

波场模拟中的数值频散分析与校正策略

吴国忱^{1,2}, 王华忠¹

(1. 同济大学教育部海洋地质重点实验室, 上海 200092; 2. 石油大学(华东)地球资源与信息学院, 东营 257061)

摘要 波动方程有限差分法正演模拟, 对认识地震波传播规律、进行地震属性研究、地震资料地质解释、储层评价等, 均具有重要的理论和实际意义。但有限差分法本身固有存在着数值频散问题, 数值频散在正演模拟中是一种严重的干扰, 会降低波场模拟的精度与分辨率。针对TI介质波场模拟的交错网格有限差分方法, 本文从空间网格离散、时间网格离散和算子近似等三个方面对其产生的数值频散进行了分析, 并结合其他学者的研究成果给出了TI介质波场模拟中压制数值频散的方法与策略: 在已知介质频散关系时, 对差分算子可实施算子校正; 通过提高差分方程的阶数来提高波场模拟精度; 采用流体力学中守恒式方程的通量校正传输方法来压制波场模拟中的数值频散; 在实际正演模拟时, 采用交错网格高阶有限差分方程, 不仅在空间上采用高阶差分, 而且在时间上也要采用高阶差分, 否则只在单一方向上(空间或时间)提高方程的阶数对压制数值频散也不会取得理想的效果。

关键词 有限差分法, 交错网格, 波场模拟, 数值频散, TI介质

中图分类号 P315, P631

文献标识码 A

文章编号 1004-2903(2005)01-0058-08

Analysis of numerical dispersion in wave-field simulation

WU Guo-chen^{1,2}, WANG Hua-zhong¹

(1. Laboratory of Marine Geology under Education Ministry, Tongji University, Shanghai 200092, China;

2. College of Earth Resource and Information, University of Petroleum, Dong Ying 257061, China)

Abstract It is well known that finite-difference simulation of elastic wave equation is very important for us to recognize the regular pattern in propagation of seismic wave, perform research of seismic attributes, implement geological interpretation of seismic data and develop the resources of the earth. Although they have been widely implemented for wave extrapolation in modeling and migration, finite-difference schemes for numerically solving the wave equation suffer from undesirable ripples, so-called numerical dispersion. The numerical dispersion interferes with the seismic modeling seriously and decreases the precision of simulation. Here, we discuss what causes numerical dispersion in simulation of elastic wave in TI media according to high-order finite-difference method of staggered grid and present method and strategy to suppress finite-difference errors. For eliminating the numerical dispersion of simulation, we can use high-order finite-difference equation instead of low-order finite-difference equation to improve the precision of simulation; through using the dispersion relation of TI media, finite-difference operators are implemented with correction; the flux-corrected transport (FCT) method, commonly used in hydrodynamics for conservative equations, can then be used in solving elastic wave equations of TI media; for avoiding both space-grid dispersion and time-grid dispersion, is high-order finite-difference operator applied not only to space differentials but also to time differentials.

Keywords finite-difference method, staggered grid, simulation of wave field, numerical dispersion, TI media

0 引言

自从 Claerbout(1985)将波动方程应用于地震偏移以来, 有限差分方法在地震波正演模拟及偏移

成像等方面得到了广泛应用, 并在石油工业界取得了非凡的成就。正演模拟追求的目标是模拟精度要高、执行效率要快, 有限差分数值模拟是声波或弹性波场模拟中重要的方法之一。但有限差分法有个弱

收稿日期 2004-05-10; 修回日期 2004-08-15.

作者简介 吴国忱, 男, 1965年生, 1987年在石油大学任教至今, 副教授, 同济大学在职博士研究生, 主要从事各向异性介质地震波传播与成像方面的教学与科研工作。(E-mail: guochenwu-wgc@163.com)

点即数值频散问题:在用有限差分方程进行正演模拟或偏移成像时,当差分的空间网格间距和时间采样不合适或震源模拟不够精确都会引起波形畸变或重影;尤其是在用低角度的有限差分方程进行陡倾角成像或速度横向变化剧烈时也会造成波场的严重畸变;波在传播过程中,波前形状发生变化,并且逐渐散开.这些因为波传播相速度和群速度不一致引起的现象称为数值频散现象^[7].地震波在传播过程中存在物理耗散与物理频散现象:物理耗散是指波的振幅因物理阻尼作用而衰减的现象;物理频散是由物理介质的原因,波传播相速度随波数发生变化的现象.用差分方程逼近微分方程时引入了误差项,有时这些误差项使计算结果振幅值衰减和相速度发生变化,其作用相当于物理耗散和频散,这种虚假的物理效应称作数值耗散和数值频散.数值频散实质上是一种因离散化求解波动方程而产生的伪波动^[4].这种频散不同于波动方程本身引起的物理频散,而是差分方程所固有的本质特征.

