

刘有山, 刘少林, 张美根, 等. 一种改进的二阶弹性波动方程的最佳匹配层吸收边界条件. 地球物理学进展, 2012, 27(5): 2113-2122, doi:10.6038/j.issn.1004-2903.2012.05.036.

LIU You-shan, LIU Shao-lin, ZHANG Mei-gen, *et al.* An improved perfectly matched layer absorbing boundary condition for second order elastic wave equation. *Progress in Geophys.* (in Chinese), 2012, 27(5): 2113-2122, doi:10.6038/j.issn.1004-2903.2012.05.036.

一种改进的二阶弹性波动方程的最佳 匹配层吸收边界条件

刘有山¹, 刘少林², 张美根², 马德堂³

(1. 中国科学院地质与地球物理研究所油气资源研究重点实验室, 兰州 730000;

2. 中国科学院地质与地球物理研究所地球深部重点实验室, 北京 100029;

3. 长安大学 地质工程与地测学院, 西安 710054)

摘 要 在分析前人有关二阶波动方程的最佳匹配层(PML)吸收边界条件的构建方式的基础上, 讨论了这些 PML 吸收边界条件在计算效率和计算精度方面的不足, 并给出了一种新的改进 PML 吸收边界条件. 本文的核心思想是在频率域引入一个中间变量, 避免了褶积运算, 对该变量做傅里叶逆变换得到时间域的精确解. 通过模型试算, 把本文的改进算法与前人的算法的计算精度和计算时间进行比较. 对比分析表明, 本文提出的 PML 吸收边界条件计算量小且精度较高, 并且是一种稳定的算法.

关键词 二阶波动方程, 最佳匹配层, 吸收边界条件

doi:10.6038/j.issn.1004-2903.2012.05.036

中图分类号 P631

文献标识码 A

An improved perfectly matched layer absorbing boundary condition for second order elastic wave equation

LIU You-shan¹, LIU Shao-lin², ZHANG Mei-gen², MA De-tang³

(1. Key Laboratory of Petroleum Resources Research, Institute of Geology and Geophysics,
Chinese Academy of Sciences, Lanzhou 730000, China;

2. Key Laboratory of Earth Interior, Institute of Geology and Geophysics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100029, China;

3. School of Geological Engineering and Surveying Engineering, Chang'an University, Xi'an 710054, China)

Abstract In this paper, we analyze the construction of perfectly matched layer absorbing boundary condition in second-order elastic equation proposed by previous authors and discuss the disadvantages of these PML in computational efficiency and accuracy. Then we propose a new improved algorithm for perfectly matched layer absorbing boundary condition in second order elastic equation. The core idea in this article is that we introduce a intermediate variable in frequency domain to avoid the convolution calculations and obtain the exact solution through inverse Fourier transform in time domain. Finally, we make comparisons in accuracy and computational time between improved PML algorithms proposed by previous authors and the new PML proposed by us through model test. According to the comparisons and analysis, the new PML proposed by us has small computational amount and high accuracy. In addition, the new PML proposed by us is a stable algorithms proved by model test.

Keywords second-order elastic wave equation, perfectly matched layer, absorbing boundary condition

收稿日期 2012-01-20; 修回日期 2012-04-15.

投稿网址 <http://www.progeophys.cn>

基金项目 中国科学院地质与地球物理研究所地球深部重点实验室开放基金大型油气田及煤层气开发科技重大专项专题“煤层气勘探二维三分量地震处理关键模块开发与应用研究”(2008ZX05035-002-003HZ)资助.

作者简介 刘有山, 男, 1987 年生, 陕西省安康人, 中国科学院地质与地球物理研究所兰州油气资源研究中心硕士研究生, 固体地球物理学专业.
(E-mail: liuyoushan10@mails.gucas.ac.cn)

0 引言

在研究地震勘探正演、反演和偏移问题时,通常视地层为半无限介质. 由于,计算机存储容量和计算速度等运行环境的限制,模拟地震波在地层中的传播规律的计算时,只能在尺寸有限的模型上求解,因此需要对人工截断边界产生的虚假反射进行特殊处理. 为了消除人为截断边界的虚假反射,人们提出了多种吸收边界条件,并得到了广泛的应用. 这些边界条件主要分为两类,即吸收边界条件和投射边界. 其中吸收边界条件是将波场在靠近边界的一定宽度范围内逐渐衰减,通过衰减边界处的入射波来降低人为边界反射,这类边界条件具有易于实现,适用性广的特点.

1994 年, Berenger 针对电磁波传播问题, 引进了一种高效的完美匹配层(perfectly matched layer, 简称 PML)吸收边界条件^[1], 并在理论和模型算例上证明了该方法可以较好地吸收来自各个方向、各个频率的波^[1,2], 不会产生明显的边界虚假反射. 后来, Chew 和 Liu^[3]将 PML 技术引入到弹性波的数值模拟中. Collino 和 Tsogka^[4]进一步把 PML 应用到各向异性非均匀介质的地震波波场模拟中. Festa^[5]针对各向同性弹性介质情况, 对 PML 离散波动方程的稳定性进行了详细讨论, 并推导了 PML 吸收边界条件的理论反射系数公式. Becache *et al.*^[6]在理论上讨论了 PML 在各向异性情况下的稳定性问题. 董国良等^[7]对一阶弹性波方程的高阶有限差分法的稳定性进行了分析研究. 目前, PML 已经应用到很多领域, 在声波^[8-10]、弹性波^[11-15]、粘弹性介质^[16-18]、双相孔隙弹性介质^[19,20], 各向异性, 面波^[21]等的数值模拟中也得到了广泛的应用, 并且 PML 不断地得到扩展^[22-24]和改进^[25,26].

在弹性波的一阶应力-速度方程中, PML 吸收边界条件通过把位移场分裂成垂直于边界和平行于边界的 2 项来实现. 为了把 PML 吸收边界条件应用到二阶弹性波动方程中, 有作者通过引入中间变量把二阶弹性波动方程转化成一阶方程^[9,16], 从而可以应用一阶系统的 PML 吸收边界条件. 为了能在 2 阶系统直接应用 PML 边界条件, 需要把位移项分裂成 4 项^[27]. 无论是进行转化还是直接应用 PML 边界条件到二阶系统中, 均要占据许多额外的存储空间, 后者还要求解关于时间的 3 阶导数. 针对此问题, 有作者提出了对 2 阶系统中的 PML 吸收边界条件的改进算法, 避免求解 3 阶时间导

数^[25]. 然而, 这种方法却需要计算褶积. 为了避免褶积运算, 作者对其采取了近似计算^[25], 这样既增加了计算量又带来了一定的截断误差. 在本文中, 提出一种新的精确算法, 其思想是在频率域引入中间变量, 对其做傅里叶反变换, 得到时间域的精确解, 并将此算法与前人提出的算法进行计算速度和计算精度的对比分析. 通过模型试验, 发现本文提出的算法计算量与前人提出的改进算法的计算量相当, 并且具有较高的计算精度和稳定性.

