积分因子法在求解常微分方程中的应用

◎祁玉海　普瓜才让　（青海师范大学民族师范学院数学系，青海　西宁　810008）

【摘要】对于一阶的全微分方程，有一个通用的求解公式，因此，将一个不是全微分方程的方程化为全微分方程就有很大的意义，所以引进了积分因子概念. 本文探讨对于一个不是全微分方程的方程，如何直接、有效地求出其积分因子，用积分因子法求解常微分方程通解的方法.

【关键词】积分因子；全微分方程；通解

一、基本原理

1. 如果微分形式的一阶方程

$$M(x,y)\mathrm{d}x + N(x,y)\mathrm{d}y = 0 \tag{1.1.1}$$

的左端恰好是一个二元函数 $U(x,y)$ 的全微分，即

$$\mathrm{d}U(x,y) = M(x,y)\mathrm{d}x + N(x,y)\mathrm{d}y, \tag{1.1.2}$$

则称式(1.1.1)是全微分方程，而函数 $U(x,y)$ 称为微分式(1.1.2)的原函数，方程(1.1.1)的通解为 $U(x,y) = C$（C 为任意常数）. 判别式(1.1.1)为全微分方程的充要条件为 $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$；求式(1.1.1)为全微分方程时的原函数 $U(x,y)$ 有如下公式：

$$U(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(x,y)\mathrm{d}x + \int_{y_0}^{y} N(x_0,y)\mathrm{d}y. \tag{1.1.3}$$

其中，要求 $M(x,y)$ 和 $N(x,y)$ 在矩形区域

$$R: |x - x_0| \leqslant a, |y - y_0| \leqslant b$$

上连续可微.

2. 如果微分形式的一阶方程(1.1.1)不是全微分方程，但存在连续可微的函数 $\mu = \mu(x,y) \neq 0$，使得方程

$$\mu(x,y)M(x,y)\mathrm{d}x + \mu(x,y)N(x,y)\mathrm{d}y = 0 \tag{1.2.1}$$

成为全微分方程，就把 $\mu(x,y)$ 称为方程(1.1.1)的一个积分因子.

方程(1.1.1)存在只与 x 有关的积分因子的充要条件是

$$\frac{1}{N(x,y)}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) \tag{1.2.2}$$

只与 x 有关，且此时有

$$\mu(x) = \mathrm{e}^{\int \frac{1}{N(x,y)}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)\mathrm{d}x}. \tag{1.2.3}$$

方程(1.1.1)存在只与 y 有关的积分因子的充要条件是

$$-\frac{1}{M(x,y)}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) \tag{1.2.4}$$

只与 y 有关，且此时有

$$\mu(y) = \mathrm{e}^{-\int \frac{1}{M(x,y)}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)\mathrm{d}y}. \tag{1.2.5}$$

二、应用举例

例 1　求下列方程的积分因子：

(1) 变量可分离方程 $M_1(x)N_1(y)\mathrm{d}x + M_2(x)N_2(y)\mathrm{d}y = 0$;

(2) 线性方程 $\mathrm{d}y = [p(x)y + f(x)]\mathrm{d}x$;

(3) 伯努利方程 $\mathrm{d}y = [p(x)y + q(x)y^n]\mathrm{d}x\ (n \neq 0,1)$;

(4) 齐次方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = g\left(\frac{y}{x}\right)$.

解　(1) 由

$$\frac{1}{N_1(y)M_2(x)}[M_1(x)N_1(y)\mathrm{d}x + M_2(x)N_2(y)\mathrm{d}y] = 0,$$

得 $\frac{M_1(x)}{M_2(x)}\mathrm{d}x + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}\mathrm{d}y = 0$,

而 $\frac{\partial\left(\frac{M_1(x)}{M_2(x)}\right)}{\partial y} = 0 = \frac{\partial\left(\frac{N_2(y)}{N_1(y)}\right)}{\partial x}$,

所以此方程是全微分方程，积分因子

$$\mu = \frac{1}{N_1(y)M_2(x)}.$$

(2) $\mu = \mathrm{e}^{\int \frac{1}{N(x,y)}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}$.

(3) 由 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p(x)y + q(x)y^n$,

得 $y^{-n}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p(x)y^{1-n} + q(x)$,

即 $\frac{1}{1-n} \cdot \frac{\mathrm{d}(y^{1-n})}{\mathrm{d}x} = p(x)y^{1-n} + q(x)$,

$$\frac{\mathrm{d}(y^{1-n})}{\mathrm{d}x} = (1-n)p(x)y^{1-n} + q(x).$$

由(2)有此方程的积分因子 $\mu_1(x) = \mathrm{e}^{-(1-n)\int p(x)\mathrm{d}x}$，因此，伯努利方程的积分因子为 $\mu = y^{-n}\mathrm{e}^{(n-1)\int p(x)\mathrm{d}x}$.

(4) 令 $y = xu$，则 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$,

代入原方程，有 $u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = g(u)$，即 $x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = g(u) - u$.

分离变量得 $\frac{\mathrm{d}u}{g(u) - u} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$，这是一个全微分方程，返回原变量，

有 $\frac{\mathrm{d}\left(\frac{y}{x}\right)}{g\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x}} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$，即 $\frac{\frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2}}{g\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x}} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$,

?1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

整理得 $\dfrac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{xg\left(\dfrac{y}{x}\right)-y}=\mathrm{d}x$，

即 $\dfrac{\mathrm{d}y}{xg\left(\dfrac{y}{x}\right)-y}=\dfrac{g\left(\dfrac{y}{x}\right)\mathrm{d}x}{xg\left(\dfrac{y}{x}\right)-y}$，

所以 $\mu(x,y)=\dfrac{1}{xg\left(\dfrac{y}{x}\right)-y}$.

