Συστήματα Αναμονής
1ή Ομάδα Ασκήσεων

Λεωνίδας Αβδελάς | AM: 03113182

Κατανομή Poisson

A)

Παρακάτω στο Σχήμα 1, φαίνεται η ΣΜΜ της κατανομής Poisson για $\lambda = 3, 10, 50$ και τιμές από 0 μέχρι και 70.

Όπως βλέπουμε, η διαφορά μεταξύ των τριών ΣΜΜ, είναι ότι το κέντρο τους μετατοπίζεται ανάλογα με την παράμετρο λ (αφού αυτή είναι η μέση τιμή) και αφού και η διασπορά είναι λ, το εύρος της καμπύλης αυξάνεται όσο αυξάνουμε το λ.

B)

Οι τιμές που υπολογίζουμε για την μέση τιμή και την διακύμανση είναι 30, γεγονός που το περιμέναμε, αφού στην κατανομή Ποισσον η μέση τιμή και η διακύμανση ισούνται με 30.

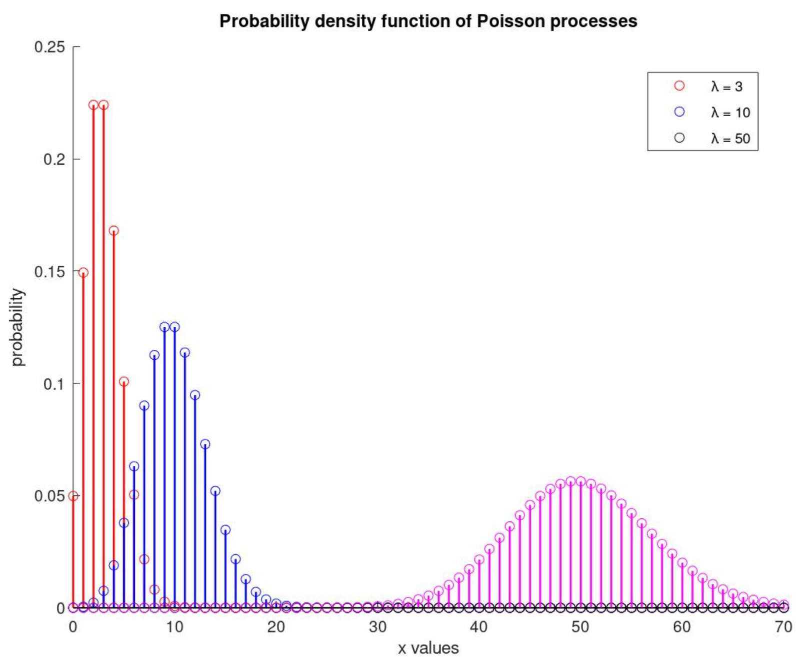
Γ)

Η υπέρθεση των κατανομών φαίνεται παρακάτω στο Σχήμα 2.

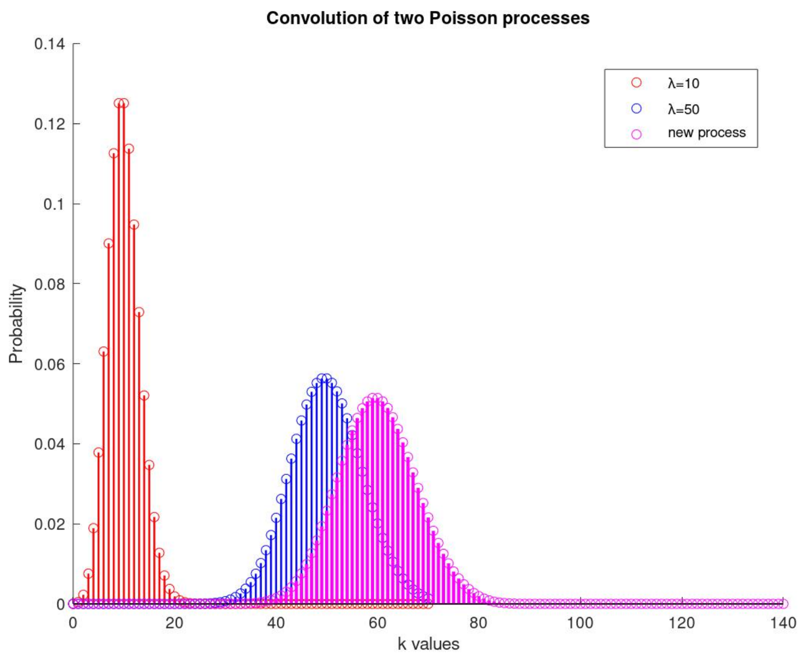
Η κατανομή που προέκυψε είναι και αυτή Poisson με $\lambda = 60$, δηλαδή η συνέλιξη των κατανομών Poisson με $\lambda = 50$ και $\lambda = 10$ μας οδήγησε σε μια κατανομή Poisson με $\lambda = 60$. Η απαραίτητη προϋπόθεση για να συμβεί αυτό, είναι να είναι και οι δύο κατανομές Poisson.

