

震源数值模拟

董清华

(五邑大学, 广东 江门 529020)

摘要: 在土木工程中, 经常遇到波动问题, 不同的震源可产生不同的波动。本文用傅氏变换法求解波动方程, 对胀缩源, 剪切源及方向力源进行了数值模拟, 并讨论了各自的特点。

关键词: 波动方程; 胀缩源; 剪切源; 方向力源

中图分类号: P315 **文献标识码:** A

Numerical modeling for seismic origins

DONG Qing-hua

(Wuyi University, Jiangmen 529020, China)

Abstract: Wave theory is frequently used for the civil engineering. Different seismic origins may get different wave equation in the paper. The pressure source, the shear source and the directional force source are respectively made modeling calculation. Their characteristics are also discussed.

Key words: wave equation; dilatational source; shear source; directional force source

1 引言

研究建筑结构在动载作用下的设计问题要用到波动理论, 建筑场地的抗震等级划分以及基桩检测中均要用到波动理论, 波动乃是振动的传播, 可用波动方程来描述。波动方程的求解对解决工程中大量的波动问题具有重要意义。由于波动方程的复杂性, 多数问题用解析方法难以奏效, 用数值计算的方法可以得到近似的解答。常用的数值计算方法有: 有限差分法, 有限单元法和傅氏变换法^[1]。

有限差分法是将波动方程中的导数用差商来代替, 使得微分方程的求解问题转化为代数方程的求解问题, 再用递推的方法求得各个时刻波场的数值解; 有限单元法首先将微分方程的边值问题转化为变分问题, 将连续的求解区域划分为有限个单元, 由每个单元可得一单元刚度阵, 将所有单元刚度矩阵组装得总体刚度矩阵, 求解由总体刚度矩阵构成的方程组, 可得数值计算结果; 傅氏变换法应用其微分性质, 将波动方程中对空间的导数运算进行傅氏变换, 转化为波数域的乘法运算, 再进行反傅氏变换, 这就完成了对空间的导数运算, 对时间的微分用差分来近似, 从而可得到模拟计算结果。有限差分方法要用较密的空间网格才能达到较高的计算精度, 而网格的加密要增大计算工作

收稿日期: 2000-03-15

作者简介: 董清华(1956-), 男, 山西运城人, 副教授, 博士, 主要从事土动力学、工程物探方面的教学及科研工作。

量;有限单元法计算量大,对计算机的内存要求大,且程序设计复杂;傅氏变换法具有很高的计算精度,且震源设置方便,在用有限区域来模拟无限区域时能得到很好的边界吸收效果。本文采用傅氏变换法求解波动方程,对三种震源进行数值模拟。

2 基本方程

以应力表示的波动方程如下^[2]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \rho x &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \rho Y &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \rho Z &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中: $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ ——分别为 x, y, z 坐标轴方向的法向应力; $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ ——分别为 xy, xz, yz 平面内的剪切应力; X, Y, Z ——为体力 F 在 x, y, z 坐标轴上的投影; ρ 为介质密度; u, v, w 分别为在 x, y, z 轴方向的位移分量。

各向同性弹性介质中应力与应变有如下关系:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + 2G\varepsilon_x \\ \sigma_y &= \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + 2G\varepsilon_y \\ \sigma_z &= \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + 2G\varepsilon_z \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} \\ \tau_{xz} &= G\gamma_{xz} \\ \tau_{yz} &= G\gamma_{yz} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中: λ, G ——拉梅常数; $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ 分别为 x, y, z 方向的线应变分量; $\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ 分别为 xy, xz, yz 平面内的角应变分量。

应变可用位移表示如下:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

拉梅常数可表示为

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \rho(V_p^2 - 2V_s^2) \\ G &= \rho V_s^2 \end{aligned} \right\}$$

