

2^η Εργαστηριακή Άσκηση στο μάθημα Συστήματα Αναμονής

Λεωνίδας Αβδελάς | AM: 03113182

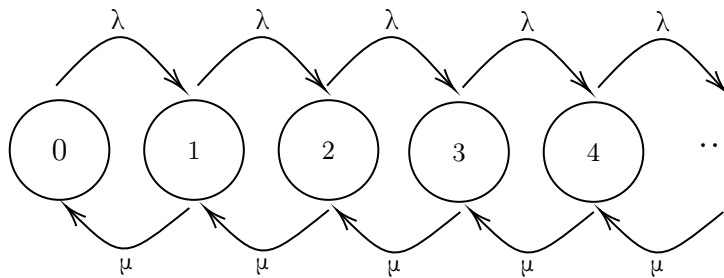
Θεωρητική μελέτη της ουράς M/M/1

(α) Για να είναι η ουρά M/M/1 εργοδική θα πρέπει να ισχύει η παρακάτω συνθήκη:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1 \quad (1)$$

Αν δεν ισχύει η συνθήκη αυτή, η ουρά θα εκραγεί.

Το διάγραμμα ρυθμού μεταβάσεων της ουράς M/M/1 φαίνεται παρακάτω:



Οι εξισώσεις ισορροπίας της ουράς είναι:

$$(\lambda + \mu)p_n = \mu p_{n+1} + \lambda p_{n-1} \quad (n \geq 1), \quad (2)$$

$$\lambda p_0 = \mu p_1 \quad (3)$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση 1 και την εξίσωση 3, έχουμε ότι:

$$p_1 = \rho p_0 \quad (4)$$

Ομοίως, χρησιμοποιώντας την εξίσωση 2 και την εξίσωση 4, με $n = 1$, έχουμε:

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu)p_1 &= \mu p_2 + \lambda p_0 \\ p_2 &= \frac{(\lambda + \mu)\rho}{\mu} p_0 - \frac{\lambda}{\mu} p_0 \\ p_2 &= \rho^2 p_0 + \rho p_0 - \rho p_0 \\ p_2 &= \rho^2 p_0 \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την σχέση 2 αναδρομικά καταλήγουμε στο αποτέλεσμα:

$$p_n = \rho^n p_0 \quad (5)$$

Για να υπολογίσουμε το p_0 , θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι ο τύπος ολικής πιθανότητας για όλες τις πιθανότητες μας λέει ότι το άθροισμα όλων των πιθανοτήτων πρέπει να είναι ίσο με 1, δηλαδή:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1 \quad (6)$$

Από την εξίσωση 5 και την εξίσωση 6, θα έχουμε ότι:

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} p_n = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n p_0 = p_0 \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \quad (7)$$

Αρα $p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n}$. Η $\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n$ είναι γεωμετρική σειρά και αφού $\rho < 1$, η σειρά συγκλίνει σε:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n = \frac{1}{1 - \rho} \quad (\rho < 1) \quad (8)$$

Τελικά καταλήγουμε στο αποτέλεσμα $p_0 = 1 - \rho$.

Άρα οι εργοδικές πιθανότητες του συστήματος είναι:

$$p_n = \rho^n(1 - \rho) \quad (9)$$

$$p_0 = 1 - \rho \quad (10)$$

(β) Για να υπολογίσουμε την μέση κατάσταση του συστήματος σε ισορροπία, θα χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση της μέσης τιμής που μας είναι γνωστή από τις πιθανότητες $E(X) = \sum_{i=1}^k x_i p_i$, καθώς και την εξίσωση 9.

Έτσι έχουμε:

$$\begin{aligned} E[n(t)] &= \sum_{n=0}^{\infty} n p_n \\ &= (1 - \rho) \sum_{n=0}^{\infty} n \rho^n \end{aligned} \quad (11)$$

Για το άθροισμα $\sum_{n=0}^{\infty} n \rho^n$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} n \rho^n &= \rho + 2\rho^2 + 3\rho^3 + \dots \\ &= \rho(1 + 2\rho + 3\rho^2 + \dots) \\ &= \rho \sum_{n=1}^{\infty} n \rho^{n-1} \end{aligned} \quad (12)$$

Παρατηρούμε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} n \rho^{n-1}$ είναι η παράγωγος του $\sum_{n=1}^{\infty} \rho^n$ ως προς το ρ .