Δ)

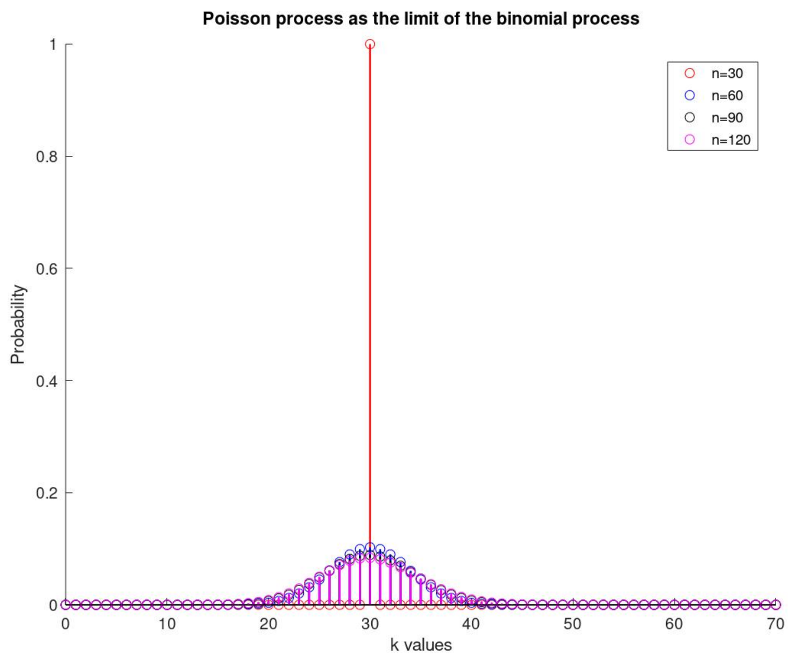
Σύμφωνα με το οριοακό θεώρημα Possion, αν το όριο μιας όταν οι παράμετροι n και p_n είναι αρκετά μεγάλοι, και το γινόμενο τους συγκλίνει σε έναν αριθμό λ, δηλαδή $np_n = \lambda$, τότε η διωνημική οριακά γίνεται κατανομή Poisson. Τα αποτελέσματα φαίνονται στο Σχήμα 3. Όπως βλέπουμε, το n στην πρώτη περίπτωση είναι πολύ μικρό και έτσι το τελικό αποτέλεσμα δεν μοίαζει με την Poisson, όπως θα περιμέναμε.



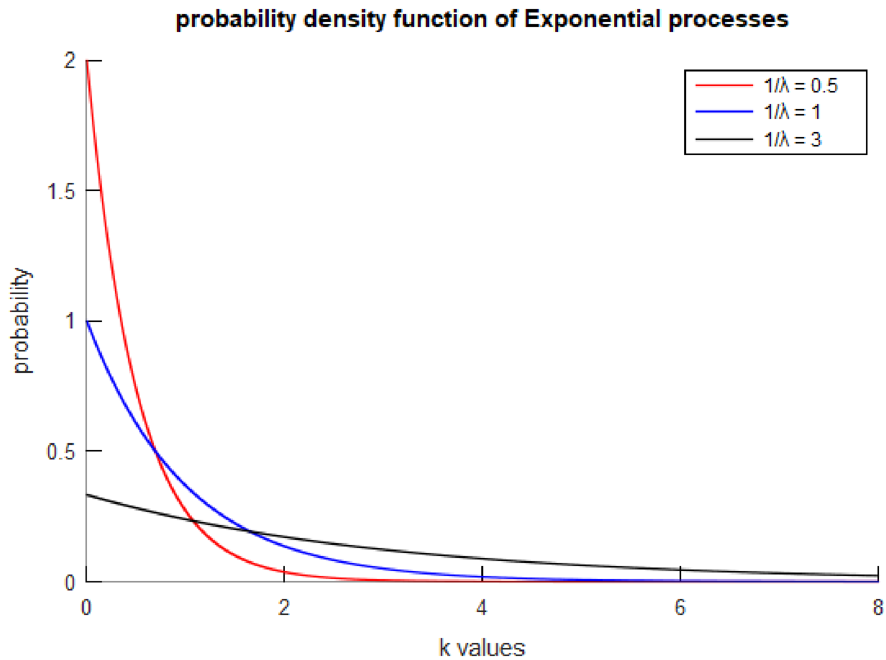
Σχήμα 1: Κατανομή Poisson με παραμέτρους $\lambda = 3, 10, 50$



Σχήμα 2: Κατανομή Poisson με παραμέτρο $\lambda = 50$, κατανομή με $\lambda = 10$ και η συνέλιξη τους.



