

Zusammenfassung - Logik und Logikprogrammierung

Marcus Faulstich

16. August 2020

Inhaltsverzeichnis

1	Aussagenlogik	5
1.1	Definition Atomare Formeln	5
1.2	Natürliches Schließen	6
1.3	Konstruktion von Deduktionen	6
1.3.1	Konjunktionseinführung/-elimination	6
1.3.2	Implikationseinführung/-elimination	6
1.3.3	Disjunktionseinführung/-elimination	6
1.3.4	Negationseinführung/-elimination	7
1.3.5	ex falso sequitur quodlibet (Falsum Regel)	7
1.3.6	Reductio ad absurdum	7
1.4	Definition Syntaktische Folgerung, Theorem	7
1.5	Satz	7
1.6	Definition Wahrheitswertemengen	8
1.7	Definition W-Belegung	8
1.8	Definition Abbildungen von Wahrheitswerten	9
1.9	Definition Schranken von Wahrheitswertemengen	9
1.10	Definition Verband	9
1.11	Definition Wahrheitswertebereiche	10
1.12	Definition Semantische Folgerung, Tautologie	11
1.12.1	Korrektheitslemma für natürliches Schließen in B	11
1.12.2	Korrektheitssatz für natürliches Schließen in B	11
1.12.3	Korrektheitssatz für natürliches Schließen in $B_{\mathbb{R}}$	11
1.12.4	Korrektheitssatz für natürliches Schließen in $H_{\mathbb{R}}$	11
1.13	Definition Konsistente Mengen	12
1.13.1	Lemma	12
1.13.2	Maximal Konsistente Mengen	12
1.13.3	Satz	12
1.13.4	Lemma 1	12
1.13.5	Lemma 2	12
1.14	Definition Erfüllbare Mengen	12

1.14.1	Satz	13
1.14.2	Lemma	13
1.14.3	Vollständigkeitssatz	13
1.15	Vollständigkeit und Korrektheit	13
1.15.1	Satz	13
1.15.2	Definition Äquivalent	13
1.15.3	Zusammenhänge	14
1.15.4	Kompaktheitssatz	14
1.16	Erfüllbarkeitsproblem	14
1.16.1	Definition Hornformeln	14
1.16.2	Markierungsalgorithmus	15
1.16.3	Definition SLD-Resolution	15
2	Prädikatenlogik	16
2.1	Syntax der Prädikatenlogik	16
2.1.1	Definition Signatur	16
2.1.2	Definition Σ -Terme	16
2.1.3	Definition Atomare Σ -Formeln	16
2.1.4	Induktive Definition Σ -Formeln	17
2.1.5	Definition Freie Variablen	17
2.1.6	Definition Σ -Struktur	17
2.1.7	Definition Variableninterpretation	18
2.1.8	Gültigkeit einer Σ -Formel	18
2.1.9	Definition Modell	19
2.2	Definiton Erfüllbarkeit, Allgemeingültigkeit, Folgerung	19
2.3	Substitutionen	19
2.3.1	Lemma	20
2.3.2	Definition Zulässigkeit	20
2.3.3	Lemma	20
2.4	Natürliches Schließen	20
2.4.1	Reflexivität	20
2.4.2	Gleiches-Für-Gleiches	21
2.4.3	\forall -Einführung/-Elimination	21
2.4.4	\exists -Einführung/-Elimination	21
2.5	Vollständigkeit	22
2.5.1	Definition Konkretisierung	22
2.5.2	Satz	22
2.5.3	Satz	22
2.5.4	Vollständigkeitssatz der Prädikatenlogik	22
2.5.5	Satz	22
2.6	Vollständigkeit und Korrektheit	22

Inhaltsverzeichnis

2.6.1	Folgerung 1: Kompaktheit	23
2.6.2	Kompaktheitssatz	23
2.6.3	Satz	23
2.6.4	Folgerung 2: Löwenheim-Skolem	23
2.6.5	Folgerung 3: Semi-Entscheidbarkeit	23
2.6.6	Definition Horn-Formel	23
2.7	Definition Elementare Theorie	23
2.7.1	Satz	24
2.8	Semi-Entscheidungsverfahren für allgemeingültige Formeln	24
2.8.1	Definition Erfüllbarkeitsäquivalenz	24
2.8.2	Definition Gleichungsfreiheit	24
2.9	Kongruenz und Äquivalenz	24
2.9.1	Definition Kongruenz	24
2.9.2	Definition Äquivalenzklasse	25
2.9.3	Lemma 1	25
2.9.4	Lemma 2	25
2.9.5	Satz	26
2.9.6	Lemma	26
2.9.7	Satz	26
2.10	Skolemform	26
2.10.1	Äquivalenz von Formeln	27
2.10.2	Lemma	27
2.10.3	Satz	27
2.10.4	Existenzquantoren eliminieren	27
2.10.5	Lemma	27
2.10.6	Satz	28
2.11	Herbrand-Strukturen und Modelle	28
2.11.1	Satz	28
2.11.2	Herbrand-Expansion	29
2.11.3	Konstruktion	29
2.11.4	Lemma	29
2.11.5	Lemma	29
2.11.6	Satz von Gödel-Herbrand-Skolem	29
2.11.7	Satz von Herbrand	30
2.11.8	Algorithmus von Gilmore	30
2.11.9	Bestimmung von Lösungen	30
2.12	Substitutionen	31
2.12.1	Verknüpfung von Substitutionen	31
2.12.2	Lemma	31
2.12.3	Unifikator	32
2.12.4	Variablenumbenennung	32

Inhaltsverzeichnis

2.12.5	Lemma	32
2.12.6	Unifikationsalgorithmus	32
2.12.7	Satz	33
2.13	Prädikatenlogische SLD-Resolution	33
2.13.1	Lemma	33
2.13.2	Lemma	33
2.13.3	Satz	34

Kapitel 1

Aussagenlogik

1.1 Definition Atomare Formeln

Eine **atomare Formel** hat die Form p_i . Diese Formeln werden durch folgenden Induktiven Prozess definiert:

- Alle atomaren Formeln und \perp sind Formeln
- Falls φ und ψ Formeln sind, sind auch $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$ und $\neg\varphi$ Formeln
- Nichts ist Formel, was sich nicht mittels dieser Regeln erzeugen lässt

Bezeichnungen:

- Falsum: \perp
- Konjunktion: \wedge
- Disjunktion: \vee
- Einseitige Implikation: \rightarrow
- Gegenseitige Implikation: \leftrightarrow
- Negation: \neg

Präzedenz der Operatoren:

\leftrightarrow bindet am schwächsten
 \rightarrow ...
 \vee ...
 \wedge ...
 \neg bindet am stärksten

Inhaltsverzeichnis

1.2 Natürliches Schließen

Ein mathematischer Beweis zeigt, wie die Behauptung aus den Voraussetzungen folgt. Analog zeigt ein **Beweisbaum** (*Herleitung, Deduktion*), wie eine Formel aus anderen Formeln folgt.

Diese Deduktionen sind Bäume, deren Knoten mit Formeln beschriftet sind.

