微分方程

Chapter: 微分方程 Created: Mar 17, 2021 2:56 PM

微分方程概述

微分方程是一种数学方程, 用来描述某一类函数与其导数之间的关系, 微分方程的解是一个**符合方程的函数.**

微分方程分为两类

- 常微分方程

  含有函数的导数, 求函数的方程 eg. $y'(x)+2x=0$ 求 y

- 偏微分方程

  含有函数的偏导, 求函数的方程 eg. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ 求 u

微分方程的解

微分方程的解是符合微分方程的函数. 根据解的特性可以

- 通解-特解
  - 通解, 是指解的一般形式, 几阶微分方程就含有几个不可合并的常数 $C_1 ... C_n$
    eg. 某三阶微分方程的通解为 $y=x^3+C_2x^2+C_1x+C_3$ 注意,$y=C_1x+C_2x+C_3x$ 并不是通解, 因为未知常数可以合并
  - 特解, 是指微分方程在符合特定的条件下得出的解, 即不含任意未知常数的解
    eg. $y=x^2+1$ 是微分方程 $y'=2x$ 当 $y|_{x=2}=5$ 时的特解
- 显式-隐式
  - 显式, 形如 $y=f(x)+c$ 的叫做显式解
  - 隐式, 形如 $G(y)=F(x)+c$ 的脚隐式解

一阶方程

方程内导数最高阶次为一阶的微分方程叫一阶微分方程

eg. $f(x,y,y')$ 求 y 的微分方程

可分离变量的一阶方程

形如 $\frac{dy}{dx}=P(x)\cdot Q(y)$, 移项得 $\frac{dy}{Q(y)}=P(x)dx$, 两边同时积分 $\int\frac{dy}{Q(y)}=\int P(x)dx$ 可得解.

eg1.

$$
\begin{aligned}
&\frac{dy}{dx}=\cos x\cdot(y^2+1)\\
\Rightarrow&\frac{dy}{y^2-1}=\cos x dx\\
\Rightarrow&\int\frac{dy}{y^2-1}=\int\cos x dx\\
\Rightarrow&\arctan y=\sin x+c
\end{aligned}
$$

eg2.

$$
\begin{aligned}
&\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}\\
\Rightarrow&\frac{dy}{y}=\frac{1}{x}dx\\
\Rightarrow&\int\frac{dy}{y}=\int\frac{1}{x}dx\\
\Rightarrow&ln|y|=ln|x|+c
\end{aligned}
$$

齐次一阶方程

形如

$$\frac{dy}{dx}=f(\frac{y}{x})$$

令 $u=\frac{y}{x}$ 则 $\Rightarrow y=ux\Rightarrow\frac{dy}{dx}=u+\frac{du}{dx}$

代回原式得

$$
\begin{aligned}
&u+x\frac{du}{dx}=f(u)\\
\Rightarrow&x\frac{du}{dx}=f(u)-u\\
\Rightarrow&\frac{du}{f(u)-u}=\frac{1}{x}dx
\end{aligned}
$$

则回归分离变量法, 两边积分可得解

eg1. 求解

$$y^2+x^2\frac{dy}{dx}=xy\frac{dy}{dx}$$

移项提取公因式 $\frac{dy}{dx}$ 得 $\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{xy-x^2}$ 左边上下同除 x^2 得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(\frac{y}{x})^2}{\frac{y}{x}-1}$$

令 $u=\frac{y}{x}$ 则 $\Rightarrow$ $y=ux\Rightarrow\frac{dy}{dx}=u+\frac{du}{dx}$

$\frac{dy}{dx}=\dots$ 代回后得

$$
\begin{aligned}
&x\frac{du}{dx}=\frac{u^2}{u-1}-u=\frac{u}{u-1}\\
\Rightarrow&\frac{u-1}{u}du=\frac{1}{x}dx\\
\Rightarrow&\int\frac{u-1}{u}du=\int\frac{1}{x}dx\\
\Rightarrow&u-ln|u|=ln|x|+C
\end{aligned}
$$

$u=\frac{y}{x}$ 回代得

$$
\begin{aligned}
&\frac{y}{x} - ln|\frac{y}{x}| = ln|| + c \\
\Rightarrow &\frac{y}{x} = ln|x| + ln|\frac{y}{x}| + C \\
\Rightarrow &\frac{y}{x} = ln|y| + C \\
\Rightarrow &y = xln|y| + Cx
\end{aligned}
$$

eg2. $y|_{x=1} = 2$ 求特解

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$$

令 $u = \frac{y}{x}$ 则 $\Rightarrow$ $y = ux \Rightarrow \frac{dy}{dx} = u + \frac{du}{dx}$

$$
\begin{aligned}
&\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \\
\Rightarrow &u + x\frac{du}{dx} = u + \frac{1}{u} \\
\Rightarrow &x\frac{du}{dx} = \frac{1}{u} \\
\Rightarrow &u\ du = \frac{1}{x}dx \\
\Rightarrow &\int u\ du = \int \frac{1}{x}\ dx \Rightarrow \quad \frac{u^2}{2} = ln|x| + c
\end{aligned}
$$