Σχήμα 3: Διωνυμικές κατανομές με $n = 30, 50, 90, 120$



Σχήμα 4: Εκθετικές κατανομές με $\frac{1}{\lambda} = 0.5, 1, 3$

Εκθετική κατανομή

Α)

Η σππ των εκθετικών κατανομών φαίνεται στο Σχήμα 4.

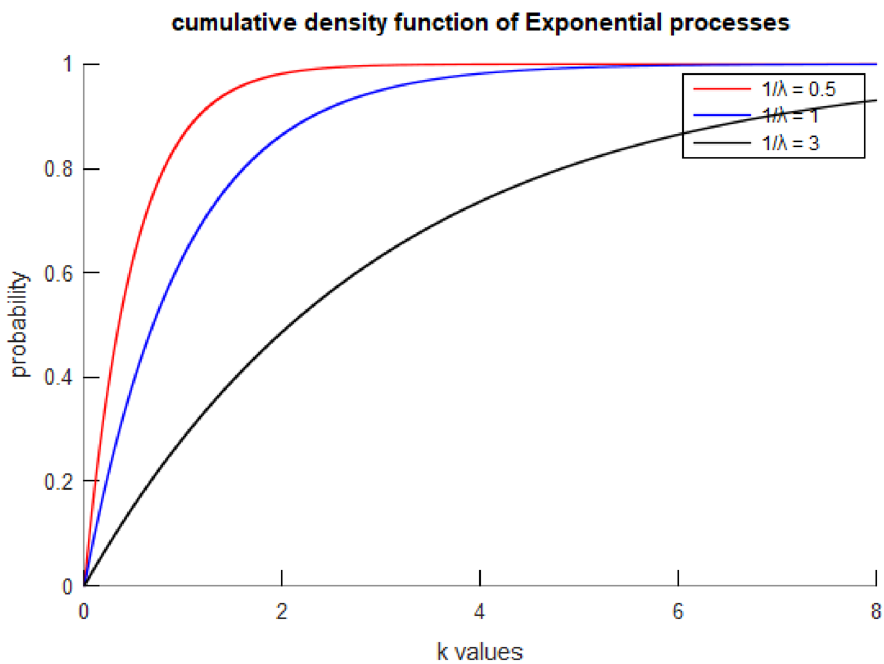
Β)

Η σκπ των εκθετικών κατανομών φαίνεται στο Σχήμα 5.

Γ)

Για να υπολογίσουμε το $\Pr(x > 30000)$, χρησιμοποιούμε τον τύπο
$\Pr(x > 30000) = 1 - \Pr(x \leq 30000)$.

Για να υπολογίσουμε το $\Pr(x > 50000|x > 20000)$ έχουμε σύμφωνα με τον τύπο της δεσμευμένης πιθανότητας:



Σχήμα 5: ΣΚΠ κατανομών με $\frac{1}{\lambda} = 0.5, 1, 3$

$$\begin{aligned}
&\Pr(x > 50000 | x > 20000) = \\
&\frac{\Pr(x > 50000 \cap x > 20000)}{\Pr(x > 20000)} = \\
&\frac{\Pr(x > 50000)}{1 - \Pr(x \leq 20000)} = \\
&\frac{1 - \Pr(x \leq 50000)}{1 - \Pr(x \leq 20000)}
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι οι δύο πιθανότητες είναι και οι δύο ίσες με 0.88692. Αυτό συμβαίνει λόγω την ιδιότητα έλλειψης μνήμης που έχει η εκθετική κατανομή [1]. Πιο συγκεκριμένα σύμφωνα με τον τύπο της εκθετικής κατανομής, από την προτελευταία ισότητα της εξίσωσης μας και δεδομένου ότι η σκπ της εκθετικής είναι $e^{-\lambda t}$, έχουμε $\frac{e^{-50000\lambda}}{e^{-20000\lambda}} = e^{-20000\lambda}$.

Διαδικασία καταμέτρησης Poisson

A)

Γνωρίζουμε ότι η χρονική διαφορά που μεσολαβεί ανάμεσα στην εμφάνιση δύο διαδοχικών γεγονότων Poisson ακολουθούν την εκθετική κατανομή με μέσο όρο $\frac{1}{\lambda}$ [3].