- an den Blättern stehen Voraussetzungen (**Hypothesen**)
- an den inneren Knoten stehen Teilergebnisse und Begründungen
- an der Wurzel steht die Behauptung (**Konklusion**)

1.3 Konstruktion von Deduktionen

1.3.1 Konjunktionseinführung/-elimination

$$\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi}$$
$$\frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi} \qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\psi}$$

1.3.2 Implikationseinführung/-elimination

$$\frac{\begin{array}{c} [\varphi] \\ \vdots \\ \psi \end{array}}{\varphi \rightarrow \psi}$$
$$\frac{\varphi \quad \varphi \rightarrow \psi}{\psi}$$

1.3.3 Disjunktionseinführung/-elimination

$$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi} \qquad \frac{\psi}{\varphi \vee \psi}$$
$$\frac{\begin{array}{c} [\varphi] \quad [\psi] \\ \vdots \quad \vdots \\ \varphi \vee \psi \quad \sigma \end{array}}{\sigma}$$

Inhaltsverzeichnis

1.3.4 Negationseinführung/-elimination

$$\frac{\begin{array}{c} [\varphi] \\ \vdots \\ \perp \end{array}}{\neg\varphi}$$
$$\frac{\neg\varphi \quad \varphi}{\perp}$$

1.3.5 ex falso sequitur quodlibet (Falsum Regel)

$$\frac{\perp}{\varphi}$$

1.3.6 Reductio ad absurdum

$$\frac{\begin{array}{c} [\neg\varphi] \\ \vdots \\ \perp \end{array}}{\varphi}$$

1.4 Definition Syntaktische Folgerung, Theorem

Für eine Formelmenge Γ und eine Formel φ schreiben wir

$$\Gamma \vdash \varphi$$

wenn es eine Deduktion gibt mit Hypothesen aus Γ und Konklusion φ . Wir sagen " φ ist eine **syntaktische Folgerung** von Γ "

Eine Formel φ ist ein **Theorem**, wenn $\emptyset \vdash \varphi$ gilt.

1.5 Satz

Für alle Formeln φ und ψ gelten

$$\{\neg(\varphi \vee \psi)\} \vdash \neg\varphi \wedge \neg\psi$$

$$\{\neg\varphi \wedge \neg\psi\} \vdash (\neg\varphi \vee \psi)$$

$$\{\neg\varphi \vee \neg\psi\} \vdash \neg(\varphi \wedge \psi)$$

$$\{\neg(\varphi \wedge \psi)\} \vdash \neg\varphi \vee \neg\psi$$

Inhaltsverzeichnis

1.6 Definition Wahrheitswertemengen

- **Boolsche Logik** $B = \{0, 1\}$
- **Kleene-Logik** $K_3 = 0, \frac{1}{2}, 1$
- **Fuzzy-Logik** $F = [0, 1]$
- **unendl. Boolsche Logik** $B_{\mathbb{R}} = \text{Menge der Teilmengen von } \mathbb{R}$
- **Heyting-Algebra** $H_{\mathbb{R}} = \text{Menge der offenen Teilmengen von } \mathbb{R}$

1.7 Definition W-Belegung

Sei W eine Menge von Wahrheitswerten. Eine **W-Belegung** ist eine Abbildung $\mathcal{B} : V \rightarrow W$, wobei $V \subseteq \{p_0, p_1, \dots\}$ eine Menge atomarer Formeln ist.

Die W -Belegung $\mathcal{B} : V \rightarrow W$ **passt** zur Formel φ , falls alle atomaren Formeln aus φ zu V gehören.

Sei W ein Wahrheitswertebereich und \mathcal{B} eine W -Belegung. Induktiv über den Formelaufbau definieren wir den Wahrheitswert $\hat{\mathcal{B}}(\varphi) \in W$ jeder zu \mathcal{B} passenden Formel φ :

$$\hat{\mathcal{B}}(\perp) = 0_W$$

$$\hat{\mathcal{B}}(p) = \mathcal{B}(p) \quad \text{falls } p \text{ atomare Formel}$$

$$\hat{\mathcal{B}}(\varphi \wedge \psi) = \hat{\mathcal{B}}(\varphi) \wedge_W \hat{\mathcal{B}}(\psi)$$

$$\hat{\mathcal{B}}(\varphi \vee \psi) = \hat{\mathcal{B}}(\varphi) \vee_W \hat{\mathcal{B}}(\psi)$$

$$\hat{\mathcal{B}}(\varphi \rightarrow \psi) = \rightarrow_W (\hat{\mathcal{B}}(\varphi), \hat{\mathcal{B}}(\psi))$$

$$\hat{\mathcal{B}}(\neg \varphi) = \neg_W (\hat{\mathcal{B}}(\varphi))$$

Im folgenden schreiben wir anstatt $\hat{\mathcal{B}}(\varphi)$ nur $\mathcal{B}(\varphi)$

1.8 Definition Abbildungen von Wahrheitswerten

Sei W eine Menge und $R \subseteq W \times W$ eine binäre Relation.

- R ist **reflexiv**, wenn $(a, a) \in R$ für alle $a \in W$ gilt
- R ist **antisymmetrisch**, wenn $(a, b), (b, a) \in R$ impliziert, dass $a = b$ gilt
- R ist **transitiv**, wenn $(a, b), (b, a) \in R$ impliziert, dass $(a, c) \in R$ gilt
- R ist eine **Ordnungsrelation**, wenn R reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist. In diesem Fall heißt das Paar (W, R) eine **partiell geordnete Menge**

1.9 Definition Schranken von Wahrheitswertemengen

Sei (W, \leq) partiell geordnete Menge, $M \subseteq W$ und $a \in W$.

- a ist **obere Schranke von M** , wenn $m \leq a$ für alle $m \in M$ gilt
- a ist **kleinste obere Schranke** oder **Supremum von M** , wenn a obere Schranke von M ist und wenn $a \leq b$ für alle oberen Schranken b von M gilt
- a ist **untere Schranke von M** , wenn $a \leq m$ für alle $m \in M$ gilt
- a ist **größte untere Schranke** oder **Infimum von M** , wenn a untere Schranke von M ist und wenn $b \leq a$ für alle unteren Schranken b von M gilt.

1.10 Definition Verband

Ein **(vollständiger) Verband** ist eine partiell geordnete Menge (W, \leq) , in der jede Menge $M \subseteq W$ ein Supremum und ein Infimum hat.

In einem Verband (W, \leq) definieren wir:

- $0_W = \inf W$ und $1_W = \sup W$
- $a \wedge_W b = \inf a, b$ und $a \vee_W b = \sup a, b$ für $a, b \in W$

1.11 Definition Wahrheitswertebereiche

Ein Wahrheitswertebereich ist ein Tupel $(W, \leq, \rightarrow_W, \neg_W)$, wobei (W, \leq) ein Verband und $\rightarrow_W: W^2 \rightarrow W$ und $\neg_W: W \rightarrow W$ Funktionen sind

- Boolscher Wahrheitswertebereich B

$$\begin{array}{ll} \text{Grundmenge: } B = \{0, 1\} & \text{Ordnung: } \leq \\ \neg_B(a) = 1 - a & \rightarrow_B(a, b) = \max(b, 1 - a) \\ 0_B = 0 \quad 1_B = 1 & \\ a \wedge_B b = \min(a, b) & a \vee_B b = \max(a, b) \end{array}$$

- Kleenescher Wahrheitswertebereich K_3

$$\begin{array}{ll} \text{Grundmenge: } K_3 = \{0, \frac{1}{2}, 1\} & \text{Ordnung: } \leq \\ \neg_{K_3}(a) = 1 - a & \rightarrow_{K_3}(a, b) = \max(b, 1 - a) \\ 0_{K_3} = 0 \quad 1_{K_3} = 1 & \\ a \wedge_{K_3} b = \min(a, b) & a \vee_{K_3} b = \max(a, b) \end{array}$$

- Fuzzy-Wahrheitswertebereich

$$\begin{array}{ll} \text{Grundmenge: } F = [0, 1] & \text{Ordnung: } \leq \\ \neg_F(a) = 1 - a & \rightarrow_F(a, b) = \max(b, 1 - a) \\ 0_F = 0 \quad 1_F = 1 & \\ a \wedge_F b = \min(a, b) & a \vee_F b = \max(a, b) \end{array}$$

- unendl. Boolescher Wahrheitswertebereich

$$\begin{array}{ll} \text{Grundmenge: } B_{\mathbb{R}} = \{A \mid A \subseteq \mathbb{R}\} & \text{Ordnung: } \subseteq \\ \neg_{B_{\mathbb{R}}}(A) = \mathbb{R} \setminus A & \rightarrow_{B_{\mathbb{R}}}(A, B) = B \cup \mathbb{R} \setminus A \\ 0_{B_{\mathbb{R}}} = \emptyset \quad 1_{B_{\mathbb{R}}} = \mathbb{R} & \\ A \wedge_{B_{\mathbb{R}}} B = A \cap B & A \vee_{B_{\mathbb{R}}} B = A \cup B \end{array}$$

- Heytingscher Wahrheitswertebereich

$$\begin{array}{ll} \text{Grundmenge: } H_{\mathbb{R}} = \{A \subseteq \mathbb{R} \mid A \text{ ist offen}\} & \text{Ordnung: } \subseteq \\ \neg_{H_{\mathbb{R}}}(A) = \text{Inneres}(\mathbb{R} \setminus A) & \rightarrow_{H_{\mathbb{R}}}(A, B) = \text{Inneres}(B \cup \mathbb{R} \setminus A) \\ 0_{H_{\mathbb{R}}} = \emptyset \quad 1_{H_{\mathbb{R}}} = \mathbb{R} & \\ A \wedge_{H_{\mathbb{R}}} B = A \cap B & A \vee_{H_{\mathbb{R}}} B = A \cup B \end{array}$$

Inhaltsverzeichnis

1.12 Definition Semantische Folgerung, Tautologie

Sei W ein Wahrheitswertebereich.

