第 43 卷 第 6 期 地球物理学报 Vol. 43, No. 6
2000 年 11 月 CHINESE JOURNAL OF GEOPHYSICS Nov., 2000

[文章编号] 0001-5733(2000)06-0856-09 [中图分类号] P631

一阶弹性波方程交错网格高阶差分解法稳定性研究

董良国 马在田 曹景忠
(同济大学教育部海洋地质重点实验室, 上海 200092)

[摘 要] 稳定性问题是数值求解波动方程的基本问题. 文中对三维横向各向同性介质中一阶弹性波方程交错网格高阶差分解法的稳定性进行了分析, 给出了不同精度差分方程统一的稳定性条件, 证明了三维 TI 介质中一阶弹性波方程交错网格高阶差分解法的稳定性由弹性波在 X、Y、Z 三个方向上的 Courant 数共同决定. 最后通过几种精度差分方程的稳定性条件, 说明了这种一阶弹性波方程高阶差分解法具有高精度、高效率的特点.

[关键词] 横向各向同性, 稳定性条件, 高阶差分法, 交错网格.

1 引 言

在弹性波正演模拟中, 除了使用二阶方程外, 常常采用一阶速度-应力弹性波方程, 其主要优点是勿需对弹性常数进行空间微分. 在具体的有限差分解法上, 除了规则网格外, 一种较为先进的交错网格最早由 Madariaga, R.[1] 提出, Virieux[2,3] 在模拟各向同性介质中的 SH 波和 P-SV 波时也使用了这种差分网格, 其差分精度为 $O(\Delta t^2+\Delta x^2)$, 在不增加计算工作量和存储空间的前提下, 和常规差分网格相比局部精度提高了 4 倍, 且收敛速度也较快[4]. Levander[5] 又将这种差分网格的精度提高到 $O(\Delta t^2+\Delta x^4)$.

为了进一步提高差分精度, 减小网格频散, 本文作者[6] 将速度(应力)对时间的奇数阶高阶导数转化为应力(速度)对空间的导数, 从而在不增加所需内存量的前提下, 将交错网格和高阶差分法有机结合, 成功地运用到求解二维 TI 介质一阶速度-应力弹性波方程中, 并在实际模型的弹性波模拟中取得了较好的模拟效果. 这种求解一阶弹性波方程的交错网格高阶差分解法, 与常规的有限差分法以及交错网格低阶差分法相比, 网格频散显著减小, 精度明显提高. 在保证一定的差分精度的基础上, 可以取较大时间步长和空间网格间距, 提高了计算效率.

由于差分计算过程中数值参数选择不合理, 可能产生无物理意义的按指数增大的数值计算结果[7], 造成模拟结果网格频散严重, 影响对问题的分析, 严重时会造成溢出而使计算

[收稿日期] 1999-11-09 收到, 2000-05-24 收到修定稿.
[基金项目] 教育部重点科技基金项目和海洋 863-820 青年基金项目.
[作者简介] 董良国, 男, 1966 年生. 1990 年毕业于同济大学勘探地球物理专业, 现为该校在职博士研究生, 主要从事地震波的传播以及地震数据处理等方面的教学和科研工作.

无法进行. 因此, 对一种数值解法, 需要知道计算稳定的离散参数区域, 即分析解法的稳定性.

2　一阶弹性波方程的高阶差分形式

2.1　三维一阶弹性波方程

在不考虑体力的情况下, 由速度-应力表示的三维一阶弹性波方程可为

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}(t)}{\partial t} = Q\boldsymbol{U}(t), \tag{1}$$

这里, $\boldsymbol{U}=(v_x, v_y, v_z, \tau_{xx}, \tau_{yy}, \tau_{zz}, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz})^{\mathrm{T}}$, v 为速度, τ_{ij} 为应力, $\boldsymbol{Q}$ 是含有介质弹性常数以及空间微分算子 $\boldsymbol{D}_x$、$\boldsymbol{D}_y$ 和 $\boldsymbol{D}_z$ 的 9×9 阶方阵.

2.2　一阶弹性波方程交错网格高阶差分形式

将 $\boldsymbol{U}\left(t+\frac{\Delta t}{2}\right)$ 和 $\boldsymbol{U}\left(t-\frac{\Delta t}{2}\right)$ 通过 Taylor 公式展开后相减, 可得 $2M$ 阶时间差分精度的差分近似

$$\boldsymbol{U}\left(t+\frac{\Delta t}{2}\right) - \boldsymbol{U}\left(t-\frac{\Delta t}{2}\right) = 2\sum_{m=1}^{M} \frac{(\Delta t/2)^{2m-1}}{(2m-1)!} \frac{\partial^{2m-1}\boldsymbol{U}(t)}{\partial t^{2m-1}} + O(\Delta t^{2M}), \tag{2}$$

其中, Δt 为时间步长. 当 $M=1$ 时, (2)式即为传统的二阶精度时间差分近似.

