

1ή Σειρά Ασκήσεων

Λεωνίδας Αβδελάς

8 Νοεμβρίου 2021

Άσκηση 1

1

Η εντροπία υπολογίζεται ως:

$$\begin{aligned} H(x) &= -\frac{1}{8} \log \frac{1}{8} - \frac{1}{2} \log \frac{1}{2} - \frac{1}{8} \log \frac{1}{8} - \frac{1}{24} \log \frac{1}{24} \\ &\quad - \frac{1}{24} \log \frac{1}{24} - \frac{1}{24} \log \frac{1}{24} - \frac{1}{8} \log \frac{1}{8} \\ &= 2.20 \text{ bits} \end{aligned}$$

2

Για να υπολογίσουμε την τυχαία μεταβλητή $Y = X^3$, πρέπει να προσθέσουμε όλες τις τιμές του x ώστε για το $g(x) = y$ να ισχύει $p_Y(y) = \sum_{x|g(x)=y} p_X(x)$.

Έτσι:

$$\begin{aligned}p_Y(-27) &= p_X(-3) = \frac{1}{8} \\p_Y(-1) &= p_X(-1) = \frac{1}{2} \\p_Y(0) &= p_X(0) = \frac{1}{8} \\p_Y(1) &= p_X(1) = \frac{1}{24} \\p_Y(8) &= p_X(2) = \frac{1}{24} \\p_Y(27) &= p_X(3) = \frac{1}{24} \\p_Y(64) &= p_X(4) = \frac{1}{8}\end{aligned}$$

Αφού οι πιθανότητες δεν αλλάζουν, έχουμε ότι $H(y) = H(x) = 2.20$ bits.

3

Αντίστοιχα υπολογίζουμε την τυχαία μεταβλητή Z , με αντίστοιχο τρόπο με πριν:

$$\begin{aligned}p_Z(81) &= p_X(-3) + p_X(3) = \frac{1}{8} + \frac{1}{24} = \frac{4}{24} = \frac{1}{6} \\p_Z(1) &= p_X(-1) + p_X(1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{24} = \frac{13}{24} \\p_Z(0) &= p_X(0) = \frac{1}{8} \\p_Z(16) &= p_X(2) = \frac{1}{24} \\p_Z(64) &= p_X(4) = \frac{1}{8}\end{aligned}$$

Άρα η εντροπία είναι:

$$\begin{aligned}H(z) &= -\frac{1}{6} \log \frac{1}{6} - \frac{13}{24} \log \frac{13}{24} - \frac{1}{8} \log \frac{1}{8} - \frac{1}{24} \log \frac{1}{24} - \frac{1}{8} \log \frac{1}{8} \\&= 1.85 \text{ bits}\end{aligned}$$

Άσκηση 2

1

Μπορούμε να το υπολογίσουμε εύκολα κάνοντας χρήση των ιδιοτήτων της κοινής εντροπίας.

$$\begin{aligned} H(X, Y) &= -0.2 \log 0.2 - 0 - 0.15 \log 0.15 - 0.2 \log 0.2 - 0.05 \log 0.05 \\ &\quad - 0.2 \log 0.2 - 0.15 \log 0.15 - 0.01 \log 0.01 - 0.04 \log 0.04 \\ &= 2.68 \text{ bits} \end{aligned}$$

2

Θα βρούμε τις περιθωριακές τιμές του X και του Y και μετά θα υπολογίσουμε την εντροπία τους.

- Για το X είναι $\{0.35, 0.45, 0.2\}$
- Για το Y $\{0.55, 0.06, 0.39\}$.

Έτσι οι εντροπίες είναι $H(X) = 1.51$ bits και $H(Y) = 1.24$ bits.

3

Από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε ότι:

- $H(X, Y) = H(X) + H(Y|X)$, άρα $H(Y|X) = H(X, Y) - H(X)$
- $H(X, Y) = H(Y) + H(X|Y)$, άρα $H(X|Y) = H(X, Y) - H(Y)$

Έτσι $H(X|Y) = 2.68 - 1.24 = 1.44$ και $H(Y|X) = 2.68 - 1.51 = 1.17$.