1 PML 吸收边界条件及其改进算法

以二维弹性各向同性介质中的位移波动方程为例, 分析二阶弹性波动方程的 PML 吸收边界条件, 并给出相应的改进 PML 吸收边界条件. 二阶位移形式的弹性波动方程为

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial z}, \\ \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial z}, \end{cases} \quad (1)$$

其中, $u_x(x, z)$, $u_z(x, z)$ 分别为质点的水平方向和垂直方向的位移; λ, μ 为介质的拉梅常数; ρ 为介质的密度.

1.1 复数伸展坐标系下的位移波动方程

复数伸展坐标系^[1,3,4]为

$$\tilde{p} = p - \frac{i}{\omega} \int_{p_0}^p d_p(s) ds; \quad (p = x \text{ 或 } p = z), \quad (2)$$

其中, \tilde{p} 为复数空间坐标, $i = \sqrt{-1}$ 为虚数单位, $d_p(p)$ 为边界衰减系数, 是随着坐标 p 衰减的实函数, ω 为角频率. 关于 p 和 \tilde{p} 的一、二阶偏导数有如下关系:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tilde{p}} &= \frac{i\omega}{i\omega + d_p} \frac{\partial}{\partial p}, \\ \frac{\partial^2}{\partial \tilde{p}^2} &= \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{i\omega}{i\omega + d_p} \frac{\partial}{\partial p} \right) \frac{\partial p}{\partial \tilde{p}} = \left(\frac{i\omega}{i\omega + d_p} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial p^2} - \\ &\quad \frac{(i\omega)^2 d'_p}{(i\omega + d_p)^3} \frac{\partial}{\partial p}. \end{aligned} \quad (3)$$

复数伸展坐标系下的平面波表达式^[7]为

$$\begin{aligned} u(\tilde{x}, z, t) &= \exp[-i(k_x \tilde{x} + k_z z - \omega t)] \\ &= \exp[-i(k_x x + k_z z - \omega t)] \\ &\quad \exp \left[-\frac{k_x \int_0^x d_x(s) ds}{\omega} \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

可以看到, 第二项在 $d_p \neq 0$ 时对位移起到衰减的作用, 但在计算区域里, 须取 $d_p = 0$. 复数伸展坐

标系下的二阶弹性波动方程为(以左边界为例)

$$\begin{aligned} (i\omega)^2 \rho U_x(x, z, \omega) &= (\lambda + 2\mu) \left(\frac{i\omega}{i\omega + d_x} \right)^2 \\ &\frac{\partial^2 U_x(x, z, \omega)}{\partial x^2} - (\lambda + 2\mu) \frac{(i\omega)^2 d'_x}{(i\omega + d_x)^3} \\ &\frac{\partial U_x(x, z, \omega)}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 U_x(x, z, \omega)}{\partial z^2} + \\ &(\lambda + \mu) \frac{i\omega}{i\omega + d_x} \frac{\partial^2 U_z(x, z, \omega)}{\partial x \partial z}, \\ (i\omega)^2 \rho U_z(x, z, \omega) &= \mu \left(\frac{i\omega}{i\omega + d_x} \right)^2 \frac{\partial^2 U_z(x, z, \omega)}{\partial x^2} - \\ &\mu \frac{(i\omega)^2 d'_x}{(i\omega + d_x)^3} \frac{\partial U_z(x, z, \omega)}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) \\ &\frac{\partial^2 U_z(x, z, \omega)}{\partial z^2} + (\lambda + \mu) \frac{i\omega}{i\omega + d_x} \frac{\partial^2 U_x(x, z, \omega)}{\partial x \partial z}, \end{aligned} \quad (5)$$

其中, $U_x(x, z, \omega)$ 为位移关于时间的傅里叶变换;
 $d_x(x) = \frac{3c}{2\delta} \ln\left(\frac{1}{R}\right) \cdot \left(\frac{x}{\delta}\right)^2$, x 是到吸收层内边界的
 距离, d'_x 为 d_x 关于 x 的一阶导数; δ 是吸收层厚度,
 一般取 10 个网格; R 为理论反射系数^[5], 一般取
 $0.01 - 1.0 \times 10^{-6}$.

1.2 传统分裂 PML 吸收边界条件

对于二阶弹性波动方程, 传统的 PML 吸收边界条件将位移分裂成 4 部分^[28]即,

$$U = U_{x1} + U_{x2} + U_{x3} + U_{x4}. \quad (6)$$

对应(5)式的左边界, 其分裂结果为

$$\begin{cases} \rho(i\omega + d_x)^2 U_{x1} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 U_x(x, z, \omega)}{\partial x^2}, \\ \rho(i\omega + d_x)^3 U_{x2} = -(\lambda + 2\mu) d'_x \frac{\partial U_x(x, z, \omega)}{\partial x}, \\ \rho(i\omega)^2 U_{x3} = \mu \frac{\partial^2 U_x(x, z, \omega)}{\partial z^2}, \\ \rho \cdot i\omega \cdot (i\omega + d_x) U_{x4} = (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 U_z(x, z, \omega)}{\partial x \partial z}. \end{cases} \quad (7)$$

对(7)式两端关于 ω 做傅里叶反变换, 得到时间域的 PML 吸收边界条件:

$$\begin{cases} \rho(\partial_t + d_x)^2 u_{x1} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}, \\ \rho(\partial_t + d_x)^3 u_{x2} = -(\lambda + 2\mu) d'_x \frac{\partial u_x}{\partial x}, \\ \rho \partial_t^2 u_{x3} = \mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}, \\ \rho(\partial_t + d_x) \partial_t u_{x4} = (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial z}. \end{cases} \quad (8)$$

这就是传统的分裂 PML 吸收边界条件, 其中

第二式需要计算对时间的三阶导数, 既需要增加额外的存储空间, 又需要占用更多的 CPU 计算时间. 为此引入中间变量^[8,9] P , 并令

$$(\partial_t + d_x) u_2 = P, \quad (9)$$

从而, 方程(8)的第二式变成

$$(\partial_t + d_x)^2 P = -(\lambda + 2\mu) d'_x \frac{\partial u}{\partial x}.$$

为了得到较高的计算精度, (9)式可以用 Euler 或 Runge—Kutta 方法求解. 但这势必增加了计算复杂度. 在下文中的对比试验中, 采用简单的差分计算.