式中: V_p , V_s —— 分别为纵波及横波速度。

3 数值计算方法及计算步骤

假设 $x(t)$ 为时间域中的中原函数, $\bar{X}(f)$ 为其象函数, 则 $x(t)$ 与 $\bar{X}(f)$ 组成一傅氏变换对。若 $\dot{x}(t)$ 为时间域中原函数 $x(t)$ 的微分, 则由傅氏变换的微分性质可得^[3]:

$$F[\dot{x}(t)] = i2\pi f F[x(t)] = i2\pi f \bar{X}(f) \quad (4)$$

$$\dot{x}(t) = F^{-1}[i2\pi f \bar{X}(f)] \quad (5)$$

由式(5)可知, 时间域中一个函数的导数等于该函数的傅氏变换乘以 $i2\pi f$, 再进行反傅氏变换。将其用于求解波动方程中对空间的微分项, 则式(3)成为

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= F_{k_x}^{-1}\{i2\pi k_x F_x[u]\} \\ \varepsilon_y &= F_{k_y}^{-1}\{i2\pi k_y F_y[v]\} \\ \varepsilon_z &= F_{k_z}^{-1}\{i2\pi k_z F_z[w]\} \\ \gamma_{xy} &= F_{k_y}^{-1}\{i2\pi k_y F_y[u] + F_{k_x}^{-1}\{i2\pi k_x F_x[v]\}\} \\ \gamma_{yz} &= F_{k_z}^{-1}\{i2\pi k_z F_z[v] + F_{k_y}^{-1}\{i2\pi k_y F_y[w]\}\} \\ \gamma_{xz} &= F_{k_z}^{-1}\{i2\pi k_z F_z[u] + F_{k_x}^{-1}\{i2\pi k_x F_x[w]\}\} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

式中, F_x , F_y , F_z 分别表示对 x , y , z 求傅氏变换; $F_{k_x}^{-1}$, $F_{k_y}^{-1}$, $F_{k_z}^{-1}$ 分别表示对 k_x , k_y , k_z 求反傅氏变换。

对式(1)作类似运算, 可得

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= F_{k_x}^{-1}\{i2\pi k_x F_x[\sigma_x]\} + F_{k_y}^{-1}\{i2\pi k_y F_y[\tau_{xy}]\} + F_{k_z}^{-1}\{i2\pi k_z F_z[\tau_{xz}]\} \\ \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= F_{k_x}^{-1}\{i2\pi k_x F_x[\tau_{xy}]\} + F_{k_y}^{-1}\{i2\pi k_y F_y[\sigma_y]\} + F_{k_z}^{-1}\{i2\pi k_z F_z[\tau_{yz}]\} \\ \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= F_{k_x}^{-1}\{i2\pi k_x F_x[\tau_{xz}]\} + F_{k_y}^{-1}\{i2\pi k_y F_y[\tau_{yz}]\} + F_{k_z}^{-1}\{i2\pi k_z F_z[\sigma_z]\} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{u[x, y, z, (n+1)\Delta t] - 2u[x, y, z, n\Delta t] + u[x, y, z, (n-1)\Delta t]}{\Delta^2 t} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \frac{v[x, y, z, (n+1)\Delta t] - 2v[x, y, z, n\Delta t] + v[x, y, z, (n-1)\Delta t]}{\Delta^2 t} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{w[x, y, z, (n+1)\Delta t] - 2w[x, y, z, n\Delta t] + w[x, y, z, (n-1)\Delta t]}{\Delta^2 t} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

已知前一时步和当前时步的位移分量, 由上式便可求得下一时步的位移分量。

计算步骤如下:

(1) 首先由式(6)计算应变 ε_x , ε_y , ε_z , γ_{xy} , γ_{yz} , γ_{xz} 。

(2) 再由式(2)计算应力 σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} , τ_{yz} , τ_{xz} 。

(3) 然后由式(7)可得 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$ 和 $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ 。

(4) 再用式(8)计算 u , v , w 。

开始计算时, 给 u , v , w 输入为 0 的初值, 然后对每个时步, 重复以上计算步骤, 直至达到所要求的计算时步为止。

4 震源模拟计算

震源通常可分为3类,分别为胀缩源,剪切源和方向力源。下面分别进行模拟计算。

4.1 胀缩源

胀缩源相当于在震源点产生一径向压力,压力的作用是在瞬间完成的,压力的方向由源点指向周围介质,这便产生了一个波动,介质质点的振动方向与压力作用方向一致,即质点振动方向与波传播方向一致,激发出P波。

胀缩源源函数可表示如下

$$\begin{aligned} F &= \nabla \left(\frac{1}{3} \Phi \right) \\ &= \frac{1}{3} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{1}{3} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{1}{3} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \mathbf{k} \\ &= \underline{x} \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k} \end{aligned} \quad (9)$$

