1ή Σειρά Ασκήσεων

Λεωνίδας Αβδελάς

10 Νοεμβρίου 2021

Άσκηση 1

1

Η εντροπία υπολογίζεται ως:

$$\begin{aligned} H(x) &= -\frac{1}{8}\log\frac{1}{8} - \frac{1}{2}\log\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\log\frac{1}{8} - \frac{1}{24}\log\frac{1}{24} \\ &- \frac{1}{24}\log\frac{1}{24} - \frac{1}{24}\log\frac{1}{24} - \frac{1}{8}\log\frac{1}{8} \\ &= 2.20 \text{ bits} \end{aligned}$$

2

Για να υπολογίσουμε την τυχαία μεταβλητή $Y = X^3$, πρέπει να προσθέσουμε όλες τις τιμές του x ώστε για το $g(x) = y$ να ισχύει $p_Y(y) = \sum_{x|g(x)=y} p_X(x)$.

Έτσι:

$$
\begin{aligned}
p_Y(-27) &= p_X(-3) = \frac{1}{8} \\
p_Y(-1) &= p_X(-1) = \frac{1}{2} \\
p_Y(0) &= p_X(0) = \frac{1}{8} \\
p_Y(1) &= p_X(1) = \frac{1}{24} \\
p_Y(8) &= p_X(2) = \frac{1}{24} \\
p_Y(27) &= p_X(3) = \frac{1}{24} \\
p_Y(64) &= p_X(4) = \frac{1}{8}
\end{aligned}
$$

Αφού οι πιθανότητες δεν αλλάζουν, έχουμε ότι $H(y) = H(x) = 2.20$ bits.

3

Αντίστοιχα υπολογίζουμε την τυχαία μεταβλητή Z, με αντίστοιχο τρόπο με πριν:

$$
\begin{aligned}
p_Z(81) &= p_X(-3) + p_X(3) = \frac{1}{8} + \frac{1}{24} = \frac{4}{24} = \frac{1}{6} \\
p_Z(1) &= p_X(-1) + p_X(1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{24} = \frac{13}{24} \\
p_Z(0) &= p_X(0) = \frac{1}{8} \\
p_Z(16) &= p_X(2) = \frac{1}{24} \\
p_Z(64) &= p_X(4) = \frac{1}{8}
\end{aligned}
$$

Άρα η εντροπία είναι:

$$
\begin{aligned}
H(z) &= -\frac{1}{6}\log\frac{1}{6} - \frac{13}{24}\log\frac{13}{24} - \frac{1}{8}\log\frac{1}{8} - \frac{1}{24}\log\frac{1}{24} - \frac{1}{8}\log\frac{1}{8} \\
&= 1.85 \text{ bits}
\end{aligned}
$$

Άσκηση 2

1

Μπορούμε να το υπολογίσουμε εύκολα κάνοντας χρήση των ιδιοτήτων της κοινής εντροπίας.

$$\begin{aligned}H(X,Y) =& -0.2\log 0.2 - 0 - 0.15\log 0.15 - 0.2\log 0.2 - 0.05\log 0.05\\ &- 0.2\log 0.2 - 0.15\log 0.15 - 0.01\log 0.01 - 0.04\log 0.04\\ =& 2.68 \text{ bits}\end{aligned}$$

2

Θα βρούμε τις περιθωριακές τιμές του X και του Y και μετά θα υπολογίσουμε την εντροπία τους.

- Για το X είναι $\{0.35, 0.45, 0.2\}$
- Για το Y $\{0.55, 0.06, 0.39\}$.

Έτσι οι εντροπίες είναι $H(X) = 1.51$ bits και $H(Y) = 1.24$ bits.

3

Από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε ότι:

- $H(X,Y) = H(X) + H(Y|X)$, άρα $H(Y|X) = H(X,Y) - H(X)$
- $H(X,Y) = H(Y) + H(X|Y)$, άρα $H(X|Y) = H(X,Y) - H(Y)$

Έτσι $H(X|Y) = 2.68 - 1.24 = 1.44$ και $H(Y|X) = 2.68 - 1.51 = 1.17$.

4

Για $Y = 1$ έχουμε ότι:

- $p(X = 1|Y = 1) = \frac{p(1,1)}{p(Y=1)} = \frac{0.2}{0.55} = 0.36$
- $p(X = 2|Y = 1) = \frac{p(2,1)}{p(Y=1)} = \frac{0.2}{0.55} = 0.36$
- $p(X = 3|Y = 1) = \frac{p(3,1)}{p(Y=1)} = \frac{0.15}{0.55} = 0.28$

Άρα:

$H(X|Y=1) = -0.36 \log 0.36 - 0.36 \log 0.36 - 0.28 \log 0.28 = 1.54$ bits

Για $Y = 2$ έχουμε ότι:

- $p(X=1|Y=2) = \frac{p(1,2)}{p(Y=2)} = 0$
- $p(X=2|Y=2) = \frac{p(2,2)}{p(Y=2)} = \frac{0.05}{0.06} = 0.83$
- $p(X=3|Y=2) = \frac{p(3,2)}{p(Y=2)} = \frac{0.01}{0.06} = 0.17$

Άρα:

$$H(X|Y=2) = 0 - 0.83 \log 0.83 - 0.17 \log 0.17 = 0.65 \text{ bits}$$

Για $Y = 3$ έχουμε ότι:

- $p(X=1|Y=3) = \frac{p(1,3)}{p(Y=3)} = \frac{0.15}{0.39} = 0.11$
- $p(X=2|Y=3) = \frac{p(2,3)}{p(Y=3)} = \frac{0.2}{0.39} = 0.51$
- $p(X=3|Y=3) = \frac{p(3,3)}{p(Y=3)} = \frac{0.04}{0.39} = 0.10$

Άρα:

$H(X|Y=3) = -0.11 \log 0.11 - 0.51 \log 0.51 - 0.10 \log 0.10 = 1.78$ bits

5

Αφού γνωρίζουμε και τους δύο όρους, έχουμε $H(Y) - H(Y|X) = 1.24 - 1.17 = 0.07$.

6

Έχουμε βρει τις οριακές πιθανότητες παραπάνω, οπότε τώρα μένει μόνο να υπολογίσουμε την σχετική εντροπία.

$$\begin{aligned} D\left[p_X(x) \| p_Y(x)\right] &= 0.35 \log \frac{0.35}{0.55} + 0.45 \log \frac{0.45}{0.06} + 0.2 \log \frac{0.2}{0.39} \\ &= 0.887 \text{ bits} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D\left[p_Y(x) \| p_X(x)\right] &= 0.55 \log \frac{0.55}{0.35} + 0.06 \log \frac{0.06}{0.45} + 0.39 \log \frac{0.39}{0.2} \\ &= 0.559 \text{ bits} \end{aligned}$$

7

Έχουμε:

$$\begin{aligned} I(X;Y) =& 0.2\log\frac{0.2}{0.35\cdot 0.55} + 0 + 0.15\log\frac{0.15}{0.35\cdot 0.39} + 0.2\log\frac{0.2}{0.45\cdot 0.55} \\ &+ 0.05\log\frac{0.05}{0.45\cdot 0.06} + 0.2\log\frac{0.2}{0.45\cdot 0.39} + 0.15\log\frac{0.15}{0.2\cdot 0.55} \\ &+ 0.01\log\frac{0.01}{0.2\cdot 0.06} + 0.04\log\frac{0.04}{0.2\cdot 0.39} \\ =& 0.078 \text{ bits} \end{aligned}$$

Άσκηση 3

1

Έχουμε:

$$H(X) = -0.1\log 0.1 - 0.2\log 0.2 - 0.3\log 0.3 - 0.4\log 0.4 = 1.85\text{bits}$$

$$H(Y) = -0.2\log 0.2 - 0.3\log 0.3 - 0.4\log 0.4 - 0.1\log 0.1 = 1.85\text{bits}$$

$$H(Y) = -0.4\log 0.4 - 0.1\log 0.1 - 0.2\log 0.2 - 0.3\log 0.3 = 1.85\text{bits}$$

2

$$D(p\|q) = 0.1\log\frac{0.1}{0.2} + 0.2\log\frac{0.2}{0.3} + 0.3\log\frac{0.3}{0.4} + 0.4\log\frac{0.4}{0.1} = 0.458\text{bits}$$

$$D(q\|p) = 0.2\log\frac{0.2}{0.1} + 0.3\log\frac{0.3}{0.2} + 0.4\log\frac{0.4}{0.3} + 0.1\log\frac{0.1}{0.4} = 0.341\text{bits}$$

$$D(p\|r) = 0.1\log\frac{0.1}{0.4} + 0.2\log\frac{0.2}{0.1} + 0.3\log\frac{0.3}{0.2} + 0.4\log\frac{0.4}{0.3} = 0.341\text{bits}$$

$$D(p\|r) = 0.4\log\frac{0.4}{0.1} + 0.1\log\frac{0.1}{0.2} + 0.2\log\frac{0.2}{0.3} + 0.3\log\frac{0.3}{0.4} = 0.258\text{bits}$$

3

Όπως βλέπουμε, για την εντροπία, η τιμή της τυχαίας μεταβλητής δεν έχει σημασία η τιμή της τυχαίας μεταβλητής, αλλά μόνο οι πιθανότητες των ενδεχομένων. Αντίθετα, για την απόσταση K-L, οι τιμές επηρεάζουν πλήρως την τιμή της, αφού όπως βλέπουμε αν αλλάξουμε την σειρά των τυχαίων μεταβλητών τότε το αποτέλεσμα αλλάζει.