1.3 改进的分裂 PML 吸收边界条件

为了避免计算时间的三阶导数, 将方程(5)中的第一式的前两项合并成一项, 并对褶积采用近似计算^[16], 得到如下频率域的波动方程为

$$\begin{cases} \rho(i\omega + d_x)^2 U_{x1} = (\lambda + 2\mu) \left(\frac{\partial^2 U_x(x, z, \omega)}{\partial x^2} - \frac{d'_x}{i\omega + d_x} \frac{\partial U_x(x, z, \omega)}{\partial x} \right), \\ \rho(i\omega)^2 U_{x2} = \mu \frac{\partial^2 U_x(x, z, \omega)}{\partial z^2}, \\ \rho \cdot i\omega \cdot (i\omega + d_x) U_{x3} = (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 U_z(x, z, \omega)}{\partial x \partial z}. \end{cases} \quad (10)$$

再关于 ω 做傅里叶反变换, 得到改进的时间域的 PML 吸收边界条件:

$$\begin{cases} \rho(\partial_t + d_x)^2 u_{x1} = (\lambda + 2\mu) \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} - d'_x e^{-d_x t} * \frac{\partial u_x}{\partial x} \right), \\ \rho \partial_t^2 u_{x2} = \mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}, \\ \rho(\partial_t + d_x) \partial_t u_{x3} = (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial z}, \end{cases} \quad (11)$$

其中, “*” 为褶积运算, 可以采用如下的近似计算实现方程(11)中的褶积运算.

令 $P = -(\lambda + 2\mu) d'_x e^{-d_x t} * \frac{\partial u_x}{\partial x}$, 则可得

$$\begin{aligned} P(n\Delta) &\approx -(\lambda + 2\mu) \Delta d'_x \frac{\partial u(x, z, n\Delta)}{\partial x} + \\ &e^{-d_x \cdot \Delta} P[(n-1)\Delta], \end{aligned} \quad (12)$$

其中, Δ 为沿 x 方向的网格间距.

相比于传统分裂的 PML 吸收边界条件, 此改进的 PML 吸收边界条件具有如下优越性:

1) 在吸收层内, 把位移分裂成三项, 避免了对时间的三次导数的计算;

2) 需要的额外的存储空间减少, 这对于三维数

值模拟更加有利;

3) 由于只需把位移分裂成三项, 减少了计算量, 提高计算速度.

但是, 这种算法需要计算褶积, 为了避免褶积运算而采用了近似计算, 不是一种精确的算法, 势必会影响到计算的精度.

1.4 新改进的 PML 吸收边界条件

为了避免 1.3 中的褶积运算, 仍然将方程(5)中的第一式的前两项合并成一项, 同时引入中间变量 $P^{[27]}$, 得到如下形式的 PML 吸收边界条件:

$$\begin{cases} \rho(i\omega + d_x)^2 U_{x1} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 U_x(x, z, \omega)}{\partial x^2} + \\ \quad P(x, z, \omega), \\ \rho(i\omega)^2 U_{x2} = \mu \frac{\partial^2 U_x(x, z, \omega)}{\partial z^2}, \\ \rho \cdot i\omega \cdot (i\omega + d_x) U_{x3} = (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 U_z(x, z, \omega)}{\partial x \partial z}, \\ P(x, z, \omega) = -(\lambda + 2\mu) \frac{d'_x}{i\omega + d_x} \frac{\partial U_x(x, z, \omega)}{\partial x}. \end{cases} \quad (13)$$

关于 ω 做傅里叶反变换, 得到新改进的时间域的 PML 吸收边界条件:

$$\begin{cases} \rho(\partial_t + d_x)^2 u_{x1} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + p(x, z, t), \\ \rho \partial_t^2 u_{x2} = \mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}, \\ \rho(\partial_t + d_x) \partial_t u_{x3} = (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial z}, \\ (\partial_t + d_x) p(x, z, t) = -(\lambda + 2\mu) d'_x \frac{\partial u_x}{\partial x}. \end{cases} \quad (14)$$

其中, $p(x, z, t)$ 为 $P(x, z, \omega)$ 的傅里叶反变换.

相比于传统的 PML 吸收边界条件, 新改进的 PML 吸收边界条件, 除了具有改进的算法的 3 方面优势外, 这种算法避免了褶积运算同时是一种精确的算法.

