

孙耀充,张延腾,白超英. 二维弹性及粘弹性 TTI 介质中地震波场数值模拟:四种不同网格高阶有限差分算法研究. 地球物理学进展, 2013, 28(4):1817-1827, doi:10.6038/pg20130423.

SUN Yao-chong, ZHANG Yan-teng, BAI Chao-ying. Seismic wavefield simulation in 2D elastic and viscoelastic media: comparison between four different kinds of finite-difference grids. *Progress in Geophys.* (in Chinese), 2013, 28(4):1817-1827, doi:10.6038/pg20130423.

## 二维弹性及粘弹性 TTI 介质中地震波场数值模拟: 四种不同网格高阶有限差分算法研究

孙耀充<sup>1,2</sup>, 张延腾<sup>1</sup>, 白超英<sup>1,3\*</sup>

(1. 长安大学地质工程与测绘学院地球物理系, 西安 710054; 2. 中国科学技术大学地球和空间科学学院, 合肥 230026;

3. 长安大学计算地球物理研究所, 西安 710054)

**摘 要** 本文利用交错网格、辅助网格、旋转交错网格、同位网格有限差分方法分别模拟了二维弹性 TTI 介质和二维黏弹性 TTI 介质中的地震波传播. 在稳定性条件内, 选用不同的网格间距及时间间隔, 通过波场快照、合成理论地震图较为系统分析对比了这四种不同网格有限差分数值模拟在计算精度、CPU 时间、相移、频散、以及保幅方面的优缺点. 数值模拟结果表明: 1) 这四种不同网格有限差分算法都是很好的波场数值模拟算法; 2) 就 CPU 计算时间而言, 旋转交错网格有限差分算法的计算效率最高; 3) 从计算精度来看, 同位网格有限差分的计算精度最高; 4) 从振幅保护方面来看, 四种网格的保护振幅的能力相当; 5) 相移方面, 当网格间距增大时, 交错网格和旋转交错网格有可能出现相移现象; 6) 频散方面, 同位网格的频散现象不明显.

**关键词** 有限差分, 交错网格, 辅助网格, 旋转交错网格, 同位网格, TTI 介质, 黏弹性 TTI 介质

doi:10.6038/pg20130423

中图分类号 P315

文献标识码 A

## Seismic wavefield simulation in 2D elastic and viscoelastic media: comparison between four different kinds of finite-difference grids

SUN Yao-chong<sup>1,2</sup>, ZHANG Yan-teng<sup>1</sup>, BAI Chao-ying<sup>1,3\*</sup>

(1. College of Geology Engineering and Geomatics, Chang'an University, Xi'an 710054, China;

2. School of Earth and Space Science, Uni. of Science and Technology of China, Hefei, 230026, China

3. Institute of Computing Geophysics, Chang'an University, Xi'an 710054, China)

**Abstract** In this paper, we use the staggered grid, auxiliary grid, rotated staggered grid and non-staggered grid finite difference methods to simulate the wavefield in 2D elastic and viscoelastic TTI media, respectively. Under the stability criterion, we choose different spatial and temporal intervals to get snapshots and synthetic seismogram to compare the four algorithms in terms of accuracy, CPU time, phase shift, dispersion and amplitude protection. The numerical results show that: 1) all of the four finite difference algorithms are suitable for seismic wavefield simulation; 2) the rotated staggered grid has the fastest CPU time; 3) the non-staggered grid has the highest accuracy; 4) the abilities of the four grids to protect the amplitude are nearly the same; 5) the staggered grid and rotated staggered grid may appear phase shift when the spatial interval becomes larger; 6) the non-staggered grid has a low dispersion phenomenon.

**Keywords** finite-difference, staggered grid, auxiliary grid, rotated staggered grid, non-staggered grid, TTI media, viscoelastic TTI media

收稿日期 2012-09-08; 修回日期 2012-12-05.

投稿网址 <http://www.progeophysics.cn>

基金项目 国家重大专项子课题(2011ZX05024-001-03)资助.

作者简介 孙耀充,男,1988 年生,河南人,长安大学固体地球物理学专业毕业,现保送为中国科学技术大学地空学院固体地球物理学专业在读研究生,主要从事地震波场正演数值模拟方法研究. (E-mail: sunyaochong@gmail.com)

\* 通讯作者 白超英,长安大学地测学院地球物理系教授,主要从事地震学相关领域的教学及科研. (E-mail: baicy@chd.edu.cn)

## 0 引言

有限差分地震波场数值模拟,最早可以追溯到上世纪六十年代,Alterman<sup>[1]</sup>等用同位网格(non-staggered grid)模拟了基于二阶位移方程组的复杂介质中的地震波场;但是 Moczo 等<sup>[2]</sup>指出当介质的泊松比较大时,利用二阶位移方程组的地震波场模拟会出现不稳定的现象.为了消除这种现象(即耗散误差),Madariaga(1976)首次在模拟断层破裂过程中提出了交错网格(staggered grid)的概念<sup>[3]</sup>.随后有限差分交错网格法得到了迅速发展.例如,Virieux<sup>[4,5]</sup>,Levander<sup>[6]</sup>和 Graves<sup>[7]</sup>等用交错网格模拟了基于速度-应力方程组的二维和三维地震波场;Cruse(1990)又实现了交错网格的高阶有限差分算法<sup>[8]</sup>;但是应用交错网格模拟一般各向异性介质中地震波时,需要对没有定义在网格点上的量进行插值或近似处理,从而有可能引入计算误差<sup>[9,10]</sup>;Igel 等(1992)进一步的研究证实了这一点,即:交错网格模拟一般各向异性介质中的地震波场时,不仅效率低而且由于插值所产生的全局误差也较大<sup>[9,10]</sup>.鉴于此,Saenger(2000)提出了旋转交错网格(rotated staggered grid)的概念<sup>[11,12]</sup>,这种网格避免了交错网格模拟地震波场时的平均和插值处理,提高了模拟的计算精度.然而,Hustedt(2004)发现,旋转交错网格在介质的间断处和边界处仍然容易产生数值上的不稳定<sup>[13]</sup>.为了确保数值模拟的稳健性,王晓欢等(2006)在交错网格的基础上提出了一种辅助网格的方法<sup>[14]</sup>,同样可以避免上述交错网格的插值或近似处理.

同位网格并没有因为交错网格的迅速发展而被遗忘. Bayliss 等(1986)使用基于同位网格的 MacCormack 格式模拟弹性波场<sup>[15]</sup>;谢小碧和姚振兴(1988)对这种格式进行了改进,得到了二维非均匀介质中计算点源 P-SV 波的近似算法<sup>[16]</sup>;Tsingas

(1990)计算了横向各向同性介质中地震波场<sup>[17]</sup>,而 Dai(1995)采用该格式计算了多孔介质中弹性波的传播<sup>[18]</sup>;Zhang 等(2006)用 DRP/opt MacCormack 格式的同位网格模拟了不规则地表的地震波场<sup>[19]</sup>;祝贺君(2009)用这种同位网格模拟了 TTI 介质中二维三分量的波场<sup>[20]</sup>;Zhang(2012)将这种同位网格应用到球坐标中,并且模拟了三维球坐标系下各向异性介质中地震波的传播<sup>[21]</sup>.

上述流行的四种不同网格(交错网格、辅助网格、旋转交错网格和同位网格)的有限差分算法各有其优缺点,然而,缺少系统的对比研究.为了弥补这种缺陷或不足,本文将利用上述四种网格模拟二维弹性、黏弹性 TTI 介质中地震波场的传播,通过对比研究,分析、归纳上述四种网格有限差分地震波场模拟的优势及不足,以此对该方法的完善有所裨益.