为了消除波场模拟中的数值频散问题,许多学者在这方面作了大量的研究工作,从不同的角度对有限差分方程的数值频散进行了分析,并给出了相应的解决办法:有的学者利用相移滤波方法^[8]对单程波有限差分算子进行补偿来减少陡倾角成像的误差;有的学者利用高阶差分方程来压制数值频散^[1-3];还有人利用流体力学中守恒式方程 FCT 方法进行数值频散校正^[4,5,7].本文是针对 TI 介质交错网格有限差分正演模拟中所产生的数值频散进行了分析,在此基础上并结合别人的研究成果从差分算子的角度讨论了压制数值频散的策略问题.

1 TI 介质正演模拟数值频散分析

有限差分方程正演模拟中的数值频散是由差分算子逼近微分算子时的误差项而产生的,它使得具有不同频率的地震波表现为不同的相速度,从而使地震波发生频散,影响数值模拟的精度和偏移成像效果.在波动方程有限差分正演计算中,尽管数值频散不可避免,但我们可以采用提高计算精度的办法来减少数值频散,所以搞清楚数值频散的影响因素是非常重要的,然后寻找对策加以消除数值频散.用

VTI 介质模型描述层状各向异性介质,当有地层倾角存在时就转变为 TTI(Tilted Transversely Isotropy).在波场正演模拟中,本文采用的是一阶速度-应力方程组,在这里着重讨论空间网格与时间网格对数值频散的影响.

1.1 TI 介质速度-应力波动方程组

在 VTI 介质中弹性波场数值模拟时,为了避免对介质的弹性常数进行空间微分通常对以位移表达的波动方程进行降阶处理,得到速度-应力表示的波动方程组^[1,11,12].当 VTI 介质的对称轴倾斜时就变为 TTI 介质,其本构坐标系下的弹性矩阵要经过 Bond 变换到观测坐标系下的弹性矩阵^[6,9],这时 TTI 介质的弹性矩阵就和三斜各向异性介质的弹性矩阵相似^[6].为了使波动方程数值求解更具一般性,正演模拟时的弹性矩阵应使用 Bond 变换后的弹性矩阵.如式(1)所示, \mathbf{M} 是 Bond 变换矩阵; \mathbf{C}^0 是本构坐标系下 VTI 介质的弹性矩阵,其独立的弹性参数是五个;如式(2)所示, \mathbf{C} 是观测坐标系下的弹性矩阵,其非零的弹性参数比 \mathbf{C}^0 多,但是其独立的弹性参数和 \mathbf{C}^0 一样是五个.

$$\mathbf{C} = \mathbf{M} \mathbf{C}^0 \mathbf{M}^T, \quad (1)$$

$$\mathbf{C}^0 = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

为使波动方程能适应经过 Bond 变换后的各向异性介质情况,本文所使用的是极端各向异性的一阶速度-应力方程组,如式(3)所示.在方程组中 $(v_x, v_y, v_z)^T$ 是速度向量, $\rho(x, y, z)$ 是弹性介质的密度, $(f_x, f_y, f_z)^T$ 是体力向量, $(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{yx}, \sigma_{zx}, \sigma_{xy})^T$ 是应力向量, c_{ij} 是弹性参数.

$$\begin{cases} \frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + \rho f_x \right) \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + \rho f_y \right), \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho f_z \right) \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial t} = c_{11} \frac{\partial v_x}{\partial x} + c_{12} \frac{\partial v_y}{\partial y} + c_{13} \frac{\partial v_z}{\partial z} + c_{14} \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) + c_{15} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + c_{16} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial t} = c_{12} \frac{\partial v_x}{\partial x} + c_{22} \frac{\partial v_y}{\partial y} + c_{23} \frac{\partial v_z}{\partial z} + c_{24} \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) + c_{25} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + c_{26} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial t} = c_{13} \frac{\partial v_x}{\partial x} + c_{23} \frac{\partial v_y}{\partial y} + c_{33} \frac{\partial v_z}{\partial z} + c_{34} \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) + c_{35} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + c_{36} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial t} = c_{14} \frac{\partial v_x}{\partial x} + c_{24} \frac{\partial v_y}{\partial y} + c_{34} \frac{\partial v_z}{\partial z} + c_{44} \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) + c_{45} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + c_{46} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial t} = c_{15} \frac{\partial v_x}{\partial x} + c_{25} \frac{\partial v_y}{\partial y} + c_{35} \frac{\partial v_z}{\partial z} + c_{45} \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) + c_{55} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + c_{56} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial t} = c_{16} \frac{\partial v_x}{\partial x} + c_{26} \frac{\partial v_y}{\partial y} + c_{36} \frac{\partial v_z}{\partial z} + c_{46} \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) + c_{56} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + c_{66} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \end{cases},$$

