厦门大学《微积分 I-1》课程期末试卷

试卷类型：理工类　　A 卷（ √ ）B 卷（　）

学年学期：2024-2025 第一学期 考试时间：2025.1.7

得　分	
评阅人	

一、选择题（**每小题 4 分，共 20 分**）：

1. $\int_0^{\pi} \sin^3 x\,\mathrm{d}x =$（　　　　）。

（A）0；　（B）$\frac{2}{3}$；　（C）$\frac{4}{3}$；　（D）2。

2. 下列函数中不是 $\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$ 的原函数的是（　　　　）。

（A）$\arcsin(2x-1)$；　（B）$\arccos(1-2x)$；　（C）$2\arctan\sqrt{\frac{x}{1-x}}$；　（D）$2\operatorname{arccot}\sqrt{\frac{x}{1-x}}$。

3. 设 q 为常数，对于积分 $\int_1^2 \frac{1}{(x-1)^q}\mathrm{d}x$，下列说法中正确的是（　　　　）。

（A）当 $q=1$ 时收敛；（B）当 $0<q<1$ 时收敛；（C）当 $q>1$ 时收敛；（D）当 $q<0$ 时发散。

4. 对定义在闭区间上的函数来说，下列说法中不正确的是（　　　　）。

（A）连续必可积；　（B）可积必有界；　（C）连续必有原函数；　（D）可积必连续。

5. 设 a 为常数，若求 $\int \frac{x^2+4x+a}{(x+1)^2(x^2+1)}\mathrm{d}x$ 的结果中没有对数函数项，则 $a=$（　　　　）。

（A）0；　（B）1；　（C）2；　（D）3。

二、填空题（**每小题 4 分，共 20 分**）：

得　分	
评阅人	

1. 设 $f(x)=\int_{x^2}^{x^3}\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t$，则 $f'(\sqrt{2})=$________________。

2. $\int_{-1}^{1}(x+\sqrt{1-x^2}+1)^2\mathrm{d}x=$________________。

3. 已知 $\int f(x)\mathrm{d}x=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C$，则 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{f(\tan x)}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=$________________。

4. 由曲线 $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ 与两直线 $y=x$、$y=2$ 所围成的平面图形的面积为________________。

5. 曲线 $y=\frac{\sqrt{x}}{3}(3-x)$ 相应于 $1\le x\le 4$ 的一段弧的长度为________________。

三、求下列不定积分（**每小题 6 分，共 12 分**）：

得　分	
评阅人	

1. $\int \frac{1}{e^x - e^{-x}} dx$；

2. $\int \frac{x^2}{\sqrt{(1-x^2)^3}} dx$。

四、（8 分）求极坐标系下心形线 $\rho = 1 + \cos\theta \ (0 \le \theta \le 2\pi)$ 的弧长。

得　分	
评阅人	

五、求下列定积分（**每小题 7 分，共 14 分**）：

得　分	
评阅人	

1. $\int_0^4 \frac{1}{(\sqrt{x}+1)^3}\,\mathrm{d}x$；

2. $\int_1^{\mathrm{e}} x\ln^2 x\,\mathrm{d}x$。

六、（8 分）求反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^4-1}}\,\mathrm{d}x$。

得　分	
评阅人	

七、（10 分）设 D 是由曲线 $y=\cos^2 x\ (0\le x\le \frac{\pi}{2})$ 与两直线 $x=0$ 、$y=0$ 所围成的平面图形，试求平面图形 D 绕 y 轴旋转一周所形成的旋转体的体积 V。

得　分	
评阅人	

八、（8 分）设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加且连续，证明：

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\cdot\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x<(b-a)\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\ 。$$

得　分	
评阅人	