## 1 弹性、黏弹性 TTI 介质波动方程

### 1.1 本构关系

首先讨论 VTI 介质,然后通过坐标旋转得到相应的 TTI 介质的本构关系. VTI 介质的本构关系可以写成如下形式<sup>[22-25]</sup>:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ e_{zz} \\ 2e_{yz} \\ 2e_{xz} \\ 2e_{xy} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

其中,  $C_{ij}$  为弹性常数,  $\sigma_{ij}$  为应力张量,  $e_{ij}$  为应变张量. VTI 张量  $C$ , 经过 Bond 变换<sup>[23,25]</sup>, 旋转方位角  $\theta$  和倾角  $\varphi$  得到 TTI 张量  $D$ , 写成矩阵形式如下<sup>[23]</sup>:

$$D = RCR^T, \quad (2)$$

其中,  $R$  的具体形式为

$$R = \begin{pmatrix} l_1^2 & m_1^2 & n_1^2 & 2m_1n_1 & 2n_1l_1 & 2l_1m_1 \\ l_2^2 & m_2^2 & n_2^2 & 2m_2n_2 & 2n_2l_2 & 2l_2m_2 \\ l_3^2 & m_3^2 & n_3^2 & 2m_3n_3 & 2n_3l_3 & 2l_3m_3 \\ l_2l_3 & m_2m_3 & n_2n_3 & m_2n_3 + m_3n_2 & n_2l_3 + n_3l_2 & l_2m_3 + l_3m_2 \\ l_3l_1 & m_3m_1 & n_3n_1 & m_3n_1 + m_1n_3 & n_3l_1 + n_1l_3 & l_3m_1 + l_1m_3 \\ l_1l_2 & m_1m_2 & n_1n_2 & m_1n_2 + m_2n_1 & n_1l_2 + n_2l_1 & l_1m_2 + l_2m_1 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

$$\begin{cases} l_1 = \cos\theta\sin\varphi, & m_1 = \cos\varphi, n_1 = \sin\theta\sin\varphi \\ l_2 = -\cos\theta\cos\varphi, & m_2 = \sin\varphi, n_2 = -\sin\theta\cos\varphi, \\ l_3 = -\sin\theta, & m_3 = 0, n_3 = \cos\theta. \end{cases} \quad (4)$$

在二维三分量的 TTI 介质中,假设所有量对  $y$  的偏导数都为零,因此有  $e_{yy} = 0$ ,所以 TTI 介质的二维三分量本构关系为<sup>[20,23]</sup>

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{31} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} e_{xx} \\ e_{zz} \\ 2e_{yz} \\ 2e_{xz} \\ 2e_{xy} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

黏弹性二维三分量 TTI 介质的本构关系和弹

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial t} = C_{11} \frac{\partial v_x}{\partial x} + C_{16} \frac{\partial v_y}{\partial x} + C_{15} \left( \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) + C_{14} \frac{\partial v_y}{\partial z} + C_{13} \frac{\partial v_z}{\partial z}, \\ \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial t} = C_{13} \frac{\partial v_x}{\partial x} + C_{36} \frac{\partial v_y}{\partial x} + C_{35} \left( \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) + C_{34} \frac{\partial v_y}{\partial z} + C_{33} \frac{\partial v_z}{\partial z}, \\ \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial t} = C_{14} \frac{\partial v_x}{\partial x} + C_{46} \frac{\partial v_y}{\partial x} + C_{45} \left( \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) + C_{44} \frac{\partial v_y}{\partial z} + C_{34} \frac{\partial v_z}{\partial z}, \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial t} = C_{15} \frac{\partial v_x}{\partial x} + C_{56} \frac{\partial v_y}{\partial x} + C_{55} \left( \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) + C_{45} \frac{\partial v_y}{\partial z} + C_{35} \frac{\partial v_z}{\partial z}, \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial t} = C_{16} \frac{\partial v_x}{\partial x} + C_{66} \frac{\partial v_y}{\partial x} + C_{56} \left( \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) + C_{46} \frac{\partial v_y}{\partial z} + C_{36} \frac{\partial v_z}{\partial z}. \end{cases} \quad (7)$$

其中,  $v_x, v_y, v_z$  为速度场分量,  $\sigma_{xx}, \sigma_{zz}, \sigma_{yz}, \sigma_{xz}, \sigma_{xy}$  为应力场分量.

### 1.3 黏弹性 TTI 介质二维三分量弹性波方程

由弹性波动力学方程中的一阶速度-应力方程、几何方程和黏弹性 TTI 介质的二维三分量的本构关系可以得到,在二维三分量黏弹性 TTI 介质中<sup>[22,26,27]</sup>的弹性波方程的分量形式:

1) 黏弹性速度方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial t} = C_{11} \frac{\partial v_x}{\partial x} + C_{16} \frac{\partial v_y}{\partial x} + C_{15} \left( \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) + C_{14} \frac{\partial v_y}{\partial z} + C_{13} \frac{\partial v_z}{\partial z} + k\zeta_{xx} + 2C_{55}\zeta_{zz}, \\ \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial t} = C_{13} \frac{\partial v_x}{\partial x} + C_{36} \frac{\partial v_y}{\partial x} + C_{35} \left( \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) + C_{34} \frac{\partial v_y}{\partial z} + C_{33} \frac{\partial v_z}{\partial z} + k\zeta_{xx} - 2C_{55}\zeta_{zz}, \\ \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial t} = C_{14} \frac{\partial v_x}{\partial x} + C_{46} \frac{\partial v_y}{\partial x} + C_{45} \left( \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) + C_{44} \frac{\partial v_y}{\partial z} + C_{34} \frac{\partial v_z}{\partial z} + C_{44}\zeta_{yz}, \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial t} = C_{15} \frac{\partial v_x}{\partial x} + C_{56} \frac{\partial v_y}{\partial x} + C_{55} \left( \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) + C_{45} \frac{\partial v_y}{\partial z} + C_{35} \frac{\partial v_z}{\partial z} + C_{55}\zeta_{xz}, \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial t} = C_{16} \frac{\partial v_x}{\partial x} + C_{66} \frac{\partial v_y}{\partial x} + C_{56} \left( \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) + C_{46} \frac{\partial v_y}{\partial z} + C_{36} \frac{\partial v_z}{\partial z} + C_{66}\zeta_{xy}. \end{cases} \quad (9)$$

性二维三分量 TTI 介质的本构关系相类似,具体的表示式可见文献<sup>[22,26,27]</sup>.

### 1.2 弹性 TTI 介质二维三分量的弹性波方程

由弹性波动力学方程中的一阶速度-应力方程、几何方程和 TTI 介质的二维三分量的本构关系可以得到,在二维三分量 TTI 介质中的弹性波方程的分量形式如下:

1) 速度方程:

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z}, \\ \rho \frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z}, \\ \rho \frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}. \end{cases} \quad (6)$$

2) 应力-速度关系:

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z}, \\ \rho \frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z}, \\ \rho \frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}. \end{cases} \quad (8)$$

2) 黏弹性应力-速度关系:

## 3) 黏弹性记忆变量方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial \xi_{xx}}{\partial t} = \frac{1}{\tau_{\sigma}^{(1)}} \left[ \left( \frac{\tau_{\sigma}^{(1)}}{\tau_{\epsilon}^{(1)}} - 1 \right) \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) - \xi_{xx} \right], \\ \frac{\partial \xi_{zz}}{\partial t} = \frac{1}{2\tau_{\sigma}^{(2)}} \left[ \left( \frac{\tau_{\sigma}^{(2)}}{\tau_{\epsilon}^{(2)}} - 1 \right) \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) - 2\xi_{zz} \right], \\ \frac{\partial \xi_{yz}}{\partial t} = \frac{1}{\tau_{\sigma}^{(2)}} \left[ \left( \frac{\tau_{\sigma}^{(2)}}{\tau_{\epsilon}^{(2)}} - 1 \right) \frac{\partial v_y}{\partial z} - \xi_{yz} \right], \\ \frac{\partial \xi_{xz}}{\partial t} = \frac{1}{\tau_{\sigma}^{(2)}} \left[ \left( \frac{\tau_{\sigma}^{(2)}}{\tau_{\epsilon}^{(2)}} - 1 \right) \left( \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) - \xi_{xz} \right], \\ \frac{\partial \xi_{xy}}{\partial t} = \frac{1}{\tau_{\sigma}^{(2)}} \left[ \left( \frac{\tau_{\sigma}^{(2)}}{\tau_{\epsilon}^{(2)}} - 1 \right) \frac{\partial v_y}{\partial x} - \xi_{xy} \right]. \end{cases} \quad (10)$$

$$\text{其中: } \begin{cases} \tau_{\sigma}^{(\nu)} = \frac{\omega}{Q_{\nu}} [\sqrt{Q_{\nu}^2 + 1} - 1], \\ \tau_{\epsilon}^{(\nu)} = \frac{\omega}{Q_{\nu}} [\sqrt{Q_{\nu}^2 + 1} + 1], \nu = 1, 2, \end{cases} \quad (11)$$

$Q_1, Q_2$  分别为纵波、横波品质因子,  $\omega$  为中心频率的倒数,  $\xi_{xx}, \xi_{zz}, \xi_{yz}, \xi_{xz}, \xi_{xy}$  为记忆变量分量。

## 2 四种网格的有限差分格式

## 2.1 交错网格

交错网格是将不同的地震波场分量定义在整网格点和半网格点上, 合理的安排地震波场分量在网格上的相对位置, 可以方便的求取所需量的差分。交错网格中对  $X$  方向和  $Z$  方向的中心差分格式为

$$L_x(u(x)_{i,j}) = \frac{1}{\Delta x} \sum_{n=1}^N C_n^{(N)} (u(x)_{i+(2n-1)/2, j+(2n-1)/2} - u(x)_{i-(2n-1)/2, j-(2n-1)/2}), \quad (12a)$$

$$L_x(u(x)_{i,j}) = \sum_{n=1}^N C_n^{(N)} \frac{u(x)_{i+(2n-1)/2, j+(2n-1)/2} - u(x)_{i-(2n-1)/2, j-(2n-1)/2}}{2\Delta x} + \sum_{n=1}^N C_n^{(N)} \frac{u(x)_{i+(2n-1)/2, j-(2n-1)/2} - u(x)_{i-(2n-1)/2, j+(2n-1)/2}}{2\Delta x}, \quad (13a)$$

$$L_z(u(z)_{i,j}) = \sum_{n=1}^N C_n^{(N)} \frac{u(z)_{i+(2n-1)/2, j+(2n-1)/2} - u(z)_{i-(2n-1)/2, j-(2n-1)/2}}{2\Delta z} - \sum_{n=1}^N C_n^{(N)} \frac{u(z)_{i+(2n-1)/2, j-(2n-1)/2} - u(z)_{i-(2n-1)/2, j+(2n-1)/2}}{2\Delta z}. \quad (13b)$$

## 2.4 同位网格

有限差分同位网格法是将所有的地震波场分量、弹性参数和密度都定义在同一个网格点上。这样设置地震波场分量可以很容易精确计算所需量的差分值。但是传统的同位网格在模拟波场时会产生很大的误差。本文选取的是文献<sup>[19-21]</sup>所使用的 DRP/opt MacCormack 有限差分格式。详细的算法见文

$$L_z(u(z)_{i,j}) = \frac{1}{\Delta z} \sum_{n=1}^N C_n^{(N)} (u(z)_{i+(2n-1)/2, j+(2n-1)/2} - u(z)_{i-(2n-1)/2, j-(2n-1)/2}), \quad (12b)$$

其中  $u$  为地震波场分量,  $\Delta x$  和  $\Delta z$  为  $X$  和  $Z$  方向的空间间隔,  $C_n^{(N)}$  为差分系数,  $2N$  为差分的空间阶数。本文有限差分交错网格的地震波场分量设置如图 1 所示<sup>[28]</sup>。在求差分时, 对于恰好不能满足空间交错的地震波场分量, 取其周围四点的平均值(如图 1a 所示)。

## 2.2 辅助网格

辅助网格<sup>[14]</sup>在放置地震波场分量时和交错网格相类似, 都将不同的地震波场分量定义在整网格点和半网格点上, 但是它比交错网格的方法多了一套网格, 而且辅助网格的两套网格上的地震波场分量对称放置, 模拟地震波传播时两套网格同时计算。这样在计算地震波场分量的差分, 同时使用两套网格上的地震波场分量, 从而所有的地震波场分量都能满足空间交错(如图 1b 所示)。

## 2.3 旋转交错网格

旋转交错网格<sup>[11, 12]</sup>的地震波场分量分别放在网格的四个角和网格中心。计算某分量沿  $X$  或  $Z$  方向的差分, 先计算该点沿两条网格对角线上的差分值, 然后对这两个沿对角线的差分值进行线性组合, 从而得到沿  $X$  或者  $Z$  方向的差分值(如图 1c 所示)。其具体的计算公式见(13)式。

献<sup>[19, 20]</sup>, 这种算法的时间精度为 2 阶, 空间精度为 4 阶。其示意图见图 1d 所示。

## 3 网格的稳定性条件

若  $v_p$  为纵波的最大速度;  $\Delta t, \Delta h$  为模拟的时间间隔和空间间隔,  $C_n^{(N)}$  为差分系数, 交错网格和辅助网格的时间二阶、空间  $2N$  阶精度的稳定性条件为<sup>[11]</sup>

