Teorie și formule

Neacșu Andrei

1 Partea întreagă și partea fracționară a unui număr real

Fie $x \in \mathbb{R}$, atunci $\exists k \in \mathbb{Z}$ cu $k \leq x < k+1$.

- Se numește partea întreagă a numărului x cel mai mare număr întreg, mai mic decât x.
- Prin definiție, partea fracționară a numărului real x este $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$; evident $\{x\} \in [0,1)$.

1.1 Proprietăți

P 1. $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x, \forall x \in \mathbb{R}$.

P 2. $x < k \Longleftrightarrow \lfloor x \rfloor < k, \forall x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$.

P 3. $\lfloor k + \alpha \rfloor = k, \forall k \in \mathbb{Z}, \alpha \in [0,1)$.

P 4. $\lfloor x + k \rfloor = \lfloor x \rfloor + k, \forall x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$.

P 5. $\{x + k\} = \{x\}, \forall x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$.

P 6. $\lfloor \lfloor x \rfloor \rfloor = \lfloor x \rfloor, \{\{x\}\} = \{x\}, \lfloor \{x\} \rfloor = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

P 7. Dacă $x, y \in \mathbb{R}$ și $\lfloor x \rfloor = \lfloor y \rfloor$, atunci $|x - y| < 1$.

P 8. $\{x\} = \{y\} \Longleftrightarrow (x - y) \in \mathbb{Z}, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

P 9. $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1; \forall x, y \in \mathbb{R}$.

P 10. $\lfloor -x \rfloor + \lfloor x \rfloor = -1, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

P 11. $\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{n} \right\rfloor + \left\lfloor x + \frac{2}{n} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor x + \frac{n-1}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor, \forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$.

P 12. Exponentul numărului natural prim p din descompunerea în factori primi a numărului $n!$ este:

$$\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \ldots$$

2 Ecuația de gradul II

Fie $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$. Se numește ecuația de gradul II: $ax^2 + bx + c = 0$.

2.1 Rezolvarea ecuației de gradul II

Soluțiile ecuației de gradul II se pot afla utilizând formula: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

2.2 Relațiile lui Viete

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a} \\ x_1 x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \Longleftrightarrow x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0$$

3 Logaritmi

Fie $a > 0, a \neq 1$ și $x > 0$. Unicul număr real y cu proprietatea $a^y = x$ se numește *logaritmul* numărului x în baza a și se notează $\log_a x$. Astfel, $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$.

3.1 Observații

• Dacă $a = 10$, numărul $\log_{10} x = \lg x$ se numește logaritmul zecimal al lui x.
• Dacă $a = e$, numărul $\log_e x = \ln x$ se numește logaritmul natural al lui x.

3.2 Proprietăți

P 1. $a^{\log_a x} = x, \forall x > 0;$

P 2. $\log_a a^x = x, \forall x \in \mathbb{R};$

P 3. $\log_a a = 1, \forall a > 0, a \neq 1;$

P 4. $\log_a 1 = 0, \forall a > 0, a \neq 1;$

P 5. $x^{\log_a y} = y^{\log_a x};$

P 6. $\log_a x + \log_a y = \log_a (xy), \forall x, y > 0;$

P 7. $\log_a x - \log_a y = \log_a (\frac{x}{y}), \forall x, y > 0;$

P 8. $\log_a x^p = p \cdot \log_a x, \forall x > 0, \forall p \in \mathbb{R};$

P 9. $\log_{a^p} x = \frac{1}{p} \cdot \log_a x, \forall x > 0, \forall p \in \mathbb{R}^*;$

P 10. $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}, \forall a, b, x > 0; a, b \neq 1;$

P 11. $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c, \forall a, b, c > 0; a, b \neq 1;$

P 12. $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}, \forall a, b > 0; a, b \neq 1.$

Consecință: $\log_a x = \frac{\lg x}{\lg a} = \frac{\ln x}{\ln a}$

4 Numere Complexe

Se definește mulțimea numerelor complexe ca: $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$, înzestrată cu operațiile:

- **Adunare:** $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
- **Înmulțire:** $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$

Prin această corespondență, elementul (x, y) se notează și ca: $z = x + yi$ (forma algebrica), unde i este unitatea imaginară, cu proprietatea $i^2 = -1$.

