н) $\int x \cdot arctgx\,dx$;

о) $\int \dfrac{x+3}{x^3+10x^2+25x}dx$;

$$\boxed{\text{р) } \int \frac{1+\sin x}{1+\cos x+\sin x}dx.}$$

$$\boxed{\text{с) } \int \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}dx;}$$

у) $\int \cos^2 x \cdot \sin^3 x dx$;

$$\boxed{\text{ф) } \int \frac{dx}{\sqrt{e^x-9}}.}$$

$$р)\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x+\sin x}dx = \left[\begin{array}{ll} \multicolumn{2}{l}{\textit{применим универсальную подстановку}} \\ t = tg\dfrac{x}{2} & \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2} \\ dx = \dfrac{2dt}{1+t^2} & \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{array}\right] =$$

$$= \int \frac{\left(1+\dfrac{2t}{1+t^2}\right)\cdot 2dt}{1+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}+\dfrac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{(1+t^2+2t)\cdot 2dt}{(1+t^2)\cdot\left(1+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}+\dfrac{2t}{1+t^2}\right)} = 2\cdot\int \frac{(t^2+2t+1)dt}{1+t^2+1-t^2+2t} =$$

$$= 2\cdot\int \frac{(t^2+2t+1)dt}{2+2t} = 2\cdot\int \frac{(t+1)^2 dt}{2\cdot(t+1)} = \int (t+1)dt = \int tdt + \int dt = \frac{t^2}{2}+t+C =$$

$$= \frac{1}{2}tg^2\frac{x}{2}+tg\frac{x}{2}+C.$$

$$c)\int \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}dx = \left[\begin{array}{l} t = \sqrt[6]{x} \\ x = t^6 \\ dx = 6t^5dt \end{array}\right] = \int \frac{t^3\cdot 6t^5dt}{1-t^2} = -6\cdot\int \frac{t^8dt}{t^2-1} =$$

Выделим целую часть

$$\begin{array}{r|l} t^8 & t^2-1 \\ \cline{2-2} -\ \underline{t^8-t^6} & t^6+t^4+t^2+1 \\ t^6 & \\ -\ \underline{t^6-t^4} & \\ t^4 & \\ -\ \underline{t^4-t^2} & \\ t^2 & \\ -\ \underline{t^2-1} & \\ 1 & \end{array}$$

$$= -6 \cdot \int \left(t^6 + t^4 + t^2 + 1 + \frac{1}{t^2 - 1} \right) dt = -6\int t^6 dt - 6\int t^4 dt - 6\int t^2 dt - 6\int dt - 6\int \frac{dt}{t^2 - 1} =$$

$$= -\frac{6t^7}{7} - \frac{6t^5}{5} - \frac{6t^3}{3} - 6t - \frac{6}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = \frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7} - \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} - 2\sqrt{x} - 6\sqrt[6]{x} - 3\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x} - 1}{\sqrt[6]{x} + 1}\right| + C.$$

$$ф)\ \int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 9}} = \begin{bmatrix} t = \sqrt{e^x - 9} \\ t^2 = e^x - 9;\ e^x = t^2 + 9 \\ e^x dx = 2tdt; \\ dx = \dfrac{2tdt}{e^x} = \dfrac{2tdt}{t^2 + 9} \end{bmatrix} = \int \frac{2tdt}{t \cdot (t^2 + 9)} = 2\int \frac{dt}{t^2 + 9} = \frac{2}{3} arctg\,\frac{t}{3} + C = \frac{2}{3} arctg\,\frac{\sqrt{e^x - 9}}{3} + C.$$

Задание 2: Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 8}$; б) $\int\limits_{1}^{e} \frac{dx}{x \ln^3 x}$.

$$а)\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 8} = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{(x+2)^2 + 4} + \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{(x+2)^2 + 4} = \lim_{a \to -\infty} \int\limits_{a}^{0} \frac{dx}{(x+2)^2 + 4} + \lim_{b \to +\infty} \int\limits_{0}^{b} \frac{dx}{(x+2)^2 + 4} =$$

$$= \lim_{a \to -\infty} \left(\frac{1}{2} arctg\left(\frac{x+2}{2} \right) \right) \Bigg|_a^0 + \lim_{b \to +\infty} \left(\frac{1}{2} arctg\left(\frac{x+2}{2} \right) \right) \Bigg|_0^b =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{a \to -\infty} \left(arctg 1 - arctg\left(\frac{a+2}{2} \right) \right) + \frac{1}{2} \lim_{b \to +\infty} \left(arctg\,\frac{b+2}{2} - arctg 1 \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{2}$$