为了提高时间差分精度, 同时避免直接计算(2)式中的 $\frac{\partial^{2m-1}}{\partial t^{2m-1}}\boldsymbol{U}(t)$ 时所涉及过多时间层而需求过多的内存量, 利用方程(1)可以完全准确地将速度对时间的任意奇数阶高阶导数转为应力对空间的导数, 将应力对时间的任意奇数阶高阶导数转为速度对空间的导数. 这样, 在计算一个时间层上速度(应力)时, 只需要前一时间层的速度(应力)场, 以及中间节点上的应力(速度)场, 不需要过多的时间层, 从而节省内存. 由(1)式可知

$$\frac{\partial^{2m-1}\boldsymbol{U}(t)}{\partial t^{2m-1}} = \boldsymbol{Q}^{2m-1}\boldsymbol{U}(t), \tag{3}$$

为了提高空间差分精度, 采用交错网格法得到 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 的 $2N$ 阶空间精度的近似式为

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\Delta x}\sum_{n=1}^{N} C_n^{(N)}\left\{f\left[x+\frac{\Delta x}{2}(2n-1)\right] - f\left[x-\frac{\Delta x}{2}(2n-1)\right]\right\} + O(\Delta x^{2N}), \tag{4}$$

其中, Δx 为差分网格间距, $C_n^{(N)}$ 为不同阶的交错网格差分系数(该系数的确定方法可参见文献[6]).

将(3)式中 $\boldsymbol{Q}$ 精确的空间微分算子 $\boldsymbol{D}_x$、$\boldsymbol{D}_y$ 和 $\boldsymbol{D}_z$ 用(4)式的 $2N$ 阶空间精度的近似微分算子代替后, 变成矩阵 $\boldsymbol{R}$, 这样(3)式就变为如下 $2N$ 阶空间差分精度的差分形式

$$\frac{\partial^{2m-1}\boldsymbol{U}(t)}{\partial t^{2m-1}} \approx \boldsymbol{R}^{2m-1}\boldsymbol{U}(t), \tag{5}$$

将(5)式代入方程(2), 即可以得到 $2M$ 阶时间、$2N$ 阶空间差分精度的三维一阶弹性波方程的交错网格高阶差分形式

$$\boldsymbol{U}\left(t+\frac{\Delta t}{2}\right) - \boldsymbol{U}\left(t-\frac{\Delta t}{2}\right) = 2\sum_{m=1}^{M} \frac{(\Delta t/2)^{2m-1}}{(2m-1)!}\boldsymbol{R}^{2m-1}\boldsymbol{U}(t) +$$

$$O(\Delta t^{2M}+\Delta x^{2N}+\Delta y^{2N}+\Delta z^{2N}),\tag{6}$$

3 高阶差分方程稳定性分析方法

方程(6)两边对时间求导后,分别对时间和空间进行 Fourier 变换,可得

$$\left[\boldsymbol{E}\sin^2\left(\frac{1}{2}\omega\Delta t\right)+\sum_{m=1}^{M}\frac{\Delta t^{2m}}{2^{2m}(2m-1)!}\tilde{\boldsymbol{G}}^m\right]\boldsymbol{U}(\omega,k_x,k_y,k_z)=0,\tag{7}$$

这里 $\boldsymbol{E}$ 为单位矩阵, $\tilde{\boldsymbol{G}}(k_x,k_y,k_z)$和 $\boldsymbol{U}(\omega,k_x,k_y,k_z)$分别是 9×9 阶矩阵 $\boldsymbol{G}(x,y,z)=\boldsymbol{R}^2(x,y,z)$和向量 $\boldsymbol{U}(t,x,y,z)$的 Fourier 变换.

要使方程(7)中 $\boldsymbol{U}(\omega,k_x,k_y,k_z)$有非零解,系数行列式必须为零,

$$\left|\boldsymbol{E}\sin^2\left(\frac{1}{2}\omega\Delta t\right)+\sum_{m=1}^{M}\frac{\Delta t^{2m}}{2^{2m}(2m-1)!}\tilde{\boldsymbol{G}}^m\right|=0,\tag{8}$$

这样,我们即可根据(8)式求得离散参数 Δt、Δx、Δy、Δz 以及矩阵 $\tilde{\boldsymbol{G}}$ 中介质弹性常数之间必须满足的关系,也就是交错网格高阶差分方程(6)的稳定性条件. 但是,不同的介质模型、不同的空间差分精度,矩阵 $\tilde{\boldsymbol{G}}$ 具有不同的形式,以下仅对 TI 介质进行分析.