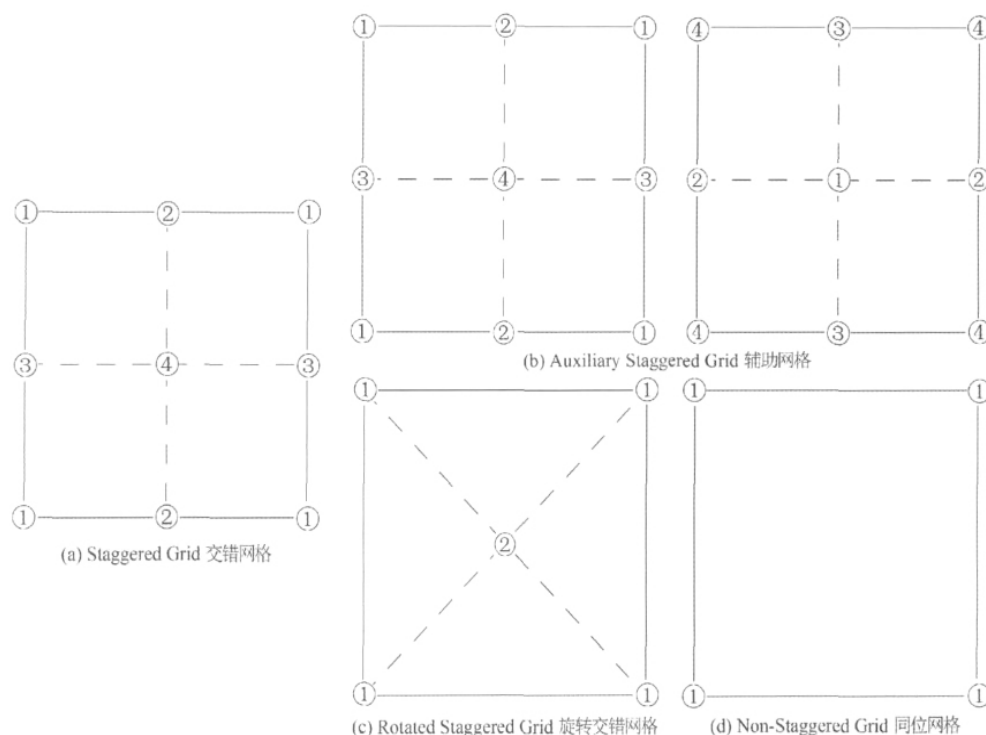


图 1 四种网格示意图。(a) 交错网格: 在网格点 1 上放置  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{zz}$ ,  $C_{11}$ ,  $C_{13}$ ,  $C_{33}$ ; 在网格点 2 上放置  $V_x$ ,  $V_z$ ,  $\rho^{-1}$ ; 在网格点 3 上放置  $V_z$  和  $\rho^{-1}$ ; 在网格点 4 上放置  $\sigma_{yz}$ ,  $\sigma_{xz}$ ,  $\sigma_{xy}$ ,  $C_{44}$ ,  $C_{66}$ 。(b) 辅助网格: 只是有两个网格, 参数放置方式同(a); (c) 旋转交错网格: 在网格点 1 放置所有的应力分量  $\sigma_{ij}$  和弹性常数  $C_{ij}$ ; 在网格点 2 的位置放置所有的速度分量  $v_i$  和  $\rho^{-1}$ 。(d) 同位网格: 所有地震波场分量和参数均放置在点 1 上。

Fig. 1 Diagrammatic showing the four kinds of grids used in finite difference method. (a) Staggered Grid:  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{zz}$ ,  $C_{11}$ ,  $C_{13}$ ,  $C_{33}$  are put on the grid point 1;  $V_x$ ,  $V_y$  and  $\rho^{-1}$  are put on the grid point 2;  $V_z$  and  $\rho^{-1}$  are put on grid point 3;  $\sigma_{yz}$ ,  $\sigma_{xz}$ ,  $\sigma_{xy}$ ,  $C_{44}$  and  $C_{66}$  are put on the grid point 4. (b) Auxiliary Grid: Parameter arrangements are the same as (a), but with two grid networks; (c) Rotated Staggered Grid: all the stress components  $\sigma_{ij}$  and all the elastic moduli  $C_{ij}$  are put on grid point 1; all the velocity components and buoyancy  $\rho^{-1}$  are put on grid point 2. (d) Non-staggered Grid: all the wave field components and all the media parameter are put on the same grid point 1.

$$\frac{v_p \Delta t}{\Delta h} \leq \frac{1}{\sqrt{2} \sum_{n=1}^N |C_n^{(N)}|} \approx 0.71 \times \frac{1}{\sum_{n=1}^N |C_n^{(N)}|}, \quad (14)$$

旋转交错网格和辅助网格的时间二阶、空间  $2N$  阶精度的稳定性条件则为<sup>[11]</sup>

$$\frac{v_p \Delta t}{\Delta h} \leq \frac{1}{\sum_{n=1}^N |C_n^{(N)}|}, \quad (15)$$

从稳定性条件式(14)和(15)中可知, 前者的稳定性条件小于后者. 同位网格相应的稳定性条件应不大于辅助网格的稳定性条件. 因此, 作为一般估计, 可用(15)式作为上述四种不同网格的时间二阶、空间  $2N$  阶精度的稳定性条件.

## 4 边界条件

吸收边界条件最早由 Cerjan<sup>[29]</sup> 提出, 本文采用一种改进的吸收边界条件<sup>[30]</sup>. 这种边界条件将模拟的四个角单独的进行处理, 表达式为

$$\begin{cases} G_b = e^{-a(N-i)^2}, \\ G_c = e^{-a[(i-i_0)^2 + (j-j_0)^2]}, \end{cases} \quad (16)$$

其中,  $G_c$  表示边界四个角区的函数表达式,  $G_b$  为边界矩形区域的表达式;  $a$  为系数,  $N$  为边界网格的层数,  $(i, j)$  表示网格节点标号,  $(i_0, j_0)$  为四个角的内侧顶点标号.

## 5 数值模拟和分析

### 5.1 模型设计

为了进行系统的对比研究, 模型参数化时上述四

表 1 弹性 TTI 模型参数

Table 1 Model parameters of elastic TTI media

$C_{11}$ (GPa)	$C_{13}$ (GPa)	$C_{33}$ (GPa)	$C_{44}$ (GPa)	$C_{66}$ (GPa)	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	$\theta$ (°)	$\varphi$ (°)
52.2	12.3	30.9	9.83	15.1	2770.0	45.0	90.0

表 2 粘弹性 TTI 模型参数

Table 2 Model parameters of viscoelastic TTI media

$C_{11}$ (GPa)	$C_{13}$ (GPa)	$C_{33}$ (GPa)	$C_{44}$ (GPa)	$C_{66}$ (GPa)	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	$\theta$ (°)	$\varphi$ (°)	$Q_1$	$Q_2$
52.2	12.3	30.9	9.83	15.1	2770.0	45.0	90.0	80.0	60.0

种网格的间距是相同的. 在稳定性条件许可的范围内, 分别采用三种空间离散网格, 即:  $3\text{ m} \times 3\text{ m}$ 、 $6\text{ m} \times 6\text{ m}$  和  $12\text{ m} \times 12\text{ m}$  的网格; 时间间隔上选取  $0.1\text{ ms}$ 、 $0.2\text{ ms}$  和  $0.4\text{ ms}$  的时间间隔, 分别模拟弹性 TTI 和黏弹性 TTI 介质中的地震波场. 图 2 为数值模拟所采用的物理模型, 弹性介质和黏弹性介质的参数如表 1 和表 2 所示. 本文震源为加载在模型中心处 X 方向的雷克子波和高斯函数乘积的震源, 雷克子波主频为  $25\text{ Hz}$ , 震源半径  $30\text{ m}$ . 边界采用吸收边界, 边界的网格宽度为 20. 本文的空间和时间精度为  $o(\Delta h^4 + \Delta t^2)$ , 分别得到  $V_x$ 、 $V_z$  在  $0.16\text{ s}$  时的波场快照和图 2 中 A、B 两个检波器  $0 \sim 0.28\text{ s}$  的合成理论地震图.

## 5.2 弹性 TTI 介质地震波场数值模拟结果

弹性 TTI 介质的参数见表 1, 为了便于研究, 取  $\varphi = 90^\circ$ , 由射线理论<sup>[31]</sup>可以知, 此时  $V_y = 0$ ; 四种方法模拟的结果得到的  $V_y$  分量均为 0, 此时  $V_y$  的波场快照是一张单色的图片, 合成理论地震图为一水平直线, 说明了四种方法在模拟地震波场时的正确性, 由于起不到对比分析的作用, 因此文中未给出  $V_y$  的波场快照和用  $V_y$  计算的合成理论地震图. 为了进一步的验证四种方法的正确性, 本文利用射线理论<sup>[31,32]</sup>计算的解析解和波场快照进行了对比.