Ответ: интеграл сходится и равен $\frac{\pi}{2}$

$$б)\ \int\limits_{1}^{e} \frac{dx}{x \ln^3 x}\, dx$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{1+\varepsilon}^{e} \frac{dx}{x \ln^3 x} = \left[\int \frac{dx}{x \ln^3 x} = \begin{bmatrix} t = \ln x \\ dt = \dfrac{dx}{x} \end{bmatrix} = \int \frac{dt}{t^3} = \int t^{-3} dt = \frac{t^{-2}}{-2} = -\frac{1}{2t^2} = -\frac{1}{2\ln^2 x} \right] =$$

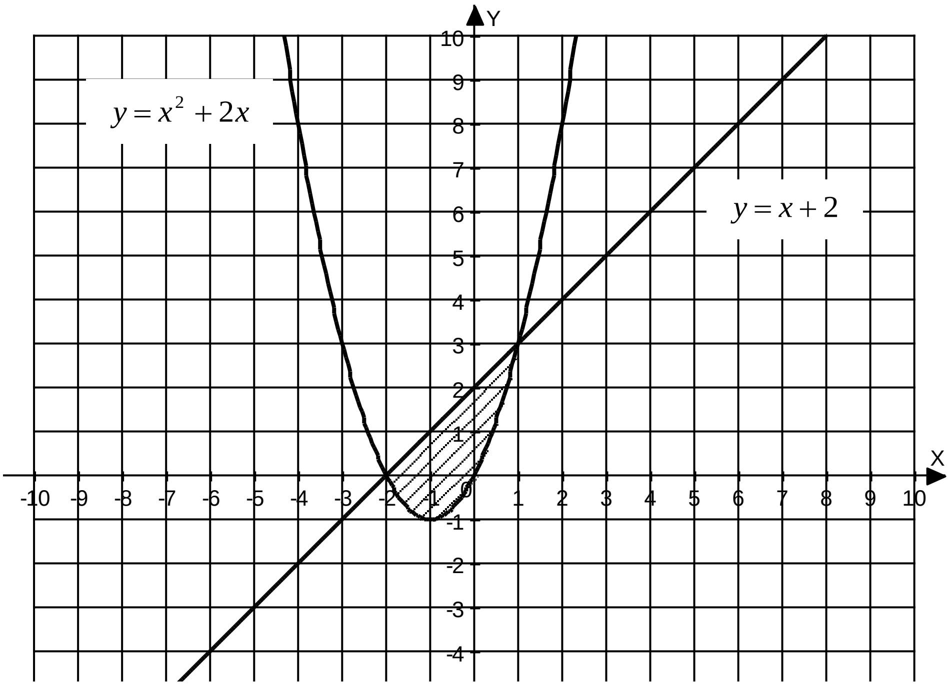
$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left(-\frac{1}{2\ln^2 x} \right) \Bigg|_{1+\varepsilon}^{e} = -\frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{1}{\ln^2 e} - \frac{1}{\ln^2 (1+\varepsilon)} \right) = -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{0} \right) = -\frac{1}{2} \cdot (1 - \infty) = \infty$$

Ответ: интеграл расходится

Задание 3: Вычислить:

а) площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 + 2x$ и прямой $y = x + 2$;

Решение.



Площадь фигуры находим по формуле: $S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x) \right) dx.$

Найдем пределы интегрирования

$$\begin{cases} y = x^2 + 2x \\ y = x + 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$x^2 + 2x = x + 2$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$D = 1 + 8 = 9$$