4 三维 TI 介质高阶差分方程的稳定性条件

设 TI 介质的对称轴为 Z 轴,介质的弹性系数刚度矩阵为

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}C_{11}&C_{12}&C_{13}&0&0&0\\C_{12}&C_{11}&C_{13}&0&0&0\\C_{13}&C_{13}&C_{33}&0&0&0\\0&0&0&C_{44}&0&0\\0&0&0&0&C_{44}&0\\0&0&0&0&0&C_{66}\end{bmatrix},\quad 其中\ C_{12}=C_{11}-2C_{66},$$

通过运算可以得到用分块矩阵表示的矩阵 $\boldsymbol{Q}^2$ 为

$$\boldsymbol{Q}^2=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11}&0&0\\0&\boldsymbol{A}_{22}&\boldsymbol{A}_{23}\\0&\boldsymbol{A}_{32}&\boldsymbol{A}_{33}\end{bmatrix},\tag{9}$$

其中 $\boldsymbol{A}_{11}$、$\boldsymbol{A}_{22}$、$\boldsymbol{A}_{23}$、$\boldsymbol{A}_{32}$和 $\boldsymbol{A}_{33}$均为 3×3 阶矩阵,分别为

$$\boldsymbol{A}_{11}=\begin{bmatrix}\dfrac{C_{11}D_x^2+C_{66}D_y^2+C_{44}D_z^2}{\rho}&\dfrac{(C_{12}+C_{66})D_xD_y}{\rho}&\dfrac{(C_{13}+C_{44})D_xD_z}{\rho}\\\dfrac{(C_{12}+C_{66})D_xD_y}{\rho}&\dfrac{C_{66}D_x^2+C_{11}D_y^2+C_{44}D_z^2}{\rho}&\dfrac{(C_{13}+C_{44})D_yD_z}{\rho}\\\dfrac{(C_{13}+C_{44})D_xD_z}{\rho}&\dfrac{(C_{13}+C_{44})D_yD_z}{\rho}&\dfrac{C_{44}D_x^2+C_{44}D_y^2+C_{33}D_z^2}{\rho}\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_{22}=\begin{bmatrix}\frac{C_{11}D_x^2}{\rho} & \frac{C_{12}D_y^2}{\rho} & \frac{C_{13}D_z^2}{\rho}\\ \frac{C_{12}D_x^2}{\rho} & \frac{C_{11}D_y^2}{\rho} & \frac{C_{13}D_z^2}{\rho}\\ \frac{C_{13}D_x^2}{\rho} & \frac{C_{13}D_y^2}{\rho} & \frac{C_{33}D_z^2}{\rho}\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_{23}=\begin{bmatrix}\frac{(C_{11}+C_{12})D_xD_y}{\rho} & \frac{(C_{11}+C_{13})D_xD_z}{\rho} & \frac{(C_{12}+C_{13})D_yD_z}{\rho}\\ \frac{(C_{11}+C_{12})D_xD_y}{\rho} & \frac{(C_{12}+C_{13})D_xD_z}{\rho} & \frac{(C_{11}+C_{13})D_yD_z}{\rho}\\ \frac{(C_{11}+C_{13})D_xD_y}{\rho} & \frac{(C_{13}+C_{33})D_xD_z}{\rho} & \frac{(C_{13}+C_{33})D_yD_z}{\rho}\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_{32}=\begin{bmatrix}\frac{C_{66}D_xD_y}{\rho} & \frac{C_{66}D_xD_y}{\rho} & 0\\ \frac{C_{44}D_xD_z}{\rho} & 0 & \frac{C_{44}D_xD_z}{\rho}\\ 0 & \frac{C_{44}D_yD_z}{\rho} & \frac{C_{44}D_yD_z}{\rho}\end{bmatrix},\ \boldsymbol{A}_{33}=\begin{bmatrix}\frac{C_{66}(D_x^2+D_y^2)}{\rho} & \frac{C_{66}D_yD_z}{\rho} & \frac{C_{66}D_xD_z}{\rho}\\ \frac{C_{44}D_yD_z}{\rho} & \frac{C_{44}(D_x^2+D_z^2)}{\rho} & \frac{C_{44}D_xD_y}{\rho}\\ \frac{C_{44}D_xD_z}{\rho} & \frac{C_{44}D_xD_y}{\rho} & \frac{C_{44}(D_y^2+D_z^2)}{\rho}\end{bmatrix}.$$

因此, 对三维 TI 介质, (7)式中的 $\boldsymbol{G}$ 用分块矩阵可以表示为

$$\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{A}}_{11} & 0 & 0\\ 0 & \tilde{\boldsymbol{A}}_{22} & \tilde{\boldsymbol{A}}_{23}\\ 0 & \tilde{\boldsymbol{A}}_{32} & \tilde{\boldsymbol{A}}_{33}\end{bmatrix},\tag{10}$$

