

波场模拟中的震源——Ricker 子波浅析

陈敬国

(中国地质大学(北京)地球物理与信息技术学院(100083))

E-mail: chenjc_cugb@163.com

摘要: 本文首先阐述了 Ricker 子波在地震的正演模拟、资料处理和反演解释中得到的广泛重视和应用。接着通过绘图显示和公式表达细致分析了 Ricker 子波在时(间)、频(率)域的波形特征,得出一些结论。然后列出 2 个数值模拟算例并且在最后给出了 Ricker 子波表达式由时间域变换为频率域的详细推导过程。

关键词: 波场模拟, Ricker 子波, 傅立叶变换, 时间域, 频率域, 震源

1. 引言

Norman Ricker 在实际应用中总结提出了 Ricker 子波的概念^[1, 2, 3, 4], 而后受到学界的广泛关注和研究。俞寿朋对 Ricker 子波作了相应的改进提出了宽带 Ricker 子波^[5], 被称为俞氏子波; 云美厚等对 Ricker 子波时、频域中各种频率概念进行了对比总结^[6]。Ricker 子波在地震波场数值模拟、提高资料分辨率的反褶积、地震炸药震源的设计、地震子波的提取等方面得到了广泛的参考及应用。

在地震波场正演模拟中, 总需要一个外力项——震源, Ricker 子波是一种最常用的最小相位子波——零相位子波。Ricker 子波常被研究人员用来做震源, 以获得各种运动学和动力学参数资料, 研究波在各种介质中的传播规律。

本文初步分析总结 Ricker 子波在时(间)、频(率)域的波形特征, 及参数对波形的影响, 最后给出数值模拟算例。

2. Ricker 子波参数特征分析

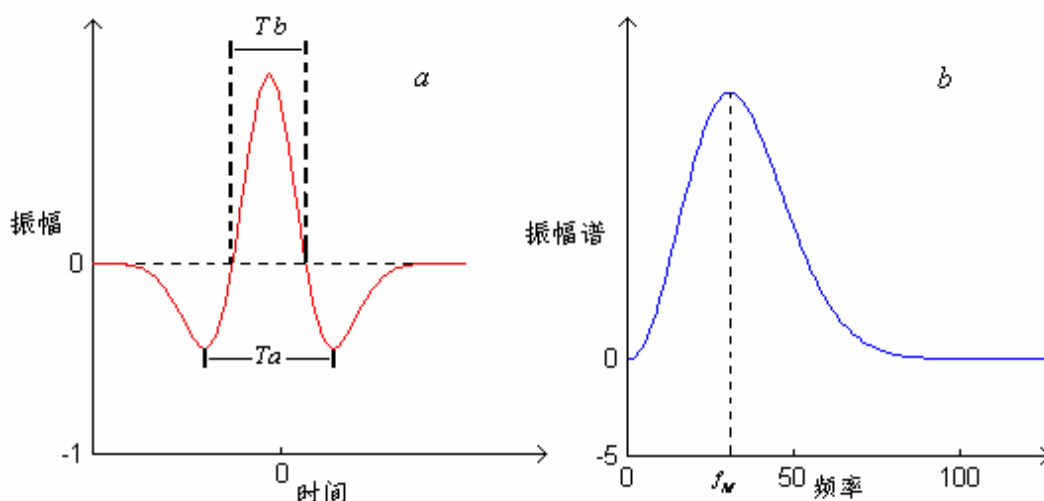


图1 Ricker子波特征图 (a为时间域, b为频率域)

Ricker子波在时间域里的表达式^[5,7]为

$$s(t) = (1 - 2\pi^2 f_M^2 t^2) e^{-\pi^2 f_M^2 t^2} \quad (1)$$

对式(1)进行傅立叶正变换(详细推导过程见附录),得到Ricker子波在频率域里的表达式^[5]

$$S(f) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{f^2}{f_M^3} e^{-\frac{f^2}{f_M^2}} \quad (2)$$