Γνωρίζουμε ότι η γεωμετρική σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n$ ισούται με $\frac{1}{1-\rho}$. Καθώς το άθροισμα μας ξεκινάει από $n = 1$, θα αφαιρέσουμε τον πρώτο όρο από τα δύο μέρη.

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n &= \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n + 1 = \frac{1}{1-\rho} \\ \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n &= \frac{1}{1-\rho} - 1 = \frac{\rho}{1-\rho} \end{aligned} \quad (13)$$

Άρα από τις εξισώσεις 12 και 13, έχουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\rho^{n-1} = \frac{d}{d\rho} \left(\frac{\rho}{1-\rho} \right) = \frac{1-\rho+\rho}{(1-\rho)^2} = \frac{1}{(1-\rho)^2} \quad (14)$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις 11, 12 και 14, έχουμε:

$$L = E[n(t)] = \frac{\rho(1-\rho)}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho}{1-\rho} \quad (15)$$

Για να βρούμε τον μέσο χρόνο καθυστέρησης, θα χρησιμοποιήσουμε τον Νόμο του Little, ο οποίος μας λέει ότι ο μέσος χρόνος στο σύστημα ανα πελάτη W , είναι ανάλογος με τον μέσο αριθμό πελατών $L = E[n(t)]$ που μόλις υπολογίσαμε και τον ρυθμό αφίξεων λ , σύμφωνα με την σχέση $W = \frac{L}{\lambda}$.

Σύμφωνα με τα παραπάνω έχουμε:

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)} = \frac{\lambda/\mu}{\lambda(1-\rho)} = \frac{1/\mu}{1-\rho} \quad (16)$$

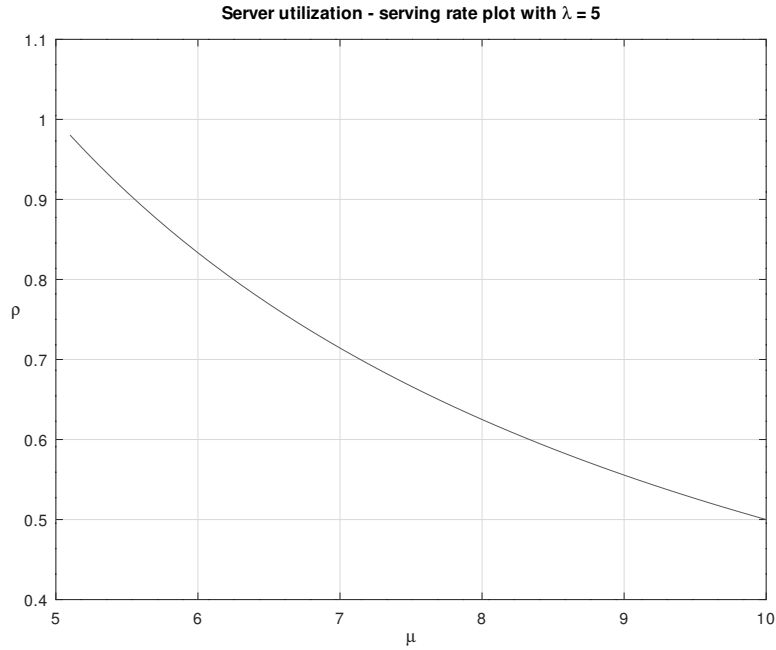
(γ) Η πιθανότητα το σύστημα μας να βρεθεί με 57 πελάτες είναι $p_{57} = (1-\rho)\rho^{57}$. Δωσμένου του γεγονότος ότι $\rho < 1$, η πιθανότητα αυτή είναι πολύ μικρή, κοντά στο 0. Δεν μπορούμε να απαντήσουμε με βεβαιότητα αν θα υπάρξει τέτοια στιγμή ή όχι.

(δ) Λόγω του γεγονότος ότι οι εξισώσεις ισορροπίας δεν αλλάζουν, δεν θα αλλάξει τίποτα στην ουρά μας αν αρχικά έχει 5 πελάτες αντί για 0. Όλες οι εξισώσεις θα παραμείνουν ίδιες. Αυτό συμβαίνει γιατί μελετάμε το σύστημα όταν είναι σε ισορροπία και όχι στην αρχική ασταθή κατάσταση.