其中 $\tilde{\boldsymbol{A}}_{11}$、$\tilde{\boldsymbol{A}}_{22}$、$\tilde{\boldsymbol{A}}_{23}$、$\tilde{\boldsymbol{A}}_{32}$和 $\tilde{\boldsymbol{A}}_{33}$均为 3×3 阶矩阵, 分别为

$$\tilde{\boldsymbol{A}}_{11}=-\begin{bmatrix}\frac{C_{11}k_x^2+C_{66}k_y^2+C_{44}k_z^2}{\rho} & \frac{(C_{12}+C_{66})k_xk_y}{\rho} & \frac{(C_{13}+C_{44})k_xk_z}{\rho}\\ \frac{(C_{12}+C_{66})k_xk_y}{\rho} & \frac{C_{66}k_x^2+C_{11}k_y^2+C_{44}k_z^2}{\rho} & \frac{(C_{13}+C_{44})k_yk_z}{\rho}\\ \frac{(C_{13}+C_{44})k_xk_z}{\rho} & \frac{(C_{13}+C_{44})k_yk_z}{\rho} & \frac{C_{44}k_x^2+C_{44}k_y^2+C_{33}k_z^2}{\rho}\end{bmatrix},$$

$$\tilde{\boldsymbol{A}}_{22}=-\begin{bmatrix}\frac{C_{11}k_x^2}{\rho} & \frac{C_{12}k_y^2}{\rho} & \frac{C_{13}k_z^2}{\rho}\\ \frac{C_{12}k_x^2}{\rho} & \frac{C_{11}k_y^2}{\rho} & \frac{C_{13}k_z^2}{\rho}\\ \frac{C_{13}k_x^2}{\rho} & \frac{C_{13}k_y^2}{\rho} & \frac{C_{33}k_z^2}{\rho}\end{bmatrix},$$

$$\tilde{\boldsymbol{A}}_{23}=-\begin{bmatrix}\frac{(C_{11}+C_{12})k_xk_y}{\rho} & \frac{(C_{11}+C_{13})k_xk_z}{\rho} & \frac{(C_{12}+C_{13})k_yk_z}{\rho}\\ \frac{(C_{11}+C_{12})k_xk_y}{\rho} & \frac{(C_{12}+C_{13})k_xk_z}{\rho} & \frac{(C_{11}+C_{13})k_yk_z}{\rho}\\ \frac{(C_{11}+C_{13})k_xk_y}{\rho} & \frac{(C_{13}+C_{33})k_xk_z}{\rho} & \frac{(C_{13}+C_{33})k_yk_z}{\rho}\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_{32}=-\begin{bmatrix} \frac{C_{66}k_xk_y}{\rho} & \frac{C_{66}k_xk_y}{\rho} & 0 \\ \frac{C_{44}k_xk_z}{\rho} & 0 & \frac{C_{44}k_xk_z}{\rho} \\ 0 & \frac{C_{44}k_yk_z}{\rho} & \frac{C_{44}k_yk_z}{\rho} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{33}=-\begin{bmatrix} \frac{C_{66}(k_x^2+k_y^2)}{\rho} & \frac{C_{66}k_yk_z}{\rho} & \frac{C_{66}k_xk_z}{\rho} \\ \frac{C_{44}k_yk_z}{\rho} & \frac{C_{44}(k_x^2+k_z^2)}{\rho} & \frac{C_{44}k_xk_y}{\rho} \\ \frac{C_{44}k_xk_z}{\rho} & \frac{C_{44}k_xk_y}{\rho} & \frac{C_{44}(k_y^2+k_z^2)}{\rho} \end{bmatrix}.$$

由于方程$\frac{\partial^2 \boldsymbol{U}(t)}{\partial t^2}=\boldsymbol{Q}^2\boldsymbol{U}(t)$为双曲型方程组，因此必然存在一个非奇异矩阵 $\boldsymbol{S}$，使 $\boldsymbol{G}=\boldsymbol{S}^{-1}\Lambda\boldsymbol{S}$ 成立. 其中，Λ 是由矩阵 $\boldsymbol{G}$ 的 9 个互不相同的特征值 λ_i 构成的正对角矩阵，计算可得

$$\begin{cases} \lambda_1=-\frac{C_{11}k_x^2+C_{66}k_y^2+C_{44}k_z^2}{\rho}, & \lambda_2=-\frac{C_{66}k_x^2+C_{11}k_y^2+C_{44}k_z^2}{\rho}, \\ \lambda_3=-\frac{C_{44}k_x^2+C_{44}k_y^2+C_{33}k_z^2}{\rho}, & \lambda_4=-\frac{C_{11}k_x^2}{\rho}, \\ \lambda_5=-\frac{C_{11}k_y^2}{\rho}, \quad \lambda_6=-\frac{C_{33}k_z^2}{\rho}, & \lambda_7=-\frac{C_{66}(k_x^2+k_y^2)}{\rho}, \\ \lambda_8=-\frac{C_{44}(k_x^2+k_z^2)}{\rho}, & \lambda_9=-\frac{C_{44}(k_y^2+k_z^2)}{\rho}. \end{cases} \tag{11}$$