从波场数值模拟结果来看, 四种网格模拟的波场快照和解析解从形状上重合 (见图 3), 说明四种不同网格有限差分数值模拟方法的正确性. 理论上讲, 波场快照中的 qP 波和 qSV 波的宽度和震源类型有关, 并且随着震源半径增大而增大. 本实验中四种方法的震源函数和震源半径相同, 通过对比可以发现, 波场快照中 qP 波和 qSV 波的宽度随着网格空间间隔的增大而稍有增大. 相同条件下, 当网格间距较小时, 四种网格模拟出的波场快照中的 qP 波和 qSV 波的宽度相当; 当网格间距较大时, 四种网格中, 交错网格模拟出的波场快照中 qP 波和 qSV

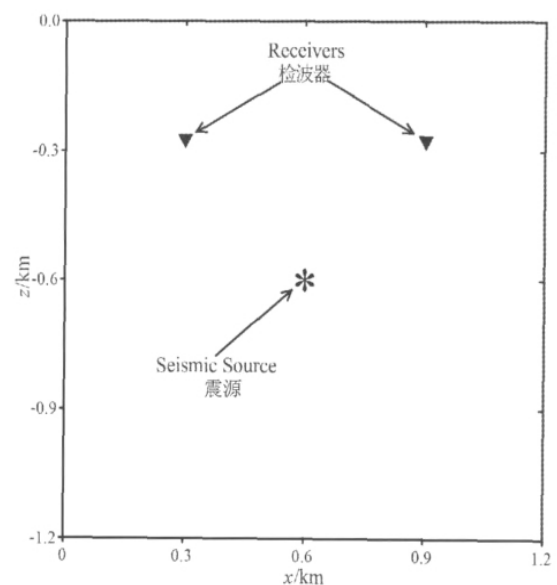


图 2 数值模拟物理模型示意图. 模型大小:  $1200\text{ m} \times 1200\text{ m}$ . 震源位于模拟的中心, 震源半径  $30\text{ m}$ . 两个检波器分别位于 A( $x=360\text{ m}$ ,  $z=360\text{ m}$ ) 和 B( $x=840\text{ m}$ ,  $z=360\text{ m}$ ).

Fig. 2 Plot of the physics model (scale:  $1200\text{ m} \times 1200\text{ m}$ ). The source is located at the model center and its radius is  $30\text{ m}$ . Two receivers are located on A( $x=350\text{ m}$ ,  $z=360\text{ m}$ ) and B( $x=840\text{ m}$ ,  $z=360\text{ m}$ ).

波的宽度较大, 这与交错网格在计算地震波场时对波场分量进行了插值有关.

从  $36(4 \times 9)$  种数值模拟结果来看, 可以得到四种不同网格有限差分方法模拟弹性 TTI 介质地震波场的一些共性或者说特点:

1) 四种不同网格方法模拟出的理论地震图中的 qP 波和 qSV 波的振幅都随着时间间隔的增大而成倍数的减小, 这是由于文中的震源加入波场的能量随着时间间隔成倍的增加而成倍减小所致; 随着空间间隔的增大, 合成理论地震图中振幅几乎不改变,

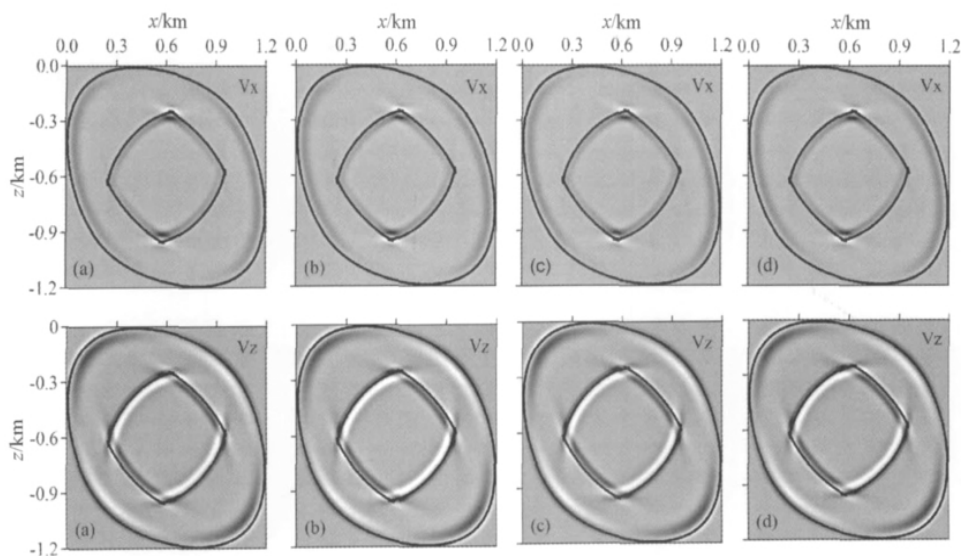


图 3 空间间隔  $\Delta x = \Delta z = 3$  m, 时间间隔  $\Delta t = 0.1$  ms 时, 弹性 TTI 介质模拟 0.16 s 时  $V_x$  (上图) 和  $V_z$  (下图) 波场快照. (a): 交错网格; (b): 辅助网格; (c): 旋转交错网格; (d): 同位网格. 图中黑色线是 qP (外) 和 qSV (内) 波的解析波前.

Fig. 3 Snapshots of  $V_x$  (upper panels) and  $V_z$  component (lower panels) at 0.16 s for an elastic TTI medium simulation. Spatial interval  $\Delta x = \Delta z = 3$  m, temporal interval  $\Delta t = 0.1$  ms. (a): staggered grid; (b): auxiliary grid; (c): rotated staggered grid and (d): non-staggered grid. The black lines represent the analytical solution of qP (outer) and qSV (inner) wave.

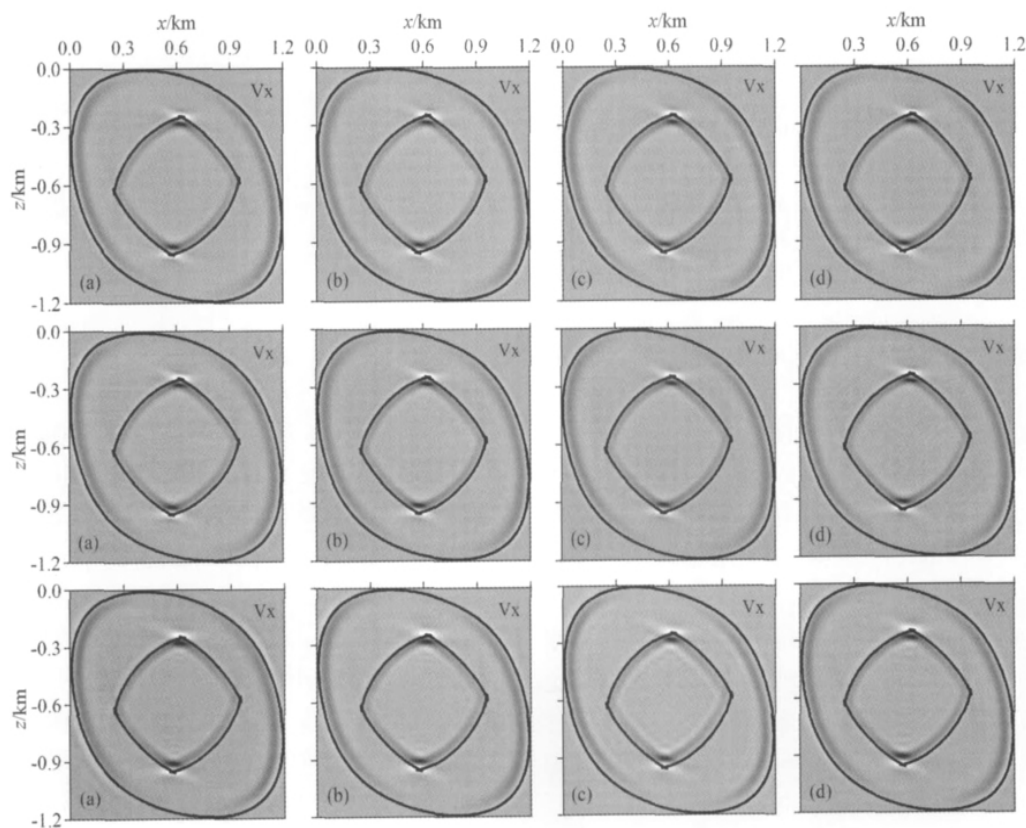


图 5 时间间隔  $\Delta t = 0.2$  ms 时, 空间间隔分别为 3 m (上图), 6 m (中图), 12 m (下图) 粘弹性 TTI 介质模拟 0.16 s 时  $V_x$  向波场快照.