为讨论问题方便,可将方程组(3)写成如下的矩阵形式:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y} + \mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial z} + \mathbf{U}, \quad (4)$$

方程(4)是本文进行数值频散分析所采用的矩阵方程.在方程(4)中,

$$\mathbf{U}(t) = (v_x, v_y, v_z, \sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{yz}, \sigma_{zx}, \sigma_{xy})^T,$$

v_x, v_y, v_z 为速度, σ_{ij} 为应力,

$$\mathbf{U}_0 = (\rho^{-1} f_x, \rho^{-1} f_y, \rho^{-1} f_z, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$$

为体力项,系数矩阵 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 和 \mathbf{C} 是含有 TTI 介质弹性参数的 9×9 阶矩阵.它们分别为:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \rho^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho^{-1} & 0 \\ c_{11} & c_{16} & c_{15} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{26} & c_{25} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{36} & c_{35} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{14} & c_{46} & c_{45} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{15} & c_{56} & c_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{16} & c_{66} & c_{65} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho^{-1} & 0 \\ c_{16} & c_{12} & c_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{26} & c_{22} & c_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{36} & c_{23} & c_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{46} & c_{24} & c_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{56} & c_{25} & c_{45} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{66} & c_{26} & c_{46} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ c_{15} & c_{14} & c_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{25} & c_{24} & c_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{35} & c_{34} & c_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{45} & c_{44} & c_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{55} & c_{45} & c_{35} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{66} & c_{46} & c_{36} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

1.2 空间网格离散

对 TI 介质弹性波场模拟,为保证模拟精度与效率,可使用交错网格高阶有限差分方程进行模拟.从方程(3)可以看出,空间一阶导数的计算精度是弹性波场模拟的关键,为确保对空间一阶导数的精度,在交错网格技术中,速度、应力对空间的导数是在相应网格节点之间半程上计算^[1,11,12].利用 Taylor 级数展开方法可以得到计算空间一阶导数阶差分精度的计算公式:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\Delta x} \sum_{n=1}^N C_n^{(N)} \left\{ f \left[x + \frac{\Delta x}{2} (2n-1) \right] - f \left[x - \frac{\Delta x}{2} (2n-1) \right] \right\} + O(\Delta x^{2N}), \quad (8)$$

其中, f 可是 \mathbf{U} 中的任一分量, $C_n^{(N)}$ 是待定系数,是确保计算空间一阶导数的 $2N$ 阶差分精度的关键,具体确定参数 $C_n^{(N)}$ 请参阅文献^[1].

为讨论空间网格引起的数值频散:令平面简谐波

$$\mathbf{U} = \mathbf{Q} e^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)};$$

令空间微分算子为 ∂_x, ∂_y 和 ∂_z ;令空间有限差分算子 $D_{\Delta x}, D_{\Delta y}, D_{\Delta z}$, 则有如下的关系式:

$$D_{\Delta x} \mathbf{U} = \frac{1}{\Delta x} \sum_{n=1}^N c_n \left[\mathbf{U} \left(x + n \frac{\Delta x}{2} \right) - \mathbf{U} \left(x - n \frac{\Delta x}{2} \right) \right], \quad (9)$$

$$D_{\Delta y}U = \frac{1}{\Delta y} \sum_{n=1}^N c_n \left[U\left(y + n \frac{\Delta x}{2}\right) - U\left(y - n \frac{\Delta x}{2}\right) \right], \quad (10)$$

$$D_{\Delta z}U = \frac{1}{\Delta z} \sum_{n=1}^N c_n \left[U\left(z + n \frac{\Delta x}{2}\right) - U\left(z - n \frac{\Delta x}{2}\right) \right], \quad (11)$$

所以

$$D_{\Delta x}U = \frac{2}{k_x \Delta x} \left(\sum_{n=1}^N c_n \sin nk_x \frac{\Delta x}{2} \right) \frac{\partial U}{\partial x}, \quad (12)$$

$$D_{\Delta y}U = \frac{2}{k_y \Delta y} \left(\sum_{n=1}^N c_n \sin nk_y \frac{\Delta y}{2} \right) \frac{\partial U}{\partial y}, \quad (13)$$

$$D_{\Delta z}U = \frac{2}{k_z \Delta z} \left(\sum_{n=1}^N c_n \sin nk_z \frac{\Delta z}{2} \right) \frac{\partial U}{\partial z}, \quad (14)$$