则式(1)成为

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial(\sigma_x + \frac{\rho}{3} \Phi)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \\ \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial(\sigma_y + \frac{\rho}{3} \Phi)}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \\ \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial(\sigma_z + \frac{\rho}{3} \Phi)}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

上式中 $\Phi(x, y, z, t)$ 为一标量函数,计算时在网格的某一小区域引入此函数

$$\Phi(x, y, z, t) = \varphi(x, y, z) h(t) \quad (11)$$

其中,

$$\varphi(x, y, z) = \exp\{-\alpha^2[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2]\}$$

或写成离散形式

$$\varphi(i, j, k) = \exp\{-\alpha^2[(i-i_0)^2 + (j-j_0)^2 + (k-k_0)^2]\} \quad (12)$$

式中 (i_0, j_0, k_0) 为震源中心点; α 决定了震源子波的宽度,在多数情况下,取 $\alpha=1$,震源会迅速衰减。

式(11)中 $h(t)$ 为一限带子波,取为

$$h(t) = [1 - 2(\pi f_p t)^2] \cdot \exp[-(\pi f_p t)^2] \quad (13)$$

式中, f_p —— 峰值频率,与主频率的关系为 $f_p = f_B/1.3$ 。

对式(7)也作相应变动。

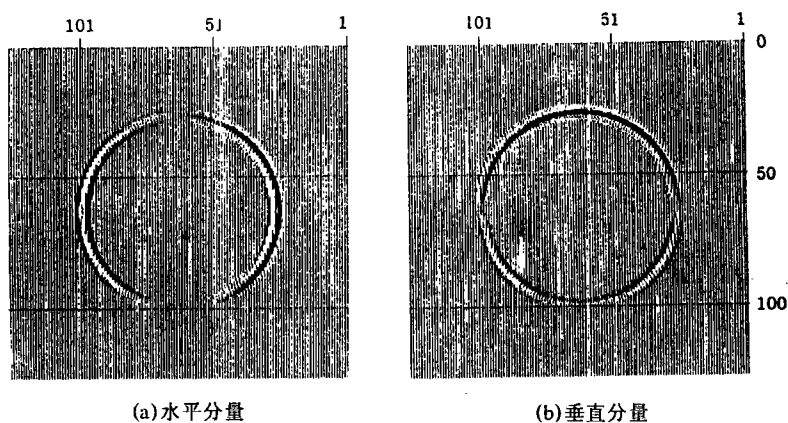


图1 胀缩源波剖面图

图1为各向同性无限介质中P波震源数值模拟结果, 计算所用模型参数为: 正方形网格128个×128个, 网格间距 $\Delta x = \Delta z = 5\text{m}$, $V_p = 1000\text{m/s}$, $V_s = 600\text{m/s}$, $f_b = 60$, 采样间隔 $\Delta t = 0.001\text{s}$, 时间步数 $L = 200$, 震源位于网格中心。

由图1可见, 震源正上方垂直分量有极大值, 在与震源水平方向上水平分量有极大值, 这正表明质点的振动方向与波传播方向一致, 即产生P波。

4.2 剪切源

横波激发情形在土木工程问题上具有重要意义, 它可通过如下旋度运算来实现:

$$\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{S}$$

$$\begin{aligned} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ S_x & S_y & S_z \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial S_z}{\partial y} - \frac{\partial S_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial S_x}{\partial z} - \frac{\partial S_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial S_y}{\partial x} - \frac{\partial S_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} \\ &= \ddot{x} \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k} \end{aligned} \quad (14)$$

则式(1)成为

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{xy} + \rho S_z) + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{xz} - \rho S_y) \\ \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial x} (\tau_{xy} - \rho S_z) + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{yz} - \rho S_x) \\ \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{xz} - \rho S_y) + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{yz} + \rho S_x) + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \end{aligned} \quad (15)$$

式(7)也作相应变动。

图2为剪切源模拟计算波剖面图, 其参数与图1相同。与图1相比, 可知此波动确定按S波速度传播。在震源正上方水平分量有极大值, 在与震源水平方向上, 垂直分量有极大值, 这表明介质质点振动方向与波传播方向垂直, 激发的是S波。