2 模型算例与分析

2.1.1 均匀介质模型

计算模型为一均匀介质模型, 尺寸为 $1000 \text{ m} \times$

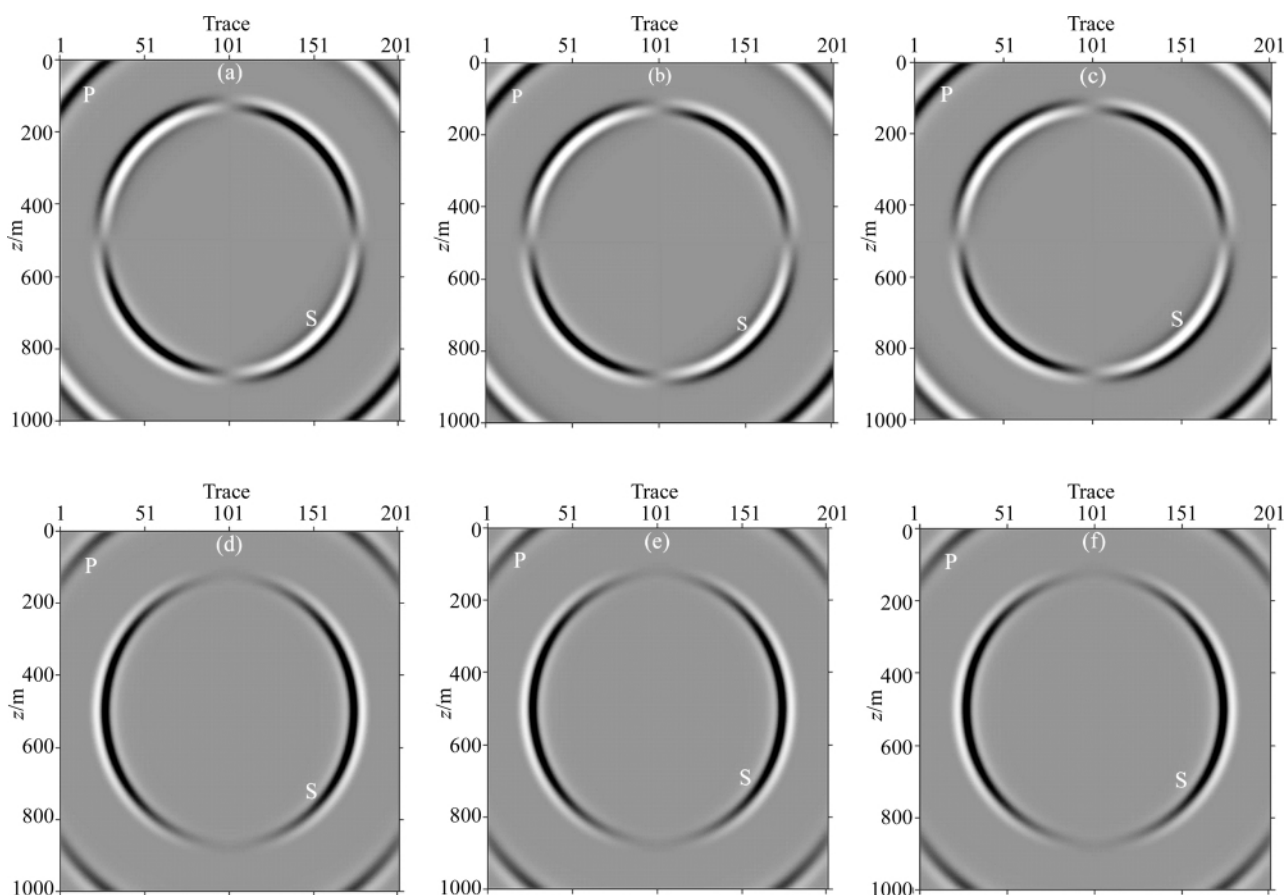


图 1 350 ms 时刻的波场快照图

Fig. 1 Snapshots of displacements activated by one shot at 0.350 s modeled by three PML algorithms

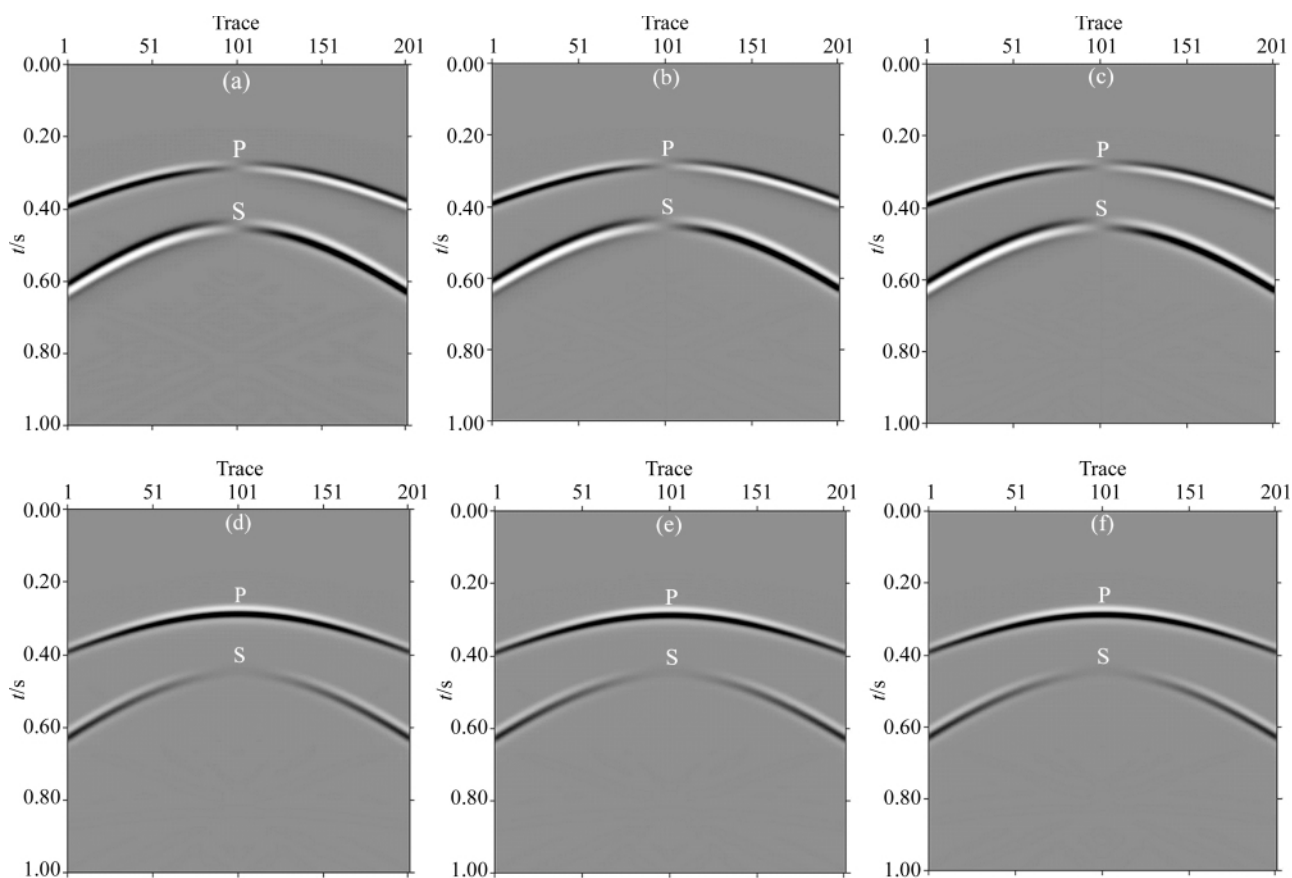


图 2 地面单炮记录

Fig. 2 Seismic records of displacements at ground activated by one shot

1000 m,空间步长为 5 m,时间步长为 1.0 ms,纵波速度为 2000 m/s,横波速度为 1200 m/s;震源是 25 Hz 的雷克子波(垂向力源),位于(500,500)处;PML 吸收层取 20 个网格厚度,理论反射系数取 1×10^{-6} ;计算到 1.0 s;时间差分阶数为 2 阶,空间差分阶数为 8 阶。

