厦门大学《微积分 I-1》课程期末试卷

试卷类型：（理工类 A 卷）　考试日期　2024.1.9

一、选择题（**每小题 4 分，共 20 分**）：

1. 曲线 $y=3x^5-5x^4+1$ 的拐点是（ A ）。

（A）$(1,-1)$；　（B）$(-1,1)$；　（C）$(0,1)$；　（D）$(2,17)$。

2. 若 $f(x)$ 的导函数为 $\sin x$，则 $f(x)$ 的一个原函数是（ D ）。

（A）$1+\cos x$；　（B）$1-\cos x$；　（C）$1+\sin x$；　（D）$1-\sin x$。

3. 数列 $\{\sqrt[n]{n}\}$ 的最大项为（ B ）。

（A）$\sqrt{2}$；　（B）$\sqrt[3]{3}$；　（C）$\sqrt[4]{4}$；　（D）不存在最大项。

4. 下列不等式中错误的是（ C ）。

（A）$\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x<\int_0^1 x\mathrm{d}x$；　（B）$\int_0^1 \sin x\,\mathrm{d}x<\int_0^1 x\mathrm{d}x$；

（C）$\int_0^1 x\mathrm{d}x<\int_0^1 \ln(1+x)\mathrm{d}x$；　（D）$\int_0^1 (1+x)\,\mathrm{d}x<\int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$。

5. 在下列的选项中，$f(x)=\begin{cases}1 & x\text{为有理数}\\ 0 & x\text{为无理数}\end{cases}$ 在闭区间 $[-1,1]$ 上不满足的是（ D ）。

（A）处处不连续；　（B）偶函数；　（C）有界；　（D）可积。

二、填空题（**每小题 4 分，共 20 分**）：

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}(\mathrm{e}^{t^2}-1)\,\mathrm{d}t}{x^6}=$ $\underline{\dfrac{1}{3}}$ 。

2. $\int_{-2}^{2}|\ (|x|-1)\ |\,\mathrm{d}x=$ $\underline{\quad 2\quad}$。

3. 设常数 $b>a$，则当 $a=$ $\underline{\quad 0\quad}$，$b=$ $\underline{\quad 2\quad}$ 时，定积分 $\int_a^b (2x-x^2)\,\mathrm{d}x$ 取到最大值。

4. 函数 $f(x)=x\mathrm{e}^x$ 的带有佩亚诺余项的 3 阶麦克劳林公式是 $\underline{x+x^2+\frac{1}{2}x^3+o(x^3)}$ 。

5. 在极坐标下，双组线 $\rho^2=3\cos 2\theta$ 所围成的平面图形的面积为 $\underline{\quad 3\quad}$。

三、求下列不定积分（**每小题 6 分，共 12 分**）：

1. $\int \frac{2x-2}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x$；

解：$\int \frac{2x-2}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x^2+2x+2}\mathrm{d}(x^2+2x+2) - 4\int \frac{1}{(x+1)^2+1}\mathrm{d}(x+1)$

$= \ln(x^2+2x+2) - 4\arctan(x+1) + C$ 。

2. $\int \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}}\mathrm{d}x$ 。

解：令 $x=\tan t, t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$，则 $\sqrt{x^2+1}=\sec t$，代入

$\int \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sec^3 t}\mathrm{d}(\tan x) = \int \cos t\,\mathrm{d}t = \sin t + C = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C$ 。

四、（**8 分**）求曲线 $y=\sqrt{\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{3}{2}}$ 上相应于 $1\le x\le 2$ 的一段弧的长度。

解：由 $\mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}=\sqrt{1+(y')^2}\mathrm{d}x=\sqrt{1^2+[\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\frac{3}{2}\cdot(x-1)^{\frac{1}{2}}]^2}\mathrm{d}x$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{3x-1}\,\mathrm{d}x$，因此所求的一段弧的长度为

$l=\int_1^2 \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{3x-1}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2}}{6}\int_1^2 (3x-1)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}(3x-1) = \frac{\sqrt{2}}{9}(3x-1)^{\frac{3}{2}}\big|_1^2 = \frac{1}{9}(5\sqrt{10}-4)$ 。

五、求下列定积分（**每小题 6 分，共 12 分**）：

1. $\int_1^{\frac{4}{3}} \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x}}\,\mathrm{d}x$；

解：令 $t=\sqrt{\frac{x-1}{x}}$，则 $x=\frac{1}{1-t^2}$，代入

$\int_1^{\frac{4}{3}} \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x}}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}}(1-t^2)t\,\mathrm{d}(\frac{1}{1-t^2}) = \int_0^{\frac{1}{2}}(1-t^2)t\cdot\frac{2t}{(1-t^2)^2}\mathrm{d}t = -\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{2t^2}{t^2-1}\mathrm{d}t$

