

厦门大学《微积分 I-1》课程期末试卷



试卷类型：理工类 A 卷（√）B 卷（ ）

学年学期：2024-2025 第一学期 考试时间：2025.1.7

一、选择题（每小题 4 分，共 20 分）：

1. $\int_0^\pi \sin^3 x dx = (\text{C})$ 。

(A) 0; (B) $\frac{2}{3}$; (C) $\frac{4}{3}$; (D) 2。

2. 下列函数中不是 $\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$ 的原函数的是 (D)。

(A) $\arcsin(2x-1)$; (B) $\arccos(1-2x)$; (C) $2 \arctan \sqrt{\frac{x}{1-x}}$; (D) $2 \operatorname{arccot} \sqrt{\frac{x}{1-x}}$ 。

3. 设 q 为常数，对于积分 $\int_1^2 \frac{1}{(x-1)^q} dx$ 下列说法中正确的是 (B)。

(A) 当 $q=1$ 时收敛; (B) 当 $0 < q < 1$ 时收敛; (C) 当 $q > 1$ 时收敛; (D) 当 $q < 0$ 时发散。

4. 对定义在闭区间上的函数来说，下列说法中不正确的是 (D)。

(A) 连续必可积; (B) 可积必有界; (C) 连续必有原函数; (D) 可积必连续。

5. 设 a 为常数，若求 $\int \frac{x^2+4x+a}{(x+1)^2(x^2+1)} dx$ 的结果中没有对数函数项，则 $a = (\text{B})$ 。

(A) 0; (B) 1; (C) 2; (D) 3。

二、填空题（每小题 4 分，共 20 分）：

1. 设 $f(x) = \int_{x^2}^{x^3} \sqrt{1+t^2} dt$ ，则 $f'(\sqrt{2}) = \underline{18-2\sqrt{10}}$ 。

2. $\int_{-1}^1 (x + \sqrt{1-x^2} + 1)^2 dx = \underline{4+\pi}$ 。

3. 已知 $\int f(x) dx = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C$ ，则 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{f(\tan x)}{\cos^2 x} dx = \underline{\ln(1+\sqrt{2})}$ 。

4. 由曲线 $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ 与两直线 $y=x$ 、 $y=2$ 所围成的平面图形的面积为 1。

5. 曲线 $y = \frac{\sqrt{x}}{3}(3-x)$ 相应于 $1 \leq x \leq 4$ 的一段弧的长度为 $\underline{\frac{10}{3}}$ 。

三、求下列不定积分（每小题 6 分，共 12 分）：

$$1. \int \frac{1}{e^x - e^{-x}} dx;$$

$$\text{解: } \int \frac{1}{e^x - e^{-x}} dx = \int \frac{e^x}{e^{2x} - 1} dx = \int \frac{de^x}{(e^x)^2 - 1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right| + C.$$

$$2. \int \frac{x^2}{\sqrt{(1-x^2)^3}} dx.$$

解法一：令 $x = \sin t, t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, 则 $\sqrt{1-x^2} = \cos t$, 代入

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{\sqrt{(1-x^2)^3}} dx &= \int \frac{\sin^2 t}{\cos^3 t} d\sin t = \int \tan^2 t dt = \int (\sec^2 t - 1) dt = \tan t - t + C \\ &= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \arcsin x + C. \end{aligned}$$

$$\text{解法二: } \int \frac{x^2}{\sqrt{(1-x^2)^3}} dx = \int x d\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \arcsin x + C.$$

四、(8 分) 求在极坐标下心形线 $\rho = 1 + \cos \theta (0 \leq \theta \leq 2\pi)$ 的弧长。

$$\begin{aligned} \text{解: } ds &= \sqrt{(\rho(\theta))^2 + (\rho'(\theta))^2} d\theta = \sqrt{(1+\cos\theta)^2 + (-\sin\theta)^2} d\theta = \sqrt{2(1+\cos\theta)} d\theta \\ &= 2 \left| \cos \frac{\theta}{2} \right| d\theta. \text{ 由对称性, 其弧长 } s = 2 \int_0^\pi 2 \left| \cos \frac{\theta}{2} \right| d\theta = 4 \int_0^\pi \cos \frac{\theta}{2} d\theta = 8 \sin \frac{\theta}{2} \Big|_0^\pi = 8. \end{aligned}$$

