上机实习一：误差分析

习题 1 (舍入误差 ε)

1. 计算下面表达式
$$f(x) = \frac{(1+x)-1}{x}$$
其中 $x = 10^{-16}$. 分析所得到结果的原因.

2. 编写一个程序来实现以下目的：找到最小的实数，且具有以下形式 $x = 2^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$，使得 $(0.5+x) > 0.5$.

习题 2 (逼近指数函数)

指数函数 e^x 可以展开成以下级数形式:
$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$
将级数截断到第 N 项，作为指数函数 e^x 的逼近:
$$s_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!}.$$

1. 取 $x = 10$ 和 $x = -10$，以 N 为自变量，分别画出相对误差
$$E_r = |(s_N(x) - e^x)/e^x|$$
其中 $N = 1, \ldots, 20$.

2. 针对 $x = 10$ 和 $x = -10$ 分别解释所观察到的数值结果.

3. 对于 $x = -10$ 的情况，如何改进数值算法?

习题 3 (计算积分)

计算以下积分的近似值

$$I_N = \int_0^1 x^N e^x dx,$$

其中 $N = 20$.

1. 找到 I_N 和 I_{N-1} 的递推公式. 利用递推公式计算 I_{20}.
2. 利用指数函数 e^x 的级数展开式，证明

   $$I_N = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(N+1+n)}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

   利用级数截断的方法，计算 I_{20}.
3. 以上两种方法，哪种更适合计算 I_{20}?

习题 4 (序列是否收敛？)

已知下面的递推关系式

$$u_{n+1} = 111 - \frac{1130 - \frac{3000}{u_{n-1}}}{u_n}. \tag{1}$$

的通解形式为:

$$u_n = \frac{\alpha 100^{n+1} + \beta 6^{n+1} + \gamma 5^{n+1}}{\alpha 100^n + \beta 6^n + \gamma 5^n}, \tag{2}$$

其中 α, β 和 γ 与初始条件 u_0 和 u_1 有关.

1. 首先取 $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 1, 1)$，用(2)式求 u_0 和 u_1. 并以 u_0 和 u_1 作为初值，应用递推关系式(1)计算序列 u_n 的极限.
2. 利用(2)式，当 $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 1, 1)$ 时，求列 u_n 的极限的准确值.
3. 分析以上两种方法得到结果的异同，并解释原因.