图 1(a)~(f)分别是采用 1.2~1.4 节中提到的三种 PML 吸收边界条件进行波场模拟计算得到的 0.350 s 的波场快照图,其中(a)~(c)是水平位移的波场快照,(d)~(f)是垂直位移的波场快照。

图 2(a)~(f)分别是采用 1.2~1.4 节中提到的三种 PML 吸收边界条件进行波场模拟得到的地面单炮地震记录,其中(a)~(c)是水平位移的地面单炮地震记录,(d)~(f)是垂直位移的地面单炮地震记录。

从波场快照和地面单炮地震记录可以看到,三种算法都具有较好的吸收效果,在边界没有明显的虚假反射波。对于水平位移,横波、纵波在与作用力平行和垂直的方向上振幅均为 0,在与作用力斜角

45°的方向上振幅的绝对值最大,但是两者的相位相反;对于垂直位移,纵波在与作用力平行的方向上振幅最大,在与作用力垂直的方向上振幅为 0;横波正好与纵波的振动情况相反。

2.1.2 地震记录对比

图 3(a)是分别用上面三种 PML 吸收边界条件算法计算得到的检波点(500,0)处的地震记录(垂直位移分量)的数值解和解与理论值的对比图。总体上看,三种吸收边界条件的计算结果与真值很接近,误差主要出现在 0.300 s~0.400 s 的时间段。图中的 PML1 对应的是 1.2 节中的边界条件,PML2 对应的是 1.3 节中的边界条件,PML3 对应的是 1.4 节中的边界条件。

图 3(b)是图 3(a)中虚线框部分的放大图。图 3(c)是图 3(a)中地震记录的计算偏差。图 3(d)是图 3(a)中虚线框部分的地震记录的计算偏差。可以看到,按照边界条件 PML1 和 PML2 计算的结果与理论值的偏差大于按照边界条件 PML3 的计算结果。说明文中给出的改进的吸收边界条件的计算误差

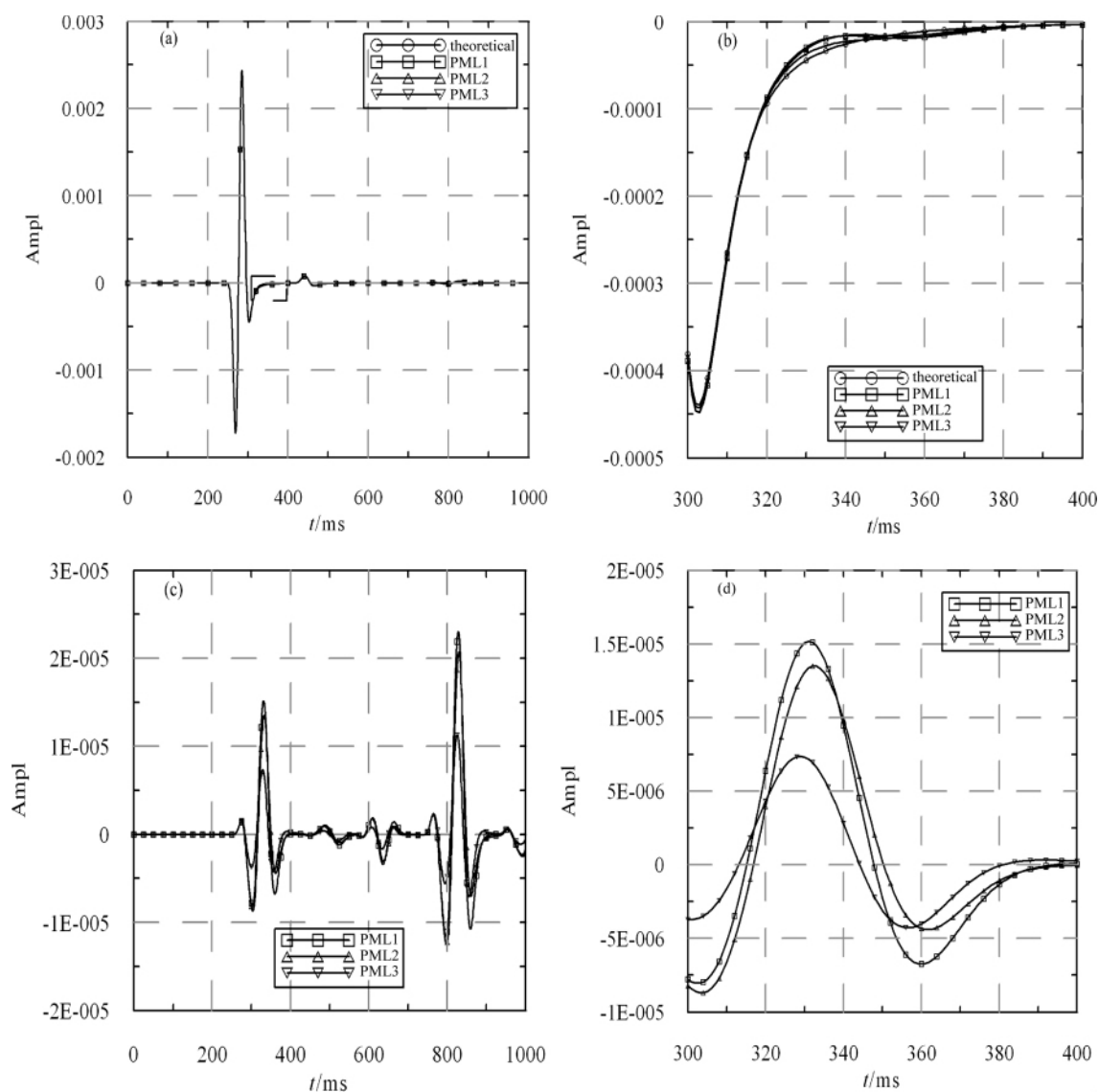


图3 检波点(500,0)处的地震记录对比图

Fig. 3 Comparison of seismic records activated by one shot for displacements at stationed point (500,0)

最小.

表1是(500,0)处,由三种算法计算的地震记录的绝对误差和相对误差的统计表.从表中可以看到,本文提出的算法(PML3)的计算精度最高,改进的PML计算精度次之(PML2),传统的算法(PML1)的计算精度最差.

表1 误差统计表

Table 1 Statistical table for computational error

误差	PML1	PML2	PML3
绝对误差	7.24×10^{-7}	6.54×10^{-7}	3.55×10^{-7}
相对误差	0.337	0.253	0.221

2.1.3 波形对比

图4中(a)和(b)分别是在0.300 s和0.350 s时刻用三种边界条件计算得到的波形曲线(在 $x=500$ m的垂直线上).

