{\mathcal{B}} = \rho/\sim$. Dann gilt für jeden Term t:

$$[\rho(t)] = \rho_{\mathcal{B}}(t)$$

2.9.4 Lemma 2

Sei $\mathcal{A}$ Struktur, $\sim$ Kongruenz und $\mathcal{B} = A/\sim$. Dann gilt für alle $R \in \mathtt{Rel}$ mit $k = \mathtt{ar}(R)$ und alle $c_1, \dots, c_k \in U_{\mathcal{A}}$:

$$([c_1], \dots, [c_k]) \in R^{\mathcal{B}} \ \Leftrightarrow\ (c_1, \dots, c_k) \in R^{\mathcal{A}}$$

Inhaltsverzeichnis

2.9.5 Satz

Seien $\mathcal{A}$ $\Sigma_{\texttt{Gl}}$-Struktur und $\rho : \texttt{Var} \to U_{\mathcal{A}}$ Variableninterpretation, so dass $\sim = \texttt{Gl}^{\mathcal{A}}$ Kongruenz auf $\mathcal{A}$ ist.

Seien $\mathcal{B} = A/\sim$ und $\rho_{\mathcal{B}} = \rho/\sim$. Dann gilt für alle Formeln φ:

$$A \vDash_{\rho} \varphi_{\texttt{Gl}} \;\Rightarrow\; \mathcal{B} \vDash_{\rho_{\mathcal{B}}} \varphi$$

2.9.6 Lemma

Aus einer endlichen Signatur Σ kann ein gleichungsfreier Horn-Satz $\texttt{Kong}_{\Sigma}$ über $\Sigma_{\texttt{Gl}}$ berechnet werden, so dass fü® alle $\Sigma_{\texttt{Gl}}$-Strukturen $\mathcal{A}$ gilt:

$$\mathcal{A} \vDash \texttt{Kong}_{\Sigma} \;\Rightarrow\; \texttt{Gl}^{\mathcal{A}} \text{ ist eine Kongruenz}$$

2.9.7 Satz

Aus einer endlichen Signatur Σ und einer Formel φ kann eine gleichungsfreie und erfüllbarkeitsäquivalente $\Sigma_{\texttt{Gl}}$-Formel φ' berechnet werden.

Ist φ Horn-Formel, so ist auch φ' Horn-Formel.

2.10 Skolemform

Ziel: Jede Σ-Formel φ ist erfüllbarkeitsäquivalent zu einer Σ'-Formel

$$\varphi' = \forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_k \psi$$

wobei ψ keine Quantoren enthält, φ' heißt in Skolemform.

Vorgehen:

(1) Quantoren nach vorne (Pränexform)

(2) Existenzquantoren eliminieren

Bemerkung: Es gibt Formeln ohne äquivlente Formel in Skolemform.

2.10.1 Äquivalenz von Formeln

Zwei Formeln φ und ψ sind äquivalent (kurz $\varphi \equiv \psi$), wenn für alle Strukturen A und alle Variableninterpretationen ρ gilt

$$\mathcal{A} \vDash_\rho \varphi \;\Rightarrow\; \mathcal{A} \vDash_\rho \psi$$

2.10.2 Lemma

Seien $\Box \in \{\exists, \forall\}$ und $\oplus \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftarrow\}$.
Sei $\varphi = (\Box x \alpha) \oplus \beta$ und sei y eine Variable, die weder in α noch in β vorkommt.
Dann gilt

$$\varphi \equiv \begin{cases} \Box y(\alpha[x := y] \oplus \beta) & \text{falls } \oplus \in \{\wedge, \vee, \Leftarrow\} \\ \forall y(\alpha[x := y] \rightarrow \beta) & \text{falls } \oplus = \rightarrow,\ \Box = \exists \\ \exists y(\alpha[x := y] \rightarrow \beta) & \text{falls } \oplus = \rightarrow,\ \Box = \forall \end{cases}$$

2.10.3 Satz

Aus einer endlichen Signatur Σ und einer Formel φ kann eine äquivalente Formel

$$\varphi' = \Box_1 x_1 \dots \Box_k x_k \psi$$

berechnet werden. Eine Formel φ' dieser Form heißt Pränexform.

Ist φ gleichungsfrei, so ist auch φ' gleichungsfrei.

2.10.4 Existenzquantoren eliminieren

Sei $\varphi = \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_m \exists y \psi$ Formel in Pränexform. Sei $g \notin \Omega$ ein neues m-stelliges Funktionssymbol.

Setze $\varphi' = \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_m \psi[y := g(x_1, \dots, x_m)]$.