$=\int_0^{\frac{1}{2}}(-2-\frac{2}{t^2-1})\,\mathrm{d}t = -1+\ln\frac{1+t}{1-t}\big|_0^{\frac{1}{2}} = \ln 3 - 1$ 。

2. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$ 。

解： $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\,\mathrm{d}\tan x = x\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} - (\ln|\sec x|)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$ 。

六、（8 分）求反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x(x+1)^3}}\,\mathrm{d}x$ 。

解： 令 $t = \frac{1}{x}$，则 $x = \frac{1}{t}$，代入

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x(x+1)^3}}\,\mathrm{d}x = \int_{+\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{t}(\frac{1}{t}+1)^3}}\,\mathrm{d}\frac{1}{t} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{(t+1)^3}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} (t+1)^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}(t+1)$$

$$= -2(t+1)^{-\frac{1}{2}}\Big|_0^{+\infty} = -2\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{t+1}} + 2 = 2 \text{ 。}$$

七、（14 分）设由曲线 $y = \ln x\ (x \ge 1)$ 与两直线 $y = 0$、$y = \frac{2}{\mathrm{e}}x - 1$ 所围成的平面图形为 D。

试求：

(1) 平面图形 D 的面积 A;

(2) 平面图形 D 绕 x 轴旋转一周所形成的旋转体的体积 V。

解： (1) $A = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}}{2}(y+1) - \mathrm{e}^y\,\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{e}}{2}(\frac{y^2}{2}\Big|_0^1 + 1) - \mathrm{e}^y\Big|_0^1 = \frac{3}{4}\mathrm{e} - (\mathrm{e}-1) = 1 - \frac{1}{4}\mathrm{e}$ 。

(2) $V = \pi\int_1^{\mathrm{e}} \ln^2 x\,\mathrm{d}x - \frac{1}{3}\pi\cdot 1^2\cdot\frac{\mathrm{e}}{2} \overset{t=\ln x}{=} \pi\int_0^1 t^2\,\mathrm{d}\mathrm{e}^t - \frac{1}{6}\pi\mathrm{e} = \pi\int_0^1 t^2\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t - \frac{1}{6}\pi\mathrm{e}$

$$= \pi\mathrm{e}^t(t^2 - 2t + 2)\Big|_0^1 - \frac{1}{6}\pi\mathrm{e} = \pi(\mathrm{e}-2) - \frac{1}{6}\pi\mathrm{e} = \frac{5}{6}\pi\mathrm{e} - 2\pi \text{ 。}$$

八、（6 分）设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上二阶可导且 $f''(x) \ge 0$，证明：对于 $\forall a > 0$，都成立不等式

$$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x \ge a f(\frac{a}{2}) \text{ 。}$$

证法一： 作辅助函数 $\varphi(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - x f(\frac{x}{2})$，$x \in [0,a]$，则 $\varphi(x)$ 在 $[0,a]$ 可导，且

$$\varphi'(x) = f(x) - f(\frac{x}{2}) - \frac{x}{2}f'(\frac{x}{2}) = \int_{\frac{x}{2}}^{x} [f'(t) - f'(\frac{x}{2})]\,\mathrm{d}t \ge 0 \text{ 。}$$

（或者$\varphi'(x)=f(x)-f(\frac{x}{2})-\frac{x}{2}f'(\frac{x}{2})\overset{\text{微分中值定理}}{=}\frac{x}{2}[f'(\xi)-f'(\frac{x}{2})]\ge 0$，其中$\xi$在$\frac{x}{2}$与$x$之间）

因此，$\varphi(x)$在$[0,a]$单调不减，故有$0=\varphi(0)\le\varphi(a)$，即$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x\ge a\,f(\frac{a}{2})$。

证法二：由泰勒公式，存在ξ在a与x之间，使得$f(x)=f(\frac{a}{2})+f'(\frac{a}{2})(x-\frac{a}{2})+\frac{f''(\xi)}{2}(x-\frac{a}{2})^2$。

又因为根据题意有$f''(\xi)\ge 0$，所以$f(x)\ge f(\frac{a}{2})+f'(\frac{a}{2})(x-\frac{a}{2})$，进一步地，

$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x\ge\int_0^a f(\frac{a}{2})\,\mathrm{d}x+f'(\frac{a}{2})\int_0^a(x-\frac{a}{2})\,\mathrm{d}x=a\,f(\frac{a}{2})$，得证。