Самостоятельная работа 2 Мустафоев Шохрух

МТН 202-1.

Вариант 61.

$$y' + 2xy = x \cdot e^{-x^2} \qquad y(0) = -1$$

1) Находим решения задачи Коши аналитическим методом

$y = uv$

$y' = u'v + v'u$

$u'v + v'u + 2xuv = x \cdot e^{-x^2}$

$$\begin{cases} u'v = x \cdot e^{-x^2} \\ v'\cancel{u} + 2x\cancel{u}v = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u'v = x \cdot e^{-x^2} \\ v' + 2xv = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \dfrac{dv}{dx} = -2xv \Rightarrow \int \dfrac{dv}{v} = \int -2x\,dx$

$\Rightarrow \ln v = -x^2 \Rightarrow e^{-x^2} = v$

$u' \cdot e^{-x^2} = x \cdot e^{-x^2} \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = x \Rightarrow u = \dfrac{x^2}{2} + C$

$y = u \cdot v = e^{-x^2} \cdot \left(\dfrac{x^2}{2} + C\right)$

$y(0) = -1.$

$-1 = e^0 \cdot C$

$C = -1.$

$y = e^{-x^2} \cdot \left(\dfrac{x^2}{2} - 1\right)$ частное решение.

2) Находим решения задачи Коши с помощью рядов.

$y = f(x_0) + \dfrac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dfrac{f''(x_0) \cdot (x - x_0)^2}{2!} \ldots\ldots$ - Тейлор

$f(x) = e^{-x^2} \cdot \left(\dfrac{x^2}{2} - 1\right) \qquad y(0) = -1.$

$x_0 = 0.$

$f(x) = e^{-x^2} \cdot \left(\dfrac{x^2}{2} - 1\right) \qquad f(0) = -1.$

$f'(x) = e^{-x^2} \cdot (x - x^3) \qquad f'(0) = 0.$

$f''(x) = e^{-x^2} \cdot (2x^4 - 5x^2 + 1) \qquad f''(0) = 1.$

$f'''(x) = e^{-x^2} \cdot (-4x^5 + 18x^3 - 12x) \qquad f'''(0) = 0.$

$f''''(x) = e^{-x^2} \cdot (8x^6 - 56x^4 + 78x^2 - 12) \qquad f''''(0) = -12.$

$$y = -1 + \frac{0}{1!} \cdot x + \frac{1}{2!} \cdot x^2 + \frac{0 \cdot x^3}{6} + \frac{-12 \cdot x^4}{24}$$

$$y = -1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2}.$$