将 $\boldsymbol{G}=\boldsymbol{S}^{-1}\Lambda\boldsymbol{S}$ 代入(7)式，并根据相似矩阵的性质$(\boldsymbol{S}^{-1}\Lambda\boldsymbol{S})^m=\boldsymbol{S}^{-1}\Lambda^m\boldsymbol{S}$，

$$\left\{\boldsymbol{E}\sin^2\left(\frac{1}{2}\omega\Delta t\right)+\boldsymbol{S}^{-1}\left[\sum_{m=1}^{M}\frac{\Delta t^{2m}}{2^{2m}(2m-1)!}\Lambda^m\right]\boldsymbol{S}\right\}\boldsymbol{U}(\omega, k_x, k_y, k_z)=0,$$

由于 $\boldsymbol{E}$ 是单位矩阵，上式又可写为

$$\boldsymbol{S}^{-1}\left[\boldsymbol{E}\sin^2\left(\frac{1}{2}\omega\Delta t\right)+\sum_{m=1}^{M}\frac{\Delta t^{2m}}{2^{2m}(2m-1)!}\Lambda^m\right]\boldsymbol{S}\boldsymbol{U}(\omega, k_x, k_y, k_z)=0. \tag{12}$$

令 $\Omega=\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{T}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{S}^{-1}\left[\boldsymbol{E}\sin^2\left(\frac{1}{2}\omega\Delta t\right)+\sum_{m=1}^{M}\frac{\Delta t^{2m}}{2^{2m}(2m-1)!}\Lambda^m\right]\boldsymbol{S}$，显然，矩阵 Ω 和对角矩阵 $\boldsymbol{T}$ 相似，即 $\det(\Omega)=\det(\boldsymbol{T})$. 要使方程(12)中 $\boldsymbol{U}(\omega, k_x, k_y, k_z)$有非零解，系数行列式必须为零，即

$$\det(\Omega)=\det(\boldsymbol{T})=0, \tag{13}$$

由于 $\boldsymbol{T}$ 为正对角矩阵，9 个对角元素分别为 $\sin^2\left(\frac{1}{2}\omega\Delta t\right)+\sum_{m=1}^{M}\frac{\Delta t^{2m}}{2^{2m}(2m-1)!}\lambda_i^m=0$，方程(13)又可写为

$$\sin^2\left(\frac{1}{2}\omega\Delta t\right)+\sum_{m=1}^{M}\frac{\Delta t^{2m}}{2^{2m}(2m-1)!}\lambda_i^m=0, \qquad (i=1,2\cdots,9)$$

因此，要使差分方程(6)稳定，由上式可知，必须同时满足

$$0\leqslant\sum_{m=1}^{M}\frac{\Delta t^{2m}}{2^{2m}(2m-1)!}\lambda_i^m\leqslant 1, \qquad (i=1,2,\cdots,9) \tag{14}$$

另外，由方程(4)可知，$2N$ 阶空间差分精度的空间微分算子 D_x、D_y 和 D_x 的 Fourier 变换分别为

$$\mathrm{FT}(D_x)\approx\frac{2i}{\Delta x}p, \quad \mathrm{FT}(D_y)\approx\frac{2i}{\Delta y}q, \quad \mathrm{FT}(D_z)\approx\frac{2i}{\Delta z}r, \tag{15}$$

即空间波数分别为, $k_x=\frac{2}{\Delta x}p$, $k_y=\frac{2}{\Delta y}q$, $k_z=\frac{2}{\Delta z}r$, 其中

$$p=\sum_{n=1}^{N}C_n^{(N)}\sin\left[\frac{\Delta x}{2}(2n-1)k_x\right],\qquad q=\sum_{n=1}^{N}C_n^{(N)}\sin\left[\frac{\Delta y}{2}(2n-1)k_y\right],$$

$$r=\sum_{n=1}^{N}C_n^{(N)}\sin\left[\frac{\Delta z}{2}(2n-1)k_z\right],$$

这样, 由式(10)和(15)可知

$$\lambda_1=\frac{-4}{\rho}\left[\frac{C_{11}p^2}{\Delta x^2}+\frac{C_{66}q^2}{\Delta y^2}+\frac{C_{44}r^2}{\Delta z^2}\right],\qquad \lambda_2=\frac{-4}{\rho}\left[\frac{C_{66}p^2}{\Delta x^2}+\frac{C_{11}q^2}{\Delta y^2}+\frac{C_{44}r^2}{\Delta z^2}\right],$$

$$\lambda_3=\frac{-4}{\rho}\left[\frac{C_{44}p^2}{\Delta x^2}+\frac{C_{44}q^2}{\Delta y^2}+\frac{C_{33}r^2}{\Delta z^2}\right],\qquad \lambda_4=\frac{-4}{\rho}\frac{C_{11}p^2}{\Delta x^2},$$

$$\lambda_5=\frac{-4}{\rho}\frac{C_{11}q^2}{\Delta y^2},\qquad \lambda_6=\frac{-4}{\rho}\frac{C_{33}r^2}{\Delta z^2},\qquad \lambda_7=\frac{-4}{\rho}\left[\frac{C_{66}p^2}{\Delta x^2}+\frac{C_{66}q^2}{\Delta y^2}\right],$$

$$\lambda_8=\frac{-4}{\rho}\left[\frac{C_{44}p^2}{\Delta x^2}+\frac{C_{44}r^2}{\Delta z^2}\right],\qquad \lambda_9=\frac{-4}{\rho}\left[\frac{C_{44}q^2}{\Delta y^2}+\frac{C_{44}r^2}{\Delta z^2}\right].$$