$u = \frac{y}{x}$ 回代得

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow \frac{1}{2}\frac{y^2}{x^2} = ln|x| + c \\
y|_{x=1} = 2\ &\Rightarrow C = 4 \\
&\Rightarrow \frac{1}{2}\frac{y^2}{x^2} = ln|x| + 4 \\
&\Rightarrow y^2 = 2x^2 ln|x| + 4x^2
\end{aligned}
$$

一阶线性非齐次方程

形如

$$\frac{dy}{dx} + P(x) \cdot y = Q(x)$$

的方程叫做一阶齐次非线性方程, 非齐次项为 $Q(x)$ 若 $Q(x) = 0$ 则为齐次方程

解为

$$y = e^{-\int P(x)dx} \cdot \left[\int Q(x)\ e^{\int P(x)dx}\ dx + C\right]$$

其中, 除最后一个 C 以外, 其他不定积分不需要加 C 和绝对值

eg1. 求解

$$\frac{dy}{dx}-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^{\frac{5}{2}}$$

其中 $\quad P(x)=-\frac{2}{x+1} \quad Q(x)=(x+1)^{\frac{5}{2}}$

$$\begin{aligned}
& y=e^{\int \frac{2}{x+1} dx} \cdot\left[\int(x+1)^{\frac{5}{2}}\ e^{-\int \frac{2}{x+1} dx}\ dx+C\right] \\
\Rightarrow & y=e^{2ln(1+x)dx} \cdot\left[\int(x+1)^{\frac{5}{2}}\ e^{-2ln(1+x)dx}\ dx+C\right] \\
\Rightarrow & y=(x+1)^2 \cdot\left[\int(x+1)^{\frac{5}{2}} \cdot(x+1)^{-2}\ dx+C\right] \\
\Rightarrow & y=(x+1)^2 \cdot\left[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+C\right] \\
\Rightarrow & y=\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{7}{2}}+C \cdot(x+1)^2
\end{aligned}$$

eg2. 求解

$$y'+y=e^{-x}$$

其中 $\quad P(x)=1 \quad Q(x)=e^{-x}$

$$\begin{aligned}
& y=y=e^{-\int 1\ dx} \cdot\left[\int e^{-x}\ e^{\int 1\ dx}\ dx+C\right]\ e^{-x} \\
\Rightarrow & y=e^{-x} \cdot\left[\int e^{-x} e^{x}\ dx+C\right] \\
\Rightarrow & y=e^{-x}(x+c)
\end{aligned}$$

高阶方程

可降阶的高阶方程

基本思路是将高阶微分方程降阶至一阶方程, 然后进行求解
eg1. 求解

$$y'''+x=1$$

移项后可化原式为

$$y'''=1-x$$

直接可进行积分

$$
\begin{aligned}
& y''' = 1 - x \\
\Rightarrow & y'' = x - \frac{1}{2}x^2 + C_1 \\
\Rightarrow & y' = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + C_1 x + C_2 \\
\Rightarrow & y = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{2}C_1 x^2 + C_2 x + C_3
\end{aligned}
$$

eg2. 求解

$$xy'' + y' = 0$$

令　$u = y' \Rightarrow u' = y''$　代入原式

$$
\begin{aligned}
& xy'' + y' = 0 \\
\Rightarrow & xu' + u = 0 \\
\Rightarrow & xu' = -u \\
\Rightarrow & u' = -\frac{u}{x} \\
\Rightarrow & \frac{du}{dx} = -\frac{u}{x} \\
\Rightarrow & \frac{du}{u} = -\frac{1}{x}dx \\
\Rightarrow & \int \frac{du}{u} = \int -\frac{1}{x}dx \\
\Rightarrow & ln|u| = -ln|x| + C \\
\Rightarrow & ln|u| + ln|x| = C \\
\Rightarrow & ln|ux| = C
\end{aligned}
$$

另　$ln|ux| = c \Rightarrow ux = e^C$　可令　$ux = C_1$　则有　$u = \frac{C_1}{x} = \frac{dy}{dx}$

$$
\begin{aligned}
& \frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{x} \\
\Rightarrow & \frac{dy}{1} = C_1 \cdot \frac{1}{x}dx \\
\Rightarrow & \int \frac{dy}{1} = C_1 \cdot \int \frac{1}{x}dx \\
\Rightarrow & y = C_1 \cdot ln|x| + C_2
\end{aligned}
$$