4.1 Conjugatul unui număr complex

Conjugatul unui număr complex $z = x + yi$ se notează $\overline{z}$ și se definește ca:

$$\overline{z} = x - yi$$

Proprietăți:

P 1. $\overline{\overline{z}} = z$

P 2. $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}, \quad \forall w \in \mathbb{C}$

P 3. $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}, \quad \forall w \in \mathbb{C}$

P 4. $\overline{z^n} = \left(\overline{z}\right)^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

P 5. $\arg\left(\overline{z}\right) = -\arg(z)$

P 6. $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}, \quad \forall w \in \mathbb{C}$

4.2 Modulul unui număr complex

Fie $z = x + yi$ un număr complex. Definim modulul numărului z: $\quad |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$
Proprietăți:

P 1. $|z| \in \mathbb{R}_+, |z| \geq 0;$ Egalitate $\Leftrightarrow z = 0$

P 2. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C};$ Egalitate $\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}_+, z_2 = \lambda \cdot z_1$

P 3. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

P 4. $|z^n| = |z|^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

P 5. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

P 6. $z \cdot \overline{z} = |z|^2$

P 7. $\left|\overline{z}\right| = |z|$

4.3 Forma trigonometrică și exponențială

Fie $z = x + yi$ un număr complex. Definim:
Argumentul: $\arg(z) = \theta$ cu: $\cos\theta = \frac{x}{|z|}, \quad \sin\theta = \frac{y}{|z|}$
Forma trigonometrică: $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$
Forma exponențială: $z = |z|e^{i\theta}$

Teorema 1. *Pentru orice* $\theta \in [0, 2\pi)$, *are loc identitatea:*

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

Teorema 2 (Moivre)**.** *Pentru orice* $\theta \in [0, 2\pi)$ *și* $n \in \mathbb{N}$ *are loc relația:*

$$(\cos\theta + isin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

Teorema 3 (Rădăcinile de ordin n ale unui număr complex)**.** *Fie* $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, *scris în forma trigonometrică*

$$z = |z| \cdot (\cos\theta + i\sin\theta), \quad \theta \in [0, 2\pi).$$

Rădăcinile de ordin n ale lui z sunt numerele complexe

$$\omega_k = \sqrt[n]{|z|} \cdot \left(\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right), \quad k = \overline{0, 1, 2, \ldots, n-1}.$$

4.4 Interpretare geometrică

Corolar 4.4.1. *Înmulțirea unui număr complex cu* $e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi$ *reprezintă o* ***rotație*** *în planul complex în sens trigonometric, cu unghiul* ϕ*, în jurul originii.*

Corolar 4.4.2. *Înmulțirea succesivă cu* $e^{i\phi}$ *și* $e^{i\psi}$ *este echivalentă cu înmulțirea cu* $e^{i(\phi+\psi)}$*, corespunzând compunerii rotațiilor.*

Corolar 4.4.3. *Rădăcinile de ordin n ale unui număr complex nenul sunt puncte echidistante pe cercul de rază* $\sqrt[n]{|z|}$ *și centru în origine, corespunzătoare vârfurilor unui poligon regulat cu n laturi.*

5 Inegalități cunoscute

Teorema 1 (Inegalitatea mediilor). *Pentru $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$, are loc lanțul de inegalități:*

$$\min(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}} \le \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \le \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \le \max(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Teorema 2 (Inegalitatea Cauchy-Schwarz). *Pentru orice $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $b_1, b_2, \ldots b_n \in \mathbb{R}$ are loc:*

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 \le (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2)$$

Corolar 5.0.1 (Lema lui Titu). *Pentru $b_1, b_2, \ldots, b_n > 0$, are loc:*

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \ldots + \frac{a_n^2}{b_n} \ge \frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}$$