4

Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} H(X|Y=1) &= -0.2 \log 0.2 - 0.2 \log 0.2 - 0.15 \log 0.15 = 1.33 \text{ bits} \\ H(X|Y=2) &= 0 - 0.05 \log 0.05 - 0.01 \log 0.01 = 0.28 \text{ bits} \\ H(X|Y=3) &= -0.15 \log 0.15 - 0.2 \log 0.2 - 0.04 \log 0.04 = 1.06 \text{ bits} \end{aligned}$$

5

Αφού γνωρίζουμε και τους δύο όρους, έχουμε $H(Y) - H(Y|X) = 1.24 - 1.17 = 0.07$.

6

Έχουμε βρει τις οριακές πιθανότητες παραπάνω, οπότε τώρα μένει μόνο να υπολογίσουμε την σχετική εντροπία.

$$\begin{aligned} D[p_X(x)||p_Y(x)] &= 0.35 \log \frac{0.35}{0.55} + 0.45 \log \frac{0.45}{0.06} + 0.2 \log \frac{0.2}{0.39} \\ &= 0.887 \text{ bits} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D[p_Y(x)||p_X(x)] &= 0.55 \log \frac{0.55}{0.35} + 0.06 \log \frac{0.06}{0.45} + 0.39 \log \frac{0.39}{0.2} \\ &= 0.559 \text{ bits} \end{aligned}$$

7

Έχουμε:

$$\begin{aligned} I(X;Y) &= 0.2 \log \frac{0.2}{0.35 \cdot 0.55} + 0 + 0.15 \log \frac{0.15}{0.35 \cdot 0.39} + 0.2 \log \frac{0.2}{0.45 \cdot 0.55} \\ &\quad + 0.05 \log \frac{0.05}{0.45 \cdot 0.06} + 0.2 \log \frac{0.2}{0.45 \cdot 0.39} + 0.15 \log \frac{0.15}{0.2 \cdot 0.55} \\ &\quad + 0.01 \log \frac{0.01}{0.2 \cdot 0.06} + 0.04 \log \frac{0.04}{0.2 \cdot 0.39} \\ &= 0.078 \text{ bits} \end{aligned}$$

Άσκηση 3

1

Έχουμε:

$$H(X) = -0.1 \log 0.1 - 0.2 \log 0.2 - 0.3 \log 0.3 - 0.4 \log 0.4 = 1.85 \text{ bits}$$

$$H(Y) = -0.2 \log 0.2 - 0.3 \log 0.3 - 0.4 \log 0.4 - 0.1 \log 0.1 = 1.85 \text{bits}$$

$$H(Y) = -0.4 \log 0.4 - 0.1 \log 0.1 - 0.2 \log 0.2 - 0.3 \log 0.3 = 1.85 \text{bits}$$

2

$$D(p||q) = 0.1 \log \frac{0.1}{0.2} + 0.2 \log \frac{0.2}{0.3} + 0.3 \log \frac{0.3}{0.4} + 0.4 \log \frac{0.4}{0.1} = 0.458 \text{bits}$$

$$D(q||p) = 0.2 \log \frac{0.2}{0.1} + 0.3 \log \frac{0.3}{0.2} + 0.4 \log \frac{0.4}{0.3} + 0.1 \log \frac{0.1}{0.4} = 0.341 \text{bits}$$

$$D(p||r) = 0.1 \log \frac{0.1}{0.4} + 0.2 \log \frac{0.2}{0.1} + 0.3 \log \frac{0.3}{0.2} + 0.4 \log \frac{0.4}{0.3} = 0.341 \text{bits}$$

$$D(p||r) = 0.4 \log \frac{0.4}{0.1} + 0.1 \log \frac{0.1}{0.2} + 0.2 \log \frac{0.2}{0.3} + 0.3 \log \frac{0.3}{0.4} = 0.258 \text{bits}$$

3

Όπως βλέπουμε, για την εντροπία, η τιμή της τυχαίας μεταβλητής δεν έχει σημασία η τιμή της τυχαίας μεταβλητής, αλλά μόνο οι πιθανότητες των ενδεχομένων. Αντίθετα, για την απόσταση K-L, οι τιμές επηρεάζουν πλήρως την τιμή της, αφού όπως βλέπουμε αν αλλάξουμε την σειρά των τυχαίων μεταβλητών τότε το αποτέλεσμα αλλάζει.