Ανάλυση ουράς M/M/1 με Octave

(α) Όπως αναφέραμε και στην θεωρητική ανάλυση, οι αποδεκτοί ρυθμοί εξυπηρέτησης θα είναι αυτοί που θα εξασφαλίζουν $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$. Αφού $\lambda = 5$ πελάτες/min, θα πρέπει $\mu > 5$.

(β) Παρακάτω φαίνονται τα ζητούμενα διαγράμματα. Αυτά είναι τα Σχήματα 1, 2, 3 και 4.



Σχήμα 1: Βαθμός χρησιμοποίησης (utilization) προς ρυθμό εξυπηρέτησης (μ).

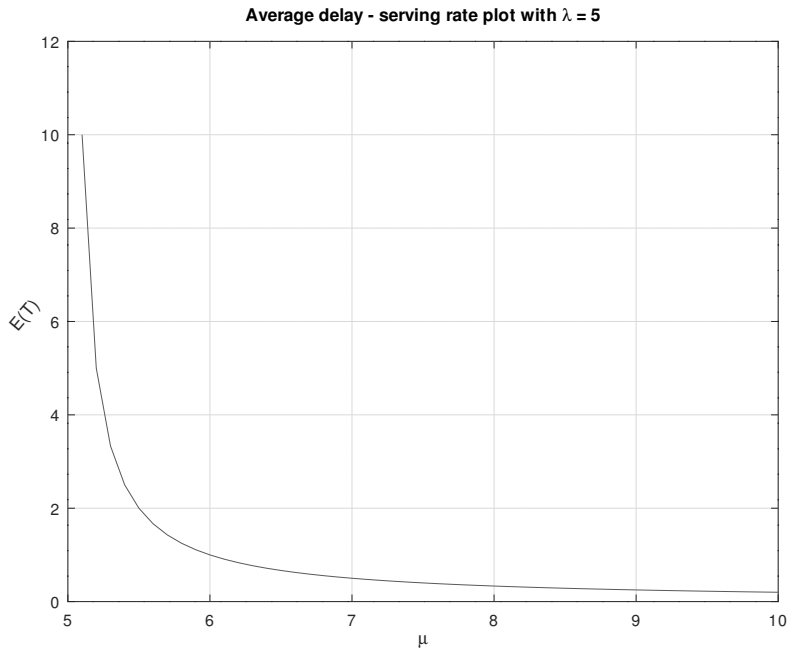
(γ) Όπως βλέπουμε όσο αυξάνεται ο μέσος ρυθμός εξυπηρέτησης, τόσο μειώνεται και ο μέσος χρόνος καθυστέρησης. Όμως, για τιμές μεγαλύτερες από $\mu = 7$, ο ρυθμός με τον οποίο μειώνεται ο μέσος χρόνος καθυστέρησης είναι πολύ μικρός. Άρα, μια τιμή γύρω στο $\mu = 7$ μας εξασφαλίζει πολύ καλά αποτελέσματα με χαμηλότερο κόστος.

(δ) Παρατηρούμε ότι το throughput είναι σταθερό και ίσο με λ . Αυτό εξηγείται, γιατί η ρυθμαπόδοση ορίζεται ως $\mu \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j$, δηλαδή ο ρυθμός που επεξεργάζεται κάθε κατάσταση το σύστημα. Από την παραπάνω σχέση έχουμε:

$$\mu \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j = \mu(1 - \pi_0) = \mu\rho = \lambda \quad (17)$$

Σύγκριση συστημάτων με δύο εξυπηρετητές

Μας δίνεται σύστημα αναμονής με μέσο ρυθμό αφίξεων $\lambda = 10$ πελάτες/min. Θα συγκρίνουμε μια ουρά M/M/2 με εκθετικούς εξυπηρετητές μέσου ρυθμού εξυπη-



Σχήμα 2: Μέσος χρόνος καθυστέρησης του συστήματος $E(T)$ προς ρυθμό εξυπηρέτησης (μ).

ρέτησης $\mu = 10$ πελάτες/min ανα εξυπηρετητή και δύο παράλληλες ουρές M/M/1 με εκθετικό χρόνο εξυπηρέτησης $\mu = 10$ πελάτες/min η καθυστέρηση.