Eine Formel φ heißt eine **W -Folgerung** der Formelmenge Γ , falls für jede W -Belegung \mathcal{B} , die zu allen Formeln aus $\Gamma \cup \{\varphi\}$ passt, gilt:

$$\inf\{\mathcal{B}(\gamma) \mid \gamma \in \Gamma\} \leq \mathcal{B}(\varphi)$$

Wir schreiben $\Gamma \models_W \varphi$, falls φ eine W -Folgerung von Γ ist.

Eine **W -Tautologie** ist eine Formel φ mit $\emptyset \models_W \varphi$, d.h. $\mathcal{B}(\varphi) = 1_W$ für alle passenden W -Belegungen.

1.12.1 Korrektheitslemma für natürliches Schließen in B

Sei D eine Deduktion mit Hypothesen in der Menge Γ und Konklusion φ . Dann gilt

$$\Gamma \vdash_B \varphi \quad \text{d.h.} \quad \inf\{\mathcal{B}(\gamma) \mid \gamma \in \Gamma\} \leq \mathcal{B}(\varphi)$$

für alle passenden B -Belegungen \mathcal{B} .

1.12.2 Korrektheitssatz für natürliches Schließen in B

Für jede Menge von Formeln Γ und jede Formel φ gilt

$$\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \models_B \varphi$$

Korollar Jedes Theorem ist eine B -Tautologie.

1.12.3 Korrektheitssatz für natürliches Schließen in $B_{\mathbb{R}}$

Für jede Menge von Formeln Γ und jede Formel φ gilt

$$\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \models_{B_{\mathbb{R}}} \varphi$$

Korollar Jedes Theorem ist eine $B_{\mathbb{R}}$ -Tautologie.

1.12.4 Korrektheitssatz für natürliches Schließen in $H_{\mathbb{R}}$

Für jede Menge von Formeln Γ und jede Formel φ gilt

$$\Gamma \vdash \varphi \text{ ohne (raa)} \Rightarrow \Gamma \models_{H_{\mathbb{R}}} \varphi$$

Inhaltsverzeichnis

Korollar Jedes (raa)-freie Theorem ist eine $H_{\mathbb{R}}$ -Tautologie.

1.13 Definition Konsistente Mengen

Sei Γ eine Menge von Formeln. Γ heißt **inkonsistent**, wenn $\Gamma \vdash \perp$ gilt. Sonst heißt Γ **konsistent**.

1.13.1 Lemma

Sei Γ eine Menge von Formeln und φ eine Formel. Dann gilt

$$\Gamma \not\vdash \varphi \iff \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ konsistent}$$

1.13.2 Maximal Konsistente Mengen

Eine Formelmenge Δ ist **maximal konsistent**, wenn sie konsistent ist und wenn gilt

$$\Sigma \supseteq \Delta \text{ konsistent} \Rightarrow \Sigma = \Delta$$

1.13.3 Satz

Jede konsistente Formelmenge Γ ist in einer maximal konsistenten Formelmenge Δ enthalten.

1.13.4 Lemma 1

Sei Δ maximal konsistent und gelte $\Delta \vdash \varphi$. Dann gilt $\varphi \in \Delta$.

1.13.5 Lemma 2

Sei Δ maximal konsistent und φ Formel. Dann gilt

$$\varphi \notin \Delta \iff \neg\varphi \in \Delta$$

1.14 Definition Erfüllbare Mengen

Sei Γ eine Menge von Formeln.

Γ heißt **erfüllbar**, wenn es passende \mathcal{B} -Belegungen \mathcal{B} gibt mit $\mathcal{B}(\gamma) = 1_{\mathcal{B}}$ für alle $\gamma \in \Gamma$.

1.14.1 Satz

Sei Δ eine maximal konsistente Menge von Formeln. Dann ist Δ erfüllbar.

1.14.2 Lemma

Sei Γ eine Menge von Formeln und φ eine Formel. Dann gilt

$$\Gamma \not\models_B \varphi \iff \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ erfüllbar}$$

1.14.3 Vollständigkeitssatz

Sei Γ eine Menge von Formeln, φ eine Formel und W einer der Wahrheitswertbereiche $B, K_3, F, B_{\mathbb{R}}, H_{\mathbb{R}}$. Dann gilt

$$\Gamma \models_W \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi$$

Insbesondere ist jede W -Tautologie ein Theorem.

1.15 Vollständigkeit und Korrektheit

1.15.1 Satz

Seien Γ eine Menge von Formeln und φ eine Formel. Dann gilt

$$\Gamma \vdash \varphi \iff \Gamma \models_B \varphi$$

Insbesondere ist eine Formel genau dann eine B -Tautologie, wenn sie ein Theorem ist.

Bemerkung Gilt für jede Boolsche Algebra, also auch $B_{\mathbb{R}}$, und für Heyting ohne (raa).

1.15.2 Definition Äquivalent

Zwei Formeln α, β heißen **äquivalent** ($\alpha \equiv \beta$), wenn für alle passenden B -Belegungen \mathcal{B} gilt:

$$\mathcal{B}(\alpha) = \mathcal{B}(\beta)$$

1.15.3 Zusammenhänge

Seien α, β zwei Formeln, dann gilt:

$$\alpha \equiv \beta \Leftrightarrow (\alpha \leftrightarrow \beta) \text{ ist Theorem}$$

$$\alpha \text{ ist Theorem} \Leftrightarrow \alpha \equiv \neg \perp$$

1.15.4 Kompaktheitssatz

Sei Γ eine unter Umständen unendliche Menge von Formeln. Dann gilt

$$\Gamma \text{ unerfüllbar} \Leftrightarrow \exists \Gamma' \subseteq \Gamma \text{ endlich : } \Gamma' \text{ unerfüllbar}$$

1.16 Erfüllbarkeitsproblem

Eingabe: Formel γ

Frage: existiert eine B -Belegung \mathcal{B} mit $\mathcal{B}(\gamma) = 1_B$

Offensichtliche Lösung: probiere alle Belegungen durch (Wahrheitstabelle), jedoch exponentielle Zeit. Ziel ist also ein spezieller Algorithmus für syntaktisch eingeschränkte Formeln.

1.16.1 Definition Hornformeln

Eine **Hornklausel** hat die Form

$$(\neg \perp \wedge p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n) \rightarrow q$$

für $n \geq 0$, atomare Formeln p_1, \dots, p_n und q atomare Formel oder $q = \perp$.

