哈爾濱工業大學
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY

实验成绩

实验报告

课程名称: 数值逼近

实验项目: 误差分析

所在院系: 信息与计算科学

学生姓名: 葛煜龙

学生学号: 1201200206

授课学期: 22 秋

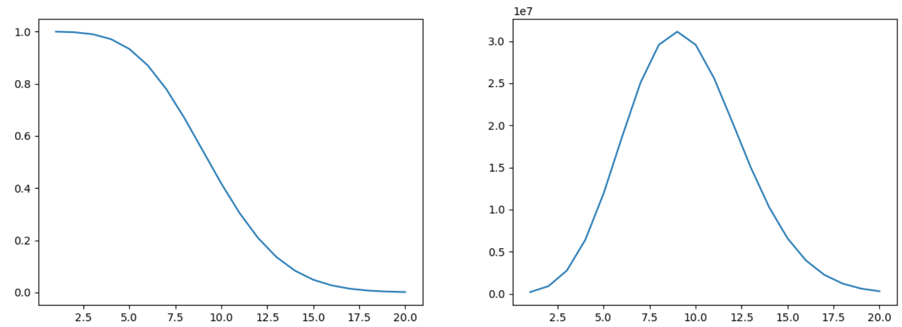
完成时间: 2022.9.24

1 习题一 舍入误差 ϵ

1. 最终计算得到的 $f(x)$ 结果为 0。出现该结果是由于在计算过程中，计算机位数长度的限制。$10^{-16}+1$ 在计算机内四舍五入为 1，再减 1 变为 0。
2.
```
for n in range(101, 0, -1):
if (0.5 + 2 ** (-n)) > 0.5:
print(n)
break
```

   最终输出结果为 $n=53$。

2 习题二 逼近指数函数



(a) $x=10$

(b) $x=-10$

图 1: 相对误差

1. $x=10$ 时相对误差逐渐下降，到 $N=20$ 之后误差趋于稳定。
2. $x=-10$ 时相对误差出现了波峰，直到 $N=20$ 之后误差才趋于稳定，说明此逼近算法不够稳定。
3. 可以采用插值算法对函数进行逼近。

3 习题三 计算积分

利用分部积分，可以得到

$$
\begin{aligned}
I_n &= \left[xe^x|_0^1 - \int_0^1 nx^{n-1}e^x dx \right] \\
&= \left[e^1 - n\int_0^1 x^{n-1}e^x dx \right] \\
&= e - nI_{n-1}
\end{aligned} \tag{1}
$$

此即为递推公式。以 $I_0 = e-1$ 为初始值,由递推公式可得 $I_{20} = -129.26370813285942$。

e^x 的级数展开式为 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$，将此展开式带入 I_n 中，将求和号与积分号换序，即可得到

$$I_N = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(N+1+n)}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{2}$$

利用 python 进行累加求和可得 $I_{20} = 0.12380383076256994$。

由 I_{20} 的准确值即可验证方法二更加适合进行计算。

4 习题四 序列是否收敛

计算可得 $U_0 = \frac{11}{2}, U_1 = \frac{61}{11}$，结合递推关系式可得 $\lim_{n\to\infty} u_n = 100$。

首先取 $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 1, 1)$，得到

$$u_n = \frac{\beta 6^{n+1} + \gamma 5^{n+1}}{\beta 6^n + \gamma 5^n} \tag{3}$$

于是 $\lim_{n\to\infty} U_n = 6$。

针对迭代公式（1），100 是一个稳定的收敛点，而 6 和 5 是不稳定的收敛点，对误差进行分析：

$$\begin{aligned} &111 - \frac{1130 - \frac{3000}{u+\delta}}{u+\delta} \\ &= 111 - 1130(u+\delta)^{-1} + 3000(u+\delta)^{-2}. \end{aligned} \tag{4}$$

同时对 $(u+\delta)^{-2}$ 进行 Taylor 展开有：

$$\begin{aligned} (u+\delta)^{-1} &= \frac{1}{u} - \frac{1}{u^2}\delta - \frac{1}{u^3}\delta^2, \\ (u+\delta)^{-2} &= \frac{1}{u^2} - \frac{2}{u^3}\delta - \frac{3}{2u^4}\delta^2. \end{aligned} \tag{5}$$

然后就有

$$\begin{aligned} &111 - 1130(u+\delta)^{-1} + 3000(u+\delta)^{-2} \\ &\approx -1130u^{-1} + 3000u^{-2} + \left(\frac{1130}{u^2} - \frac{6000}{u^3}\right)\delta. \end{aligned} \tag{6}$$

所以最终产生了误差。