Σαν μέτρο σύγκρισης θα χρησιμοποιήσουμε το μέσο χρόνο καθυστέρησης.

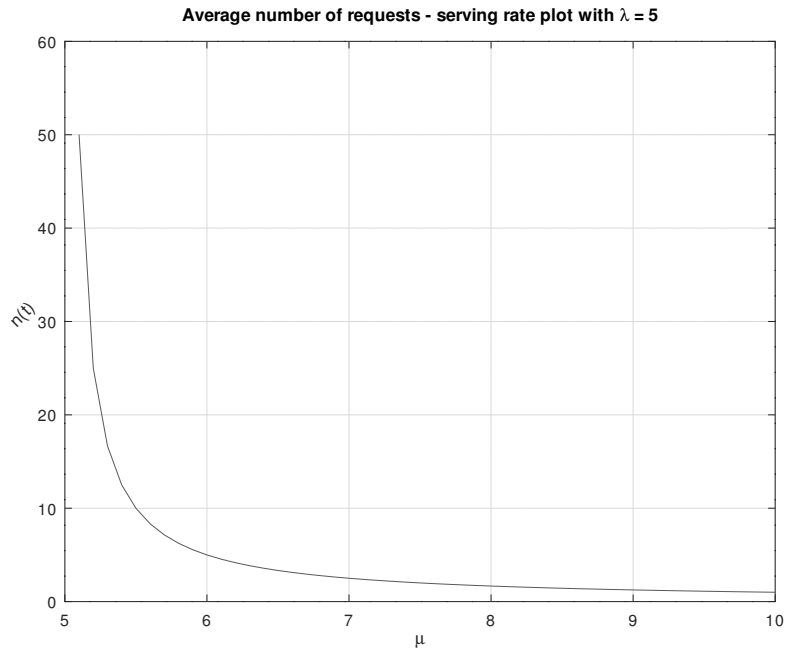
Για την ουρά M/M/2 με τα παραπάνω χαρακτηριστικά έχουμε ότι ο μέσος χρόνος καθυστέρησης είναι 0.133 min.

Για τις δύο παράλληλες ουρές, καθώς είναι ισοπίθανο και τυχαίο το σε ποιά ουρά θα πάει ο κάθε νέος πελάτης, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι κάθε σύστημα M/M/1 έχει μέσο ρυθμό αφίξεων κατανομή Poisson με $\lambda_i = 5$, $i = 1, 2$ πελάτες/min. Ο συνολικός ρυθμός αφίξεων παραμένει $\lambda = \sum_{i=1}^2 \lambda_i = 10$ πελάτες/min.

Ο μέσος ρυθμός χρόνος καθυστέρησης θα είναι ο μέσος όρος των δύο ουρών.

Σύμφωνα με τα παραπάνω καταλήγουμε ότι ο μέσος χρόνος καθυστέρησης για τις δύο M/M/1 ουρές είναι 0.2 min.