Eine **Hornformel** ist eine Konjunktion von Hornklauseln der Form

$$\bigwedge_{1 \leq i \leq n} (M_i \rightarrow q_i) \text{ oder } \{(M_i \rightarrow q_i) \mid 1 \leq i \leq n\}$$

1.16.2 Markierungsalgorithmus

Eingabe: endliche Menge Γ von Hornklauseln

Ausgabe: {erfüllbar, unerfüllbar}

Algorithmus:

- (1) Solange es eine Hornklausel $M \rightarrow q$ in Γ gibt, so dass alle $p \in M$ markiert sind (oder $M = \emptyset$) und q unmarkierte atomare Formel ist, dann markiere q in allen Hornklauseln
- (2) Wenn Γ eine Hornklausel der Form $M \rightarrow \perp$ enthält, in der alle $p \in M$ markiert sind

-> dann gebe "überfüllbar" aus

-> ansonsten gebe "erfüllbar" aus

1.16.3 Definition SLD-Resolution

Sei Γ eine Menge von Hornklauseln. Eine **SLD-Resolution** aus Γ ist eine Folge $(M_0 \rightarrow \perp, M_1 \rightarrow \perp, \dots, M_m \rightarrow \perp)$ von Hornklauseln mit

- $(M_0 \rightarrow \perp) \in \Gamma$
- für alle $0 \leq n < m$ existiert $(N \rightarrow q) \in \Gamma$ mit $q \in M_n$ und $M_{n+1} = M_n \setminus \{q\} \cup N$

Kapitel 2

Prädikatenlogik

2.1 Syntax der Prädikatenlogik

2.1.1 Definition Signatur

Eine **Signatur** ist ein Tripel $\Sigma = (\Omega, \text{Rel}, \text{ar})$, wobei Ω und Rel disjunkte Mengen von **Funktions- und Relationsnamen** sind und $\text{ar} : \Omega \cup \text{Rel} \rightarrow \mathbb{N}$ eine Abbildung ist.

2.1.2 Definition Σ -Terme

Die **Menge der Variablen** ist $\text{Var} = \{x_0, x_1, \dots\}$.

Sei Σ eine Signatur. Die Menge T_Σ der **Σ -Terme** ist induktiv definiert:

- Jede Variable ist ein Term, d.h. $\text{Var} \subseteq T_\Sigma$
- Ist $f \in \Omega$ mit $\text{ar}(f) = k$ und sind $t_1, \dots, t_k \in T_\Sigma$, so gilt: $f(t_1, \dots, t_k) \in T_\Sigma$
- Nichts ist Σ -Term, was sich nicht mittel der obigen Regeln erzeugen lässt.

2.1.3 Definition Atomare Σ -Formeln

Sei Σ Signatur. Die **atomaren Σ -Formeln** sind die Zeichenketten der Form

- $R(t_1, t_2, \dots, t_k)$ falls $t_1, \dots, t_k \in T_\Sigma$ und $R \in \text{Rel}$ mit $\text{ar}(R) = k$ oder
- $t_1 = t_2$, falls $t_1, t_2 \in T_\Sigma$ oder
- \perp

2.1.4 Induktive Definition Σ -Formeln

Sei Σ Signatur. Σ -Formeln werden durch folgenden induktiven Prozess definiert:

- Alle atomaren Σ -Formeln sind Σ -Formeln
- Falls φ, ψ Σ -Formeln, sind auch $(\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \rightarrow \psi)$ Σ -Formeln
- Falls φ eine Σ -Formel ist, ist auch $\neg\varphi$ eine Σ -Formel
- Falls φ eine Σ -Formel und $x \in \text{Var}$, so sind auch $\forall x\varphi$ und $\exists x\varphi$ Σ -Formeln
- Nichts, was sich nicht mittels der obigen Regeln erzeugen lässt, ist Σ -Formel

Ist der Kontext klar, so sprechen wir einfach von Termen, atomaren Formeln bzw. Formeln.

2.1.5 Definition Freie Variablen

Sei Σ eine Signatur. Die Menge $FV(\varphi)$ der freien Variablen einer Σ -Formel φ ist induktiv definiert:

- Ist φ atomare Σ -Formel, so ist $FV(\varphi)$ die Menge der in φ vorkommenden Variablen
- $FV(\varphi \square \psi) = FV(\varphi) \cup FV(\psi)$ für $\square \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$
- $FV(\neg\varphi) = FV(\varphi)$
- $FV(\exists x\varphi) = FV(\forall x\varphi) = FV(\varphi) \setminus \{x\}$

Eine Formel φ ist geschlossen oder ein Σ -Satz, wenn $FV(\varphi) = \emptyset$ gilt.

2.1.6 Definition Σ -Struktur

Sei Σ eine Signatur. Eine Σ -Struktur ist ein Tupel $\mathcal{A} = (U_{\mathcal{A}}, (f^{\mathcal{A}})_{f \in \Omega}, (R^{\mathcal{A}})_{R \in \text{Rel}})$, wobei

- $U_{\mathcal{A}}$ ist eine nichtleere Menge, das Universum
- $R^{\mathcal{A}} \subseteq U_{\mathcal{A}}^{\text{ar}(R)}$ eine Relation der Stelligkeit $\text{ar}(R)$ für $R \in \text{Rel}$
- $f^{\mathcal{A}} : U_{\mathcal{A}}^{\text{ar}(f)} \rightarrow U_{\mathcal{A}}$ eine Funktion der Stelligkeit $\text{ar}(f)$ für $f \in \Omega$

2.1.7 Definition Variableninterpretation

Im Folgenden sei Σ Signatur, \mathcal{A} Struktur und $\rho : \text{Var} \rightarrow U_{\mathcal{A}}$ eine Abbildung (Variableninterpretation).

Die Abbildung $\rho' : T_{\Sigma} \rightarrow U_{\mathcal{A}}$ wird induktiv für $t \in T_{\Sigma}$ definiert:

- Ist $t \in \text{Var}$, so setze $\rho'(t) = \rho(t)$
- Ansonsten existieren $f \in \Omega$ mit $\text{ar}(f) = k$ und $t_1, \dots, t_k \in T_{\Sigma}$ mit $t = f(t_1, \dots, t_k)$. Dann setze $\rho'(t) = f^{\mathcal{A}}(\rho'(t_1), \dots, \rho'(t_k))$

Die Abbildung ρ' ist die übliche "Auswertungsabbildung". Zur Vereinfachung wird anstelle von $\rho'(t)$ auch $\rho(t)$ geschrieben.

2.1.8 Gültigkeit einer Σ -Formel

Für eine Formel φ definieren wir die Gültigkeit in einer Struktur \mathcal{A} unter der Variableninterpretation ρ (in Zeichen: $\mathcal{A} \models_{\rho} \varphi$) induktiv:

- $\mathcal{A} \models_{\rho} \perp$ gilt nicht
- $\mathcal{A} \models_{\rho} R(t_1, \dots, t_k)$ falls $(\rho(t_1), \dots, \rho(t_k)) \in R^{\mathcal{A}}$
- $\mathcal{A} \models_{\rho} t_1 = t_2$ falls $\rho(t_1) = \rho(t_2)$ für $t_1, t_2 \in T_{\Sigma}$

Für Formeln φ, ψ und $x \in \text{Var}$:

- $\mathcal{A} \models_{\rho} \varphi \wedge \psi$ falls $\mathcal{A} \models_{\rho} \varphi$ und $\mathcal{A} \models_{\rho} \psi$
- $\mathcal{A} \models_{\rho} \varphi \vee \psi$ falls $\mathcal{A} \models_{\rho} \varphi$ oder $\mathcal{A} \models_{\rho} \psi$
- $\mathcal{A} \models_{\rho} \varphi \rightarrow \psi$ falls nicht $\mathcal{A} \models_{\rho} \varphi$ oder $\mathcal{A} \models_{\rho} \psi$
- $\mathcal{A} \models_{\rho} \neg \varphi$ falls $\mathcal{A} \models_{\rho} \varphi$ nicht gilt
- $\mathcal{A} \models_{\rho} \exists x \varphi$ falls ???
- $\mathcal{A} \models_{\rho} \forall x \varphi$ falls ???