由图可见,在边界附近,还是存在一定程度的反射波.但是本文提出的改进算法(PML3)反射波的振幅值最小,改进的算法(PML2)和传统的算法(PML1)的反射波的振幅都比较大.因此,前两者的计算精度比PML3算法的计算精度差.

图5中(a)和(b)分别是0.300 s和0.350 s时刻用三种边界条件计算(在 $x=500$ m的垂直线上)得到的计算值与理论值之间的振幅偏差.从图中可以看到,本文提出的算法的计算精度最高,与理论值

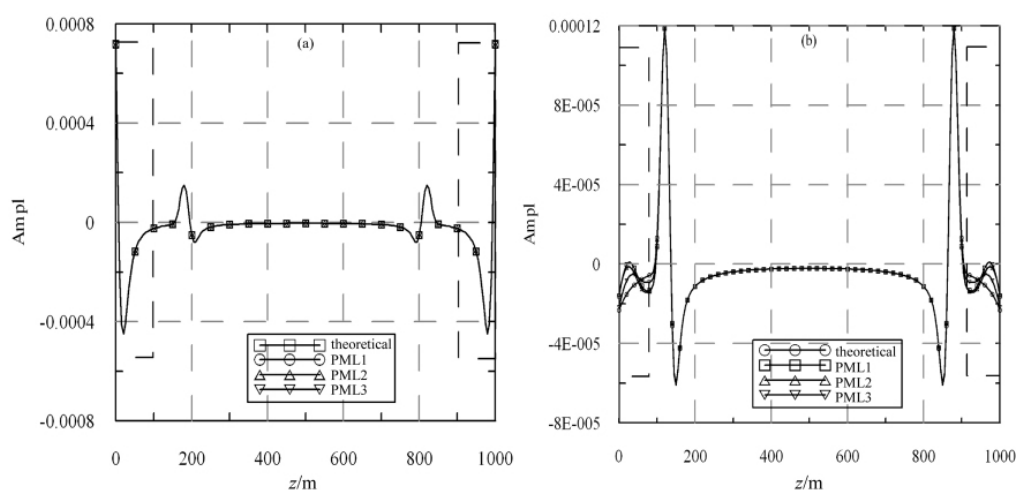


图 4 三种 PML 边界条件计算得到的 300 ms 和 350 ms 时刻的垂直位移的波形图

Fig. 4 Waveforms of vertical displacements compute by three PML boundary conditions at 0.300 s and 0.350 s instant

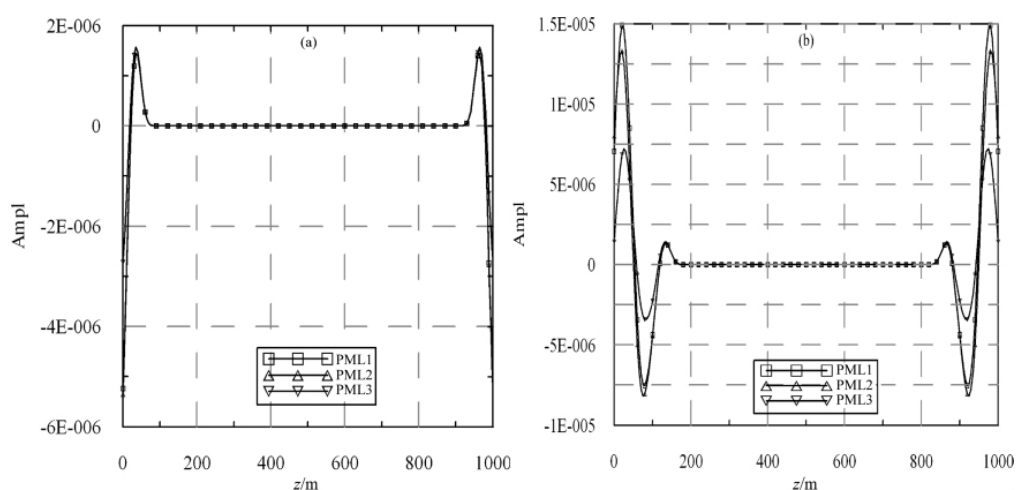


图 5 三种 PML 边界条件计算得到的 0.300 s 和 0.350 s 时刻的波形曲线与理论值计算的振幅偏差

Fig. 5 Amplitude deviation between theoretical value and computed by three PML boundary conditions at 0.300 s and 0.350 s instant

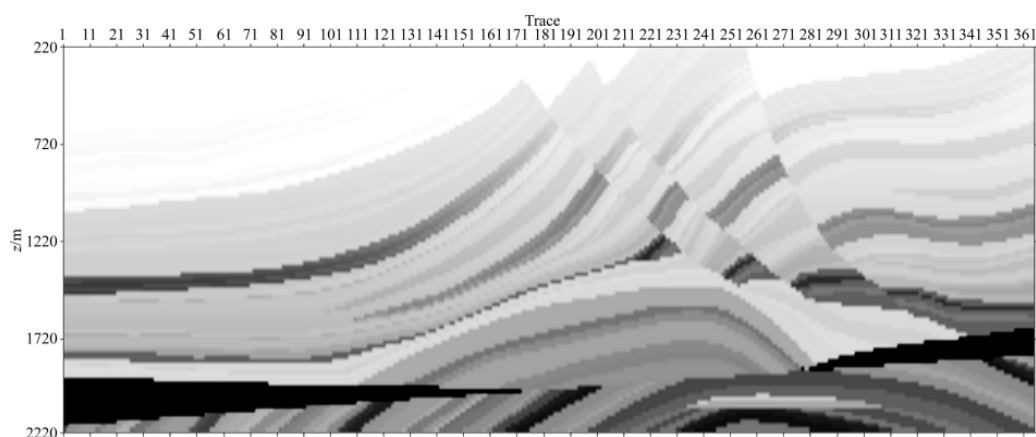


图 6 Marmousi 模型的纵波速度

Fig. 6 Velocity of longitudinal wave for Marmousi model

最接近.

2.2 非均匀模型-Marmousi 模型

为了验证本文提出的 PML 吸收边界条件在非均匀模型中是稳定的,分别用 1.2~1.4 中的三种算法对 Marmousi 模型进行了数值模拟. 模型的尺寸范围为, x 方向是 220~7480 m, z 方向是 220~2200 m,两个方向的空间间隔都是 20 m,时间间隔为 1.0 ms. 采用时间为 2 阶,空间为 8 阶的有限差

分,模拟到 2.5 s. 震源为 25 Hz 的雷克子波(爆炸源),位于(3850,220)处. 吸收层厚度取 10 个网格厚度. 图 6 是 Marmousi 模型的纵波速度.