Offensichtlich hat φ' einen Existenzquantor weniger als φ. φ' ist außerdem keine Σ-Formel, da $g \notin \Omega$, sondern eine Formel über einer erweiterten Signatur.

2.10.5 Lemma

Die Formeln φ und φ' sind erfüllbarkeitsäquivalent.

2.10.6 Satz

Aus einer Formel φ kann man eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel $\bar{\varphi}$ in Skolemform berechnen.
Ist φ gleichungsfrei, so auch $\bar{\varphi}$.

2.11 Herbrand-Strukturen und Modelle

Sei $\Sigma = (\Omega, \mathtt{Rel}, \mathtt{ar})$ eine Signatur. Wir nehmen im folgenden an, dass Ω mindestens ein Konstantensymbol enthält.

Das Herbrand-Universum $D(\Sigma)$ ist die Menge aller variablenfreien Σ-Terme.

Beispiel:

$$\Omega = \{b, f\} \qquad \mathtt{ar}(b) = 0 \qquad \mathtt{ar}(f) = 1$$
$$D(\Sigma) = \{b, f(b), f(f(b)), f(f(f(b))), \dots\}$$

Eine Σ-Struktur $\mathcal{A} = (U_{\mathcal{A}}, (f^{\mathcal{A}})_{f\in\Omega}, (R^{\mathcal{A}})_{R\in\mathtt{Rel}})$ ist eine Herbrand-Struktur, wenn folgendes gilt

- $U_{\mathcal{A}} = D(\Sigma)$
- für alle $f \in \Omega$ mit $\mathtt{ar}(f) = k$ und alle $t_1, \dots, t_k \in D(\Sigma)$ ist

$$f^{\mathcal{A}}(t_1, \dots, t_k) = f(t_1, \dots, t_k)$$

Für jede Herbrand-Struktur $\mathcal{A}$, alle Variableninterpretationen ρ und alle variablenfreien Terme t gilt dann $\rho(t) = t$.

Ein Herbrand-Modell von φ ist eine Herbrand-Struktur, die gleichzeitig ein Modell von φ ist.

2.11.1 Satz

Sei φ eine gleichungsfreie Aussage in Skolemform. φ ist genau dann erfüllbar, wenn φ ein Herbrand-Modell besitzt.

2.11.2 Herband-Expansion

Frage: Wie erkennt man, ob eine gleichungsfreie Aussage in Skolemform ein Herband-Modell hat?

Die Herbrand-Expansion von φ ist die Menge der Aussagen

$$E(\varphi) = \{\psi[y_1 := t_1] \dots [y_n := t_n] \mid t_1, \dots, t_n \in D(\Sigma)\}$$

Die Formeln von $E(\varphi)$ entstehen also aus ψ, in dem die (variablenfreien) Terme aus $D(\Sigma)$ in jeder möglichen Weise in ψ substituiert werden.

Wir betrachen die Herbrand-Expansion von φ als eine Menge von aussagelogischen Formeln. Die atomaren Formeln sind hierbei von der Gestallt $(P(t_1, \dots, t_k)$ für $P \in \texttt{Rel}$ mit $\texttt{ar}(P) = k$ und $t_1, \dots, t_k \in D(\Sigma)$.

2.11.3 Konstruktion

Sei $\mathcal{B} : \{P(t_1, \dots, t_k) \mid P \in \texttt{Rel}, k = \texttt{ar}(P), t_1, \dots, t_k \in D(\Sigma)\} \to \mathbb{B}$ eine $\mathbb{B} - \mathit{Belegung}$. Die hiervon induzierte Herbrand-Struktur $\mathcal{A}_\mathcal{B}$ ist gegeben durch

$$P^{\mathcal{A}_\mathcal{B}} = \{(t_1, \dots, t_k) \mid t_1, \dots, t_k \in D(\Sigma), \mathcal{B}(P(t_1, \dots, t_k)) = 1\}$$

für alle $P \in \texttt{Rel}$ mit $\texttt{ar}(P) = k$

2.11.4 Lemma

Für jede quantoren- und gleichungsfreie Aussage α und jede Variableninterpretation ρ in $\mathcal{A}_\mathcal{B}$ gilt

$$\mathcal{A}_\mathcal{B} \vDash_\rho \alpha \;\Rightarrow\; \mathcal{B}(\alpha) = 1$$

2.11.5 Lemma

Sei $\varphi = \forall y_1 \forall y_2 \dots \forall y_n \psi$ gleichungsfreie Aussage in Skolemform. Sie hat genau dann ein Herbrand-Modell, wenn die Formelmenge $E(\varphi)$ (im aussagelogischen Sinn) erfüllbar ist.