Für $x \in \text{Var}$ und $a \in U_{\mathcal{A}}$ sei $\rho[x \mapsto a] : \text{Var} \rightarrow U_{\mathcal{A}}$ die Variableninterpretation, für die gilt:

$$(\rho[x \mapsto a])(y) = \begin{cases} \rho(y) & \text{falls } x \neq y \\ a & \text{sonst} \end{cases}$$

- $\mathcal{A} \models_{\rho} \exists x \varphi$ falls es $a \in U_{\mathcal{A}}$ gibt mit $\mathcal{A} \models_{\rho[x \mapsto a]} \varphi$
- $\mathcal{A} \models_{\rho} \forall x \varphi$ falls $\mathcal{A} \models_{\rho[x \mapsto a]} \varphi$ für alle $a \in U_{\mathcal{A}}$

Inhaltsverzeichnis

2.1.9 Definition Modell

Sei Σ eine Signatur, φ eine Formel, Δ eine Menge von Formeln und \mathcal{A} eine Struktur.

$\mathcal{A} \models \varphi$ (\mathcal{A} ist **Modell** von φ), falls $\mathcal{A} \models_{\rho} \varphi$ für alle Variableninterpretation ρ gilt.

$\mathcal{A} \models \Delta$, falls $\mathcal{A} \models \psi$ für alle $\psi \in \Delta$

2.2 Definiton Erfüllbarkeit, Allgemeingültigkeit, Folgerung

Sei Σ eine Signatur, φ eine Formel, Δ eine Menge von Formeln und \mathcal{A} eine Struktur.

- Δ ist **erfüllbar**, wenn es eine Struktur \mathcal{B} und Variableninterpretation $\rho : \text{Var} \rightarrow U_{\mathcal{B}}$ gibt mit $\mathcal{B} \models_{\rho} \psi$ für alle $\psi \in \Delta$.
- φ ist **semantische Folgerung** von Δ ($\Delta \models \varphi$) falls für alle Strukturen \mathcal{B} und alle Variableninterpretationen ρ gilt

$$(\mathcal{B} \models_{\rho} \psi, \forall \psi \in \Delta) \Rightarrow \mathcal{B} \models_{\rho} \varphi$$

- φ ist **allgemeingültig**, falls $\mathcal{B} \models_{\rho} \varphi$ für alle Strukturen \mathcal{B} und alle Variableninterpretationen ρ gilt

Bemerkung

$$\varphi \text{ allgemeingültig} \Leftrightarrow \emptyset \models \varphi \Leftrightarrow \{\neg\varphi\} \text{ nicht erfüllbar}$$

Hierfür schreiben wir auch $\models \varphi$.

2.3 Substitutionen

Eine **Substitution** besteht aus einer Variable $x \in \text{Var}$ und einem Term $t \in T_{\Sigma}$, geschrieben $[x := t]$.

Die Formel $\varphi[x := t]$ ist die Anwendung der Substitution $[x := t]$ auf die Formel φ . Sie entsteht aus φ , indem alle freien Vorkommen von x durch t ersetzt werden. *Sie soll über t aussagen, was φ über x ausgesagt hat.*

Dazu wird induktiv definiert, was es heißt, die freien Vorkommen von x im Term $s \in T_{\Sigma}$ zu ersetzen:

Inhaltsverzeichnis

- $x[x := t] = t$
- $y[x := t] = t$ für $y \in \text{Var} \setminus \{x\}$
- $(f(t_1, \dots, t_k))[x := t] = f(t_1[x := t], \dots, t_k[x := t])$ für $f \in \Omega$ mit $\text{ar}(f) = k$ und $t_1, \dots, t_k \in T_\Sigma$

2.3.1 Lemma

Seien Σ Signatur, \mathcal{A} Struktur, ρ Variableninterpretation, $x \in \text{Var}$ und $s, t \in T_\Sigma$. Dann gilt

$$\rho(s[x := t]) = \rho[x \mapsto \rho(t)](s)$$

2.3.2 Definition Zulässigkeit

Sei $[x := t]$ Substitution und φ Formel.

Die Substitution $[x := t]$ heißt **für φ zulässig**, wenn für alle $y \in \text{Var}$ gilt

$$y \text{ Variable in } t \Rightarrow \varphi \text{ enthält weder } \exists y \text{ noch } \forall y$$

2.3.3 Lemma

Sei Σ Signatur, \mathcal{A} Struktur, ρ Variableninterpretation, $x \in \text{Var}$ und $t \in T_\Sigma$. Ist die Substitution $[x := t]$ für die Formel φ zulässig, so gilt

$$\mathcal{A} \models_\rho \varphi[x := t] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models_{\rho[x \mapsto \rho(t)]} \varphi$$

2.4 Natürliches Schließen

Die Regeln des natürlichen Schließens für aussagelogische Formeln sind auch anwendbar auf prädikatenlogische Formeln.

2.4.1 Reflexivität

Für jeden Term t ist

$$\overline{t = t}$$

eine hypothesenlose Deduktion mit Konklusion $t = t$

2.4.2 Gleiches-Für-Gleiches

Idee: "Zunächst zeige ich, dass s die Eigenschaft φ hat. Dann zeige ich, dass $s = t$. Also habe ich gezeigt, dass t die Eigenschaft φ hat."

$$\frac{\varphi[x := s] \quad s = t}{\varphi[x := t]}$$

Bedingung: Über keine Variable aus s oder t wird in φ quantifiziert.

2.4.3 \forall -Einführung/-Elimination

Einführung:

$$\frac{\varphi}{\forall x \varphi}$$

Bedingung: x kommt in keiner Hypothese frei vor

Elimination:

$$\frac{\forall x \varphi}{\varphi[x := t]}$$

Bedingung: Über keiner Variable aus t wird in φ quantifiziert

2.4.4 \exists -Einführung/-Elimination

Einführung:

$$\frac{\varphi[x := t]}{\exists x \varphi}$$

Bedingung: Über keine Variable t wird in φ quantifiziert.

Elimination:

$$\frac{\exists x \varphi \quad \begin{array}{c} [\varphi] \\ \vdots \\ \sigma \end{array}}{\sigma}$$

Bedingung: x kommt in den Hypothesen und in σ nicht frei vor

2.5 Vollständigkeit

2.5.1 Definition Konkretisierung

Eine Menge Δ von Formeln hat **Konkretisierungen**, wenn für alle $\exists x\varphi \in \Delta$ ein variablenloser Term t existiert mit $\varphi[x := t] \in \Delta$

2.5.2 Satz

Sei Δ eine maximal konsistente Menge von Σ -Formeln. Dann existiert eine Signatur $\Sigma^+ \supseteq \Sigma$ und eine maximal konsistente Menge von Σ^+ -Formeln mit Konkretisierungen, so dass $\Delta \subseteq \Delta^+$.

2.5.3 Satz

Sei Δ^+ maximal konsistente Menge von Σ^+ -Formeln mit Konkretisierungen. Dann ist Δ^+ erfüllbar.

2.5.4 Vollständigkeitssatz der Prädikatenlogik

Sei Γ eine Menge von Formeln und φ eine Formel. Dann gilt

$$\Gamma \models \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi$$

Insbesondere ist jede allgemeingültige Formel ein Theorem.

Bemerkung: Dieser Satz ist im wesentlichen der Gödelsche Vollständigkeitssatz.

2.5.5 Satz

Sei Γ höchstens abzählbar unendliche und konsistente Menge von Formeln. Dann hat Γ ein höchstens abzählbar unendliches Modell.

2.6 Vollständigkeit und Korrektheit

Seien Γ eine Menge von Formeln und φ eine Formel. Dann gilt

$$\Gamma \vdash \varphi \Leftrightarrow \Gamma \models \varphi$$

Inhaltsverzeichnis

Insbesondere ist eine Formel genau dann allgemeingültig, wenn sie ein Theorem ist.

2.6.1 Folgerung 1: Kompaktheit

Seien Γ eine u.U. unendliche Menge von Formeln und φ eine Formel mit $\Gamma \models \varphi$. Dann existiert $\Gamma' \subseteq \Gamma$ endlich mit $\Gamma' \models \varphi$

2.6.2 Kompaktheitssatz

Sei Γ eine u.U. unendliche Menge von Formeln. Dann gilt

$$\Gamma \text{ erfüllbar} \Leftrightarrow \forall \Gamma' \subseteq \Gamma \text{ endlich} : \Gamma' \text{ erfüllbar}$$

2.6.3 Satz

Sei Δ eine u.U. unendliche Menge von Formeln, so dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine endliche Struktur \mathcal{A}_n mit $\mathcal{A}_n \models \Delta$ existiert, die wenigstens n Elemente hat.