式(1)、(2)中, t 为时间, f 为频率, f_M 为峰值频率, Ricker子波在时间和频率域的波形见图1。

2.1 时间域特征

对(1)式分别求 $s(t) = 0$ 和 $s'(t) = 0$, 整理后得

$$T_a = \frac{\sqrt{6}}{\pi f_M}, \quad T_b = \frac{\sqrt{2}}{\pi f_M} \quad (3)$$

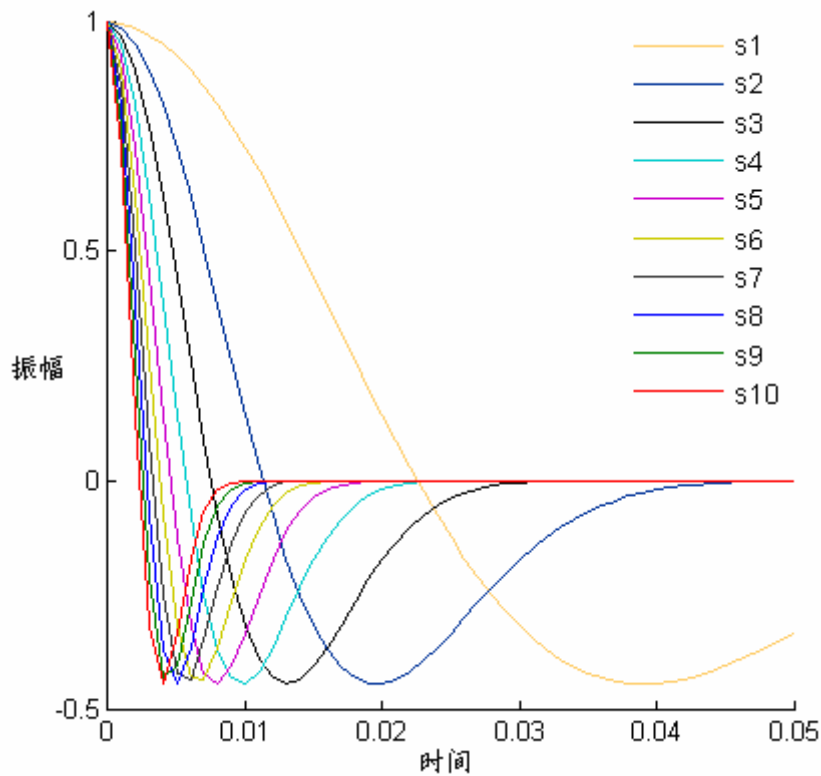


图2 不同峰值频率的 Ricker 子波波形图(时间域)

根据图1a所示,我们由式(3)可以得到振幅极大值 s_{\max} 和极小值 s_{\min} :

$$s_{\max}(t) = s(0) = 1 \tag{4}$$

$$s_{\min}(t) = s(\pm \frac{T_a}{2}) = -2e^{-\frac{3}{2}} \approx -0.4463 \tag{5}$$

表一 图 2 中对应曲线峰值频率参数一览表（时间域，取 $dt=0.001s$ ） 单位：Hz

曲线序号	s1	s2	s3	s4	s5	s6	s7	s8	s9	s10
峰值频率 f_M	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

通过 Ricker 子波在时间域的表达式（1）可以看出，子波只有一个自变量时间 t ，是一个按指数衰减的近似脉冲的尖峰时间函数。图 1a 中 Ricker 子波是一个对称函数，但实际应用 Ricker 子波时要满足因果律，因此我们最终讨论的子波函数的时间 $t > 0$ 。

图 2 是采用不同峰值频率组成的一簇 Ricker 子波波形对比图，主要参数详见表一。从图中可以看出：初始时刻能量最强，振幅都为 1；最大负振幅（反向振幅）也相等，振幅为 -0.45。峰值频率越大，能量越集中且衰减越快；最终能量都从负方向直接逼近于 0。