(a) 交错网格; (b) 辅助网格; (c) 旋转交错网格; (d) 同位网格. 图中黑色线是 qP (外) 和 qSV (内) 波的解析波前.  
Fig. 5  $V_x$ -component snapshots at 0.16 s for a viscoelastic TTI medium simulation. Spatial intervals are 3 m (upper panels), 6 m (middle panels), 12 m (lower panels) and temporal interval is 0.2 ms (a) staggered grid; (b) auxiliary grid; (c) rotated staggered grid and (d) non-staggered grid. The black lines represent the analytical solution of qP (outer line) and qSV (inner line) waves.

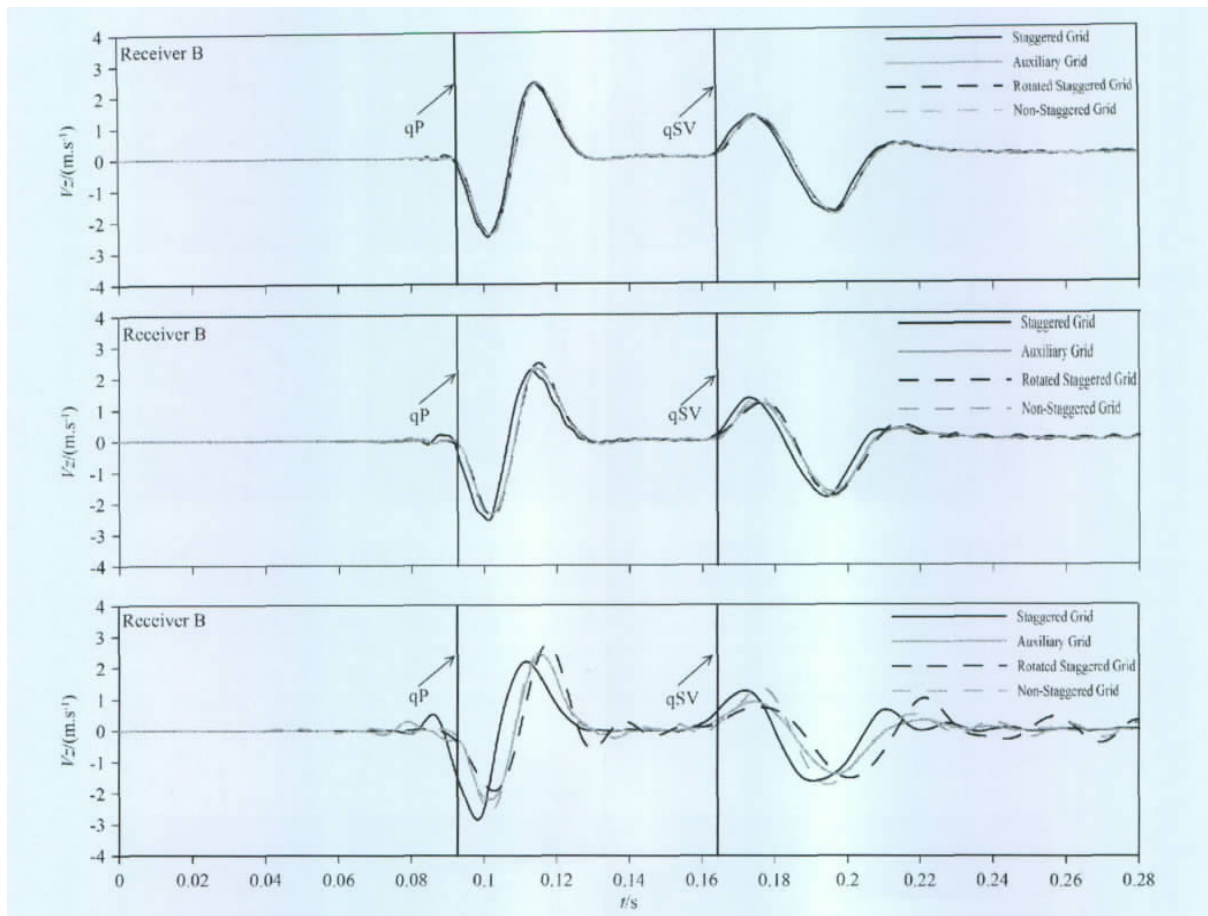


图4 时间间隔  $\Delta t = 0.1$  ms 时, 空间间隔分别为 3 m (上图), 6 m (中图), 12 m (下图) 时, 弹性 TTI 介质模拟中 B 点  $V_z$  向合成理论地震图(图中垂线为初至波 qP 及 qSV 的解析到时)。

Fig. 4  $V_z$ -component synthetic seismograms at the point B for a selected elastic TTI medium simulation (see figure 2), the temporal interval is 0.1 ms, and the spatial intervals are: 3 m (upper panel), 6 m (middle panel), 12 m (lower panel). In figure the vertical lines represent the analytic onset times of qP and qSV waves.

但是合成地震记录的震荡也随之增大(见图4)。

2) 当空间网格较大时, 交错网格模拟出的合成理论地震图和另外三种网格相比较, 出现了相移; 随着网格间距的增大, 交错网格的相移增大, 同时旋转交错网格也出现了相移。

3) 结合波场快照可以看出, 随着网格间距的增大, 四种网格都出现了频散现象, 相比较而言, 同位网格和辅助网格的频散现象较弱。

从表3中可以看出, 相同条件下, 四种网格模拟到同一时刻(0.16 s)的地震波场的CPU时间消耗从少到多依次是: 旋转交错网格、交错网格、辅助网格和同位网格。从表4(略)可以发现, 整体而言, 四种网格的qP波初动和qSV波的初动时刻的误差从小到大依次是: 同位网格、辅助网格、旋转交错网格、交错网格。

### 5.3 黏弹性 TTI 介质地震波场数值模拟结果

为了进行系统的对比分析, 模型大小, 震源位置及检波器位置同前(图2所示)。这里只是采用粘弹性 TTI 介质(表2所示)。利用三种不同的网格间距(3 m × 3 m, 6 m × 6 m, 12 m × 12 m)和时间采样间隔(0.1 ms, 0.2 ms, 0.4 ms)分别计算出了36种模拟结果。从波场快照和解析解的对比可以看出, 波场快照和解析解重合(图5), 说明这四种有限差分网格可以有效的模拟黏弹性 TTI 介质中地震波的传播。在相同的时间间隔条件下, 波场快照中 qP 波和 qSV 波的宽度随着空间间隔的增大而变宽(如图5所示)。相同的时间空间条件下, 四种网格的模拟的结果中 qP 波和 qSV 波的宽度相当。随着网格空间间隔的增大, 旋转交错网格模拟的波场快照中出现了轻微的频散。



表 3 弹性 TTI 介质地震波场数值模拟中四种不同网格的 CPU 耗时对比

Table 3 CPU time comparisons with four kinds of different grid approaches for an elastic TTI medium simulation

时间间隔	空间间隔	交错网格	辅助网格	旋转交错网格	同位网格
0.1 ms	3 m×3 m	1569.71 s	1681.59 s	832.63 s	2329.03 s
	6 m×6 m	415.63 s	452.60 s	239.76 s	653.65 s
	12 m×12 m	138.71 s	137.10 s	73.10 s	214.08 s
0.2 ms	3 m×3 m	734.75 s	835.71 s	419.40 s	1204.24 s
	6 m×6 m	211.47 s	218.57 s	123.13 s	351.63 s
	12 m×12 m	66.22 s	69.86 s	36.79 s	113.85 s
0.4 ms	3 m×3 m	368.89 s	428.24 s	208.05 s	631.40 s
	6 m×6 m	106.61 s	110.50 s	58.07 s	162.33 s
	12 m×12 m	33.49 s	35.61 s	18.33 s	56.25 s