Teorema 3. *Pentru $a, b, c \in \mathbb{R}$ are loc:*

$$a^2 + b^2 + c^2 \ge ab + ac + bc \Leftrightarrow (a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2 \ge 0$$

6 Vectori

Se numește vector $\overrightarrow{AB}$ mulțimea tuturor segmentelor orientate $\overline{CD}$ echipolente cu $\overline{AB}$.

$$\overrightarrow{AB} = \{\overline{CD} | \overline{CD} \sim \overline{AB}\}$$

6.1 Proprietăți ale înmulțirii cu scalari

P 1. $\alpha(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) = \alpha\overrightarrow{AB} + \alpha\overrightarrow{CD}, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ vectori.

P 2. $(\alpha + \beta)\overrightarrow{AB} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AB}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AB}$ vector.

P 3. $(-1)\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$.

P 4. $0 \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$.

P 5. $\alpha \cdot \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}, \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

6.2 Coliniaritate și paralelism

Doi vectori $\overrightarrow{u}$ și $\overrightarrow{v}$ sunt coliniari $\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}$ cu $\overrightarrow{u} = \lambda \cdot \overrightarrow{v}$.

Fie $\overline{AB}$ un segment orientat și $M \in AB$. $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = k$. Pentru orice punct O din plan are loc relația:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{1-k}\overrightarrow{OA} + \frac{-k}{1-k}\overrightarrow{OB}$$

6.3 Centrul de greutate

Fie $\triangle ABC$. Medianele AP, BN și CM sunt concurente într-un punct notat G = centrul de greutate al $\triangle ABC$.

Pentru orice punct $O \in \mathcal{P}$ are loc relația(Leibniz):

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$$

6.4 Teorema bisectoarei

Fie $\triangle ABC$ cu notațiile: $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Bisectoarele AA', BB' și CC' sunt concurente într-un punct notat I. Pentru orice punct $M \in \mathcal{P}$ are loc relația:

$$\overrightarrow{MI} = \frac{1}{a+b+c}\left(a \cdot \overrightarrow{MA} + b \cdot \overrightarrow{MB} + c \cdot \overrightarrow{MC}\right)$$

6.5 Teorema lui Menelaus

Fie $\triangle ABC$ și punctele $M \in AB$, $P \in BC$, $N \in AC$. Acestea sunt coliniare dacă și numai dacă:

$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CN}{NA} = 1$$

6.6 Teorema lui Ceva

Fie $\triangle ABC$ și punctele $M \in AB$, $N \in BC$, $P \in AC$. Dreptele AN, CM, BP sunt concurente dacă și numai dacă:

$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CP}{PA} = 1$$

6.7 Teorema Van Aubel

Fie $\triangle ABC$ și cevienele $AN \cap CM \cap BP = \{T\}$. Are loc relația:

$$\frac{AT}{TN} = \frac{AM}{MB} + \frac{AP}{PC}$$

6.8 Produsul scalar

Fie $\overrightarrow{u}$ și $\overrightarrow{v}$ vectori. Se numește produs scalar numărul real:

$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \cdot \|\overrightarrow{v}\| \cdot \cos(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$$

$$\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} \Leftrightarrow \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = 0.$$

P 1. $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} \Leftrightarrow \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = 0, \forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ vectori.

P 2. $\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}, \forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ vectori.

P 3. $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = \|\overrightarrow{u}\|^2, \forall \overrightarrow{u}$ vector.

P 4. $\langle \alpha \overrightarrow{u}, \beta \overrightarrow{v} \rangle = \alpha\beta \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ vectori.

P 5. $\hat{i} \cdot \hat{i} = 1 \quad \hat{j} \cdot \hat{j} = 1 \quad \hat{k} \cdot \hat{k} = 1 \quad \hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{i} \cdot \hat{k} = \hat{j} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{k} = \hat{k} \cdot \hat{i} = \hat{k} \cdot \hat{j} = 0.$

P 6. $\langle \overrightarrow{0}, \overrightarrow{u} \rangle = 0, \forall \overrightarrow{u}$ vector.