在用有限差分方程进行波场模拟时,是用差分代替微分,则将方程(4)式中对空间的导数用(12)~(14)式替换,则可得到波动方程的空间离散化方程为:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} = & A \frac{2}{k_x \Delta x} \left(\sum_{n=1}^N c_n \sin nk_x \frac{\Delta x}{2} \right) \frac{\partial U}{\partial x} \\ & + B \frac{2}{k_y \Delta y} \left(\sum_{n=1}^N c_n \sin nk_y \frac{\Delta y}{2} \right) \frac{\partial U}{\partial y} \\ & + C \frac{2}{k_z \Delta z} \left(\sum_{n=1}^N c_n \sin nk_z \frac{\Delta z}{2} \right) \frac{\partial U}{\partial z}, \quad (15) \end{aligned}$$

将方程(15)式和方程(4)式进行比较,可以得到方程(15)右边的系数如下:

$$A_1 = A \frac{2}{k_x \Delta x} \left(\sum_{n=1}^N c_n \sin nk_x \frac{\Delta x}{2} \right),$$

$$B_1 = B \frac{2}{k_y \Delta y} \left(\sum_{n=1}^N c_n \sin nk_y \frac{\Delta y}{2} \right),$$

$$C_1 = C \frac{2}{k_z \Delta z} \left(\sum_{n=1}^N c_n \sin nk_z \frac{\Delta z}{2} \right).$$

从 A_1 、 B_1 、 C_1 的表达式可以看出,由于差分算子误差而使介质的弹性参数发生变化,放大或缩小,下面 A 以 A_1 和为例具体讨论如下:

令其比例系数

$$\gamma_x = \frac{A_1}{A} = \frac{2}{k_x \Delta x} \left(\sum_{n=1}^N c_n \sin nk_x \frac{\Delta x}{2} \right),$$

利用 Taylor 级数展开整理得:

$$\begin{aligned} \gamma_x = \frac{A_1}{A} &= \left[\sum_{n=1}^N c_n n \frac{\sin nk_x \frac{\Delta x}{2}}{nk_x \frac{\Delta x}{2}} \right] \\ &\approx \sum_{n=1}^N c_n n \left[1 - \frac{(nk_x \Delta x)^2}{24} \right], \quad (16) \end{aligned}$$

令

万方数据

$$\phi = \frac{(k_x \Delta x)^2}{24},$$

则(16)简化为

$$\gamma_x = \frac{A_1}{A} \approx \sum_{n=1}^N c_n n - \sum_{n=1}^N c_n n^3 \phi. \quad (17)$$

利用(17)式可以计算出交错网格有限差分方程空间导数项的系数与原波动方程空间导数项系数的比值 γ_x ,下面列出了 2N 阶四种情况下的 γ_x :

当 $N=1$ 时, $c_1=1$,

$$\gamma_x = \frac{A_1}{A} \approx 1 - \phi. \quad (18)$$

当 $N=2$ 时,

$$c_1 = \frac{9}{8}, \quad c_2 = -\frac{1}{24},$$

$$\gamma_x = \frac{A_1}{A} \approx 1 - \frac{19}{24} \phi. \quad (19)$$

当 $N=3$ 时,

$$c_1 = \frac{6}{5}, \quad c_2 = -\frac{1}{15}, \quad c_3 = \frac{3}{625},$$

$$\gamma_x = \frac{A_1}{A} \approx 1 - \frac{1493}{1875} \phi. \quad (20)$$

当 $N=4$ 时,

$$c_1 = \frac{1225}{1024}, \quad c_2 = -\frac{245}{3072},$$

$$c_3 = \frac{49}{5120}, \quad c_4 = -\frac{5}{7168},$$

$$\gamma_x = \frac{A_1}{A} \approx 1 - \frac{2617951}{3261440} \phi. \quad (21)$$

1.3 时间离散

用有限差分方程进行正演模拟,对波场及介质参数要进行空间网格离散,而且也要进行时间离散。在交错网格技术中,要求空间网格交错的同时在时间上也要交错,所以波场对时间的导数也是在半网格点上计算的。下面具体讨论时间采样对数值频散的影响,设时间采样间隔为 Δt 、时间差分算子 $D_{\Delta t}$,时间微分算子为 ∂_t ,对速度-应力方程只进行时间离散化得到如下时间差分方程。

$$\begin{aligned} D_{\Delta t}U &= \frac{1}{\Delta t} \left[U\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) - U\left(t - \frac{\Delta t}{2}\right) \right] \\ &= \frac{2}{\omega \Delta t} \sin \frac{\omega \Delta t}{2} \frac{\partial U}{\partial t}. \quad (22) \end{aligned}$$