表 5 黏弹性 TTI 介质地震波场数值模拟中四种不同网格的 CPU 耗时对比

Table 5 CPU time comparisons of the four different grid approaches in a viscoelastic TTI medium simulation

时间间隔	空间间隔	交错网格	辅助网格	旋转交错网格	同位网格
0.1 ms	3 m×3 m	1815.49 s	2303.41 s	1156.02 s	5701.97 s
	6 m×6 m	505.28 s	705.77 s	325.43 s	1638.69 s
	12 m×12 m	167.99 s	254.48 s	108.57 s	523.80 s
0.2 ms	3 m×3 m	876.03 s	1159.77 s	591.33 s	2839.13 s
	6 m×6 m	275.08 s	362.31 s	181.10 s	819.77 s
	12 m×12 m	82.99 s	115.47 s	56.71 s	259.85 s
0.4 ms	3 m×3 m	433.35 s	551.25 s	283.21 s	1448.73 s
	6 m×6 m	126.41 s	194.49 s	84.24 s	408.05 s
	12 m×12 m	41.67 s	58.27 s	27.50 s	130.65 s

从以上 36(4×9)种数值模拟结果来看,可以得到如下的结论:

1)四种方法模拟出的理论地震图中的 qP 波和 qSV 波的振幅都随着时间间隔的增大而成倍数的减小,这是由于文中的震源加入波场的能量随着时间间隔成倍的增加而成倍减小所致;随着空间间隔的增大,合成理论地震图中振幅改变不大;但是合成理论地震图的数据震荡的剧烈程度增大(见图 6)。综合比较,四种网格中,相同的空间和时间间隔下,同位网格的保幅能力最好。

2)从相位的角度来分析合成理论地震图,可以发现,当网格间距较大时,交错网格相对另外三种网格出现了相移。

3)四种网格在模拟黏弹性 TTI 介质中的地震波传播时,都有频散现象。四种网格相比较而言,旋转交错网格模拟的结果中频散较明显,同位网格模拟的结果频散最小。

从表 5 中可以看出,相同条件下,四种网格模拟到同一时刻(0.16 s)的地震波场的 CPU 时间消耗从多到少依次是:旋转交错网格,交错网格,辅助网格,同位网格。从表 6(略)可以发现,整体而言,四种网格的 qP 波初动和 qSV 波的初动时刻的误差从小

到大依次是:同位网格、辅助网格、旋转交错网格、交错网格。上述结论基本上与弹性 TTI 介质中的结论类似,说明这四种不同网格有限差分算法在弹性或粘弹性 TTI 介质中模拟地震波场时具有相似的特点或不足。

## 6 结果及讨论

本文在时间二阶、空间 2M 阶精度的稳定性条件范围内,讨论分析了有限差分波场数值模拟中目前流行的四种不同网格形式,作为检验分别就弹性 TTI 介质、以及粘弹性 TTI 介质中的地震波场进行了数值模拟。通过改变网格间距和时间采样间隔较为系统的归纳、总结了上述四种不同网格(同位网格、旋转交错网格、交错网格和辅助网格)在计算精度、CPU 时间、频散、相移、以及振幅保护方面各自的特点和不足。结果表明:

1)这四种不同网格有限差分算法都是很好的地震波场数值模拟算法。

2)从 CPU 计算时间来看,旋转交错网格有限差分算法的计算效率最高,交错网格次之,而同位网格最低。

3)从计算精度来看,同位网格有限差分的计算

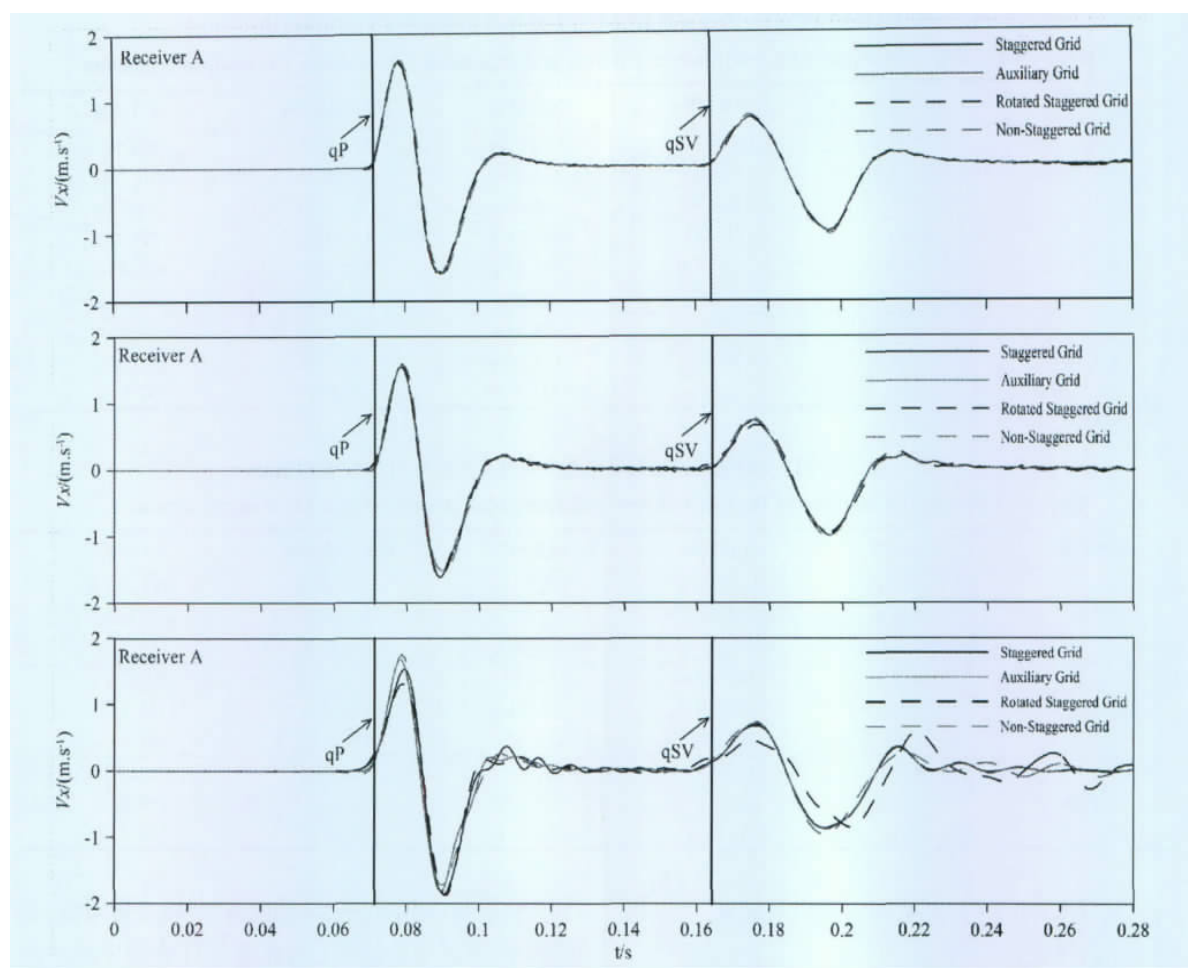


图6 时间间隔为0.2 ms时,空间间隔分别为3 m(上图),6 m(中图),12 m(下图)时,黏弹性TTI介质模拟中A点 $V_x$ 向合成理论地震图(图中垂线为初至波qP及qSV的解析到时).

Fig. 6  $V_x$ -component synthetic seismograms at point A point for a viscoelastic TTI medium simulation, the temporal interval is 0.2 ms, and the spatial intervals are: 3 m (upper panel), 6 m (middle panel) and 12 m (lower panel). In figure the vertical lines represent the analytic onset times of qP and qSV waves.

精度最高,旋转交错网格次之,相比之下交错网格则最低.

4)从振幅保护方面来看,四种网格保幅能力相当,同位网格略占优势.

