算法分析与设计第三次作业

57119134 黄浩

2021 年 8 月 27 日

1 题目

n 个铁管具有重量，被按序存放在 w[i]，$1 \leq i \leq n$。这些铁管将根据它们的顺序，被焊接成一个大的铁管，每个时间任意两个相邻的铁管可以被选中来进行焊接。焊接的代价是焊接的铁管中的重量较大的铁管的重量。例如：w[1]=5，w[2]=1，w[3]=2，如果 1 和 2 先进行焊接，则焊接的代价为 5，然后 3 被焊接代价为 6，那么总的焊接代价为 $5 + 6 = 11$。但是如果先焊接 2 和 3，再焊 1，那么总的代价为 $2 + 5 = 7$。

1）设计一个动态规划算法去发现最优的焊接顺序，使得整个代价最小和确立迭代关系。

2）将设计的算法应用到一个具体的实例中，去发现最优焊接顺序和其相应的焊接总代价，该实例具有 5 个钢管，w[1]=6，w[2]=2，w[3]=7，w[4]=5，w[5]=8。请给出详细的解决过程。

解：

1)

我设计了 bestWelding 动态规划算法对题目进行求解。算法对重量进行了预先处理，并按照焊接次数从小到大进行迭代计算 (即按照焊接 1 次、2 次、3 次等等的顺序进行计算)。对于从 i 到 i + j 段的最小开销计算过程为，遍历 k 从 0 到 j - 1, 分别求 i 到 i + k 段焊接 i + k + 1 到 i + j 段的代价，并取其中的最小值即为 i 到 i + j 段焊接的最小开销, 与此同时记录下 i 到 i + j 段焊接的位置用于最终复原焊接过程。

在此说明各个变量的意义以及一些简单的初始化。weight[i][j] 表示从 w[i] 到 w[j] 的总重量，在计算之前 weight 元素全部初始化为 0；dp[i][j] 表示从 w[i] 焊接到 w[j] 的最小代价，在计算之前 dp 元素初始化为 INT_MAX(但

是 dp[m][m] 元素初始化为 0,即 dp 对角线上的元素初始化为 0);welding[i][j] 表示从 i 到 j 段的焊接位置；所以最终 dp[1][n] 就是我们所求的从 w[1] 到 w[n] 的焊接最小代价，并且我们可以通过回溯 welding 层层寻找我们的焊接过程。

伪代码如下：

Algorithm bestWelding

//计算各个区间的重量
for i = 1 to n **do**
  for j = i to n **do**
    $weight[i][j] = weight[i][j-1] + w[j]$ //weight 初始化为 0
  end for
end for
//动态规划计算
//j 为区段差值，i 为区段开始值，k 为区段分割的位置
for j = 1 to n - 1 **do**
  for i = 1 to n - j **do**
    for k = 0 to j - 1 **do**
      $w = max(weight[i][i+k], weight[i+k+1][i+j])$ //两端更重值
      $cost = dp[i][i+k] + dp[i+k+1][i+j] + w$//焊接开销
      if $dp[i][i+j] > cost$ **then**
        $dp[i][i+j] = cost$
        $welding[i][i+j] = i+k$//记录焊接位置
      end if
    end for
  end for
end for
return dp[1][n]

2)

模拟算法过程如下：(省去一些预处理计算过程)

焊接 1 次：

$dp[1][2] = 6; welding[1][2] = 1$

$dp[2][3] = 7; welding[2][3] = 2$

$dp[3][4] = 7; welding[3][4] = 3$

$dp[4][5] = 8; welding[4][5] = 4$

焊接 2 次：

$dp[1][3] = min(14, 16) = 14; welding[1][3] = 2$

$dp[2][4] = min(16, 19) = 16; welding[2][4] = 3$

$dp[3][5] = min(19, 21) = 19; welding[3][5] = 4$

焊接 3 次：

$dp[1][4] = min(29, 25, 30) = 25; welding[1][4] = 2$

$dp[2][5] = min(30, 28, 39) = 29; welding[2][5] = 3$

焊接 4 次：

$dp[1][5] = min(45, 37, 45, 51) = 37; welding[1][5] = 3$

所以我们回溯 welding：

$welding[1][5] = 3$

  $welding[1][3] = 2$

    $welding[1][2] = 1; welding[2][3] = 2$

  $welding[4][5] = 4$

综上所述，我们焊接此 w[1] 到 w[5] 的最小开销为 37。

我们回溯的焊接过程为：

1->2; 2->3; 4->5; 3->4