由于 λ_i ($i=4, 5, 6, 7, 8, 9$)的绝对值总是小于 λ_1、λ_2、λ_3 中的其中一个, 所以在考察(14)式时, 只需考察 $i=1, 2, 3$ 即可.

又由于空间离散化后, 取得最大的空间波数——Nyquist 波数时, $k_x=\frac{\pi}{\Delta x}$, $k_y=\frac{\pi}{\Delta y}$, $k_z=\frac{\pi}{\Delta z}$, 这时 $p=q=r=\sum_{n=1}^{N}C_n^{(N)}(-1)^{n-1}$, 要使差分方程(6)稳定, 由(14)可知, 必须同时满足以下 3 个条件:

$$\begin{cases}0\leqslant\sum_{m=1}^{M}\frac{(-1)^{m-1}}{(2m-1)!}\left[\frac{C_{11}\Delta t^2}{\rho\Delta x^2}+\frac{C_{66}\Delta t^2}{\rho\Delta y^2}+\frac{C_{44}\Delta t^2}{\rho\Delta z^2}\right]^m\\ \qquad\left[\sum_{n=1}^{N}C_n^{(N)}(-1)^{n-1}\right]^{2m}\leqslant 1,\\ 0\leqslant\sum_{m=1}^{M}\frac{(-1)^{m-1}}{(2m-1)!}\left[\frac{C_{66}\Delta t^2}{\rho\Delta x^2}+\frac{C_{11}\Delta t^2}{\rho\Delta y^2}+\frac{C_{44}\Delta t^2}{\rho\Delta z^2}\right]^m\\ \qquad\left[\sum_{n=1}^{N}C_n^{(N)}(-1)^{n-1}\right]^{2m}\leqslant 1,\\ 0\leqslant\sum_{m=1}^{M}\frac{(-1)^{m-1}}{(2m-1)!}\left[\frac{C_{44}\Delta t^2}{\rho\Delta x^2}+\frac{C_{44}\Delta t^2}{\rho\Delta y^2}+\frac{C_{33}\Delta t^2}{\rho\Delta z^2}\right]^m\\ \qquad\left[\sum_{n=1}^{N}C_n^{(N)}(-1)^{n-1}\right]^{2m}\leqslant 1.\end{cases}\tag{16}$$

(16)式是有明确物理含义的. 为了叙述方便, 沿用 Courant 数的概念, 即 $L=\frac{\Delta t}{\Delta x}V$. 但在三维各向异性介质中, 不同传播方向、沿不同方向偏振的偏振波的传播速度是不同的, 因此在定义 Courant 数时必须指明传播方向和偏振方向, 如 $L_{x,y}$, 它是指沿 x 方向传播的沿 y 方向偏振的偏振波的 Courant 数.

在 TI 介质中, 当坐标系的 Z 轴为介质对称轴的情况下, 在(16)的第一式中, $L_{x,x}=\frac{\Delta t}{\Delta x}\sqrt{\frac{C_{11}}{\rho}}$, $L_{x,y}=\frac{\Delta t}{\Delta y}\sqrt{\frac{C_{66}}{\rho}}$, $L_{x,z}=\frac{\Delta t}{\Delta z}\sqrt{\frac{C_{44}}{\rho}}$. 而 $\sqrt{\frac{C_{11}}{\rho}}$、$\sqrt{\frac{C_{66}}{\rho}}$、$\sqrt{\frac{C_{44}}{\rho}}$ 正是 TI 介质中沿

x 方向传播的弹性波中分别沿 x、y、z 方向偏振的偏振波的传播速度.

在第 2 式中, $L_{y,x}=\frac{\Delta t}{\Delta x}\sqrt{\frac{C_{66}}{\rho}}$, $L_{y,y}=\frac{\Delta t}{\Delta y}\sqrt{\frac{C_{11}}{\rho}}$, $L_{y,z}=\frac{\Delta t}{\Delta z}\sqrt{\frac{C_{44}}{\rho}}$. 而 $\sqrt{\frac{C_{66}}{\rho}}$、$\sqrt{\frac{C_{11}}{\rho}}$、$\sqrt{\frac{C_{44}}{\rho}}$正是 TI 介质中沿 y 方向传播的弹性波中分别沿 x、y、z 方向偏振的偏振波的传播速度.