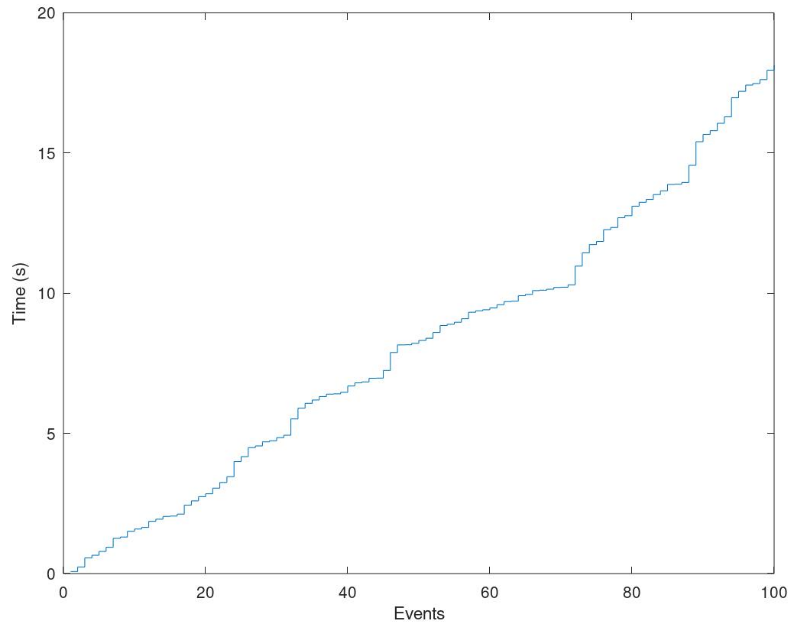
Ακολουθώντας τα βήματα, υπολογίσαμε τα χρόνο μεταξύ 100 βημάτων και μετά υπολογίσαμε την καταμέτρηση Poisson. Τελικά καταλήξαμε στην γραφική παράσταση του Σχήματος 6.

B)

Γνωρίζουμε ότι σε μια ομογενή καταμέτρηση Poisson, ο αριθμός γεγονότων σε ένα χρονικό παράθυρο $\Delta T = t_1 - t_2$ ακολουθεί κατανομή Poisson με μέση τιμή $E[N(t)] = \lambda t$ [2].

Ο μέσος αριθμός γεγονότων στην μονάδα χρόνου (1 second) που αναμένουμε είναι 5, αφού $\lambda = 5$ και $t = 1$. Οι τιμές που παίρνουμε φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Πλήθος τυχαίων γεγονότων	Μέσος αριθμός γεγονότων ανα δευτερόλεπτο
100	4.8095
200	4.9024
300	4.9344
500	4.7714
1000	4.9554
10000	4.9290



Σχήμα 6: Διαδικασία καταμέτρησης Poisson

References

[1] Dan Ma. *The exponential distribution*. Accessed on 2020-04-07. July 2016.

[2] Dan Ma. *The exponential distribution and the Poisson process*. Accessed on 2020-04-07. July 2016.

[3] None. *Relationship between poisson and exponential distribution*. Accessed on 2020-04-07. Aug. 2010.