Dann existiert eine unendliche Struktur \mathcal{A} mit $\mathcal{A} \models \Delta$.

2.6.4 Folgerung 2: Löwenheim-Skolem

Sei Γ erfüllbar und höchstens abzählbar unendliche Menge von Formeln. Dann existiert ein höchstens abzählbar unendliches Modell von Γ .

2.6.5 Folgerung 3: Semi-Entscheidbarkeit

Die Menge der allgemeingültigen Formeln ist semi-entscheidbar.

2.6.6 Definition Horn-Formel

Eine **Horn-Formel** ist eine Konjunktion von Formeln der Form

$$\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n ((\neg \perp \wedge \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_m) \rightarrow \beta)$$

wobei $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ und β atomare Formeln sind.

2.7 Definition Elementare Theorie

Sei \mathcal{A} eine Struktur. Dann ist $\text{Th}(\mathcal{A})$ die Menge der prädikatenlogischen Formeln φ mit $\mathcal{A} \models \varphi$. Diese Menge heißt die (**elementare Theorie von \mathcal{A}**).

2.7.1 Satz

Die Menge $\text{Th}(\mathcal{N})$ aller Sätze φ mit $\mathcal{N} \models \varphi$ ist nicht entscheidbar.

2.8 Semi-Entscheidungsverfahren für allgemeingültige Formeln

Idee:

- Berechne aus Formel ψ eine Menge E von aussagelogischen Formeln mit

$$E \text{ unerfüllbar} \Rightarrow \neg\psi \text{ unerfüllbar} \Rightarrow \psi \text{ allgemeingültig}$$

- Suche endliche unerfüllbare Teilmenge E' von E

2.8.1 Definition Erfüllbarkeitsäquivalenz

Zwei Formeln φ und ψ heißen **erfüllbarkeitsäquivalent**, wenn gilt:

$$\varphi \text{ erfüllbar} \Rightarrow \psi \text{ erfüllbar}$$

2.8.2 Definition Gleichungsfreiheit

Eine Formel ist **gleichungsfrei**, wenn sie keine Teilformel der Form $s = t$ enthält.

Notation:

- Sei $\Sigma = (\Omega, \text{Rel}, \text{ar})$ endliche Signatur und φ Formel
- $\Sigma_{\text{G1}} = (\Omega, \text{Rel} \uplus \{\text{G1}\}, \text{ar}_{\text{G1}})$ mit $\text{ar}_{\text{G1}}(f) = \text{ar}(f)$ für alle $f \in \Omega \cup \text{Rel}$ und $\text{ar}_{\text{G1}}(\text{G1}) = 2$
- Für eine Formel φ bezeichnet φ_{G1} die Σ_{G1} -Formel, die aus φ entsteht, indem alle Vorkommen von Teilformeln $s = t$ durch $\text{G1}(s, t)$ ersetzt werden

2.9 Kongruenz und Äquivalenz

2.9.1 Definition Kongruenz

Sei \mathcal{A} eine Struktur und \sim eine binäre Relation auf $U_{\mathcal{A}}$. Die Relation \sim heißt **Kongruenz auf \mathcal{A}** , wenn gilt:

Inhaltsverzeichnis

- \sim ist eine Äquivalenzrelation (reflexiv, transitiv, symmetrisch)
- für alle $f \in \Omega$ mit $k = \text{ar}(f)$ und alle $a_1, b_1, \dots, a_k, b_k \in U_{\mathcal{A}}$ gilt

$$a_1 \sim b_1, a_2 \sim b_2, \dots, a_k \sim b_k \Rightarrow f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_k) \sim f^{\mathcal{A}}(b_1, \dots, b_k)$$
- für alle $R \in \text{Re1}$ mit $k = \text{ar}(R)$ und alle $a_1, b_1, \dots, a_k, b_k \in U_{\mathcal{A}}$ gilt

$$a_1 \sim b_1, \dots, a_k \sim b_k, (a_1, \dots, a_k) \in R^{\mathcal{A}} \Rightarrow (b_1, \dots, b_k) \in R^{\mathcal{A}}$$

2.9.2 Definition Äquivalenzklasse

Sei \mathcal{A} eine Struktur und \sim eine Kongruenz auf \mathcal{A} .

- Für $a \in U_{\mathcal{A}}$ sei $[a] = \{b \in U_{\mathcal{A}} \mid a \sim b\}$ die **Äquivalenzklasse** von a bzgl. \sim
- Dann definieren wir den **Quotienten** $\mathcal{B} = \mathcal{A} / \sim$ von \mathcal{A} bzgl. \sim wie folgt
 - $U_{\mathcal{B}} = U_{\mathcal{A}} / \sim = \{[a] \mid a \in U_{\mathcal{A}}\}$
 - Für jedes $f \in \Omega$ mit $\text{ar}(f) = k$ und alle $a_1, \dots, a_k \in U_{\mathcal{A}}$ setzen wir

$$f^{\mathcal{B}}([a_1], \dots, [a_k]) = [f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_k)]$$

- Für jedes $R \in \text{Re1}$ mit $\text{ar}(R) = k$ setzen wir

$$R^{\mathcal{B}} = \{([a_1], \dots, [a_k]) \mid (a_1, \dots, a_k) \in R^{\mathcal{A}}\}$$

- Sei $\rho : \text{Var} \rightarrow U_{\mathcal{A}}$ Variableninterpretation. Dann definiere die Variableninterpretation

$$\rho / \sim : \text{Var} \rightarrow U_{\mathcal{B}} : x \mapsto [\rho(x)]$$

2.9.3 Lemma 1

Sei \mathcal{A} Struktur, $\rho : \text{Var} \rightarrow U_{\mathcal{A}}$ Variableninterpretation und \sim Kongruenz. Seien weiter $\mathcal{B} = \mathcal{A} / \sim$ und $\rho_{\mathcal{B}} = \rho / \sim$. Dann gilt für jeden Term t :

$$[\rho(t)] = \rho_{\mathcal{B}}(t)$$

2.9.4 Lemma 2

Sei \mathcal{A} Struktur, \sim Kongruenz und $\mathcal{B} = \mathcal{A} / \sim$. Dann gilt für alle $R \in \text{Re1}$ mit $k = \text{ar}(R)$ und alle $c_1, \dots, c_k \in U_{\mathcal{A}}$:

$$([c_1], \dots, [c_k]) \in R^{\mathcal{B}} \Leftrightarrow (c_1, \dots, c_k) \in R^{\mathcal{A}}$$

2.9.5 Satz

Seien \mathcal{A} Σ_{G1} -Struktur und $\rho : \text{Var} \rightarrow U_{\mathcal{A}}$ Variableninterpretation, so dass $\sim = \text{G1}^{\mathcal{A}}$ Kongruenz auf \mathcal{A} ist.

Seien $\mathcal{B} = \mathcal{A} / \sim$ und $\rho_{\mathcal{B}} = \rho / \sim$. Dann gilt für alle Formeln φ :

$$\mathcal{A} \models_{\rho} \varphi_{\text{G1}} \Rightarrow \mathcal{B} \models_{\rho_{\mathcal{B}}} \varphi$$

2.9.6 Lemma

Aus einer endlichen Signatur Σ kann ein gleichungsfreier Horn-Satz Kong_{Σ} über Σ_{G1} berechnet werden, so dass für alle Σ_{G1} -Strukturen \mathcal{A} gilt:

$$\mathcal{A} \models \text{Kong}_{\Sigma} \Rightarrow \text{G1}^{\mathcal{A}} \text{ ist eine Kongruenz}$$

2.9.7 Satz

Aus einer endlichen Signatur Σ und einer Formel φ kann eine gleichungsfreie und erfüllbarkeitsäquivalente Σ_{G1} -Formel φ' berechnet werden.