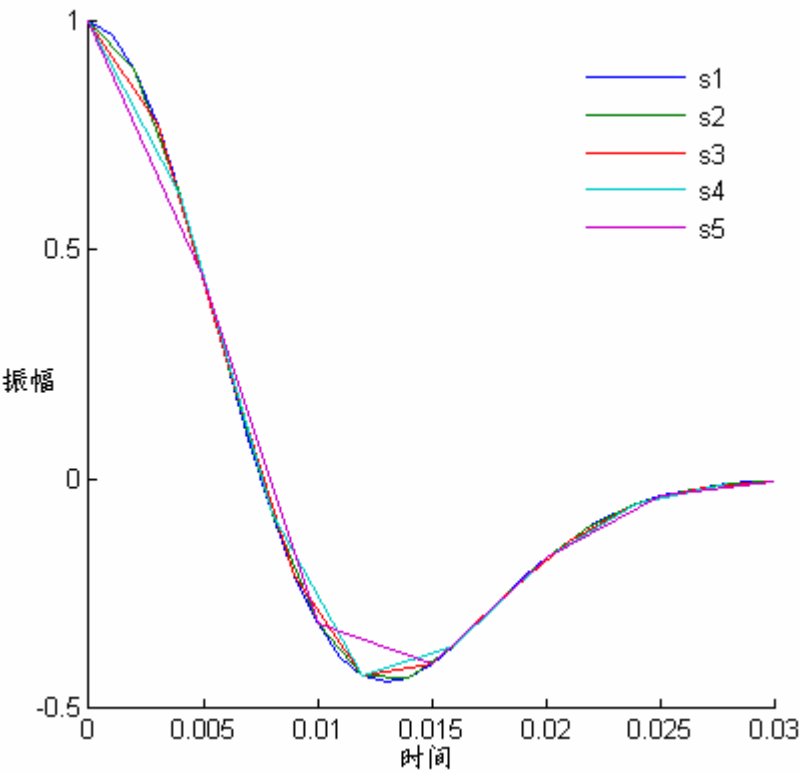


图 3 不同时间采样间隔的 Ricker 子波波形图（时间域）

表二 图 3 中对应曲线的时间采样间隔参数一览表（时间域， $f=30Hz$ ） 单位：s

曲线序号	s1	s2	s3	s4	s5
时间采样间隔 dt	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005

图 3 是采用不同时间间隔组成的一簇 Ricker 子波波形对比图，主要参数详见表二。从图中可以看出：不同的时间采样间隔对 Ricker 子波波形的影响不大。但在细节上，主要是拐点处由于时间步长的选取差异，直接影响着子波波形。当间隔过小时，采样精确，能看到细节信息，但是工作量大，计算较费时；当间隔过大时，采样速度快，工作量小较省时，但细节信息丢失。我们在地震波场数值模拟的过程中，要把握好时间采样间隔的选取：在满足工作精度要求的情况下，尽量采用较大时间间隔采样以提高工作效率。

2.2 频率域特征

根据峰值频率的定义：频率谱（振幅谱）中对应最大振幅时的频率叫做峰值频率（谱峰频率），把峰值频率代入式（2）得到振幅谱极大值 $S_{\max}(f)$

$$S_{\max}(f) = S(f_M) = \frac{2}{e\sqrt{\pi}f_M} \approx \frac{0.4151}{f_M} \tag{6}$$

在频率域中，Ricker 子波函数可以表示成频率谱与相位谱的乘积形式。由于 Ricker 子波是零相位子波，相位为恒值 0，所以频率域中 Ricker 子波波形函数就是频率谱（振幅谱）。