将其代入波动方程(4)中,得到如下的方程:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} &= \left[\text{sinc}\left(\frac{\omega \Delta t}{2}\right) \right]^{-1} A \frac{\partial U}{\partial x} + \left[\text{sinc}\left(\frac{\omega \Delta t}{2}\right) \right]^{-1} \\ &\quad \times B \frac{\partial U}{\partial y} + \left[\text{sinc}\left(\frac{\omega \Delta t}{2}\right) \right]^{-1} \\ &\quad \times C \frac{\partial U}{\partial z} + \left[\text{sinc}\left(\frac{\omega \Delta t}{2}\right) \right]^{-1} U_0. \quad (23) \end{aligned}$$

在这里也是考查方程的系数的变化,时间离散化后的方程系数变化为

$$A_t = \left[\text{sinc}\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right) \right]^{-1} A,$$

$$B_t = \left[\text{sinc}\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right) \right]^{-1} B,$$

$$C_t = \left[\text{sinc}\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right) \right]^{-1} C.$$

这里也是考查原方程系数 A 与差分方程系数 A_t 之间的变化,令其比例系数

$$\gamma_t = \frac{A_t}{A} = \left[\text{sinc}\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right) \right]^{-1},$$

利用 Taylor 级数展开法整理得到如下的式子

$$\gamma_t = \frac{A_t}{A} \approx 1 + \frac{1}{24}(\omega\Delta t)^2. \quad (24)$$

1.4 网格数值频散分析

对 TI 介质用交错网格高阶有限差分方程进行波场正演模拟,空间与时间网格离散引起的数值频散,在理论上可以通过前面(17)~(21)式和(24)式进行分析,并结合具体波场模拟结果进行说明.对 TI 介质的弹性波场数值模拟中网格数值频散作如下分析:

(1)根据(17)~(21)式,由于 $\phi > 1$,可以得到空间网格离散化使得 $\gamma_x < 1$,即将介质的弹性参数缩小,进而影响波传播的相速度变小,数值频散作为正常波形的尾巴出现.如图 1 所示,由于空间网格离散而引起的数值频散.

(2)根据(24)式,由于时间离散化 $\gamma_t > 1$,使得介质的弹性参数放大,使得波传播相速度变大,数值频散出现在正常波形之前,并且频率越高其超前越多.如图 2 所示,由于时间网格离散引起的数值频散.

(3)根据(17)式固定 k_x ,即对相同频率的子波,空间网格间距越大,使得 γ_x 越小,数值频散越严重;

固定空间网格间距 Δx ,子波频率越高,数值频散越严重.

(4)从 γ_x 与 γ_t 的表达式中可以看出,只要空间网格间距 Δx 和时间网格间距 Δt 均满足采样定理,不产生空间与时间假频,随着差分方程阶数提高,使得 γ_x 与 γ_t 的值均趋近于 1,对物性参数改变就越小,进而数值频散越少.所以,可以通过提高差分方程阶数的方法来提高波场模拟精度,压制数值频散.但随着方程阶数的增加,必然增加计算量.

2 数值频散校正策略

在弹性波正演模拟中,数值频散是作为干扰而存在的.由于数值频散的存在降低了波场模拟的精度和分辨率,为了提高波场模拟的精度,根据前面的分析结果,本文总结出了如下数值频散校正方法.

2.1 差分算子校正

根据前面对 γ_x 与 γ_t 的讨论可知,差分算子对波动方程系数有所改变,我们可以从差分算子的角度来解释这一问题.由(12)~(14)和(22)中得到如下的差分算子与微分算子的关系式

$$\begin{aligned} D_{\Delta x} &= Q_x \partial_x, & D_{\Delta y} &= Q_y \partial_y, \\ D_{\Delta z} &= Q_z \partial_z, & D_{\Delta t} &= Q_t \partial_t. \end{aligned} \quad (25)$$