Ist φ Horn-Formel, so ist auch φ' Horn-Formel.

2.10 Skolemform

Ziel: Jede Σ -Formel φ ist erfüllbarkeitsäquivalent zu einer Σ' -Formel

$$\varphi' = \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_k \psi$$

wobei ψ keine Quantoren enthält, φ' heißt **in Skolemform**.

Vorgehen:

- (1) Quantoren nach vorne (Pränexform)
- (2) Existenzquantoren eliminieren

Bemerkung: Es gibt Formeln ohne äquivalente Formel in Skolemform.

2.10.1 Äquivalenz von Formeln

Zwei Formeln φ und ψ sind **äquivalent** (kurz $\varphi \equiv \psi$), wenn für alle Strukturen A und alle Variableninterpretationen ρ gilt

$$\mathcal{A} \models_{\rho} \varphi \Rightarrow \mathcal{A} \models_{\rho} \psi$$

2.10.2 Lemma

Seien $\Box \in \{\exists, \forall\}$ und $\oplus \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftarrow\}$.

Sei $\varphi = (\Box x \alpha) \oplus \beta$ und sei y eine Variable, die weder in α noch in β vorkommt. Dann gilt

$$\varphi \equiv \begin{cases} \Box y (\alpha[x := y] \oplus \beta) & \text{falls } \oplus \in \{\wedge, \vee, \leftarrow\} \\ \forall y (\alpha[x := y] \rightarrow \beta) & \text{falls } \oplus = \rightarrow, \Box = \exists \\ \exists y (\alpha[x := y] \rightarrow \beta) & \text{falls } \oplus = \rightarrow, \Box = \forall \end{cases}$$

2.10.3 Satz

Aus einer endlichen Signatur Σ und einer Formel φ kann eine äquivalente Formel

$$\varphi' = \Box_1 x_1 \dots \Box_k x_k \psi$$

berechnet werden. Eine Formel φ' dieser Form heißt **Pränexform**.

Ist φ gleichungsfrei, so ist auch φ' gleichungsfrei.

2.10.4 Existenzquantoren eliminieren

Sei $\varphi = \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_m \exists y \psi$ Formel in Pränexform. Sei $g \notin \Omega$ ein neues m -stelliges Funktionssymbol.

Setze $\varphi' = \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_m \psi[y := g(x_1, \dots, x_m)]$.

Offensichtlich hat φ' einen Existenzquantor weniger als φ . φ' ist außerdem keine Σ -Formel, da $g \notin \Omega$, sondern eine Formel über einer erweiterten Signatur.

2.10.5 Lemma

Die Formeln φ und φ' sind erfüllbarkeitsäquivalent.

2.10.6 Satz

Aus einer Formel φ kann man eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel $\bar{\varphi}$ in Skolemform berechnen.

Ist φ gleichungsfrei, so auch $\bar{\varphi}$.

2.11 Herbrand-Strukturen und Modelle

Sei $\Sigma = (\Omega, \text{Re1}, \text{ar})$ eine Signatur. Wir nehmen im folgenden an, dass Ω mindestens ein Konstantensymbol enthält.

Das **Herbrand-Universum** $D(\Sigma)$ ist die Menge aller variablenfreien Σ -Terme.

Beispiel:

$$\begin{aligned}\Omega &= \{b, f\} & \text{ar}(b) &= 0 & \text{ar}(f) &= 1 \\ D(\Sigma) &= \{b, f(b), f(f(b)), f(f(f(b))), \dots\}\end{aligned}$$

Eine Σ -Struktur $\mathcal{A} = (U_{\mathcal{A}}, (f^{\mathcal{A}})_{f \in \Omega}, (R^{\mathcal{A}})_{R \in \text{Re1}})$ ist eine **Herbrand-Struktur**, wenn folgendes gilt

- $U_{\mathcal{A}} = D(\Sigma)$
- für alle $f \in \Omega$ mit $\text{ar}(f) = k$ und alle $t_1, \dots, t_k \in D(\Sigma)$ ist

$$f^{\mathcal{A}}(t_1, \dots, t_k) = f(t_1, \dots, t_k)$$

Für jede Herbrand-Struktur \mathcal{A} , alle Variableninterpretationen ρ und alle variablenfreien Terme t gilt dann $\rho(t) = t$.

Ein **Herbrand-Modell** von φ ist eine **Herbrand-Struktur**, die gleichzeitig ein Modell von φ ist.

2.11.1 Satz

Sei φ eine gleichungsfreie Aussage in Skolemform. φ ist genau dann erfüllbar, wenn φ ein Herbrand-Modell besitzt.

2.11.2 Herbrand-Expansion

Frage: Wie erkennt man, ob eine gleichungsfreie Aussage in Skolemform ein Herbrand-Modell hat?

Die **Herbrand-Expansion** von φ ist die Menge der Aussagen

$$E(\varphi) = \{\psi[y_1 := t_1] \dots [y_n := t_n] \mid t_1, \dots, t_n \in D(\Sigma)\}$$

Die Formeln von $E(\varphi)$ entstehen also aus ψ , in dem die (variablenfreien) Terme aus $D(\Sigma)$ in jeder möglichen Weise in ψ substituiert werden.

Wir betrachten die Herbrand-Expansion von φ als eine Menge von **aussagelogischen Formeln**. Die atomaren Formeln sind hierbei von der Gestalt $(P(t_1, \dots, t_k))$ für $P \in \text{Rel}$ mit $\text{ar}(P) = k$ und $t_1, \dots, t_k \in D(\Sigma)$.

2.11.3 Konstruktion

Sei $\mathcal{B} : \{P(t_1, \dots, t_k) \mid P \in \text{Rel}, k = \text{ar}(P), t_1, \dots, t_k \in D(\Sigma)\} \rightarrow \mathbb{B}$ eine \mathbb{B} – *Belegung*. Die hiervon **induzierte Herbrand-Struktur** $\mathcal{A}_{\mathcal{B}}$ ist gegeben durch

$$P^{\mathcal{A}_{\mathcal{B}}} = \{(t_1, \dots, t_k) \mid t_1, \dots, t_k \in D(\Sigma), \mathcal{B}(P(t_1, \dots, t_k)) = 1\}$$

für alle $P \in \text{Rel}$ mit $\text{ar}(P) = k$

2.11.4 Lemma

Für jede quantoren- und gleichungsfreie Aussage α und jede Variableninterpretation ρ in $\mathcal{A}_{\mathcal{B}}$ gilt

$$\mathcal{A}_{\mathcal{B}} \models_{\rho} \alpha \Rightarrow \mathcal{B}(\alpha) = 1$$

2.11.5 Lemma

Sei $\varphi = \forall y_1 \forall y_2 \dots \forall y_n \psi$ gleichungsfreie Aussage in Skolemform. Sie hat genau dann ein Herbrand-Modell, wenn die Formelmenge $E(\varphi)$ (im aussagelogischen Sinn) erfüllbar ist.

2.11.6 Satz von Gödel-Herbrand-Skolem

Sei φ gleichungsfreie Aussage in Skolemform. Sie ist genau dann erfüllbar, wenn die Formelmenge $E(\varphi)$ (im aussagelogischen Sinn) erfüllbar ist.

2.11.7 Satz von Herbrand

Eine gleichungsfreie Aussage φ in Skolemform ist genau dann unerfüllbar, wenn es eine endliche Teilmenge von $E(\varphi)$ gibt, die (im aussagelogischen Sinn) unerfüllbar ist.

2.11.8 Algorithmus von Gilmore

Sei φ gleichungsfreie Aussage in Skolemform und sei $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ eine Aufzählung von $E(\varphi)$.

Algorithmus von Gilmore

Eingabe: φ

$n := 0$

repeat $n := n + 1$

until $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ ist unerfüllbar

return "unerfüllbar"

Bemerkung: " $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ ist unerfüllbar" ist nachzuweisen mit den Mitteln der Aussagenlogik, z.B. Wahrheitstabelle.