在第 3 式中, $L_{z,x}=\frac{\Delta t}{\Delta x}\sqrt{\frac{C_{44}}{\rho}}$, $L_{z,y}=\frac{\Delta t}{\Delta y}\sqrt{\frac{C_{44}}{\rho}}$, $L_{z,z}=\frac{\Delta t}{\Delta z}\sqrt{\frac{C_{33}}{\rho}}$. 而 $\sqrt{\frac{C_{44}}{\rho}}$、$\sqrt{\frac{C_{44}}{\rho}}$、$\sqrt{\frac{C_{33}}{\rho}}$正是 TI 介质中沿 z 方向传播的弹性波中分别沿 x、y、z 方向偏振的偏振波的传播速度.

为方便起见, 设 $L_\xi=\sqrt{L_{\xi,x}^2+L_{\xi,y}^2+L_{\xi,z}^2}$为弹性波在传播方向 ξ 上的 Courant 数, 其中 $\xi=x, y$ 或z. 这样, (16)式可以表示成如下形式:

$$\begin{cases} 0\leqslant\sum_{m=1}^{M}\frac{(-1)^{m-1}}{(2m-1)!}\quad L_x^{2m}d^{2m}\leqslant 1, \\ 0\leqslant\sum_{m=1}^{M}\frac{(-1)^{m-1}}{(2m-1)!}\quad L_y^{2m}d^{2m}\leqslant 1, \\ 0\leqslant\sum_{m=1}^{M}\frac{(-1)^{m-1}}{(2m-1)!}\quad L_z^{2m}d^{2m}\leqslant 1, \end{cases} \tag{17}$$

其中,

$$L_x=\sqrt{\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}\frac{C_{11}}{\rho}+\frac{\Delta t^2}{\Delta y^2}\frac{C_{66}}{\rho}+\frac{\Delta t^2}{\Delta z^2}\frac{C_{44}}{\rho}},$$

$$L_y=\sqrt{\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}\frac{C_{66}}{\rho}+\frac{\Delta t^2}{\Delta y^2}\frac{C_{11}}{\rho}+\frac{\Delta t^2}{\Delta z^2}\frac{C_{44}}{\rho}},$$

$$L_z=\sqrt{\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}\frac{C_{44}}{\rho}+\frac{\Delta t^2}{\Delta y^2}\frac{C_{44}}{\rho}+\frac{\Delta t^2}{\Delta z^2}\frac{C_{33}}{\rho}},$$

$$d=\sum_{n-1}^{N}C_n^{(N)}(-1)^{n-1}.$$

(17)式即为 TI 介质中三维一阶弹性波方程($2M$, $2N$)阶差分精度的交错网格差分方程(6)的稳定性条件.

实际上, 在三维 TI 介质中, 不同传播方向上弹性波具有不同的传播特征, 所以沿三个特定方向进行差分时, 为保证差分方程的稳定性, 弹性波沿其中任一传播方向的 Courant 数均须满足各自的稳定性条件, 即(17)式中的其中之一.

5 几种高阶差分方程的稳定性条件

下面根据(17)式给出几种差分精度差分方程的稳定性条件, 见表 1.

表 **1**　几种高阶差分方程的稳定性条件

Table 1　The stability conditions of different differencial accuracies

差分精度(2 *M*, 2 *N*)	d	L_x, L_y, L_z
(2, 2)	1	≤1
(2, 4)	7/ 6	≤6/ 7
(4, 6)	1. 24166666	≤0. 90687182
(4, 8)	1. 28630946	≤0. 87539782
(4, 10)	1. 30423330	≤0. 86336739

其他更高阶差分精度的稳定性条件同理可得, 这里不再赘述.

特别地, 当介质为均匀各向同性, 即 $C_{11}=C_{33}=\rho V_{\mathrm{P}}^2$, $C_{44}=C_{66}=\rho V_{\mathrm{S}}^2$ 时, 由(17)式退化得到的稳定性条件和有关文献提出的稳定性条件比较见表 2.

表 **2**　不同文献稳定性条件比较

Table 2　Comparison of stability conditions in different references

条件及精度	本文稳定性条件	前人得到的稳定性条件	
二维, (2, 2)	$\Delta t\sqrt{\frac{V_{\mathrm{P}}^2}{\Delta x^2}+\frac{V_{\mathrm{S}}^2}{\Delta z^2}}\leqslant 1$	$\Delta t V_{\mathrm{P}}\sqrt{\frac{1}{\Delta x^2}+\frac{1}{\Delta z^2}}\leqslant 1$	Virieux[3]
三维, (2, 2) $\Delta x=\Delta y=\Delta z$	$\frac{\Delta t}{\Delta x}\sqrt{V_{\mathrm{P}}^2+2V_{\mathrm{S}}^2}\leqslant 1$	$\frac{\Delta t}{\Delta x}V_{\mathrm{P}}<\frac{1}{\sqrt{3}}$	Virieux[8]
二维, (2, 4) $\Delta x=\Delta z$	$\frac{\Delta t}{\Delta x}\sqrt{V_{\mathrm{P}}^2+V_{\mathrm{S}}^2}\leqslant\frac{6}{7}$	$\frac{\Delta t}{\Delta x}V_{\mathrm{P}}<\frac{6}{7\sqrt{2}}$	Levander[5]

由于 $V_{\mathrm{S}}<V_{\mathrm{P}}$, 由表 2 可知, 以前提出的各向同性情况下, 有关各低阶差分精度时的稳定性条件均是(17)式的特例.