2.11.6 Satz von Gödel-Herbrand-Skolem

Sei φ gleichungsfreie Aussage in Skolemform. Die ist genau dann erfüllbar, wenn die Formelmenge $E(\varphi)$ (im aussagelogischen Sinn) erfüllbar ist.

Inhaltsverzeichnis

2.11.7 Satz von Herbrand

Eine gleichungsfreie Aussage φ in Skolemform ist genau dann unerfüllbar, wenn es eine endliche Teilmenge von $E(\varphi)$ gibt, die (im aussagelogischen Sinn) unerfüllbar ist.

2.11.8 Algorithmus von Gilmore

Sei φ gleichungsfreie Aussage in Skolemform un sei $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ eine Aufzählung von $E(\varphi)$.

Algorithmus von Gilmore

Eingabe: φ

$n := 0$

`repeat` $n := n + 1$

`until` $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ ist unerfüllbar

`return` "unerfüllbar"

Bemerkung: "$\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ ist unerfüllbar" ist nachzuweisen mit den Mitteln der Aussagenlogik, z.B. Wahrheitswertetabelle.

Folgerung Sei φ eine gleichungsfreie Aussage in Skolemform. Dann gilt:

- Wenn die Eingabeformel φ unerfüllbar ist, dann terminiert der Algorithmus und gibt "unerfüllbar" aus.
- Wenn die Eingabeformel φ erfüllbar ist, dann terminiert der Algorithmus nicht.

2.11.9 Bestimmung von Lösungen

Folgerung 1: Sei $\varphi = \bigwedge_{1 \leq i \leq n} \varphi_i$ gleichungsfreie Horn-Formel der Prädikatenlogik. Dann ist φ genau dann unerfüllbar, wenn $\bigcup_{1 \leq i \leq n} E(\varphi_i)$ im aussagelogischen Sinne unerfüllbar ist.

Folgerung 2: Eine gleichungsfreie Horn-Formel der Prädikatenlogik $\varphi = \bigwedge_{1 \leq i \leq n} \varphi_i$ ist genau dann unerfüllbar, wenn es eine SLD-Resolution

$$(M_0 \to \perp, M_1 \to \perp, \ldots, M_m \to \perp)$$

aus $\bigcup_{1 \leq i \leq n} E(\varphi_i)$ mit $M_m = \emptyset$ gibt.

2.12 Substitutionen

Eine verallgemeinerte Substitution σ ist eine Abbildung der Menge der Variablen in die Menge aller Terme, so dass nur endlich viele Variablen x existeren mit $\sigma(x) \neq x$.

Sei $\mathtt{Def}(\sigma) = \{x \text{ Variable } \mid x \neq \sigma(x)\}$ der Definitionsbereich der verallgemeinerten Substitution σ. Für einen Term t definieren wir den Term $t\sigma$ (Anwendung der verallgemeinerten Substitution σ auf den Term t) wie folgt induktiv

- $x\sigma = \sigma(x)$
- $[f(t_1, \ldots, t_k)]\sigma = f(t_1\sigma, \ldots, t_k\sigma$ für Terme $t_1, \ldots, t_k, f \in \Omega$

Für eine atomare Formel $\alpha = P(t_1, \ldots, t_k)$ (d.h. $P \in \mathtt{Rel}, \mathtt{ar}(P) = k, t_1, \ldots, t_k$ Terme) sei

$$\alpha\sigma = P(t_1\sigma, \ldots, t_k\sigma)$$

2.12.1 Verknüpfung von Substitutionen

Sind σ_1, σ_2 verallgemeinerte Substitutionen, so definieren wir eine neue verallgemeinerte Substitution $\sigma_1\sigma_2$ durch

$$(\sigma_1\sigma_2)(x) = (x\sigma_1)\sigma_2$$

2.12.2 Lemma

Seien σ Substitution, x Variable und t Term, so dass

- $x \notin \mathtt{Def}(\sigma)$
- x kommt in keinem der Terme $y\sigma$ mit $y \in \mathtt{Def}(\sigma)$ vor

Dann gilt

$$[x := t]\sigma = \sigma[x := t\sigma]$$

Inhaltsverzeichnis

2.12.3 Unifikator

Gegeben seien zwei gleichungsfreie Atomformeln α, β. Eine Substitution σ heißt Unifikator von α und β, falls

$$\alpha\sigma = \beta\sigma$$

Ein Unifikator σ heißt allgemeinster Unifikator, falls für jeden Unifikator σ' eine Substitution τ mit $\sigma' = \sigma\tau$ existiert.