Folgerung Sei φ eine gleichungsfreie Aussage in Skolemform. Dann gilt:

- Wenn die Eingabeformel φ unerfüllbar ist, dann terminiert der Algorithmus und gibt "unerfüllbar" aus.
- Wenn die Eingabeformel φ erfüllbar ist, dann terminiert der Algorithmus nicht.

2.11.9 Bestimmung von Lösungen

Folgerung 1: Sei $\varphi = \bigwedge_{1 \leq i \leq n} \varphi_i$ gleichungsfreie Horn-Formel der Prädikatenlogik. Dann ist φ genau dann unerfüllbar, wenn $\bigcup_{1 \leq i \leq n} E(\varphi_i)$ im aussagelogischen Sinne unerfüllbar ist.

Folgerung 2: Eine gleichungsfreie Horn-Formel der Prädikatenlogik $\varphi = \bigwedge_{1 \leq i \leq n} \varphi_i$ ist genau dann unerfüllbar, wenn es eine SLD-Resolution

$$(M_0 \rightarrow \perp, M_1 \rightarrow \perp, \dots, M_m \rightarrow \perp)$$

aus $\bigcup_{1 \leq i \leq n} E(\varphi_i)$ mit $M_m = \emptyset$ gibt.

2.12 Substitutionen

Eine **verallgemeinerte Substitution** σ ist eine Abbildung der Menge der Variablen in die Menge aller Terme, so dass nur endlich viele Variablen x existieren mit $\sigma(x) \neq x$.

Sei $\text{Def}(\sigma) = \{x \text{ Variable} \mid x \neq \sigma(x)\}$ der **Definitionsbereich** der verallgemeinerten Substitution σ . Für einen Term t definieren wir den Term $t\sigma$ (Anwendung der verallgemeinerten Substitution σ auf den Term t) wie folgt induktiv

- $x\sigma = \sigma(x)$
- $[f(t_1, \dots, t_k)]\sigma = f(t_1\sigma, \dots, t_k\sigma)$ für Terme $t_1, \dots, t_k, f \in \Omega$

Für eine atomare Formel $\alpha = P(t_1, \dots, t_k)$ (d.h. $P \in \text{Rel}, \text{ar}(P) = k, t_1, \dots, t_k$ Terme) sei

$$\alpha\sigma = P(t_1\sigma, \dots, t_k\sigma)$$

2.12.1 Verknüpfung von Substitutionen

Sind σ_1, σ_2 verallgemeinerte Substitutionen, so definieren wir eine neue verallgemeinerte Substitution $\sigma_1\sigma_2$ durch

$$(\sigma_1\sigma_2)(x) = (x\sigma_1)\sigma_2$$

2.12.2 Lemma

Seien σ Substitution, x Variable und t Term, so dass

- $x \notin \text{Def}(\sigma)$
- x kommt in keinem der Terme $y\sigma$ mit $y \in \text{Def}(\sigma)$ vor

Dann gilt

$$[x := t]\sigma = \sigma[x := t\sigma]$$

Inhaltsverzeichnis

2.12.3 Unifikator

Gegeben seien zwei gleichungsfreie Atomformeln α, β . Eine Substitution σ heißt **Unifikator** von α und β , falls

$$\alpha\sigma = \beta\sigma$$

Ein Unifikator σ heißt **allgemeinster Unifikator**, falls für jeden Unifikator σ' eine Substitution τ mit $\sigma' = \sigma\tau$ existiert.

2.12.4 Variablenumbenennung

Eine **Variablenumbenennung** ist eine Substitution ρ , die $\text{Def}(\rho)$ injektiv in die Menge der Variablen abbildet.

2.12.5 Lemma

Sind σ_1, σ_2 allgemeinste Unifikatoren von α, β , so existiert eine Variablenumbenennung ρ mit $\sigma_2 = \sigma_1\rho$.

2.12.6 Unifikationsalgorithmus

Eingabe: Paar (α, β) gleichungsfreier Atomformeln

$\sigma :=$ Substitution mit $\text{Def}(\sigma) = \emptyset$ (d.h. Identität)

while $\alpha\sigma \neq \beta\sigma$ **do**

Suche die erste Position, an der sich $\alpha\sigma$ und $\beta\sigma$ unterscheiden

if keines der beiden Symbole an dieser Position ist eine Variable

then stoppe mit "nicht unifizierbar"

else sei x die Variable und t der term in der anderen Atomformel

if x kommt in t vor

then stoppe mit "nicht unifizierbar"

else $\sigma := \sigma[x := t]$

endwhile

Ausgabe: σ

2.12.7 Satz

- Der Unifikationsalgorithmus terminiert für jede Eingabe
- Wenn die Eingabe nicht unifizierbar ist, so terminiert der Algorithmus mit der Ausgabe "nicht unifizierbar"
- wenn die Eingabe unifizierbar ist, dann findet der Algorithmus den allgemeinsten Unifikator

2.13 Prädikatenlogische SLD-Resolution

Sei Γ eine Menge von gleichungsfreien Horn-Klauseln der Prädikatenlogik. Eine **SLD-Resolution** aus Γ ist eine Folge

$$((M_0 \rightarrow \perp, \sigma_0), (M_1 \rightarrow \perp, \sigma_1), \dots, (M_m \rightarrow \perp, \sigma_m))$$

von Horn-Klauseln und Substitutionen mit

- $(M_0 \rightarrow \perp) \in \Gamma$ und $\text{Def}(\sigma_0) = \emptyset$
- für alle $0 \leq n < m$ existieren $\emptyset \neq Q \subseteq M_n$, $(N \rightarrow \alpha) \in \Gamma$ und Variablenumbenennung ρ , so dass
 - $(N \cup \{\alpha\})\rho$ und M_n variablendisjunkt
 - σ_{n+1} ein allgemeinsten Unifikator von $\alpha\rho$ und Q
 - $M_{n+1} = (M_n \setminus Q \cup N\rho)\sigma_{n+1}$

2.13.1 Lemma

Sei Γ die Menge von gleichungsfreien Horn-Klauseln der Prädikatenlogik und $((M_n \rightarrow \perp, \sigma_n))_{0 \leq n \leq m}$ eine SLD-Resolution aus $\Gamma \cup \{M_0 \rightarrow \perp\}$ mit $M_m = \emptyset$. Dann gilt $\Gamma \models \psi\sigma_0\sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_m$ für alle $\psi \in M_0$.

2.13.2 Lemma

Sei Γ eine Menge von definiten gleichungsfreien Horn-Klauseln der Prädikatenlogik, sei $M \rightarrow \perp$ eine gleichungsfreie Horn-Klausel und sei v Substitution, so dass Mv variablenlos ist und $\Gamma \models Mv$ gilt.

Dann existiert eine prädikatenlogische SLD-Resolution

$$((M_n \rightarrow \perp, \sigma_n))_{0 \leq n \leq m} \text{ aus } \Gamma \cup \{M \rightarrow \perp\}$$

und eine Substitution τ mit

$$M_0 = M, M_m = \emptyset \text{ und } M_0\sigma_0\sigma_1 \dots \sigma_m\tau = Mv$$

Inhaltsverzeichnis

2.13.3 Satz

Sei Γ eine Menge von definiten gleichungsfreien Horn-Klauseln der Prädikatenlogik, sei $M \rightarrow \perp$ eine gleichungsfreie Horn-Klausel und sei ν Substitution, so dass $M\nu$ variablenlos ist. Dann sind äquivalent:

- $\Gamma \models M\nu$
- Es existiert eine SLD-Resolution $((M_n \rightarrow \perp, \sigma_n))_{0 \leq n \leq m}$ aus $\Gamma \cup \{M\nu \rightarrow \perp\}$ und eine Substitution τ mit $M_0 = M, M_m = \emptyset$ und $M_0\sigma_0\sigma_1 \dots \sigma_m\tau = M\nu$