图 7(a)~(c)分别是 1.2~1.4 中的三种算法计算得到的垂直位移的地面单炮记录.

从图 7 中可以看到,由三种算法计算得到的地面单炮地震记录(垂直分量)在人工边界没有明显的虚假反射波,而且算法是稳定的.

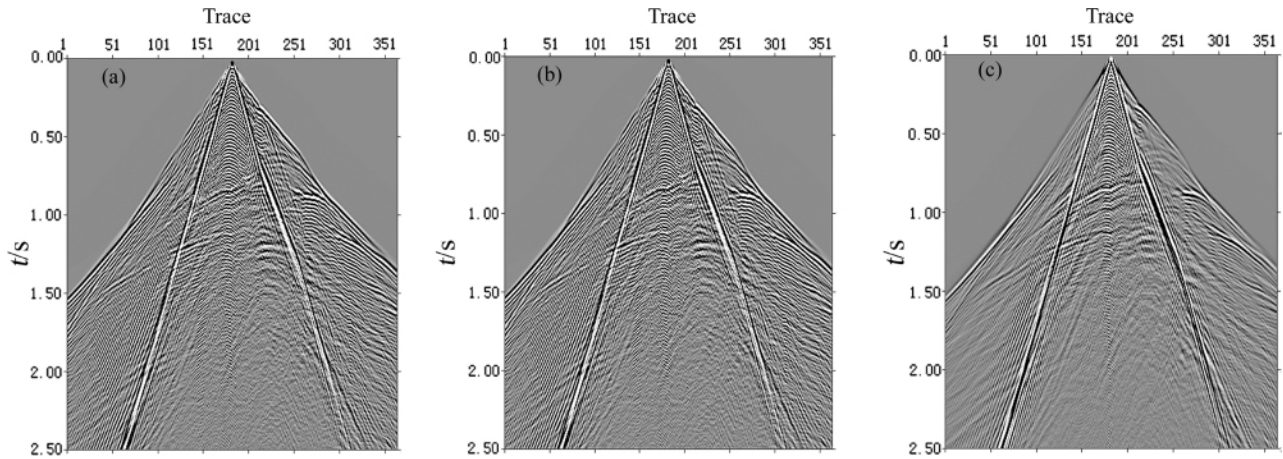


图 7 Marmousi 模型的地面单炮记录

Fig. 7 Seismic records at ground for Marmousi model activated by one shot

2.3 计算效率对比

为了比较三种算法的计算速度,我们在同一台电脑上测试了用三种算法设计的串程序的计算时间. 测试一和测试二分别记录了 2.1 和 2.2 这两个

模型的计算时间. 测试三,模型为 2000 m×2000 m,加上吸收层共有 421×421 个网格,计算到 1.0 s,弹性参数与 2.1 中的模型参数相同. 其计算时间见表 2.

表 2 计算时间与内存分配情况统计表

Table 2 Statistical table of computational CPU time and Computer memory allocation

算法类型		PML1	PML2	PML3
计算时间	测试一	3 分 58 秒 85 毫秒	3 分 34 秒 38 毫秒	3 分 29 秒 27 毫秒
	测试二	4 分 48 秒 19 毫秒	4 分 46 秒 11 毫秒	4 分 44 秒 0 毫秒
	测试三	7 分 6 秒 11 毫秒	6 分 37 秒 987 毫秒	6 分 35 秒 47 毫秒
内存分配		12 个二维数组	8 个二维数组	8 个二维数组

从上表可以看出,1.2 中的算法(PML1)的计算速度最慢,而且要求分配的内存(数组数目)最大,1.4 中的算法(PML3)比 1.3 中的算法(PML2)的计算速度稍快. 当然,模型小的时候,三者的计算速度差别不是很大. 但是,随着模型成倍地增加和总的计算时间的增长,1.4 中的算法(PML3)在计算速度和节省计算机内存上的优势就能体现出来. 特别地,在三维数值模拟中,1.4(PML3)中的算法就更能体现出其在计算速度和节省计算机内存方面的优势.

3 结 论

本文以二阶弹性波动方程为例,在分析前人有关二阶波动方程的最佳匹配层(PML)吸收边界条件的构建方式的基础上,讨论了这些 PML 吸收边界条件在计算量、计算效率、误差累积方面的不足,并且在前人的基础上提出了新的改进算法,把 PML 吸收边界条件应用到二阶系统. 文中给出了集中力源下均匀介质中的波场快照和地面单炮记录,并对

边界处的地震记录和波形曲线进行了对比分析,分析三种 PML 边界条件的计算精度和吸收效果.同时,给出了爆炸震源下 Marmousi 模型的地面单炮地震记录,验证算法的稳定性和吸收效果.模型试验表明,本文提出的算法,具有计算精度高和计算量小的优势,而且是一种稳定的算法.

参 考 文 献 (References):