五、求下列定积分（每小题 7 分，共 14 分）：

$$1. \int_0^4 \frac{1}{(\sqrt{x}+1)^3} dx;$$

$$\begin{aligned} \text{解: } \int_0^4 \frac{1}{(\sqrt{x}+1)^3} dx &= \int_0^2 \frac{1}{(t+1)^3} dt = \int_0^2 \frac{2t}{(t+1)^3} dt = \int_0^2 \frac{2}{(t+1)^2} - \frac{2}{(t+1)^3} d(t+1) \\ &= \left[-\frac{2}{t+1} + \frac{1}{(t+1)^2} \right] \Big|_0^2 = -\frac{2}{3} + \frac{1}{9} + 2 - 1 = \frac{4}{9}. \end{aligned}$$

$$2. \int_1^e x \ln^2 x dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解法一: } \int_1^e x \ln^2 x dx &= \frac{1}{2} \int_1^e \ln^2 x dx^2 = \frac{1}{2} x^2 \ln^2 x \Big|_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e x^2 d\ln^2 x \\ &= \frac{1}{2} x^2 \ln^2 x \Big|_1^e - \int_1^e x \ln x dx = \frac{1}{2} x^2 \ln^2 x \Big|_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e \ln x dx^2 \\ &= \frac{1}{2} x^2 \ln^2 x \Big|_1^e - \frac{1}{2} x^2 \ln x \Big|_1^e + \frac{1}{2} \int_1^e x dx = \frac{1}{2} x^2 \ln^2 x \Big|_1^e - \frac{1}{2} x^2 \ln x \Big|_1^e + \frac{1}{4} x^2 \Big|_1^e \\ &= \frac{1}{2} e^2 - 0 - \frac{1}{2} e^2 + 0 + \frac{1}{4} e^2 - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} e^2 - \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

$$\text{解法二: } \int_1^e x \ln^2 x dx \stackrel{t=\ln x}{=} \int_0^1 e^t \cdot t^2 de^t = \int_0^1 t^2 e^{2t} dt = \frac{1}{4} e^{2t} (2t^2 - 2t + 1) \Big|_0^1 = \frac{1}{4} e^2 - \frac{1}{4}.$$

六、(8分) 求反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^4-1}} dx$ 。

$$\begin{aligned} \text{解法一: } & \int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^4-1}} dx = \int_1^{+\infty} \frac{x^3}{x^4\sqrt{x^4-1}} dx = \frac{1}{4} \int_1^{+\infty} \frac{dx^4}{x^4\sqrt{x^4-1}} \\ & t=\sqrt{x^4-1} \quad \frac{1}{4} \int_0^{+\infty} \frac{dt^2+1}{(t^2+1)t} dt = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{2} \arctan t \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{\pi}{4}。 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{解法二: } & \int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^4-1}} dx = \int_1^{+\infty} \frac{t^{\frac{1}{x}}}{\sqrt{1-t^4}} dt = \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^4}} dt = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-(t^2)^2}} dt^2 \\ & = \frac{1}{2} \arcsin t^2 \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}。 \end{aligned}$$

$$\text{解法三: } \int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^4-1}} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sec t \tan t} d\sec t = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{4}。$$

七、(10分) 设 D 是由曲线 $y = \cos^2 x$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) 与两直线 $x=0$ 、 $y=0$ 所围成的平面图形，试求平面图形 D 绕 y 轴旋转一周所形成的旋转体的体积 V 。

$$\begin{aligned} \text{解法一: } & V = \pi \int_0^1 (\arccos \sqrt{y})^2 dy \stackrel{y=\cos^2 x}{=} \pi \int_{\frac{\pi}{2}}^0 x^2 d\cos^2 x \\ & = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin 2x dx = \frac{\pi}{4} (-2x^2 \cos 2x + 2x \sin 2x + \cos 2x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} \left(\frac{\pi^2}{2} - 2\right) = \frac{1}{8} \pi^3 - \frac{1}{2} \pi。 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{解法二: } & V = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos^2 x dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx + \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos 2x dx \\ & = \frac{1}{2} \pi x^2 \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \pi \left(\frac{1}{2} x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{8} \pi^3 - 0 + \pi \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8} \pi^3 - \frac{1}{2} \pi。 \end{aligned}$$

八、(8分) 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调增加且连续，证明：

$$\int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b g(x) dx < (b-a) \int_a^b f(x)g(x) dx。$$

证：作辅助函数 $\varphi(x) = (x-a) \int_a^x f(t)g(t) dt - \int_a^x f(t) dt \cdot \int_a^x g(t) dt$ ， $x \in [a, b]$ ，则 $\varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 可导，且注意到当 $x \in (a, b)$ 时，

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \int_a^x f(t)g(t) dt + (x-a)f(x)g(x) - f(x) \cdot \int_a^x g(t) dt - \int_a^x f(t) dt \cdot g(x) \\ &= \int_a^x [f(t)g(t) + f(x)g(x) - f(x)g(t) - f(t)g(x)] dt \\ &\stackrel{\text{由积分中值定理, } \exists \xi \in (a, x)}{=} [f(x) - f(\xi)][g(x) - g(\xi)](x-a) > 0, \end{aligned}$$

故 $\varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 单调增加，因此 $\varphi(b) > \varphi(a) = 0$ ，得证。