厦门大学《微积分 I-1》课程期中试卷解答

__________学院__________系__________年级__________专业

试卷类型:（理工类A卷）　　　　考试时间:2023.11.18

一、选择题：（每小题 4 分，共 16 分）

1. $x=0$ 是函数 $f(x)=\dfrac{e^{1/x}-1}{e^{1/x}+1}$ 的（　B　）。

（A）可去间断点；　（B）跳跃间断点；　（C）无穷间断点；　（D）振荡间断点。

2. 用数列极限的定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+n}{n^2+1}=1$，对于 $\forall\varepsilon>0$，可取 $N=$（　D　）。

（A）$\dfrac{1}{\varepsilon}$；　（B）$\dfrac{2}{\varepsilon}$；　（C）$[\dfrac{1}{2\varepsilon}]$；　（D）$[\dfrac{1}{\varepsilon}]+1$。

3. 设 $f(x)=2^x+3^x-2+2x^2$，则当 $x\to 0$ 时，$f(x)$（　B　）。

（A）与 x 是等价无穷小；　（B）与 x 同阶但非等价无穷小；

（C）是比 x 高阶的无穷小；　（D）是比 x 低阶的无穷小。

4. 函数 $y=(x^2+x-2)|x^3-x|$ 的不可导点的个数为（　C　）。

（A）0；　（B）1；　（C）2；　（D）3。

二、填空题：（每小题 4 分，共 24 分）

1. 设 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+ax^2-x+4}{1+x}$ 具有极限 b，则 $a=\underline{\quad -4\quad}$，$b=\underline{\quad 10\quad}$。

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\operatorname{arccot}x}{x}=\underline{\qquad 0\qquad}$。

3. 函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin ax}{2x} & x>0\\ b & x=0\\ (1-2x)^{\frac{1}{x}} & x<0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=\underline{\quad\dfrac{2}{e^2}\quad}$，$b=\underline{\quad\dfrac{1}{e^2}\quad}$。

4. 设 $f(x)=\sqrt{\dfrac{(2x+2)\sqrt{x}}{e^{2x-2}}}$，则 $f'(1)=\underline{\qquad -1\qquad}$。

5. 设 $y=f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 可导且满足 $\dfrac{d}{dx}f(\sec^2 x)=\cot x$，则 $dy|_{x=2}=\underline{\quad\dfrac{1}{4}dx\quad}$。

6. 设 $y=x^2\sin 2x$，则 $y^{(5)}|_{x=0}=\underline{\qquad -160\qquad}$。

三、求下列函数极限：（每小题 6 分，共 18 分）

1. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\arcsin(x^2-1)}$；

解：$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\arcsin(x^2-1)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(\sqrt[3]{1+(x-1)}-1)}{\arcsin(x^2-1)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\frac{1}{3}(x-1)}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{3(x+1)}=\dfrac{1}{6}$。

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{2}{\pi}\arctan x)^x$；

解：$\lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{2}{\pi}\arctan x)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{x\ln(\frac{2}{\pi}\arctan x)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln(\frac{2}{\pi}\arctan x)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{\pi}\arctan x-1}{\frac{1}{x}}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{\pi}\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}}$

$=\mathrm{e}^{-\frac{2}{\pi}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}}=\mathrm{e}^{-\frac{2}{\pi}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{-2}+1}}=\mathrm{e}^{-\frac{2}{\pi}}$。

3. 已知 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{xf(x)-\sin x}{x^3}=\dfrac{2}{3}$，求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-1}{x^2}$。

解：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{xf(x)-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}(\dfrac{xf(x)-\sin x}{x^3}+\dfrac{\sin x-x}{x^3})$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{xf(x)-\sin x}{x^3}+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-x}{x^3}=\dfrac{2}{3}+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-x}{x^3}=\dfrac{2}{3}+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-1}{3x^2}$

$=\dfrac{2}{3}+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{2}$。

四、（本题 8 分）求曲线 $\begin{cases}x=\arcsin\dfrac{2t}{1+t^2}\\ y=\ln(1+t^2)\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 处的切线方程。

解：由 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\dfrac{2t}{1+t^2}$， $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{\sqrt{1-(\frac{2t}{1+t^2})^2}}\cdot\dfrac{2(1+t^2)-2t\cdot2t}{(1+t^2)^2}=\dfrac{2}{1+t^2}$，