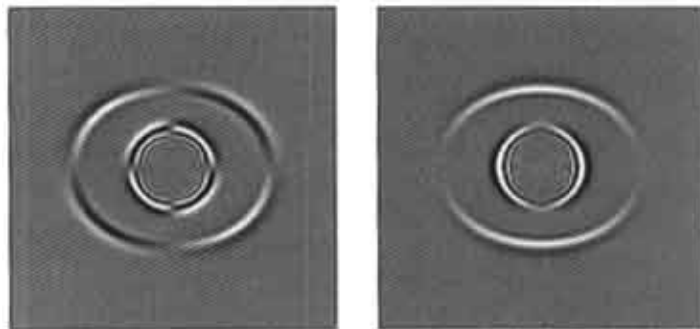
其中

$$Q_x = \frac{2}{k_x \Delta x} \left(\sum_{n=1}^N c_n \sin n k_x \frac{\Delta x}{2} \right),$$

$$Q_y = \frac{2}{k_y \Delta y} \left(\sum_{n=1}^N c_n \sin n k_y \frac{\Delta y}{2} \right),$$

$$Q_z = \frac{2}{k_z \Delta z} \left(\sum_{n=1}^N c_n \sin n k_z \frac{\Delta z}{2} \right),$$

$$Q_t = \frac{2}{\omega \Delta t} \sin \frac{\omega \Delta t}{2},$$



(a) X 分量

(b) Z 分量

图 1 空间网格数值频散

Fig. 1 Space-grid numerical dispersion

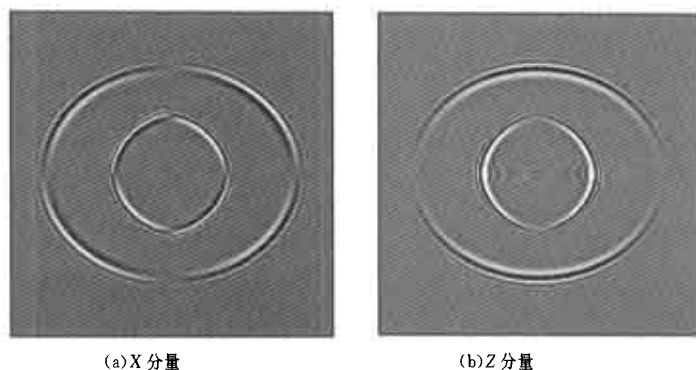


图 2 时间网格数值频散

Fig. 2 Time-grid numerical dispersion

为差分算子 $D_{\Delta x}$ 、 $D_{\Delta y}$ 、 $D_{\Delta z}$ 和 $D_{\Delta t}$ 的误差因子, 则 Q_x^{-1} 、 Q_y^{-1} 、 Q_z^{-1} 和 Q_t^{-1} 为差分算子数值频散校正因子. 所以有:

$$\begin{aligned} \partial_x &= Q_x^{-1} D_{\Delta x}, \quad \partial_y = Q_y^{-1} D_{\Delta y}, \\ \partial_z &= Q_z^{-1} D_{\Delta z}, \quad \partial_t = Q_t^{-1} D_{\Delta t}. \end{aligned} \quad (26)$$

将其代入方程(4)得

$$\begin{aligned} Q_t^{-1} D_{\Delta t} U &= A Q_x^{-1} D_{\Delta x} U + B Q_y^{-1} D_{\Delta y} U \\ &+ C Q_z^{-1} D_{\Delta z} U + U_0. \end{aligned} \quad (27)$$

方程(27)是数值频散校正的差分方程, 其中误差校正因子分别为

$$Q_x^{-1} = \left[\frac{2}{k_x \Delta x} \left(\sum_{n=1}^N c_n \sin n k_x \frac{\Delta x}{2} \right) \right]^{-1}, \quad (28)$$

$$Q_y^{-1} = \left[\frac{2}{k_y \Delta y} \left(\sum_{n=1}^N c_n \sin n k_y \frac{\Delta y}{2} \right) \right]^{-1}, \quad (29)$$

$$Q_z^{-1} = \left[\frac{2}{k_z \Delta z} \left(\sum_{n=1}^N c_n \sin n k_z \frac{\Delta z}{2} \right) \right]^{-1}, \quad (30)$$

$$Q_t^{-1} = \left(\frac{2}{\omega \Delta t} \sin \frac{\omega \Delta t}{2} \right)^{-1}. \quad (31)$$

根据差分算子的误差校正因子来看, 利用算子校正方法在正演模拟中减少数值频散. 从其表达式上来看, 差分算子补偿可在频率-波数域进行, 但利用差分算子校正进行压制数值频散会增加一定的计算量. 在时间域递推显格式的差分算法要进行这种补偿要有一定难度, 因为波在各向异性介质中传播的频散关系一般比较复杂. 在弹性波正演模拟中通常采用高阶差分方程和流体力学中通量校正传输方法以解决数值频散问题.

