1ή Σειρά Ασκήσεων

Λεωνίδας Αβδελάς

19 Ιανουαρίου 2022

Άσκηση 1

1

Η εντροπία υπολογίζεται ως:

$$
\begin{aligned}
H(x) = &-\frac{1}{8}\log\frac{1}{8} - \frac{1}{2}\log\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\log\frac{1}{8} - \frac{1}{24}\log\frac{1}{24} \\
&- \frac{1}{24}\log\frac{1}{24} - \frac{1}{24}\log\frac{1}{24} - \frac{1}{8}\log\frac{1}{8} \\
&= 2.20 \text{ bits}
\end{aligned}
$$

2

Για να υπολογίσουμε την τυχαία μεταβλητή $Y = X^3$, πρέπει να προσθέσουμε όλες τις τιμές του x ώστε για το $g(x) = y$ να ισχύει $p_Y(y) = \sum_{x|g(x)=y} p_X(x)$.

Έτσι:

$$
\begin{aligned}
&p_Y(-27) = p_X(-3) = \frac{1}{8} \\
&p_Y(-1) = p_X(-1) = \frac{1}{2} \\
&p_Y(0) = p_X(0) = \frac{1}{8} \\
&p_Y(1) = p_X(1) = \frac{1}{24} \\
&p_Y(8) = p_X(2) = \frac{1}{24} \\
&p_Y(27) = p_X(3) = \frac{1}{24} \\
&p_Y(64) = p_X(4) = \frac{1}{8}
\end{aligned}
$$

Αφού οι πιθανότητες δεν αλλάζουν, έχουμε ότι $H(y) = H(x) = 2.20$ bits.

3

Αντίστοιχα υπολογίζουμε την τυχαία μεταβλητή Z, με αντίστοιχο τρόπο με πριν:

$$
\begin{aligned}
&p_Z(81) = p_X(-3) + p_X(3) = \frac{1}{8} + \frac{1}{24} = \frac{4}{24} = \frac{1}{6} \\
&p_Z(1) = p_X(-1) + p_X(1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{24} = \frac{13}{24} \\
&p_Z(0) = p_X(0) = \frac{1}{8} \\
&p_Z(16) = p_X(2) = \frac{1}{24} \\
&p_Z(64) = p_X(4) = \frac{1}{8}
\end{aligned}
$$

Άρα η εντροπία είναι:

$$
\begin{aligned}
H(z) &= -\frac{1}{6}\log\frac{1}{6} - \frac{13}{24}\log\frac{13}{24} - \frac{1}{8}\log\frac{1}{8} - \frac{1}{24}\log\frac{1}{24} - \frac{1}{8}\log\frac{1}{8} \\
&= 1.85 \text{ bits}
\end{aligned}
$$

Άσκηση 2

1

Μπορούμε να το υπολογίσουμε εύκολα κάνοντας χρήση των ιδιοτήτων της κοινής εντροπίας.

$$\begin{aligned} H(X,Y) =& -0.2\log 0.2 - 0 - 0.15\log 0.15 - 0.2\log 0.2 - 0.05\log 0.05 \\ & - 0.2\log 0.2 - 0.15\log 0.15 - 0.01\log 0.01 - 0.04\log 0.04 \\ =& 2.68 \text{ bits} \end{aligned}$$

2

Θα βρούμε τις περιθωριακές τιμές του X και του Y και μετά θα υπολογίσουμε την εντροπία τους.

- Για το X είναι $\{0.35, 0.45, 0.2\}$
- Για το Y $\{0.55, 0.06, 0.39\}$.

Έτσι οι εντροπίες είναι $H(X) = 1.51$ bits και $H(Y) = 1.24$ bits.

3

Από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε ότι:

- $H(X,Y) = H(X) + H(Y|X)$, άρα $H(Y|X) = H(X,Y) - H(X)$
- $H(X,Y) = H(Y) + H(X|Y)$, άρα $H(X|Y) = H(X,Y) - H(Y)$

Έτσι $H(X|Y) = 2.68 - 1.24 = 1.44$ και $H(Y|X) = 2.68 - 1.51 = 1.17$.

4

Για $Y = 1$ έχουμε ότι:

- $p(X = 1|Y = 1) = \frac{p(1,1)}{p(Y=1)} = \frac{0.2}{0.55} = 0.36$
- $p(X = 2|Y = 1) = \frac{p(2,1)}{p(Y=1)} = \frac{0.2}{0.55} = 0.36$
- $p(X = 3|Y = 1) = \frac{p(3,1)}{p(Y=1)} = \frac{0.15}{0.55} = 0.28$

Άρα:

$$H(X|Y=1) = -0.36\log 0.36 - 0.36\log 0.36 - 0.28\log 0.28 = 1.54 \text{ bits}$$

Για $Y = 2$ έχουμε ότι:

- $p(X=1|Y=2) = \frac{p(1,2)}{p(Y=2)} = 0$
- $p(X=2|Y=2) = \frac{p(2,2)}{p(Y=2)} = \frac{0.05}{0.06} = 0.83$
- $p(X=3|Y=2) = \frac{p(3,2)}{p(Y=2)} = \frac{0.01}{0.06} = 0.17$

Άρα:

$$H(X|Y=2) = 0 - 0.83\log 0.83 - 0.17\log 0.17 = 0.65 \text{ bits}$$

Για $Y = 3$ έχουμε ότι:

- $p(X=1|Y=3) = \frac{p(1,3)}{p(Y=3)} = \frac{0.15}{0.39} = 0.11$
- $p(X=2|Y=3) = \frac{p(2,3)}{p(Y=3)} = \frac{0.2}{0.39} = 0.51$
- $p(X=3|Y=3) = \frac{p(3,3)}{p(Y=3)} = \frac{0.04}{0.39} = 0.10$

Άρα:

$$H(X|Y=3) = -0.11\log 0.11 - 0.51\log 0.51 - 0.10\log 0.10 = 1.78 \text{ bits}$$

5

Αφού γνωρίζουμε και τους δύο όρους, έχουμε $H(Y) - H(Y|X) = 1.24 - 1.17 = 0.07$.

6

Έχουμε βρει τις οριακές πιθανότητες παραπάνω, οπότε τώρα μένει μόνο να υπολογίσουμε την σχετική εντροπία.

$$\begin{aligned} D\left[p_X(x) \| p_Y(x)\right] &= 0.35\log\frac{0.35}{0.55} + 0.45\log\frac{0.45}{0.06} + 0.2\log\frac{0.2}{0.39} \\ &= 0.887 \text{ bits} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D\left[p_Y(x) \| p_X(x)\right] &= 0.55\log\frac{0.55}{0.35} + 0.06\log\frac{0.06}{0.45} + 0.39\log\frac{0.39}{0.2} \\ &= 0.559 \text{ bits} \end{aligned}$$

7

Έχουμε:

$$\begin{aligned}I(X;Y) =& 0.2\log\frac{0.2}{0.35\cdot 0.55}+0+0.15\log\frac{0.15}{0.35\cdot 0.39}+0.2\log\frac{0.2}{0.45\cdot 0.55}\\&+0.05\log\frac{0.05}{0.45\cdot 0.06}+0.2\log\frac{0.2}{0.45\cdot 0.39}+0.15\log\frac{0.15}{0.2\cdot 0.55}\\&+0.01\log\frac{0.01}{0.2\cdot 0.06}+0.04\log\frac{0.04}{0.2\cdot 0.39}\\=&0.078 \text{ bits}\end{aligned}$$

Άσκηση 3

1

Έχουμε:

$$H(X) = -0.1\log 0.1 - 0.2\log 0.2 - 0.3\log 0.3 - 0.4\log 0.4 = 1.85\text{bits}$$

$$H(Y) = -0.2\log 0.2 - 0.3\log 0.3 - 0.4\log 0.4 - 0.1\log 0.1 = 1.85\text{bits}$$

$$H(Y) = -0.4\log 0.4 - 0.1\log 0.1 - 0.2\log 0.2 - 0.3\log 0.3 = 1.85\text{bits}$$

2

$$D(p\|q) = 0.1\log\frac{0.1}{0.2}+0.2\log\frac{0.2}{0.3}+0.3\log\frac{0.3}{0.4}+0.4\log\frac{0.4}{0.1} = 0.458\text{bits}$$

$$D(q\|p) = 0.2\log\frac{0.2}{0.1}+0.3\log\frac{0.3}{0.2}+0.4\log\frac{0.4}{0.3}+0.1\log\frac{0.1}{0.4} = 0.341\text{bits}$$

$$D(p\|r) = 0.1\log\frac{0.1}{0.4}+0.2\log\frac{0.2}{0.1}+0.3\log\frac{0.3}{0.2}+0.4\log\frac{0.4}{0.3} = 0.341\text{bits}$$

$$D(p\|r) = 0.4\log\frac{0.4}{0.1}+0.1\log\frac{0.1}{0.2}+0.2\log\frac{0.2}{0.3}+0.3\log\frac{0.3}{0.4} = 0.458\text{bits}$$

3

Όπως βλέπουμε, για την εντροπία, η τιμή της τυχαίας μεταβλητής δεν έχει σημασία η τιμή της τυχαίας μεταβλητής, αλλά μόνο οι πιθανότητες των ενδεχομένων. Αντίθετα, για την απόσταση K-L, οι τιμές της τυχαίας μεταβλητής επηρεάζουν πλήρως την τιμή της απόστασης, αφού η απόσταση δημιουργείται με βάση την πιθανότητα που έχουν δύο κατανομές για την ίδια τιμή, αρα αν ανακατέψουμε τις πιθανότητες των τιμών, το τελικό αποτέλεσμα θα αλλάξει. Αυτό δεν συμβαίνει στην εντροπία.