例2　解方程 $(x^2+y^2+x)\mathrm{d}x+xy\mathrm{d}y=0$.

解　$M=x^2+y^2+x$，$N=xy$，$\dfrac{\partial M}{\partial y}=2y$，$\dfrac{\partial N}{\partial x}=y$，

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}=\frac{2y-y}{xy}=\frac{1}{x},\mu=\mathrm{e}^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}=x,$$

$x(x^2+y^2+x)\mathrm{d}x+x^2y\mathrm{d}y=0$，

$$u(x,y)=\int_0^x(x^3+xy^2+x^2)\mathrm{d}x+\int_0^y x^2\cdot 0\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2y^2+\frac{1}{3}x^3,$$

所以原方程的通解为 $\dfrac{1}{4}x^4+\dfrac{1}{2}x^2y^2+\dfrac{1}{3}x^3=C$.

例3　解方程 $x^2(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)+y(x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x)=0$.

解　方程化为 $(x^3-y^2)\mathrm{d}x+(x^2y+xy)\mathrm{d}y=0$，

$M=x^3-y^2$，$N=x^2y+xy$，

$\dfrac{\partial M}{\partial y}=-2y$，$\dfrac{\partial N}{\partial x}=2xy+y$，

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}=\frac{-3y-2xy}{y(x^2+x)}=-\frac{3}{x}+\frac{1}{x+1},$$

$$\mu=\mathrm{e}^{\int\left(-\frac{3}{x}+\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x}=\frac{x+1}{x^3},$$

$$\frac{x+1}{x^3}(x^3-y^2)\mathrm{d}x+\frac{x+1}{x^3}(x^2y+xy)\mathrm{d}y=0,$$

$$u(x,y)=\int_1^x(x+1)\mathrm{d}x+\int_0^y\frac{(x+1)^2}{x^2}y\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}x^2+x-\frac{3}{2}+\frac{(x+1)^2}{2x^2}y^2,$$

所以原方程的通解为 $x^2+2x+\dfrac{y^2}{x^2}(x+1)^2=C$.

例4　解方程 $(x-2xy-y^2)y'+y^2=0$.

解　$M=y^2$，$N=x-2xy-y^2$，

$\dfrac{\partial M}{\partial y}=2y$，$\dfrac{\partial N}{\partial x}=1-2y$，

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{-M}=\frac{2y-1+2y}{-y^2}=\frac{-4}{y}+\frac{1}{y^2},$$

$$\mu=\mathrm{e}^{\int\left(\frac{1}{y^2}-\frac{4}{y}\right)\mathrm{d}y}=\frac{1}{y^4}\mathrm{e}^{-\frac{1}{y}},$$

$$\frac{1}{y^4}\mathrm{e}^{-\frac{1}{y}}(x-2xy-y^2)\mathrm{d}y+\frac{1}{y^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{y}}\mathrm{d}x=0,$$

$$u(x,y)=\int_0^x\frac{1}{y^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{y}}\mathrm{d}x+\int_1^y\left(-\frac{1}{y^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{y}}\right)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{x}{y^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{y}}-\mathrm{e}^{-\frac{1}{y}}+\mathrm{e}^{-1},$$

所以原方程的通解为 $\dfrac{x}{y^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{y}}-\mathrm{e}^{-\frac{1}{y}}=C$.

例5　解方程 $(2x^3y^2+4x^2y+2xy^2+xy^4+2y)\mathrm{d}x+2(y^3+x^2y+x)\mathrm{d}y=0$.

解　$M=2x^3y^2+4x^2y+2xy^2+xy^4+2y$，

$N=2(y^3+x^2y+x)$，

$\dfrac{\partial M}{\partial y}=4x^3y+4x^2+4xy+4xy^3+2$，

$\dfrac{\partial N}{\partial x}=4xy+2$，

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}=\frac{4x^3y+4x^2+4xy^3}{2x^2y+2x+2y^3}=2x,$$

$\mu=\mathrm{e}^{\int 2x\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^{x^2}$，

$\mathrm{e}^{x^2}(2x^3y^2+4x^2y+2xy^2+xy^4+2y)\mathrm{d}x+2\mathrm{e}^{x^2}(y^3+x^2y+x)\mathrm{d}y=0$，

$$u(x,y)=\int_0^y 2\mathrm{e}^{x^2}(y^3+x^2y+x)\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}y^4+\mathrm{e}^{x^2}x^2y^2+2xy\mathrm{e}^{x^2},$$

所以原方程的通解为 $\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}y^4+\mathrm{e}^{x^2}x^2y^2+2xy\mathrm{e}^{x^2}=C$.

【参考文献】

[1] 丁崇文. 常微分方程典型题解法和技巧 [M]. 福州: 福建教育出版社，2004.

[2] 王高雄. 常微分方程辅导及习题精解 [M]. 延吉: 延边大学出版社，2014.

[3] 王高雄，等. 常微分方程 [M]. 北京: 高等教育出版社，2016.

[4] 东北师范大学微分方程教研室. 常微分方程 [M]. 北京: 高等教育出版社，2010.

[5] 王克，潘家齐. 常微分方程学习指导书 [M]. 北京: 高等教育出版社，2011.

?1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net