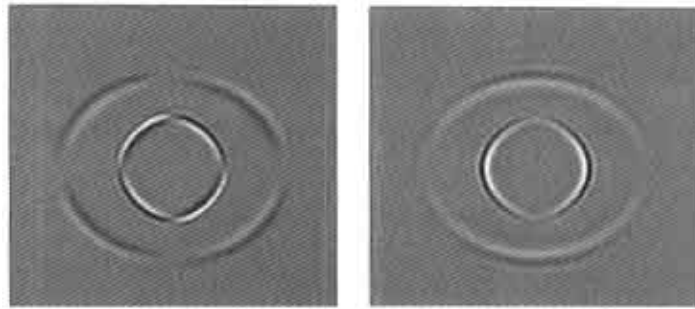
2.2 通过高阶差分方程压制数值频散

在弹性波正演模拟中, 通过高阶差分方程来提高模拟精度来压制数值频散. 但随着方程阶数的增加必然增加计算量和计算机内存量, 为此要采用交

错网格技术和高阶差分方程有机相结合^[1], 在不增加内存量和较少计算量就可提高波场及正演记录的模拟精度. 根据前面分析可知, 提高差分方程的精度包括两方面: 空间差分精度和时间差分精度, 单独提高空间差分或时间差分的精度都不会很好地压制网格数值频散. 如图 2 所示, 空间差分采用十阶近似, 时间采用二阶近似的波场模拟结果, 虽然空间差分的精度较高, 但由于时间差分精度不够, 仍然可以看到时间网格的数值频散. 比正常波形超前, 与前面分析的结果一致. 如果在时间上进一步提高差分方程的阶数, 采用四阶近似, 效果会更好些, 如图 3、图 4 所示, 波形超前的数值频散基本消除了, 在空间与时间上都采用高阶差分并和交错网格相结合, 波形超前与落后的数值频散受到了压制, 取得了较高的正演模拟精度.

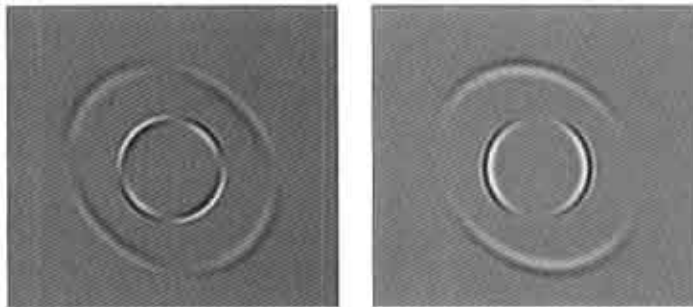
2.3 通量校正传输方法 (Flux-Corrected Transport)

在流体力学连续守恒式方程的求解中, Boris 和 Book 等人发展了一种通量校正传输方法 (FCT)^[13,14], 并将他们的 FCT 方法应用于声波方程的求解中, 有效压制了在粗网格情况下差分计算产生的数值频散^[4,5,13]. FCT 方法是基于守恒型方程的差分格式: 守恒型差分格式满足物理量守恒定律, 这种格式可用控制体积法直接从物理守恒定律构造, 也可以从散度型偏微分方程构造. 在构造这种差分格式时, 要求网格间交界面处守恒物理量的通量互相抵消, 即交界面两侧一边流入和另一边流出的通量相等. 这样内部单元边界上的截断误差被抵消, 避免误差的积累. 在交错网格有限差分法中, 我们要求在网格边界上有物理量流入和流出, 但要求



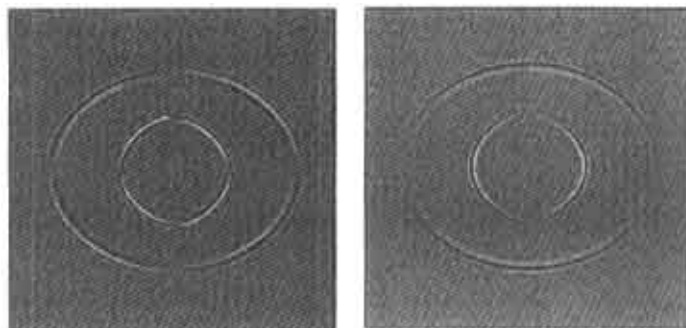
(a) X 分量

(b) Z 分量

图 3 VTI 介质高阶差分波场模拟($\theta=0^\circ$)Fig. 3 High-order finite-difference simulation in VTI($\theta=0^\circ$)

(a) X 分量

(b) Z 分量

图 4 TTI 介质高阶差分波场模拟($\theta=45^\circ$)Fig. 4 High-order finite-difference simulation in TTI($\theta=45^\circ$)

(a) X 分量

(b) Z 分量

图 5 FCT 校正后的波场模拟

Fig. 5 Simulation of wave field with FCT

其满足能量守恒关系,因此当两个网格的差分方程相加时,流过共同边界上的通量可相互消掉,所得的差分方程就和能量守恒关系直接应用于组合网格得到的差分方程相同.守恒格式保证差分方程与物理定律相互协调,它可以很容易的处理交错网格的差

万方数据

分频散校正.