因此 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=t$。又在 $(0,0)$ 处， $t=0$。从而 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\big|_{(0,0)}=0$，故所求切线方程为 $y=0$。

五、（本题 8 分）求由方程 $y=\tan(x+y)$ 所确定的隐函数 $y=y(x)$ 的一阶导数和二阶导数。

解：方程 $y=\tan(x+y)$ 两边对 x 求导，得 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\sec^2(x+y)\cdot(1+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})$，解得

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{\sec^2(x+y)}{\tan^2(x+y)}=-\frac{1+y^2}{y^2}=-1-\frac{1}{y^2}$，继续两边对 x 求导, 得

$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}(-1-\frac{1}{y^2})\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2}{y^3}\cdot(-1-\frac{1}{y^2})=-\frac{2}{y^3}-\frac{2}{y^5}$。

六、（本题 10 分）设数列 $\{x_n\}$ 满足：$x_1=2$，$x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{1}{x_n})$。证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求其极限。

证明：先证 $1\le x_n\le 2$。用归纳法。

当 $n=1$ 时，$x_1=2$ 显然满足。

假设 $n=k$ 时结论成立，即有 $1\le x_k\le 2$，则当 $n=k+1$ 时，由 $2\ge\frac{1}{2}(x_k+\frac{1}{x_k})\ge\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{x_n\cdot\frac{1}{x_n}}=1$，

得 $1\le x_{k+1}\le 2$。因此有 $1\le x_n\le 2$。

注意到当 $1\le x_n\le 2$ 时，有 $\frac{1}{x_n}\le x_n$，故 $x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{1}{x_n})\le x_n$，因此 $\{x_n\}$ 单调递减。

由单调有界准则，此数列 $\{x_n\}$ 极限存在。令该极限值为 a，则 $1\le a\le 2$。由 $x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{1}{x_n})$，

令 $n\to\infty$，得 $a=\frac{1}{2}(a+\frac{1}{a})$，故 $a=1$，即有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$。

七、（本题 8 分）证明函数 $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\in\mathrm{Q}\\ 0 & x\in\mathrm{R}\setminus\mathrm{Q}\end{cases}$ 除在 $x=0$ 处可导外，在其它点处均不可导的。

证明：注意到当 $x\ne 0$ 时，$|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}|=\frac{|f(x)|}{|x|}\le|x|$，因此由夹逼准则，得

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$，故 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导，且 $f'(0)=0$。

对于任意的 $x_0\ne 0$，取一个有理数点列 $\{r_n\}$ 满足：$r_n\ne x_0$ 且当 $n\to\infty$ 时，$r_n\to x_0$，则当 $n\to\infty$ 时，$f(r_n)=r_n{}^2\to x_0{}^2$。再取一个无理数点列 $\{i_n\}$ 满足：$i_n\ne x_0$ 且当 $n\to\infty$ 时，$i_n\to x_0$，则 $f(i_n)=0$。根据数列极限和函数极限的关系，可知 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在，因此 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续，也就不可导。证毕！

八、（本题8分）设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且 $0<f(x)<1$，在 $(0,1)$ 内可导且 $f'(x)\neq 1$。证明 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内存在唯一的不动点，即在 $(0,1)$ 内有且只有一个点 ξ，使得 $f(\xi)=\xi$。

证明：先证不动点的存在性。作辅助函数 $\varphi(x)=f(x)-x$，则 $\varphi(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，在 $(0,1)$ 内可导，注意到 $\varphi(0)=f(0)>0$，$\varphi(1)=f(1)-1<0$。故由零点存在定理知，存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $\varphi(\xi)=0$，即有 $f(\xi)=\xi$。

最后证明唯一性。用反证法。假设还有一个 $\xi_1\in(0,1)$, $\xi_1\neq\xi$，使得 $\varphi(\xi_1)=0$。在 ξ 与 ξ_1 之间的区间对 $\varphi(x)$ 用罗尔定理，则存在 $\eta\in(0,1)$, 使得 $\varphi'(\eta)=0$，即 $f'(\eta)=1$，这与题设 $f'(x)\neq 1$ 矛盾，所以唯一性得证。