



厦门大学《微积分 I-1》课程期末试卷

试卷类型：理工类      A 卷 ( ☒ ) B 卷 (    )

学年学期：2024-2025 第一学期    考试时间：2025.1.7

一、选择题（每小题 4 分，共 20 分）：

1.  $\int_0^{\pi} \sin^3 x dx =$  ( C )。

(A) 0;    (B)  $\frac{2}{3}$ ;    (C)  $\frac{4}{3}$ ;    (D) 2。

2. 下列函数中不是  $\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$  的原函数的是 ( D )。

(A)  $\arcsin(2x-1)$ ;    (B)  $\arccos(1-2x)$ ;    (C)  $2\arctan\sqrt{\frac{x}{1-x}}$ ;    (D)  $2\operatorname{arccot}\sqrt{\frac{x}{1-x}}$ 。

3. 设  $q$  为常数，对于积分  $\int_1^2 \frac{1}{(x-1)^q} dx$  下列说法中正确的是 ( B )。

(A) 当  $q=1$  时收敛; (B) 当  $0 < q < 1$  时收敛; (C) 当  $q > 1$  时收敛; (D) 当  $q < 0$  时发散。

4. 对定义在闭区间上的函数来说，下列说法中不正确的是 ( D )。

(A) 连续必可积;    (B) 可积必有界;    (C) 连续必有原函数;    (D) 可积必连续。

5. 设  $a$  为常数，若求  $\int \frac{x^2+4x+a}{(x+1)^2(x^2+1)} dx$  的结果中没有对数函数项，则  $a =$  ( B )。

(A) 0;    (B) 1;    (C) 2;    (D) 3。

二、填空题（每小题 4 分，共 20 分）：

1. 设  $f(x) = \int_{x^2}^{x^3} \sqrt{1+t^2} dt$ ，则  $f'(\sqrt{2}) =$   $18-2\sqrt{10}$ 。

2.  $\int_{-1}^1 (x + \sqrt{1-x^2} + 1)^2 dx =$   $4 + \pi$ 。

3. 已知  $\int f(x) dx = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C$ ，则  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{f(\tan x)}{\cos^2 x} dx =$   $\ln(1+\sqrt{2})$ 。

4. 由曲线  $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$  与两直线  $y = x$ 、 $y = 2$  所围成的平面图形的面积为 1。

5. 曲线  $y = \frac{\sqrt{x}}{3}(3-x)$  相应于  $1 \leq x \leq 4$  的一段弧的长度为  $\frac{10}{3}$ 。

三、求下列不定积分（每小题 6 分，共 12 分）：

1.  $\int \frac{1}{e^x - e^{-x}} dx$ ;

解： $\int \frac{1}{e^x - e^{-x}} dx = \int \frac{e^x}{e^{2x} - 1} dx = \int \frac{de^x}{(e^x)^2 - 1} = \frac{1}{2} \ln \frac{|e^x - 1|}{e^x + 1} + C$ 。

2.  $\int \frac{x^2}{\sqrt{(1-x^2)^3}} dx$ 。

解法一：令  $x = \sin t, t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ，则  $\sqrt{1-x^2} = \cos t$ ，代入

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{\sqrt{(1-x^2)^3}} dx &= \int \frac{\sin^2 t}{\cos^3 t} d\sin t = \int \tan^2 t dt = \int (\sec^2 t - 1) dt = \tan t - t + C \\ &= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \arcsin x + C。 \end{aligned}$$

解法二： $\int \frac{x^2}{\sqrt{(1-x^2)^3}} dx = \int x d\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \arcsin x + C$ 。

四、（8 分）求在极坐标下心形线  $\rho = 1 + \cos \theta (0 \leq \theta \leq 2\pi)$  的弧长。

解： $ds = \sqrt{(\rho(\theta))^2 + (\rho'(\theta))^2} d\theta = \sqrt{(1 + \cos \theta)^2 + (-\sin \theta)^2} d\theta = \sqrt{2(1 + \cos \theta)} d\theta$   
 $= 2 \left| \cos \frac{\theta}{2} \right| d\theta$ 。由对称性，其弧长  $s = 2 \int_0^\pi 2 \left| \cos \frac{\theta}{2} \right| d\theta = 4 \int_0^\pi \cos \frac{\theta}{2} d\theta = 8 \sin \frac{\theta}{2} \Big|_0^\pi = 8$ 。

五、求下列定积分（每小题 7 分，共 14 分）：

1.  $\int_0^4 \frac{1}{(\sqrt{x}+1)^3} dx$ ;

解： $\int_0^4 \frac{1}{(\sqrt{x}+1)^3} dx \stackrel{t=\sqrt{x}}{=} \int_0^2 \frac{1}{(t+1)^3} dt^2 = \int_0^2 \frac{2t}{(t+1)^3} dt = \int_0^2 \frac{2}{(t+1)^2} - \frac{2}{(t+1)^3} d(t+1)$   
 $= \left[ -\frac{2}{t+1} + \frac{1}{(t+1)^2} \right] \Big|_0^2 = -\frac{2}{3} + \frac{1}{9} + 2 - 1 = \frac{4}{9}$ 。