2.12.4 Variablenumbenennung

Eine Variablenumbenennung ist eine Substitution ρ, die $\texttt{Def}(\rho)$ injektiv in die Menge der Variablen abbildet.

2.12.5 Lemma

Sind σ_1, σ_2 allgemeinste Unifikatoren von α, β, so existiert eine Variablenumbenennung ρ mit $\sigma_2 = \sigma_1\rho$.

2.12.6 Unifikationsalgorithmus

Eingabe: Paar (α, β) gleichungsfreier Atomformeln

$\sigma :=$ Substitution mit $\texttt{Def}(\sigma) = \emptyset$ (d.h. Identität)

while $\alpha\sigma \neq \beta\sigma$ **do**

Suche die erste Position, an der sich $\alpha\sigma$ und $\beta\sigma$ unterscheiden

if keines der beiden Symbole an dieser Position ist eine Variable

then stoppe mit "nicht unifizierbar"

else sei x die Variable und t der term in der anderen Atomformel

if x kommt in t vor

then stoppe mit "nicht unifizierbar"

else $\sigma := \sigma[x := t]$

endwhile

Ausgabe: σ

2.12.7 Satz

- Der Unifikationsalgorithmus terminiert für jede Eingabe
- Wenn die Eingabe nicht unifizierbar ist, so terminiert der Algorithmus mit der Ausgabe "nicht unifizierbar"
- wenn die Eingabe unifizierbar ist, dann findet der Algorithmus den allgemeinsten Unifikator

2.13 Prädikatenlogische SLD-Resolution

Sei Γ eine Menge von gleichungsfreien Horn-Klauseln der Prädikatenlogik. Eine SLD-Resolution aus Γ ist eine Folge

$$((M_0 \to \perp, \sigma_0), (M_1 \to \perp, \sigma_1), \dots, (M_m \to \perp, \sigma_m))$$

von Horn-Klauseln und Substitutionen mit

- $(M_0 \to \perp) \in \Gamma$ und $\mathtt{Def}(\sigma_0) = \emptyset$
- für alle $0 \leq n < m$ existieren $\emptyset \neq Q \subseteq M_n$, $(N \to \alpha) \in \Gamma$ und Variablenumbenennung ρ, so dass
-
  - $(N \cup \{\alpha\})\rho$ und M_n variablendisjunkt
  - σ_{n+1} ein allgemeinster Unifikator von $\alpha\rho$ und Q
  - $M_{n+1} = (M_n \setminus Q \cup N\rho)\sigma_{n+1}$

2.13.1 Lemma

Sei Γ die Menge von gleichungsfreien Horn-Klauseln der Prädikatenlogik und $((M_n \to \perp, \sigma_n))_{0 \leq n \leq m}$ eine SLD-Resolution aus $\Gamma \cup \{M_0 \to \perp\}$ mit $M_m = \emptyset$. Dann gilt $\Gamma \vDash \psi\sigma_0\sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_m$ für alle $\psi \in M_0$.

2.13.2 Lemma

Sei Γ eine Menge von definiten gleichungsfreien Horn-Klauseln der Prädikatenlogik, sei $M \to \perp$ eine gleichungsfreie Horn-Klausel und sei υ Substitution, so dass $M\upsilon$ variablenlos ist und $\Gamma \vDash M\upsilon$ gilt.
Dann existiert eine prädikatenlogische SLD-Resolution

$$((M_n \to \perp, \sigma_n))_{0 \leq n \leq m} \text{ aus } \Gamma \cup \{M \to \perp\}$$

und eine Substitution τ mit

$$M_0 = M, M_m = \emptyset \text{ und } M_0\sigma_0\sigma_1 \dots \sigma_m\tau = M\upsilon$$

Inhaltsverzeichnis

2.13.3 Satz

Sei Γ eine Menge von definiten gleichungsfreien Horn-Klauseln der Prädikatenlogik, sei $M \to\perp$ eine gleichungsfreie Horn-Klausel und sei υ Substitution, so dass $M\upsilon$ variablenlos ist. Dann sind äquivlent:

- $\Gamma \vDash M\upsilon$
- Es existiert eine SLD-Resolution $((M_n \to\perp, \sigma_n))_{0\leq n\leq m}$ aus $\Gamma \cup \{M\upsilon \to\perp\}$ und eine Substitution τ mit $M_0 = M$, $M_m = \emptyset$ und $M_0\sigma_0\sigma_1 \dots \sigma_m\tau = M\upsilon$

Inhaltsverzeichnis