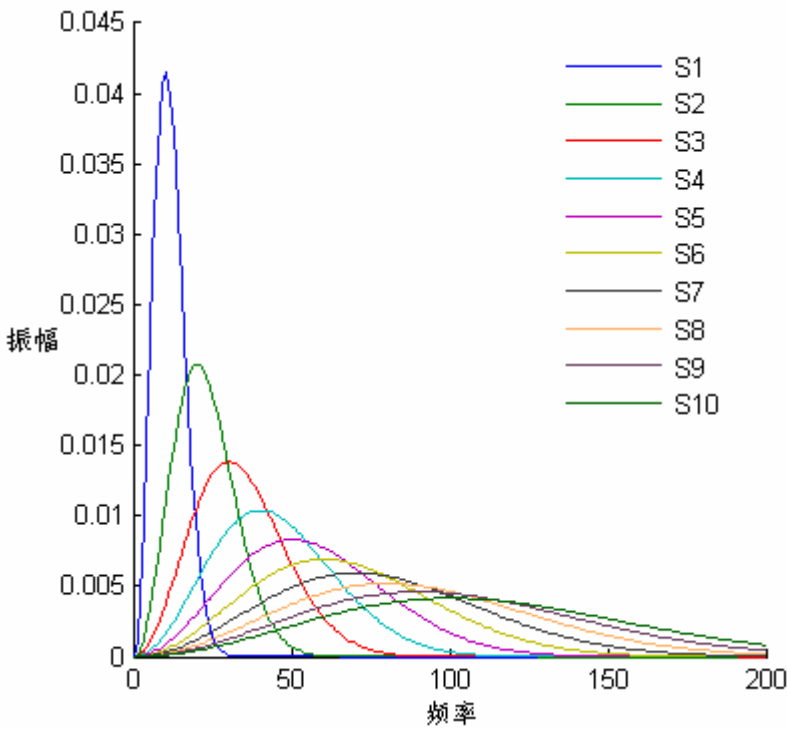


图 4 不同峰值频率的 Ricker 子波波形图（频率域）

表三 图 4 中对应曲线的峰值频率参数一览表（频率域） 单位：Hz

曲线序号	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10
峰值频率 f_M	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

图 4 是采用不同峰值频率组成的一簇 Ricker 子波波形对比图，主要参数详见表三。从图中可以看出：频率谱峰值随着峰值频率的增大而减小，成反比关系，反比系数为 0.4151；频率谱随着峰值频率的增大而变缓、变宽。峰值频率较小时，能量较集中，峰值频率较大时，能量较疏散。

3. Ricker 子波在波场模拟中的应用

Ricker 子波是波场数值模拟中最常用的一种零相位子波，在波场数值模拟中起到了不可替代的作用。Ricker 子波在波场模拟中的应用十分广泛，在此只举出两个小例子。

图 5 是用 Ricker 子波与地层中反射系数褶积合成地震记录。a 是峰值频率为 30Hz 的 Ricker 子波波形图（时间域），b 是 5 层 4 个反射界面（反射系数）的一维示意图，c 是褶积合成地震记录结果——单道地震记录曲线。通过 b、c 对照可以看出：地震记录中振幅最大值对应着地层界面。当负振幅的绝对值比正振幅的绝对值大时，则说明地层界面的反射系数为负值，也即下层比上层的波阻抗小。

图 6 是采用 Ricker 子波作震源模拟二维声波波场的结果图。a 是地质速度模型，一层均匀、各向同性介质，速度为 1，震源居中；b 是 Ricker 子波波形图（时间域）；c、d、e、f、g、h、i、j、k 和 l 分别是初始、4ms、6ms、8ms、20ms、40ms、60ms、80ms、100ms、200ms 时刻的波场快照。子波峰值频率为 30Hz，时间采样间隔为 2ms，空间采样步长为 0.01 个单位，地质模型大小为 1 个平方单位。从图中我们可以看出：初始时刻未激发震源，波场为 0；随着时间的推进产生 Ricker 子波，然后逐渐衰减，波场能量向四周外推。

4. 结束语

通过以上的分析、总结，得出以下结论：时间域 Ricker 子波振幅极值是定值分别为 $s_{\max} = 1$ 和 $s_{\min} \approx -0.4463$ ，频率域振幅极大值与峰值频率成反比， $S_{\max}(f) \approx 0.4151/f_M$ ；为了高精度模拟波场获得尖峰脉冲，则要小时间间隔采样和较小的峰值频率；在教材[7]中，Ricker 子波在频率域的表达式是错误的，正确表达式如式（2），详细推导过程见附录。