2.  $\int_1^e x \ln^2 x dx$ 。

解法一： $\int_1^e x \ln^2 x dx = \frac{1}{2} \int_1^e \ln^2 x dx^2 = \frac{1}{2} x^2 \ln^2 x \Big|_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e x^2 d\ln^2 x$   
 $= \frac{1}{2} x^2 \ln^2 x \Big|_1^e - \int_1^e x \ln x dx = \frac{1}{2} x^2 \ln^2 x \Big|_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e \ln x dx^2$   
 $= \frac{1}{2} x^2 \ln^2 x \Big|_1^e - \frac{1}{2} x^2 \ln x \Big|_1^e + \frac{1}{2} \int_1^e x dx = \frac{1}{2} x^2 \ln^2 x \Big|_1^e - \frac{1}{2} x^2 \ln x \Big|_1^e + \frac{1}{4} x^2 \Big|_1^e$   
 $= \frac{1}{2} e^2 - 0 - \frac{1}{2} e^2 + 0 + \frac{1}{4} e^2 - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} e^2 - \frac{1}{4}$ 。

解法二： $\int_1^e x \ln^2 x dx \stackrel{t=\ln x}{=} \int_0^1 e^t \cdot t^2 de^t = \int_0^1 t^2 e^{2t} dt = \frac{1}{4} e^{2t} (2t^2 - 2t + 1) \Big|_0^1 = \frac{1}{4} e^2 - \frac{1}{4}$ 。

六、(8分) 求反常积分  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^4-1}} dx$ 。

解法一:  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^4-1}} dx = \int_1^{+\infty} \frac{x^3}{x^4\sqrt{x^4-1}} dx = \frac{1}{4} \int_1^{+\infty} \frac{dx^4}{x^4\sqrt{x^4-1}}$   
 $\stackrel{t=\sqrt{x^4-1}}{=} \frac{1}{4} \int_0^{+\infty} \frac{d(t^2+1)}{(t^2+1)t} = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{2} \arctan t \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{2} (\frac{\pi}{2} - 0) = \frac{\pi}{4}。$

解法二:  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^4-1}} dx \stackrel{t=\frac{1}{x}}{=} \int_1^0 \frac{t^3}{\sqrt{1-t^4}} d\frac{1}{t} = \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^4}} dt = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-(t^2)^2}} dt^2$   
 $= \frac{1}{2} \arcsin t^2 \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}。$

解法三:  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^4-1}} dx \stackrel{x^2=\sec t}{=} \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sec t \tan t} d\sec t = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{4}。$

七、(10分) 设  $D$  是由曲线  $y = \cos^2 x$  ( $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ) 与两直线  $x=0$ 、 $y=0$  所围成的平面图形, 试求平面图形  $D$  绕  $y$  轴旋转一周所形成的旋转体的体积  $V$ 。

解法一:  $V = \pi \int_0^1 (\arccos \sqrt{y})^2 dy \stackrel{y=\cos^2 x}{=} \pi \int_{\frac{\pi}{2}}^0 x^2 d\cos^2 x$   
 $= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin 2x dx = \frac{\pi}{4} (-2x^2 \cos 2x + 2x \sin 2x + \cos 2x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} (\frac{\pi^2}{2} - 2) = \frac{1}{8} \pi^3 - \frac{1}{2} \pi。$

解法二:  $V = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos^2 x dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx + \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos 2x dx$   
 $= \frac{1}{2} \pi x^2 \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \pi (\frac{1}{2} x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{8} \pi^3 - 0 + \pi (-\frac{1}{4} - \frac{1}{4}) = \frac{1}{8} \pi^3 - \frac{1}{2} \pi。$

八、(8分) 设  $f(x)$  和  $g(x)$  在  $[a, b]$  上单调增加且连续, 证明:

$$\int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b g(x) dx < (b-a) \int_a^b f(x)g(x) dx。$$

证: 作辅助函数  $\varphi(x) = (x-a) \int_a^x f(t)g(t) dt - \int_a^x f(t) dt \cdot \int_a^x g(t) dt$ ,  $x \in [a, b]$ , 则  $\varphi(x)$  在  $[a, b]$  可导, 且注意到当  $x \in (a, b)$  时,

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \int_a^x f(t)g(t) dt + (x-a)f(x)g(x) - f(x) \cdot \int_a^x g(t) dt - \int_a^x f(t) dt \cdot g(x) \\ &= \int_a^x [f(t)g(t) + f(x)g(x) - f(x)g(t) - f(t)g(x)] dt \\ &= \int_a^x [f(x) - f(t)] \cdot [g(x) - g(t)] dt \stackrel{\text{由积分中值定理, } \exists \xi \in (a, x)}{=} [f(x) - f(\xi)] \cdot [g(x) - g(\xi)](x-a) > 0, \end{aligned}$$

故  $\varphi(x)$  在  $[a, b]$  单调增加, 因此  $\varphi(b) > \varphi(a) = 0$ , 得证。