上机实习五：数值积分

练习 1 (Simpson 求积公式)

人群中的身高分布可以用 Gauss 分布来表示:

$$N(x) = \frac{M}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp -\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2},$$

其中 $M = 200$ 表示人的总数量, $\bar{x} = 1.7$ 是期望，而 $\sigma = 0.1$ 是方差. 那么身高在 1.8 米到 1.9 米的人的数量为

$$\int_{1.8}^{1.9} N(x)dx.$$

首先用 Simpson 方法求此积分, 再用复合 Simpson 方法计算一次 (要求将区间 [1.8,1.9] 等分为十段)，最后对比数值积分的误差.

提示：python 函数库 scipy 的 quad、dblquad 实现一维二维积分。

练习 2 (Romberg 求积方法)

1. 编写 Romberg 求积方法的程序

$$y = romberg(f, a, b, \varepsilon)$$

T_0^0
$T_1^0 \quad T_1^1$
$T_2^0 \quad T_2^1 \quad T_2^2$
$\rightarrow T_3^0 \quad T_3^1 \quad T_3^2 \quad T_3^3$
- - -

$|T_3^2 - T_3^3| < \varepsilon$

其中 f 是定义在区间 $[a, b]$ 上的函数, 而 ε 是算法的公差.

2. 应用 Romberg 方法求以下积分 $\int_1^2 \ln x dx$，其中 $\varepsilon = 10^{-6}$.

练习 3 (复合积分方法和 Gauss 积分方法的比较)

求以下积分的近似值:

$$I = \int_0^4 \sqrt{1+e^x}dx.$$

Romberg算法

令 $k = 1$，记 $h = b - a$，给定 ε
计算 T_0^0, T_0^1, T_1^1
while $|T_k^k - T_{k-1}^k| > \varepsilon$ **do**
  $k = k + 1$
  $T_k^0 = \frac{h}{2}[f(a) + \sum_{i=1}^{2^k-1} f(a+ih) + f(b)]$ （复合梯形公式）
  for $j = 1, \ldots, k$ **do**
    $T_{k+1}^j = \frac{1}{4^k - 1}(4^k T_{k+1}^{j-1} - T_k^{j-1})$ （Richardson外插值法）
  end for
  $h = h/2$
end while

Romberg计算的解为0.386294309086248。准确解为0.386294334336416。

1. 分别取区间等分数 $n = 2, 4, 8, 16$, 分别为复合梯形公式和复合 Simpson 公式计算积分近似值，并与精确解作比较.
2. 用 Gauss 积分公式的 3 点，5 点，7 点公式进行计算，并与复合积分公式的计算结果比较.

Gauss 积分表

1. $N = 3$

i	weight	x_i
1	0.8888888888888888	0.0000000000000000
2	0.5555555555555556	-0.7745966692414834
3	0.5555555555555556	0.7745966692414834

2. $N = 5$

i	weight	x_i
1	0.5688888888888889	0.0000000000000000
2	0.4786286704993665	-0.5384693101056831
3	0.4786286704993665	0.5384693101056831
4	0.2369268850561891	-0.9061798459386640
5	0.2369268850561891	0.9061798459386640

3. $N = 7$

i	weight	x_i
1	0.4179591836734694	0.0000000000000000
2	0.3818300505051189	-0.4058451513773972
3	0.3818300505051189	0.4058451513773972
4	0.2797053914892766	-0.7415311855993945
5	0.2797053914892766	0.7415311855993945
6	0.1294849661688697	-0.9491079123427585
7	0.1294849661688697	0.9491079123427585

练习 4 (选做题，数值积分法用于求解积分方程)

利用数值积分法求解以下积分方程:

$$y(t) = \frac{2}{e-1}\int_0^1 e^t y(s)ds - e^t, t \in [0, 1].$$

1. 使用复合 Simpson 公式将以上方程离散化，得到线性方程组，求解线性方程组得到 y 在求积分节点上的近似值.
2. 取等距分段数 $n = 8, 16, 32, 64, 128$，画出方程的解，并分析方法的收敛阶数.