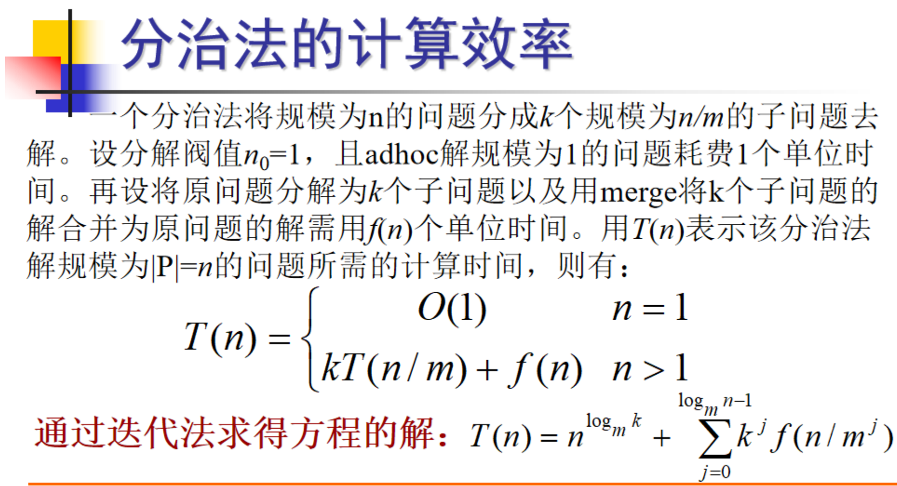
算法分析与设计选做第二次作业

57119134 黄浩

2021 年 8 月 17 日

证明下述结论。



证明：

我们可以分析每一层的复杂度，再加上最后一层的复杂度从而得到总复杂度：

第零层：1 个节点，并开销 $f(n)$

第一层：k 个节点，并开销 $k \cdot f(n/m)$

第二层：k^2 个节点，并开销 $k^2 \cdot f(n/m^2)$

第三层：k^3 个节点，并开销 $k^3 \cdot f(n/m^3)$

...

第 x 层：k^x 个节点，并开销 $k^x \cdot f(n/m^x)$

...

由上我们也易知最后一层的叶子数为 $k^{log_m n} = n^{log_m k}$, 所以最后一层的最简问题开销为 $n^{log_m k}$。

所以，我们将每一层的开销和最终最简问题的开销求和即是问题总开销：(注：最后一层由于已经是最简问题了, 所以最后一层没有分解子问题的开销)

$T(n) = n^{log_m k} + \sum_{j=0}^{log_m n-1} k^j \cdot f(n/m^j)$

得证。

另外：

我们可以总结出一些直接得出递归式计算复杂度的方法：

当 $O(n^{log_m k}) < O(f(n))$ 时，$T(n) = O(f(n))$

当 $O(n^{log_m k}) = O(f(n))$ 时，$T(n) = O(n^{log_m k} \cdot log_m n)$

当 $O(n^{log_m k}) > O(f(n))$ 时，$T(n) = O(n^{log_m k})$