6　结　　论

对交错网格高阶差分解法的稳定性进行详细讨论, 主要分析这种解法在模拟三维 TI 介质中的弹性波时的稳定性条件.

三维横向各向同性介质中一阶弹性波方程交错网格高阶差分解法的稳定性条件可以统一地用弹性波在传播方向上的 Courant 数来表达, 见(17)式, 它由弹性波在 X、Y、Z 三个方向上的 Courant 数共同决定的.

通过几种差分精度的稳定性条件比较可以发现, 这种交错网格高阶差分解法和传统的精度为 $O(\Delta t^2+\Delta x^4)$的解法相比, 随着差分精度的提高, 其稳定性要求仅有稍许提高. 也就是说, 没有必要为提高差分精度而加密差分网格影响计算效率, 因此是一种既精确又高效的弹性波方程数值解法.

参　考　文　献

[1]　Madariaga R. Dynamics of an expanding circular fault. *BSSA*, 1976, **66**(3): 639—666.

[2]　Virieux J. SH-wave propagation in heterogeneous media: Velocity-stress finite-difference method. *Geophisics*, 1984, **49**(11): 1933—1957.

[3]　Virieux J. P-SV, wave propagation in heterogeneous media: Velocity-stress finite-difference method. *Geophisics*, 1986, **51**(4): 889—901.

[4] Igel H, Riollet B, Mora P. Accuracy of staggered 3-D finite-difference grids for anisotropic wave propagation. 62^{nd} *Ann. Internat. Mtg, Soc. Expl. Geophys., Expanded Abstracts*, 1992, 1244—1246.

[5] Levander A R. Fourth-order finite-difference P-SV seismograms. *Geophisics*, 1988, **53**(11): 1425—1436.

[6] 董良国, 马在田, 曹景忠. 一阶弹性波方程交错网格高阶差分解法. 地球物理学报, 2000, **43**(3): 411—419.
DONG Liang-Guo, MA Zai-Tian, CAO Jing-Zhong. The staggered-grid high-order difference method of one-order elastic equation. *Chinese J. Geophys.* (in Chinese), 2000, **43**(3): 411—419.

[7] Rodrigues D, Mora P. Analysis of a finite-difference solution to 3-D elastic wave propagation. 62^{nd} *JAnn. Internat. Mtg. Soc. Expl. Geophys., Expanded Abstracts*, 1992, 1247—1250.

[8] Virieux J, Madariaga R. Dynamic faulting studied by a finite difference method. *BSSA*, 1982, **72**(2): 345—369.

[9] 侯安宁, 何樵登. 各向异性介质中弹性波动高阶差分法及其稳定性的研究. 地球物理学报, 1995, **38**(2): 243—251.
HOU An-Ning, HE Qiao-Deng. Study of a elastic wave high-order difference method and its stability in anisotropic media. *Chinese J. Geophys.* (in Chinese), 1995, **38**(2): 345—369.

[10] 靳 平, 徐果明, 楼沩涛. 点力源在横向各向同性介质中激发的弹性波. 地球物理学报, 1998, **41**(4): 525—536.
JIN Ping, XU Guo-Ming, LOU Wei-Tao. Elastic waves from a point source in transversely media. *Chinese J. Geophys.* (in Chinese), 1998, **41**(2): 525—536.

A STUDY ON STABILITY OF THE STAGGERED-GRID HIGH-ORDER DIFFERENCE METHOD OF FIRST-ORDER ELASTIC WAVE EQUATION

DONG LIANG-GUO MA ZAI-TIAN CAO JING-ZHONG
(*Laboratory of Marine Geology of NDE, Tongji University. Shanghai* 200092, *China*)

[**Abstract**] Stability is one of the basic problems for numerical solution of wave equations. studying the stability of the staggered-grid high-order difference method of the first-order elastic wave equations in 3-D TI media, we derived a unified stability condition of difference equations with different accuracy. It has also proved that the stability condition is determined by the Courant number of elastic wave along the X, Y, Z directions. Finally, from some stability conditions of different difference accuracy, we can see that this staggered-grid high-order difference method is both accurate and efficient.

[**Key words**] Transverse isotropy, Stability condition, High-order difference method, Staggered-grid scheme.