在交错网格差分方程弹性波场正演模拟中,根据守恒定律,保证每个网格点在同一时刻的通量相等,如果不等就认为是有数值频散存在,用 FCT 方法进行校正,广义地说,FCT 方法主要有三步:交错

网格差分计算、通量漫射校正和通量抗漫射校正^[4,5,7]。在波场模拟中,数值频散也是不可避免的,即在网格间波场物理量违反了守恒定律,引起波场通量漫射。为了消除通量漫射以减小数值频散,将 FCT 方法引入到弹性波正演模拟中来,用以提高有限差分方程正演模拟的精度。这样可以用较低阶的差分方程可以达到较高精度的正演模拟,大大提高了运算效率,但这种方法需要更多的内存量。图 4 是在图 2 的基础上加上 FCT 校正的波场模拟结果,从图上可以看出波形超前的数值频散得到了较好压制。实践证明可以用低阶差分方程的波场模拟加上 FCT 校正也可以得到较高的精度的波场模拟结果。

3 结论与讨论

通过上述讨论与分析得到如下的结论与认识:由于空间网格和时间网格的离散化,用差分算子代替微分算子,改变了原波动方程的介质参数,从而引起数值频散,体现了数值频散是差分方程的固有性质,不可避免的;在弹性波场及正演模拟中数值频散作为干扰而存在的,降低了正演模拟精度与分辨率;在压制与消除数值频散方面,从算子的角度进行了分析,给出了 TI 介质的交错网格有限差分算子与微分算子关系式,并对差分算子的校正因子进行了定义。通过波场模拟结果表明:对 VTI 介质弹性波正演模拟可从对差分算子校正、提高差分方程的阶数和 FCT 方法等三方面去考虑压制数值频散;在高阶差分方程方面,提高时间差分与空间差分的阶数应同步进行,否则不会很好的压制数值频散;用低阶的差分方程加上 FCT 方法也可取得较高精度的弹性波模拟结果。

参 考 文 献 (References):

- [1] 董良国,马在田,曹景忠. 一阶弹性波方程交错网格高阶差分解法[J]. 地球物理学报,2000,43(3):411~419.
- [2] 杨慧珠,张友生,陶果. 井眼条件下弹性波传播问题的三维有限差分数值模拟[J]. 地球物理学进展,2003,12(1):348~352.
- [3] 孙卫涛,杨慧珠. 各向异性介质弹性波传播的三维不规则网格有限差分方法[J]. 地球物理学报,2004,18(2):332~337.
- [4] 杨顶辉,滕吉文. 各向异性介质中三分量地震记录的 FCT 有限差分模拟[J]. 石油地球物理勘探,1997,32(2):181~191.
- [5] 潘冬明,杨顶辉,张慧. 含煤层地质环境下地震波场的数值模拟[J]. 地球物理学进展,1997,12(1):74~83.
- [6] Hokstad K. 3-D elastic finite-difference modeling in tilted transversely isotropic media[J]. 72th Ann. Internat. Mtg. Soc Expl Geophys Expanded Abstracts, 2002,1951~1954.
- [7] Fei T, Lerner K. Elimination of numerical dispersion in finite-difference modeling and migration by flux-corrected transport [J]. Geophysics, 1995,60(6):1830~1842.
- [8] Li Z. Compensating finite-difference errors in 3-D migration and modeling[J]. Geophysics, 1995,56(10):1650~1660.
- [9] Winterstein D F. Velocity anisotropy terminology for geophysicists[J]. Geophysics, 1990,55(8):1070~1088.
- [10] Levander A R. Four-order finite-difference P-SV seismograms[J]. Geophysics, 1988,53(11):1425~1436.
- [11] Virieux J. P-SV wave propagation in heterogeneous media: velocity-stress finite difference method [J]. Geophysics, 1986,51(40):889~901.
- [12] Virieux J. SH-wave propagation in heterogeneous media: velocity-stress finite-difference method[J]. Geophysics, 1984,49(11):1933~1957.
- [13] Boris J P, Book D L. Flux-corrected transport. I. SHASTA, A fluid transport algorithm that works[J]. J Comput Phys, 1973,11:38~69.
- [14] Book D L, Boris J P, Hain K. Flux-corrected transport II: generalization of the method[J]. J Comput Phys, 1975,18:248~283.