上机实习四：最佳平方逼近和最小二乘法

练习 1 (最佳平方逼近多项式)

求以下两个函数的最佳平方逼近多项式:

1. $f(x) = e^x, x \in [-1, 1]$;

2. $f(x) = |x|, x \in [-1, 1]$.

要求:

1. 记在 $\mathbb{P}_k = span\{1, x, \ldots, x^k\}, k = 0, 1, \ldots, 10$ 上的最佳平方逼近多项式为 $p_k(x)$. 设 $\delta_k(x) = |f(x) - p_k(x)|$, 画出曲线 $\delta_k \sim x$, 取 $k = \{1, 3, 5, 10\}$.

2. 令 $\Delta_k = \max_{x\in[-1,1]} \delta_k(x)$, 画出曲线 $\Delta_k \sim k$.

3. 作 $\Delta_k \sim k$ 的最小二乘曲线，并分析收敛性结论.

练习 2 (正交多项式的应用)

已知函数

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}, x \in [0, 1].$$

用以下方法求 $f(x)$ 的 5 次和 10 次最佳平方逼近多项式:

1. 以 $\{x^i\}, i = 0, \ldots, k$ 为基函数，其中 $k \in \{5, 10\}$;

2. 以 Legendre 正交多项式为基函数;

3. 以 Chebyshev 正交多项式为基函数.

练习 3 (多项式最小二乘法)

为了测试汽车的刹车系统，就需要建立刹车距离和速度之间的关系。为此，我们做了以下汽车刹车的实验，其中 x 代表汽车速度，而 y(单位为米) 代表刹车距离:

x	5	10	15	20	25	30	35	40
y	3.42	5.96	31.14	41.76	74.54	94.32	133.78	169.16

现在用最小二乘法建立汽车刹车系统的模型:

1. 用一次多项式 ($y = a_0 + a_1 x$).
2. 用二次多项式 ($y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$).
3. 分析以上两种最小二乘法是否能合理的拟合数据？再尝试另一个二次多项式，但 $a_0 = 0$, 即 $y = a_1 x + a_2 x^2$.

要求将数据与拟合的模型画在一起进行对比，那么哪一种方法最好？

练习 4 (指数函数最小二乘法)

通过函数采点方式得到以下数据

$$y = e^x + e^{-x} + 0.1 \times \mathrm{rand}(n, 1),$$

其中 $n = 7$, $x = \mathrm{linspace}(0, 1, n)$.
用指数函数拟合数学

$$y = a_1 e^x + a_2 e^{-x}.$$

并将拟合函数与原数值进行画图对比。

Legendre 正交多项式

- $P_0(x) = 1$
- $P_1(x) = x$
- $P_2(x) = 1/2 * (3 * x^2 - 1)$
- $P_3(x) = 1/2 * (5 * x^3 - 3 * x)$

- $P_4(x) = 1/8 * (35 * x^4 - 30 * x^2 + 3)$
- $P_5(x) = 1/8 * (63 * x^5 - 70 * x^3 + 15 * x)$
- $P_6(x) = 231/16 * x^6 - 315/16 * x^4 + 105/16 * x^2 - 5/16$
- $P_7(x) = 429/16 * x^7 - 693/16 * x^5 + 315/16 * x^3 - 35/16 * x$
- $P_8(x) = 6435/128 * x^8 - 3003/32 * x^6 + 3465/64 * x^4 - 315/32 * x^2 + 35/128$
- $P_9(x) = 12155/128 * x^9 - 6435/32 * x^7 + 9009/64 * x^5 - 1155/32 * x^3 + 315/128 * x$
- $P_{10}(x) = 46189/256 * x^{10} - 109395/256 * x^8 + 45045/128 * x^6 - 15015/128 * x^4 + 3465/256 * x^2 - 63/256$

Chebyshev 正交多项式

- $T_0(x) = 1$
- $T_1(x) = x$
- $T_2(x) = 2 * x^2 - 1$
- $T_3(x) = 4 * x^3 - 3 * x$
- $T_4(x) = 8 * x^4 - 8 * x^2 + 1$
- $T_5(x) = 16 * x^5 - 20 * x^3 + 5 * x$
- $T_6(x) = 32 * x^6 - 48 * x^4 + 18 * x^2 - 1$
- $T_7(x) = 64 * x^7 - 112 * x^5 + 56 * x^3 - 7 * x$
- $T_8(x) = 128 * x^8 - 256 * x^6 + 160 * x^4 - 32 * x^2 + 1$
- $T_9(x) = 256 * x^9 - 576 * x^7 + 432 * x^5 - 120 * x^3 + 9 * x$
- $T_{10}(x) = 512 * x^{10} - 1280 * x^8 + 1120 * x^6 - 400 * x^4 + 50 * x^2 - 1$