- [1] BERENGER J P. A perfectly matched layer for the absorbing of electro-magnetic waves[J]. Journal Computation Physics, 1994,114:185-200.
- [2] HASTINGS F D, SCHNEDER J B, BROSCAT S L. Application of the perfectly matched layer (PML) absorbing boundary condition to elastic wave propagation[J]. Journal Acoustical Society of America, 1996,100(5):3061-3969.
- [3] Chew W C, Liu Q H. Using perfectly matched layers for elastodynamics[J]. In Proceedings of the IEEE Antennas Propagation Society International Symposium, 1996,1:366-369.
- [4] Francis Collino and Chrysoula Tsogka. Application of the Perfectly Matched Absorbing Layer Model to the Linear Elastodynamic Problem in Anisotropic Heterogeneous Media[J]. Geophysics, 2001.
- [5] Festa G, Nielsen S. PML absorbing boundaries[J]. Bulletin of the seismological Society of America, 2003,93(2):891-903.
- [6] Becache E, Fauquaux S, Joly P. Stability of perfectly matched layers, group velocities and anisotropic waves[J]. Journal of Computational Physics, 2003,188:399-433.
- [7] 董国良, 马在田, 曹景忠. 一阶弹性波方程交错网格高阶差分法稳定性研究[J]. 地球物理学报, 2000,43(6):856-864.
Dong L G, Ma Z T, Cao J Z. The stability of the staggered-grid high-order difference method of one-order elastic equation [J]. Chinese J. Geophys. (in Chinese), 2000,43(6):856-864.
- [8] 刑丽. 地震声波数值模拟中的吸收边界条件[J]. 上海第二工业大学学报, 2006,23(4):16-22.
Xing Li. Absorbing Boundary Conditions for the Numerical Simulation of Acoustic Waves [J]. JOURNAL OF SHANGHAI SECOND POLYTECHNIC UNIVERSITY, 2006,23(4):16-22.
- [9] 刑丽. PML 吸收边界条件中的角点处理方法[J]. 科学技术与工程, 2011,1671-1813.
Xing Li. An effective Method for Handling the Corner Reflections of PML Absorbing Boundary Condition[J]. Science Technology and Engineering, 2011,1671-1813.
- [10] 王永刚, 邢文军, 谢万学, 朱兆林. 完全匹配层吸收边界条件的研究[J]. 中国石油大学学报, 2007.
WANG Yong-gang, XING Wen-jun, XIE Wan-xue, ZHU Zhao-lin. Study of absorbing boundary condition by perfectly matched layer[J]. Journal of China University of Petroleum (Edition of Natural Science), 2007.
- [11] 夏凡, 董良国, 马在田. 三维弹性波数值模拟中的吸收边界条件[J]. 地球物理学报, 2004,47(1):132-136.
XIA Fan, Dong Liang-Guo, MA Zai-Tian. ABSORBING BOUNDARY CONDITION IN 3D ELASTIC-WAVE NUMERICAL MODELING [J]. Chinese J. Geophys. (in Chinese), 2004,47(1):132-136.
- [12] 董国良, 马在田, 曹景忠, 等. 一阶弹性波方程交错网格高阶差分法[J]. 地球物理学报, 2000, 43(3): 411-419.
Dong L G, Ma Z T, Cao J Z, et al. The staggered-grid high-order difference method of one-order elastic equation [J]. Chinese J. Geophys. (in Chinese), 2000, 43(3): 411-419.
- [13] Liu Jiong, Ma Jian-wei, and Yang Hui-zhu. The study of perfectly matched layer absorbing boundaries for SH wave fields[J]. Applied Geophysics, 2009,267-274.
- [14] WANG Ts-li, TANG Xiao-ming. Finite-difference modeling of elastic wave propagation: A non-splitting perfectly matched layer approach [J]. Geophysics, 2003,68(5):1749-1755.
- [15] Dimitri Komatitisch and Rolan Martin. An unsplit convolutional perfectly matched layer improved at grazing incidence for the seismic wave equation [J]. Geophysics, 2007,155-167.
- [16] 单启铜, 乐友喜. PML 边界条件下二维粘弹介质波场模拟[J]. 石油物探, 2007,46(2):126-130.
Shan Qi-tong and Yue You-xi. Wavefield simulation of 2-D viscoelastic medium in Perfectly matched layer Boundary[J]. GEOPHYSICAL PROSPECTING FOR PETROLEUM, 2007,46(2):126-130.
- [17] 刘四新, 曾昭发. 频散介质中地质雷达波传播的数值模拟[J]. 地球物理学报, 2007,50(1):320-326.
LIU S X, Zeng Z F. Numerical simulation for Ground Penetrating Radar wave propagation in the dispersive medium [J]. Chinese J. Geophys. (in Chinese), 2007, 50(1):320-326.
- [18] Liu Q H, Tao J P. The perfectly matched layer for acoustic waves in absorptive media[J]. J. Acous. Soc. Am. , 1997, 102(4):2072-2082.
- [19] 贺同江, 刘红艳, 李小凡. 双向介质地震波场数值模拟的迭积微分算子及其 PML 边界条件[J]. 地球物理学进展, 2010,25(4):1180-1188.
HE Tong-jiang, LIU Hong-yan, LI Xiao-fan. Two-phase media seismic wave simulation by the convolutional differentiator method and the PML absorbing boundary[J]. PROGRESS IN GEOPHYSICS, 2010,25(4):1180-1188.
- [20] ZENG Y Q, HE J Q, LIU Q H. The application of the perfectly matched layer in numerical modeling of wave propagation in poro-elastic media [J]. Geophysics, 2001,66(4):1258-1266.
- [21] 熊章强, 唐生松, 张大洲. 瑞利面波数值模拟中的 PML 吸收边界条件[J]. 物探与化探, 2009,33(5):453-457.
- [22] 李静, 曾昭发, 吴丰收, 黄玲. 探地雷达三维高阶时域优先差分法模拟研究[J]. 地球物理学报, 2010,53(4):774-981.
Li J, Zeng Z F, Wu F S, et al. Study of three dimension high-order FDTD simulation for GPR [J]. Chinese J. Geophys. (in Chinese), 2010, 53(4): 974-981.

- [23] 徐义,张剑锋. 地震波数值模拟的非规则网格 PML 吸收边界[J]. 地球物理学报, 2008, 51(5): 1520-1526.
Xu Y, Zhang J F. An irregular-grid perfectly matched layer absorbing boundary for seismic wave modeling[J]. Chinese J. Geophys (in Chinese), 2008, 51(5): 1520-1526.
- [24] 孙林洁, 印兴耀. 基于 PML 边界条件的高倍可变网格有限差分方法[J]. 地球物理学报, 2011, 54(6): 1614-1623.
Sun L J, Yin X Y. A finite difference scheme based on PML absorbing boundary condition with high power grid step variation[J]. Chinese J. Geophys (in Chinese), 2011, 54(6): 1614-1623.
- [25] 陈可洋. 声波完全匹配吸收层吸收边界条件的改进算法[J]. 石油物探, 2009, 48(1), 76-79.
Chen Ke-yang. Improved algorithm for absorbing boundary condition of acoustic perfectly matched layer[J]. Geophysical prospecting for petroleum, 2009, 48(1), 76-79.
- [26] 秦臻, 任培罡, 姚姚, 张才. 弹性波正演模拟中 PML 吸收边界条件的改进[J]. 地球科学, 2009, 658-664.
Qin Zhen, Ren Pei-gang, Yao Yao, Zhang Cai. Improvement of PML Absorbing Boundary Conditions in Elastic wave Forward Modeling[J]. Earth Science, 2009, 658-664.
- [27] Dimitri Komatitsch and Jeroen Tromp. A perfectly matched layer absorbing boundary condition for the second-order seismic wave equation[J]. Geophys., 2003, 154, 146-153.