4.3 方向力震源

假设有一集中力作用于源点垂直方向上, 则震源力函数为

$$\mathbf{F} = Z \mathbf{k} \quad (16)$$

上式中 Z 可取源函数 $\Phi(x, y, z, t)$ 则式(1)成为

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \\ \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \\ \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \rho Z \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

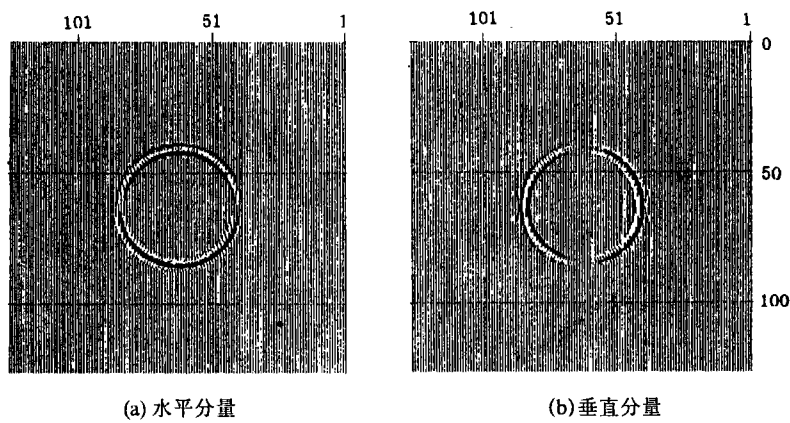


图 2 剪切源波剖面图

图 3 为方向力震源数值模拟结果，模型参数与图 1 相同，图中清晰显示出波场的辐射模式。图中外圈为 *P* 波，按纵波速度传播，内圈为 *S* 波，按横波速度传播。垂直分量图中可看出，在震源力作用方向上 *P* 波有极大值，*S* 波为 0；在与作用力垂直方向上，*P* 波为 0，*S* 波出现极大值。对于水平分量，在震源力作用方向和与震源力垂直方向上，*P* 波、*S* 波均为 0，在与震源力作用方向成 45° 斜交方向上 *P* 波、*S* 波均有极大值出现。

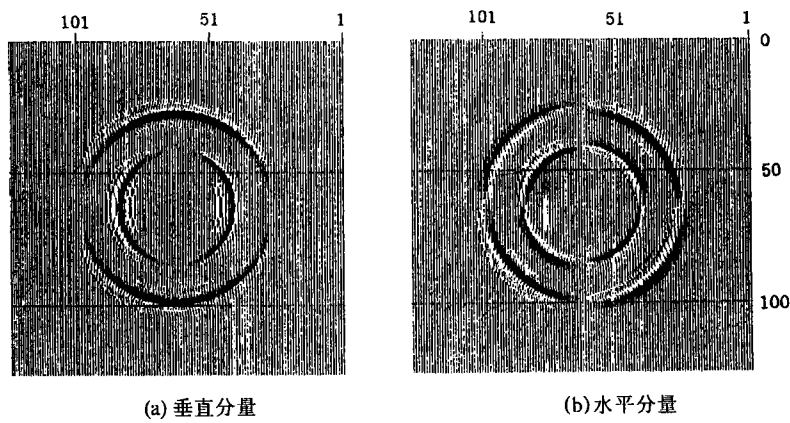


图 3 方向力震源波剖面图

5 结语

工程上常用炸药爆炸作为胀缩源，用水平敲击插入地下一木板作为剪切源，用重锤敲击作为方向力震源。方向力震源在岩土力学参数测试和基桩动测中大量用到。由本文模拟计算结果可知，胀缩源只产生 *P* 波，剪切源只产生 *S* 波，方向力震源既产生 *P* 波，也产生 *S* 波，方向力震源最大的特点就是其产生的波场具有方向性，这一点在用于工程时应予以足够重视。

参考文献:

[1] 廖振鹏. 工程波动理论导引[M]. 北京: 科学出版社, 1996.
[2] 黄实. 工程弹性力学[M]. 北京: 清华大学出版社, 1982.
[3] 南京工学院数学教研室. 积分变换[M]. 北京: 人民教育出版社, 1978.