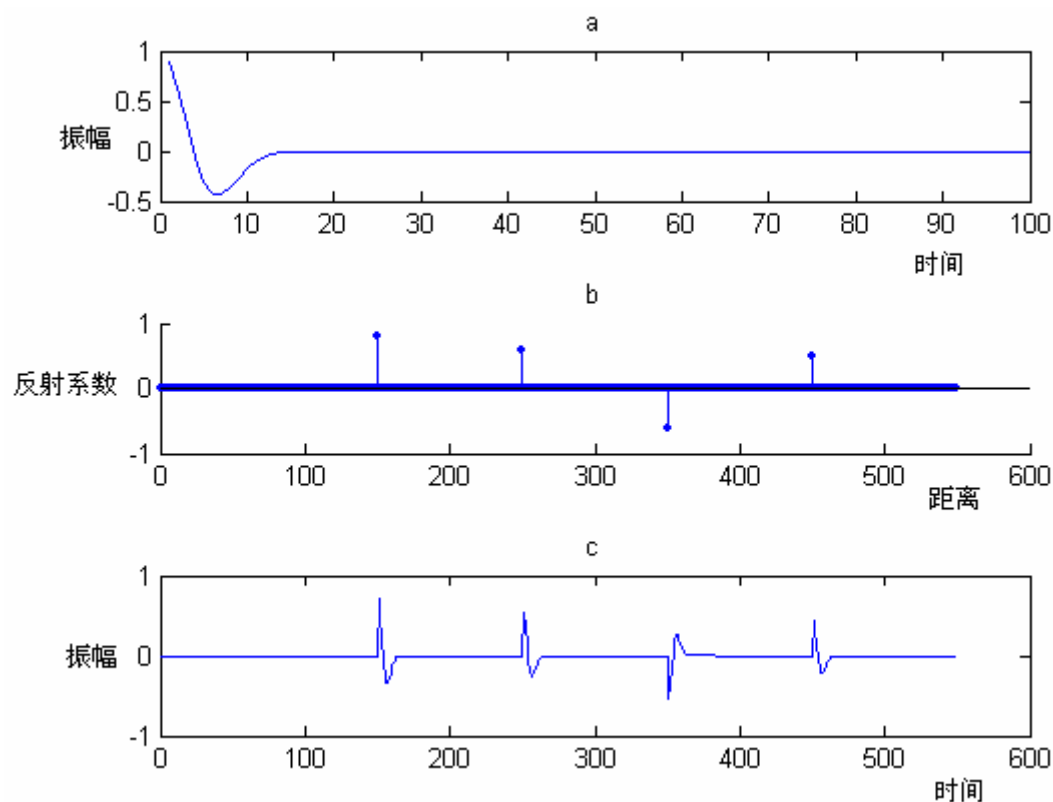


图 5 用子波合成地震记录

a 为 Ricker 子波, b 为反射系数, c 为单道地震记录

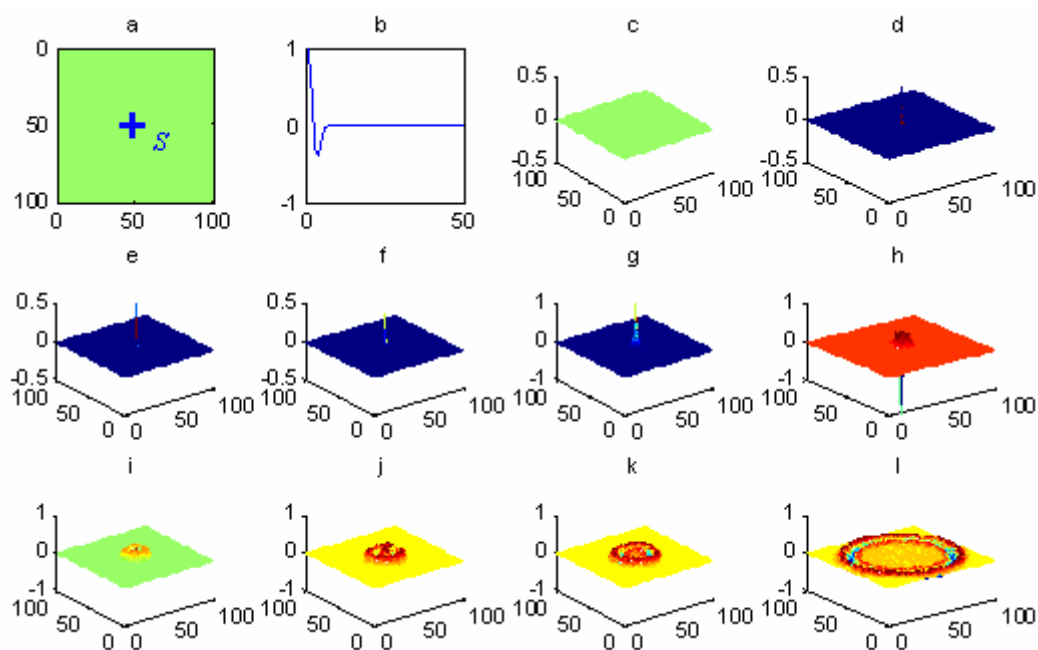


图 6 用 Ricker 子波模拟声波波场

a 为地质速度模型, b 为 Ricker 子波, c、d、e、f、g、h、i、j、k、l 分别为初始、4ms、6ms、8ms、20ms、40ms、60ms、80ms、100ms、200ms 时刻波场

参考文献

- [1] Norman Ricker. The form and nature of seismic waves and the structure of seismograms. Geophysics, 1940, 5: 348-367.
- [2] Norman Ricker. Wavelet functions and their polynomials. Geophysics, 1944, 9: 314-323.
- [3] Norman Ricker. Wavelet contraction, wavelet expansion, and the control of seismic resolution. Geophysics, 1953, 18(4): 769-792.
- [4] Norman Ricker. The form and laws of propagation of seismic wavelets. Geophysics, 1953, 18: 10-41.
- [5] 俞寿朋. 宽带 Ricker 子波. 石油地球物理勘探. 1996, 31 (5) : 605-615.
- [6] 云美厚, 丁伟. 地震子波频率浅析. 石油物探. 2005, 44 (6) : 578-581.
- [7] 谢里夫, 吉尔达特著; 初英等译. 勘探地震学. 北京: 石油工业出版社, 1999. 12: 232-234.
- [8] 梁昆淼. 数学物理方法. 北京: 高等教育出版社. 1998: (494-495).

Analysis of Ricker Wavelet: the Seismic Source of Wave

Field Modeling

Chen Jingguo

(China University of Geosciences (Beijing) (100083), Beijing, China)