$$x_1 = \frac{-1-3}{2} = -2; \ x_2 = \frac{-1+3}{2} = 1$$

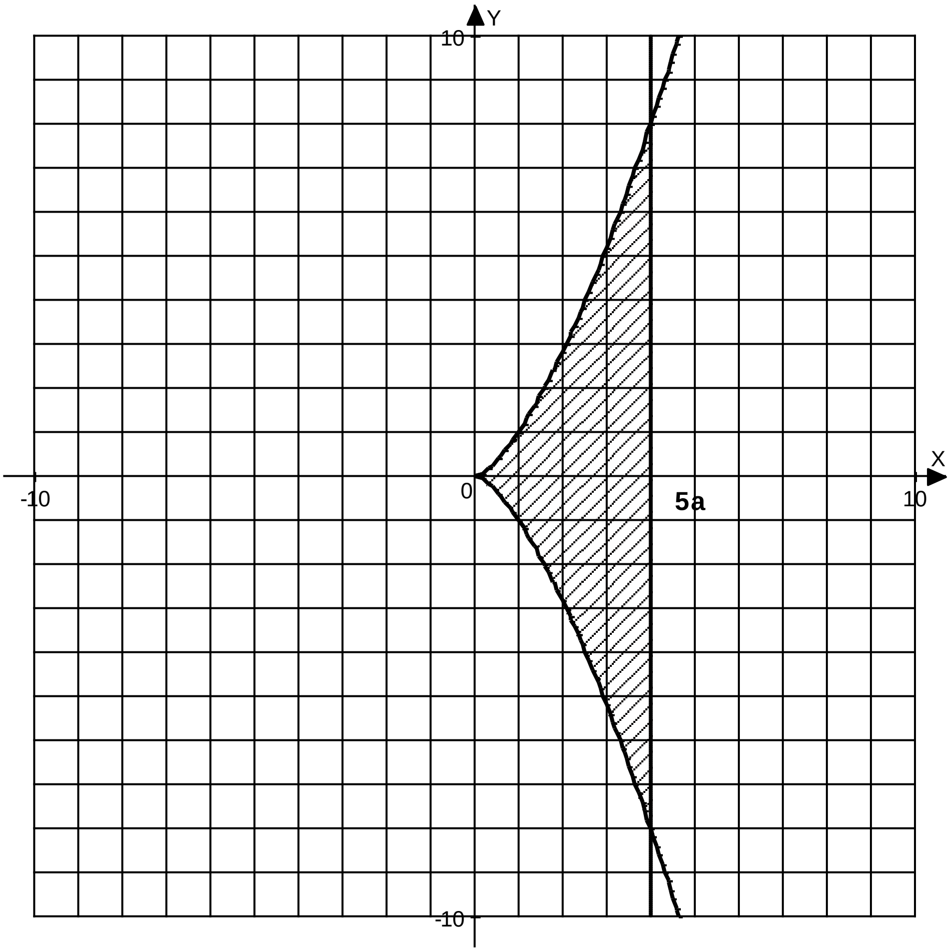
$$S = \int_{-2}^{1} \left(x + 2 - x^2 - 2x \right) dx = \int_{-2}^{1} \left(2 - x - x^2 \right) dx = \left(2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_{-2}^{1} =$$

$$= 2 \cdot 1 - \frac{1^2}{2} - \frac{1^3}{3} - \left(2 \cdot (-2) - \frac{(-2)^2}{2} - \frac{(-2)^3}{3} \right) = 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 4 + 2 - \frac{8}{3} = 8 - 3 - \frac{1}{2} = 4{,}5$$

Ответ: $S = 4{,}5$

б) длину дуги полукубической параболы $ay^2 = x^3$ от начала координат до точки с абсциссой $x = 5a$;

Решение.



Длину дуги кривой найдем по формуле: $l = \int\limits_a^b \sqrt{1 + y'^2}\,dx$

$$y' = \left(\pm\sqrt{\frac{x^3}{a}}\right)' = \left(\pm\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a}}\right)' = \pm\frac{3}{2\sqrt{a}}x^{\frac{1}{2}} = \pm\frac{3}{2\sqrt{a}}\sqrt{x}$$

$$L = 2\cdot\int\limits_0^{5a}\sqrt{1+\left(\frac{3}{2\sqrt{a}}\sqrt{x}\right)^2}\,dx = 2\cdot\int\limits_0^{5a}\sqrt{1+\frac{9}{4a}x}\,dx = 2\cdot\int\limits_0^{5a}\frac{\sqrt{14a+9x}}{2\sqrt{a}}\,dx =$$