Source Code

```
clc;
clear all;
close all;
pkg load statistics

%% Poisson Distribution

% Step A

# TASK: In a common diagram, design the Probability Mass Function
    of Poisson
# processes with lambda parameters 3, 10, 50. In the horizontal
    axes, choose k
# parameters between 0 and 70.


k = 0:1:70;
lambda = [3, 10, 30, 50];

for i=1:columns(lambda)
  poisson(i,:) = poisspdf(k,lambda(i));
endfor

colors = 'rbkm';
figure(1);
hold on;

for i=1:columns(lambda)
  if (i == 3)
    continue
  endif
  stem(k, poisson(i,:), colors(i), 'linewidth', 1.2);
endfor

hold off;

title('Probability density function of Poisson processes');
xlabel('x values');
```

```
ylabel('probability');
legend('\lambda = 3','\lambda = 10', '\lambda = 50');

% Step B

# TASK: regarding the poisson process with parameter lambda 30,
    compute its mean
# value and variance

index = find(lambda == 30);
chosen = [poisson(index,:)];

mean_value = 0;

for i=0:(columns(poisson(index,:))-1)
  mean_value = mean_value + i.*poisson(index,i+1);
endfor

disp('mean value of Poisson with lambda 30 is');
disp(mean_value);

second_moment = 0;
for i=0:(columns(poisson(index,:))-1)
  second_moment = second_moment + i.*i.*poisson(index,i+1);
endfor

variance = second_moment - mean_value.^2;

display("Variance of Poisson with lambda 30 is");
display(variance);

% Step C

# TASK: consider the convolution of the Poisson distribution with
    lambda 10 with
# the Poisson distribution with lambda 50.

first = find(lambda==10);
second = find(lambda==50);
poisson_first = poisson(first, :);
poisson_second = poisson(second, :);

composed = conv(poisson_first,poisson_second);
new_k = 0:1:(2*70);

figure(2);
hold on;

stem(k,poisson_first(:),colors(1),'linewidth',1.2);
stem(k,poisson_second(:),colors(2),'linewidth',1.2);
```

```
stem(new_k,composed,'mo','linewidth',2);

hold off;

title('Convolution of two Poisson processes');
xlabel('k values');
ylabel('Probability');
legend('\lambda=10','\lambda=50','new process');

% Step D

# TASK: show that Poisson process is the limit of the binomial distribution.

k = 0:1:70;

lambda = 30;
n =[30, 60, 90, 120];
p = lambda./n;

figure(3);

hold on;
for i=1:4
  binomial = binopdf(k,n(i),p(i));
  stem(k,binomial,colors(i),'linewidth',1.2);
endfor

title('Poisson process as the limit of the binomial process');
xlabel('k values');
ylabel('Probability');
legend('n=30','n=60','n=90','n=120');

hold off;

%% Exponantial Distribution

% Step A

k = 0:0.00001:8;
lambda_frac = [0.5, 1, 3];

for i = 1:columns(lambda_frac)
  exponential(i,:) = exppdf(k, lambda_frac(i));
endfor

colors = 'rbkm';
figure(4);
hold on;

```

```
for i=1:columns(lambda_frac)
  plot(k, exponential(i,:), colors(i), 'linewidth', 1.2);
end

hold off;

title('probability density function of Exponential processes');
xlabel('k values');
ylabel('probability');
legend('1/\lambda = 0.5','1/\lambda = 1','1/\lambda = 3');

% Step B

for i=1:columns(lambda_frac)
      exp_cdf(i,:) = expcdf(k, lambda_frac(i));
endfor

figure(5);
hold on;

for i=1:columns(lambda_frac)
  plot(k, exp_cdf(i,:), colors(i), 'linewidth', 1.2);
endfor

hold off;

title('cumulative density function of Exponential processes');
xlabel('k values');
ylabel('probability');
legend('1/\lambda = 0.5','1/\lambda = 1','1/\lambda = 3');

% Step C

lambda_frac_2 = 2.5;


for i = 1:columns(lambda_frac_2);
  exponential_cdf_2(i,:) = expcdf(k, lambda_frac_2);
endfor

disp('The value of P(x > 30000) is');
disp(1 - exponential_cdf_2(1,30000));

disp('The value of P(x > 50000 | x > 20000) is');
disp((1-exponential_cdf_2(1,50000))/(1-exponential_cdf_2(1,20000)))
    ;

%% Poisson counting process

% Part A
```

```
lambda = 5;
samples = 100;

N_t = exprnd(1/lambda, 1, samples);

% Each element of the new matrix is the time we waited from the moment we
% started counting until the i-th event happened.
for i = 2:length(N_t)
    N_t(1,i) = N_t(1,i) + N_t(1,i-1);
endfor

figure(6);
stairs(N_t);
xlabel('Events');
ylabel('Time (s)');

% Part B

% We calculate the number of events happening for every second of the process
% and then we average them out.

sample_b = [100, 200, 300, 500, 1000, 10000];
N_t_2 = cell(6,1);
time_frame = 1.0;

for j = 1:columns(sample_b)
  N_t_2{j,1} = exprnd(1/lambda, 1, sample_b(j));

  % Each element of the new matrix is the time we waited from the moment we
  % started counting until the i-th event happened.
  for i = 2:length(N_t_2{j,1})
      N_t_2{j,1}(i) = N_t_2{j,1}(i) + N_t_2{j,1}(i-1);
  endfor
endfor


for j = 1:columns(sample_b)

  events_per_sec = [1];
  time_frame = 1.0;

  for i = 1:length(N_t_2{j,1})
      if N_t_2{j,1}(i) <= time_frame
          events_per_sec(uint8(time_frame)) = ...
              events_per_sec(uint8(time_frame)) + 1;
      else
```

```
          time_frame = time_frame + 1.0;
          events_per_sec = [events_per_sec 1];
      end
  end

  disp('Number of samples');
  disp(sample_b(j));
  disp('Average number of events per sec');
  disp(mean(events_per_sec));
endfor
```