E-mail: chenjg_cugb@163.com

Abstract

At first, this paper describes that the Ricker wavelet is regarded and applied for the seismic forward modeling, data processing and backward interpretation. And then, it analyses delicately waveform characters of the Ricker wavelet in time and frequency domain with graphs and formulae, attains some conclusion. Then it gives two examples for numerical modeling with the Ricker wavelet. Finally, we write out the detailed proving process of the Ricker wavelet formula from time domain to frequency domain.

Keywords: Wave Field Modeling, Ricker Wavelet, Fourier Transforms, Time Domain, Frequency Domain, Seismic Source

作者简介: 陈敬国, 男, 1981年6月生。2004年本科毕业于中国地质大学(北京), 现在该校继续攻读硕士研究生学位, 主要从事地震波数值模拟及地震资料处理方法的学习与研究。

附录：频率域 Ricker 子波表达式推导

1. 预备知识

由 Γ 函数的定义 $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{z-1} dx$, 作替换 $x = at^2$, 有

$$\Gamma(z) = 2a^z \int_0^{\infty} e^{-at^2} t^{2z-1} dt \quad (f-1)$$

取 $z = \frac{1}{2}$ 代入(f-1)式, 根据 Γ 函数的余元公式^[8]得

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{a} \int_0^{\infty} e^{-at^2} dt = \sqrt{\pi} \quad (f-2)$$