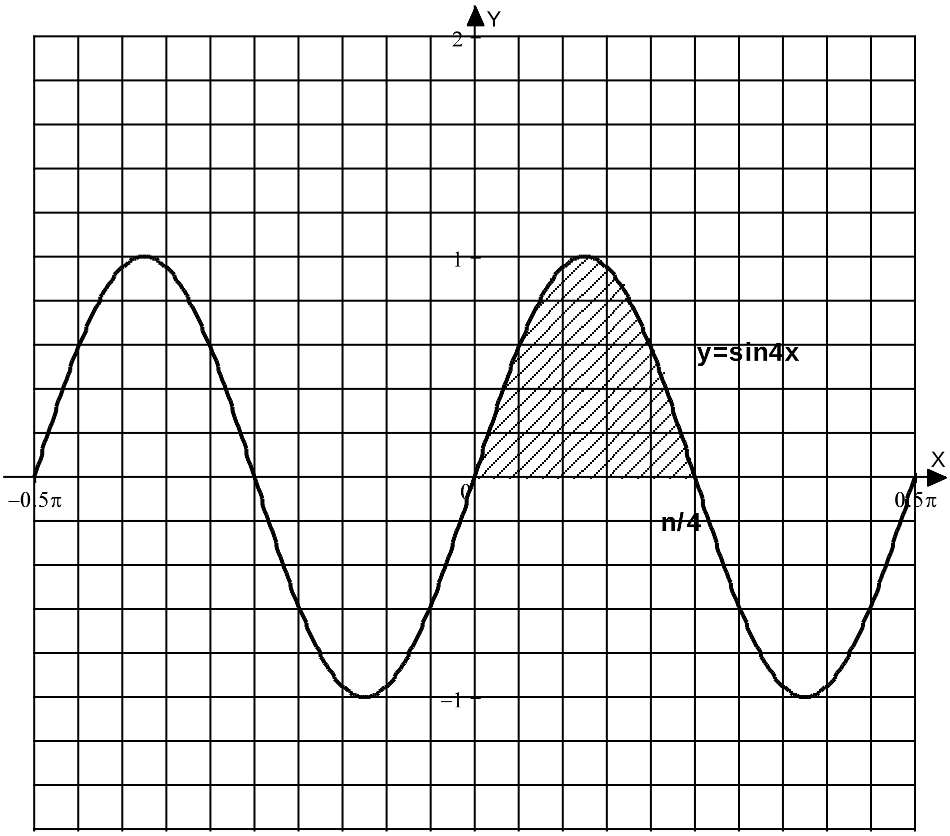
$$= \left[\begin{array}{ll} t = \sqrt{4a+9x} & x_1 = 0 \Rightarrow t_1 = \sqrt{4a} = 2\sqrt{a} \\ 4a + 9x = t^2 & x_2 = 5a \Rightarrow t_2 = \sqrt{4a+45a} = 7\sqrt{a} \\ 9dx = 2tdt & \\ dx = \dfrac{2tdt}{9} & \end{array}\right] = \int\limits_{2\sqrt{a}}^{7\sqrt{a}}\frac{t\cdot 2tdt}{9\sqrt{a}} = \frac{2}{9\sqrt{a}}\cdot\frac{t^3}{3}\Bigg|_{2\sqrt{a}}^{7\sqrt{a}} = \frac{2}{9\sqrt{a}}\left(\frac{7^3a\sqrt{a}}{3} - \frac{2^3a\sqrt{a}}{3}\right) =$$

$$= \frac{670}{27}a$$

Ответ: $L = \dfrac{670}{27}a$

в) объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной одной волной синусоиды $y = \sin 4x$ и осью Ox.

Решение.



Найдем пределы интегрирования:

$$\begin{cases} y = \sin 4x \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \sin 4x = 0 \Rightarrow 4x = \pi n, n \in Z \Rightarrow x = \frac{\pi n}{4}, n \in Z \Rightarrow$$

$$x_1 = 0; x_2 = \frac{\pi}{4}$$

Объем тела вращения находим по формуле: $V_x = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$

$y = -x^2 + 8$

$$V_x = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 4x dx = \frac{1}{2}\pi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \cos 8x) dx = \frac{1}{2}\pi \cdot \left(x - \frac{1}{8}\sin 8x \right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\pi \cdot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{8}\sin 2\pi - 0 + \frac{1}{8}\sin 0 \right) =$$

$$= \frac{1}{2}\pi \cdot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{8} \cdot 0 + \frac{1}{8} \cdot 00 \right) = \frac{\pi}{8}$$

Ответ: $V_x = \frac{\pi}{8}$ *куб.ед.*