7 Trigonometrie

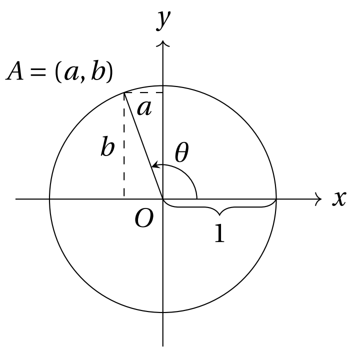

Figura 1: Cercul unitate

Fie θ un unghi (figura 1). Definim următoarele funcții:

$$\sin(\theta) = b, \qquad \csc(\theta) = \frac{1}{b},$$

$$\cos(\theta) = a, \qquad \sec(\theta) = \frac{1}{a},$$

$$\tan(\theta) = \frac{b}{a}, \qquad \cot(\theta) = \frac{a}{b}$$

Domeniile de valori ale funcțiilor sunt:

$$\sin(\theta),\ \cos(\theta) \in [-1, 1],$$
$$\tan(\theta),\ \cot(\theta) \in (-\infty, \infty) \quad \text{(cu excepția discontinuităților)},$$
$$\sec(\theta),\ \csc(\theta) \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty).$$

7.1 Formule și identități

7.1.1 Identități pentru tangentă și contangentă

$$\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} \qquad cot(\theta) = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$$

7.1.2 Identități reciproce

$$\begin{aligned} \sin(\theta) &= \frac{1}{\csc(\theta)} & \csc(\theta) &= \frac{1}{\sin(\theta)} \\ \cos(\theta) &= \frac{1}{\sec(\theta)} & \sec(\theta) &= \frac{1}{\cos(\theta)} \\ \tan(\theta) &= \frac{1}{\cot(\theta)} & \cot(\theta) &= \frac{1}{\tan(\theta)} \end{aligned}$$

7.1.3 Identități Pitagoreice

$$\begin{aligned} \sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) &= 1 \\ 1 + \tan^2(\theta) &= \sec^2(\theta) \\ 1 + \cot^2(\theta) &= \csc^2(\theta) \end{aligned}$$

7.1.4 Formule pentru unghi dublu

$$\begin{aligned} \sin(2\theta) &= 2\sin(\theta)\cos(\theta) \\ \cos(2\theta) &= \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) \\ &= 2\cos^2(\theta) - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2(\theta) \\ \tan(2\theta) &= \frac{2\tan(\theta)}{1-\tan^2(\theta)} \end{aligned}$$

7.1.5 Formule pentru jumătate de unghi

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) &= \pm\sqrt{\frac{1-\cos(\theta)}{2}} \\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) &= \pm\sqrt{\frac{1+\cos(\theta)}{2}} \\ \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) &= \pm\sqrt{\frac{1-\cos(\theta)}{1+\cos(\theta)}} \end{aligned}$$

7.1.6 Formule pentru suma și diferența unghiurilor

$$\begin{aligned} \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta) \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta) \\ \tan(\alpha \pm \beta) &= \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha)\tan(\beta)} \end{aligned}$$

7.1.7 Formule de transformare din produs în sumă

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha)\sin(\beta) &= \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right]\\
\cos(\alpha)\cos(\beta) &= \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right]\\
\sin(\alpha)\cos(\beta) &= \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right]\\
\cos(\alpha)\sin(\beta) &= \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\right]
\end{aligned}$$

7.1.8 Formule de transformare din sumă în produs

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha)+\sin(\beta) &= 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\\
\sin(\alpha)-\sin(\beta) &= 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\\
\cos(\alpha)+\cos(\beta) &= 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\\
\cos(\alpha)-\cos(\beta) &= -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)
\end{aligned}$$