整理式(f-2)得

$$\int_0^{\infty} e^{-at^2} dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (f-3)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-at^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (\text{奇偶函数积分性质下同}) \quad (f-4)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-at^2} \cos \omega t dt &= \frac{1}{2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} \cos \omega t dt + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} \sin(-j\omega t) dt \right) \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(t+j\frac{\omega}{2a})^2} e^{-\frac{\omega^2}{4a}} dt \quad (f-5) \\ &= \frac{1}{2} e^{-\frac{\omega^2}{4a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(t+j\frac{\omega}{2a})^2} d(t+j\frac{\omega}{2a}) \end{aligned}$$

作替换 $t' \rightarrow t + j\frac{\omega}{2a}$, 则 $\int_0^{\infty} e^{-at^2} \cos \omega t dt = \frac{1}{2} e^{-\frac{\omega^2}{4a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at'^2} dt'$, 由(f-4)式得

$$\int_0^{\infty} e^{-at^2} \cos \omega t dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}} \quad (f-6)$$

2. 下面针对 Ricker 子波的频率域表达式的证明

令 $a = \pi^2 f_M^2$, 则由傅立叶正变换的定义有

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} e^{-j\omega t} dt - \int_{-\infty}^{\infty} 2at^2 e^{-at^2} e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} (\cos \omega t - j \sin \omega t) dt - \int_{-\infty}^{\infty} 2at^2 e^{-at^2} (\cos \omega t - j \sin \omega t) dt \\ &= 2 \int_0^{\infty} e^{-at^2} \cos \omega t dt - 0 - 2 \int_0^{\infty} 2at^2 e^{-at^2} \cos \omega t dt + 0 \end{aligned}$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}} - 2 \int_0^\infty 2at^2 e^{-at^2} \cos \omega t dt \quad (f-7)$$

令 $b = 2 \int_0^\infty 2at^2 e^{-at^2} \cos \omega t dt$, 则 $S(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}} - b$

$$\begin{aligned} b &= -2 \int_0^\infty t \cos \omega t de^{-at^2} \\ &= -2 \frac{t \cos \omega t}{e^{at^2}} \Big|_0^\infty + 2 \int_0^\infty e^{-at^2} (\cos \omega t - \omega t \sin \omega t) dt \\ &= -2 \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{t \cos \omega t}{e^{at^2}} - 0 \right) + 2 \int_0^\infty e^{-at^2} (\cos \omega t - \omega t \sin \omega t) dt \quad (f-8) \\ &= 0 + 2 \int_0^\infty e^{-at^2} \cos \omega t dt - 2 \int_0^\infty e^{-at^2} \omega t \sin \omega t dt \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}} + \frac{\omega}{a} \int_0^\infty \sin \omega t de^{-at^2} \end{aligned}$$

令 $c = \frac{\omega}{a} \int_0^\infty \sin \omega t de^{-at^2}$, 则 $b = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}} + c$

$$\begin{aligned} c &= \frac{\omega}{a} e^{-at^2} \sin \omega t \Big|_0^\infty - \frac{\omega^2}{a} \int_0^\infty e^{-at^2} \cos \omega t dt \\ &= 0 - \frac{\omega^2}{a} \frac{1}{2} e^{-\frac{\omega^2}{4a}} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \\ &= -\frac{\omega^2}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}} \quad (f-9) \end{aligned}$$

综合(f-7)式代入(f-8)、(f-8) 式代入(f-9)式有

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}} - \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}} - c \\ &= \frac{\omega^2}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}} \quad (f-10) \end{aligned}$$

把 $\omega = 2\pi f$, $a = \pi^2 f_M^2$ 代入(f-10)式得

$$\begin{aligned} S(f) &= \sqrt{\frac{\pi}{\pi^2 f_M^2}} \frac{4\pi^2 f^2}{2\pi^2 f_M^2} e^{-\frac{4\pi^2 f^2}{4\pi^2 f_M^2}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{f^2}{f_M^3} e^{-\frac{f^2}{f_M^2}} \quad (f-11) \end{aligned}$$