算法分析与设计第一次作业

57119134 黄浩

2021 年 8 月 11 日

1. 证明:$O(f) + O(g) = O(f + g)$

   设 $F(N) = O(f), G(N) = O(g)$

   则 $\exists C_1, C_2, N_1, N_2 \in N^*$

   对 $\forall N > N_1$, 都有 $F(N) \leq C_1 f(N)$

   $\forall N > N_2$, 都有 $G(N) \leq C_2 g(N)$

   $\because O(f) + O(g) = F(N) + G(N)$

   且 $F(N) + G(N) \leq C_1 f(N) + C_2 g(N)$

   $\therefore$ 取 $C_3 = max\{C_1, C_2\}, N_3 = max\{N_1, N_2\}$

   则对 $\forall N > N_3$, 都有 $O(f) + O(g) \leq C_3 f(N) + C_3 g(N)$

   $\because C_3 f(N) + C_3 g(N) = O(f + g)$

   $\therefore O(f) + O(g) = O(f + g)$

   得证。

2. 证明:$O(f) \cdot O(g) = O(f \cdot g)$

   设 $F(N) = O(f), G(N) = O(g)$

   则 $\exists C_1, C_2, N_1, N_2 \in N^*$

   对 $\forall N > N_1$, 都有 $F(N) \leq C_1 f(N)$

   $\forall N > N_2$, 都有 $G(N) \leq C_2 g(N)$

   $\because O(f) \cdot O(g) = F(N) \cdot G(N)$

   且 $F(N) \cdot G(N) \leq C_1 f(N) \cdot C_2 g(N)$

   $\therefore$ 取 $C_3 = C_1 \cdot C_2, N_3 = max\{N_1, N_2\}$

   则对 $\forall N > N_3$, 都有 $O(f) \cdot O(g) \leq C_3 f(N) \cdot g(N)$

   $\because C_3 f(N) \cdot g(N) = O(f \cdot g)$

   $\therefore O(f) \cdot O(g) = O(f \cdot g)$

   得证。

3. 证明: 如果 $g(N) = O(f(N)) \Rightarrow O(f) + O(g) = O(f)$:

设 $F(N) = O(f), G(N) = O(g)$

则 $\exists C_1, C_2, N_1, N_2 \in N^*$

对 $\forall N > N_1$, 都有 $F(N) \leq C_1 f(N)$

$\forall N > N_2$, 都有 $G(N) \leq C_2 g(N)$

$\because g(N) = O(f(N))$

$\therefore \exists C_3, N_3 \in N^*$

对 $\forall N > N_3$, 都有 $g(N) \leq C_3 f(N)$

$\therefore$ 取 $N_4 = max\{N_1, N_3\}$

对 $\forall N > N_4$, 有 $G(N) \leq C_2 \cdot C_3 f(N)$

$\therefore$ 对 $\forall N > max\{N_1, N_4\}$

都有 $O(f) + O(g) \leq C_1 f(N) + C_2 \cdot C_3 f(N) = (C_1 + C_2 + C_3) f(N)$

$\because (C_1 + C_2 + C_3) f(N) = O(f)$

$\therefore O(f) + O(g) = O(f)$

得证。