5)相移方面,随着网格间距增大交错网格的相移增大,而且旋转交错网格在某些方向也出现了较小的相移.

6)频散方面,四种网格都有频散现象,相比较而言,旋转交错网格的频散较明显,而同位网格的频散则不明显.

总而言之,四种网格有限差分算法在模拟弹性TTI或粘弹性TTI介质中的基本结论相似.为了便于(未开展三维模型)分析讨论,我们仅就二维二分量波场进行了数值模拟,因此,上述结论是否具有普

适性,还有待于进一步研究.

## 参 考 文 献 (References):

- [1] Alterman Z, Karal F C. Propagation of elastic waves in layered media by finite difference methods[J]. Bull. Seism. Soc. Am., 1968, 58(1): 367-398.
- [2] Moczo P, Lucká M, Kristek J, et al. 3D displacement finite differences and a combined memory optimization[J]. Bull. Seism. Soc. Am., 1999, 89(1): 69-79.
- [3] Madariaga R. Dynamics of an expanding circular fault[J]. Bull. Seism. Soc. Am., 1976, 66(3): 639-666.
- [4] Virieux J. SH-wave propagation in heterogeneous media: velocity-stress finite-difference method[J]. Geophysics, 1984, 49(11): 1933-1942.
- [5] Virieux J. P-SV wave propagation in heterogeneous media: velocity-stress finite-difference method[J]. Geophysics, 1986, 51(4): 889-901.

- [6] Levander A R. 4th-order finite-difference P-SV seismograms [J]. *Geophysics*, 1988, 53(11): 1425-1436.
- [7] Graves R W. Simulating seismic wave propagation in 3D elastic media using staggered grid finite differences[J]. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 1996, 86(4): 1091-1106.
- [8] Crase E. High-order (space and time) finite-difference modeling of the elastic wave equation[A]. 60th Ann. Internat. Mtg. Soc. Expl. Geophys., Expanded Abstracts, 1990: 987-991.
- [9] Igel H, Rioulet B, Mora P. Accuracy of staggered 3-D finite-difference grids for anisotropic wave propagation[C]. SEG Expanded Abstracts, 1992, 11: 1244-1246.
- [10] Igel H, Mora P, Rioulet B. Anisotropic wave propagation through finite-difference grids[J]. *Geophysics*, 1995, 60(4): 1203-1216.
- [11] Saenger E H, Gold N, Shapiro S A. Modeling the propagation of elastic waves using a modified finite-difference grid[J]. *Wave Motion*, 2000, 31(1): 77-92.
- [12] Saenger E H, Bohlen T. Finite-difference modeling of viscoelastic and anisotropic wave propagation using the rotated staggered grid[J]. *Geophysics*, 2004, 69(2): 583-591.
- [13] Hustedt B, Operto S, Virieux J. Mixed-grid and staggered-grid finite-difference methods for frequency-domain acoustic wave modelling[J]. *Geophys. J. Int.*, 2004, 157(3): 1269-1296.
- [14] 王晓欢. TTI 介质中地震波传播特性研究[硕士学位论文]. 长春: 吉林大学, 2006.  
Wang X H. A study on propagation signatures of seismic wave in TTI media[D]. Changchun: Jilin University (in Chinese), 2006.
- [15] Bayliss A, Jordan K E, Lemesurier B J, et al. A 4th-order accurate finite-difference scheme for the computation of elastic-waves[J]. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 1986, 76(4): 1115-1132.
- [16] 谢小碧, 姚振兴. 二维不均匀介质中点源 P-SV 波响应的有限差分近似算法[J]. *地球物理学报*, 1988, 31(5): 540-555.  
Xie X B, Yao Z X. P-SV wave responses for a point source in two-dimensional heterogeneous media: finite-difference method[J]. *Acta Geophysica Sinica (Chinese J. Geophys.)* (in Chinese), 1988, 31(5): 540-555.
- [17] Tsingas C, Vafidis A, Kanasevich E R. Elastic wave propagation in transversely isotropic media using finite differences[J]. *Geophysical Prospecting*, 1990, 38(8): 933-949.
- [18] Dai N, Vafidis A, Kanasevich E R. Wave propagation in heterogeneous, porous media: a velocity-stress, finite-difference method[J]. *Geophysics*, 1995, 60(2): 327-340.
- [19] Zhang W, Chen X F. Traction image method for irregular free surface boundaries in finite difference seismic wave simulation[J]. *Geophys. J. Int.*, 2006, 167(1): 337-353.
- [20] 祝贺君, 张伟, 陈晓非. 二维各向异性介质中地震波场的高阶同位网格有限差分模拟[J]. *地球物理学报*, 2009, 52(6): 1536-1546.
- [21] Zhu H J, Zhang W, Chen X F. Two-dimensional seismic wave simulation in anisotropic media by non-staggered finite difference method[J]. *Chinese J. Geophys. (in Chinese)*, 2009, 52(6): 1536-1546.
- [22] Zhang W, Shen Y, Zhao L. Three-dimensional anisotropic seismic wave modelling in spherical coordinates by a collocated-grid finite-difference method [J]. *Geophys. J. Int.*, 2012, 188(3): 1359-1381.
- [23] 严红勇, 刘洋. 黏弹 TTI 介质中旋转交错网格高阶有限差分数值模拟[J]. *地球物理学报*, 2012, 55(4): 1354-1365.  
Yan H Y, Liu Y. Rotated staggered grid high-order finite-difference numerical modeling for wave propagation in viscoelastic TTI media [J]. *Chinese J. Geophys. (in Chinese)*, 2012, 55(4): 1354-1365.
- [24] Zhu J L, Dorman J. Two-dimensional, three-component wave propagation in a transversely isotropic medium with arbitrary-orientation-finite-element modeling [J]. *Geophysics*, 2000, 65(3): 934-942.
- [25] Anderson D L. Elastic wave propagation in layered anisotropic media[J]. *J. Geophys. Res.*, 1961, 66(9): 2953-2963.
- [26] Love A E H. A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity[M]. New York: Dover Publications Inc., 1944.
- [27] Carcione J M. Wave propagation in anisotropic linear viscoelastic media: theory and simulated wavefield [J]. *Geophys. J. Int.*, 1990, 101(3): 739-750.
- [28] Carcione J M. Constitutive model and wave equations for linear, viscoelastic, anisotropic Media [J]. *Geophysics*, 1995, 60(2): 537-548.
- [29] 裴正林, 王尚旭. 任意倾斜各向异性介质中弹性波波场交错网格高阶有限差分法模拟[J]. *地震学报*, 2005, 27(4): 441-451.  
Pei Z L, Wang S X. A staggered-grid high-order finite-difference modeling for elastic wave field in arbitrary tilt anisotropic media[J]. *Acta Seismologica Sinica (in Chinese)*, 2005, 27(4): 441-451.
- [30] Cerjan C, Kosloff D, Kosloff R, et al. A nonreflecting boundary condition for discrete acoustic and elastic wave equations[J]. *Geophysics*, 1985, 50(4): 705-708.
- [31] 唐小平, 白超英, 刘宽厚. 伪谱法分离波动方程弹性波模拟[J]. *石油地球物理勘探*, 2012, 47(1): 19-26.  
Tang X P, Bai C Y, Liu K H. Elastic wavefield simulation using separated equations through pseudo-spectral method [J]. *OGP (in Chinese)*, 2012, 47(1): 19-26.
- [32] Zhou B, Greenhalgh S. Raypath and traveltime computations for 2D transversely isotropic media with dipping symmetry axes[J]. *Exploration Geophysics*, 2006, 37(2): 150-159.
- [33] Zhou B, Greenhalgh S. On the computation of elastic wave group velocities for a General anisotropic medium [J]. *J. Geophys. Eng.*, 2004, 1(3): 205-215.