



厦门大学《微积分 I-1》课程期中试卷

试卷类型：理工类 A 卷（√）B 卷（ ）

学年学期：2024-2025 第一学期 考试时间：2024. 11. 16

一、选择题：（每小题 4 分，共 20 分）

1. 关于函数 $f(x) = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$, $x \in (0,1]$, 下列说法错误的是 ()。

- (A) 为无界函数; (B) 为连续函数;
(C) 为可导函数; (D) 当 $x \rightarrow 0^+$ 时为无穷大。

2. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sqrt[3]{8+x^3} - 2$ 是 $(x-x^2)(x^2+x^3)$ 的 ()。

- (A) 等价无穷小 (B) 同阶但非等价无穷小; (C) 高阶的无穷小; (D) 低阶的无穷小。

3. 设 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续且 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-2}{(x-1)^2} = 3$, 则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处 ()。

- (A) 不可导; (B) 可导但 $f'(1) \neq 0$;
(C) 取得极小值; (D) 取得极大值。

4. 函数 $y = \frac{x \ln|x|}{x^2 - 3x + 2}$ 的可去间断点的个数为 ()。

- (A) 0; (B) 1; (C) 2; (D) 3。

5. 设函数 $y = y(x)$ 由 $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$ 所确定, 则 ()。

- (A) 该函数的图形是凸的; (B) 该函数的图形是凹的;
(C) 该函数无最大值; (D) 该函数的图形上有拐点。

二、填空题：（每小题 4 分，共 20 分）

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+2}{x^2+1} \arctan x =$ _____。

2. 设 $y = \arcsin \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$, 则 $dy \Big|_{x=\frac{1}{3}} =$ _____。

3. 曲线 $y = x \ln(e + \frac{1}{x})$ 的渐近线方程为 _____。

4. 设 $f(x) = x^2 e^x \cos x$, 则 $f^{(6)}(0) =$ _____。

5. 已知方程 $e^x - 2x + a = 0$ 有实根, 则常数 a 应满足的条件是 _____。

得 分	
评阅人	

得 分	
评阅人	

三、求下列函数极限：（每小题 7 分，共 14 分）

1. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ ；

得 分	
评阅人	

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right)$ ；

四、（本题 10 分）证明数列极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n(1+2+\dots+n)}{n!}$ 存在，并求其极限值。

得 分	
评阅人	

五、(本题 10 分) 讨论 $f(x)=\begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{x} & x>0 \\ e^{-x+x^2} & x\leq 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处的可导性。

得 分	
评阅人	

六、(本题 10 分) 设方程 $x^3 + 3xy + y^3 = 1$ 确定了隐函数 $y = y(x)$ ，

求 $\frac{dy}{dx}|_{x=0}$ 和 $\frac{d^2y}{dx^2}|_{x=0}$ 。

得 分	
评阅人	

七、(本题 8 分) 证明: 当 $0 < x < \frac{\pi}{4}$ 时, 成立不等式 $1 < \frac{\tan x}{x} < \frac{4}{\pi}$ 。

得 分	
评阅人	

八、(本题 8 分) 设 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上二阶可导且满足 $f(2)=0$ 。令 $g(x)=(x-1)^2 f(x)$, 证明: 在 $(1, 2)$ 内至少存在一点 ξ , 使得 $g''(\xi)=0$ 。

得 分	
评阅人	