7.1.9 Formule de complementaritate

$$\begin{aligned}
\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) &= \cos(\theta) & \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) &= \sin(\theta)\\
\csc\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) &= \sec(\theta) & \qquad \sec\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) &= \csc(\theta)\\
\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) &= \cot(\theta) & \qquad \cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) &= \tan(\theta)
\end{aligned}$$

7.2 Teorema sinusurilor

Fie $\triangle ABC$ cu notațiile: $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $\widehat{BAC} = \widehat{A}$, $\widehat{ABC} = \widehat{B}$, $\widehat{ACB} = \widehat{C}$, R = raza cercului circumscris.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

7.3 Teorema cosinusurilor

$$\begin{aligned}
c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{C}\\
b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\widehat{B}\\
a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}
\end{aligned}$$

7.4 Teorema tangentei

$$\begin{aligned}
\frac{a-b}{a+b} &= \frac{\tan\left(\frac{\widehat{A}-\widehat{B}}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\widehat{A}+\widehat{B}}{2}\right)}\\
\frac{b-c}{b+c} &= \frac{\tan\left(\frac{\widehat{B}-\widehat{C}}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\widehat{B}+\widehat{C}}{2}\right)}\\
\frac{c-a}{c+a} &= \frac{\tan\left(\frac{\widehat{C}-\widehat{A}}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\widehat{C}+\widehat{A}}{2}\right)}
\end{aligned}$$

7.5 Formula Mollweide

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin\left(\frac{\widehat{A}-\widehat{B}}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\widehat{C}}{2}\right)}$$

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\left(\frac{\widehat{A}-\widehat{B}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\widehat{C}}{2}\right)}$$

8 Aplicații ale trigonometriei în geometrie

8.1 Aria unui triunghi scalen

Fie $\triangle ABC$ cu notațiile: $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$; $AA_1 \perp BC, A_1 \in BC$, $BB_1 \perp AC, B_1 \in AC$, $CC_1 \perp AB, C_1 \in AB$.

$$S_{ABC} = \frac{a \cdot AA_1}{2} = \frac{b \cdot BB_1}{2} = \frac{c \cdot CC_1}{2}$$
$$S_{ABC} = \frac{a \cdot c \cdot \sin \widehat{B}}{2} = \frac{a \cdot b \cdot \sin \widehat{C}}{2} = \frac{b \cdot c \cdot \sin \widehat{A}}{2}$$
$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, p = \frac{a+b+c}{2}$$
$$S_{ABC} = \frac{abc}{4R} \Leftrightarrow 4RS_{ABC} = abc$$

8.2 Relații metrice în triunghiul oarecare

Teorema 1 (Stewart)**.** *Fie $\triangle ABC$ cu notațiile: $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Fie ceviana $AD, D \in [BC]$. Notăm: $BD = m$, $DC = n$, $AD = d$ (Vezi figura 2). Are loc relația:*

$$a(mn + d^2) = b^2 m + c^2 n$$

Mnemonică: Pentru a reține mai ușor formula, se poate folosi expresia în limba engleză: *„A **man** and his **dad** put a **bomb** in the **sink**"*.

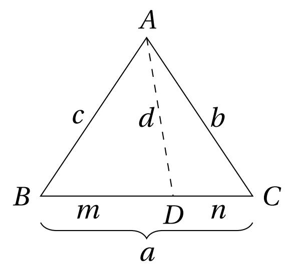

Figura 2: Teorema lui Stewart

Corolar 8.2.1 (Mediana)**.** *O consecință directă a Teoremei lui Stewart este Teorema medianei (cazul particular $m = n = \frac{1}{2}a$, figura 3):*

$$d = \frac{\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}}{2}$$

Observație: În triunghiuri isoscele mediana AD este perpendiculară pe latura BC și teorema devine identică cu cea a lui Pitagora.

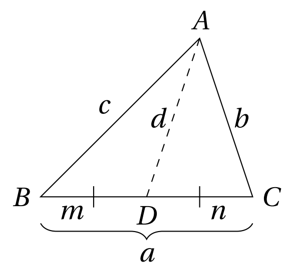

Figura 3: Teorema medianei