Σύμφωνα με τα στοιχεία αυτά θα επιλέγαμε την ουρά M/M/2, γιατί ο χρόνος α-

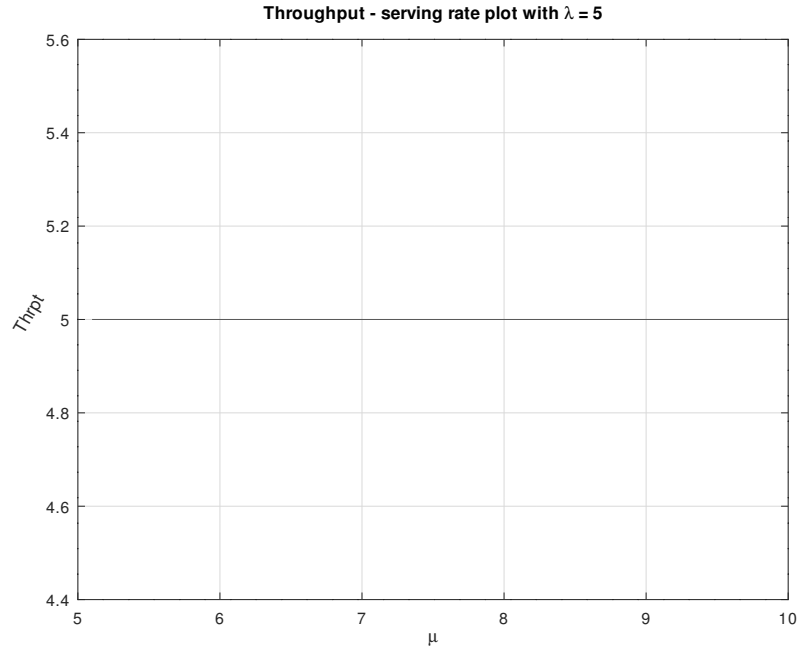


Σχήμα 3: Μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα προς ρυθμό εξυπηρέτησης (μ).

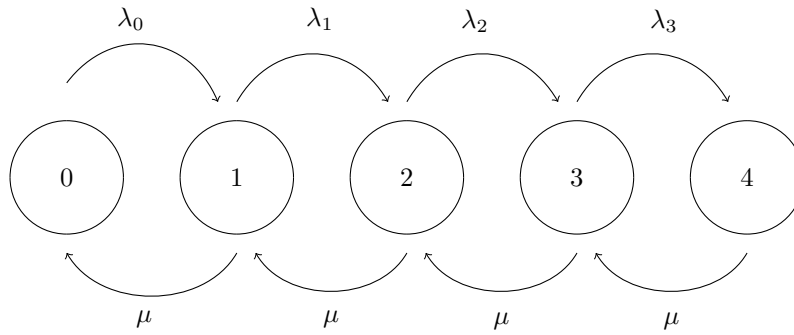
ναμονής είναι μικρότερος. Αυτό εξηγείται από το γεγονός ότι στην ουρά M/M/2, όταν υπάρχει πελάτης στην ουρά, θα εξυπηρετηθεί μόλις απελευθερωθεί κάποιος από τους εξυπηρετητές. Στην περίπτωση των M/M/1 ουρών, οι πελάτες κατανέμονται τυχαία, που σημαίνει ότι η μια ουρά είναι άδεια, αλλά στην άλλη περιμένουν παραπάνω από ένας πελάτες, γεγονός που αυξάνει την μέση καθυστέρηση.

Διαδικασία γεννήσεων θανάτων (birth-death process): εφαρμογή σε σύστημα M/M/1/K

(α) Για το σύστημα έχουμε ότι $\lambda_0 = \lambda$, $\lambda_1 = \frac{\lambda}{2}$, $\lambda_2 = \frac{\lambda}{3}$ και $\lambda_3 = \frac{\lambda}{4}$ (για $i \geq 4, \lambda_i = 0$), ενώ $\mu_i = \mu$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$. Άρα το σύστημα έχει 5 καταστάσεις. Το διάγραμμα ρυθμού μεταβάσεων φαίνεται παρακάτω:



Σχήμα 4: Ρυθμαπόδοση (Throughput) πελατών προς ρυθμό εξυπηρέτησης (μ).



Από τις εξισώσεις ισορροπίας έχουμε:

$$\begin{aligned} \lambda_0 p_0 &= \mu_1 p_1 \\ (\lambda_n + \mu_n) p_n &= \lambda_{n-1} p_{n-1} + \mu_{n+1} p_{n+1}, \quad n \geq 1 \end{aligned} \quad (18)$$

Από τις εξισώσεις 18 έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
p_1 &= \frac{\lambda_0 p_0}{\mu_1} \\
p_{n+1} &= \frac{(\lambda_n + \mu_n)p_n - \lambda_{n-1}p_{n-1}}{\mu_{n+1}}, \quad n \geq 1
\end{aligned} \tag{19}$$

Χρησιμοποιώντας αναδρομικά τον τύπο 19, καταλήγουμε στο παρακάτω αποτέλεσμα:

$$p_n = p_0 \prod_{i=1}^n \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}, \quad n \geq 1 \tag{20}$$

Θέλουμε να υπολογίσουμε τις εργοδικές ικανότητες από την εξίσωση 20. Αρχικά θα πρέπει να υπολογίσουμε το p_0 . Για να το κάνουμε αυτό θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι το άθροισμα όλων των πιθανοτήτων πρέπει να ισούται με 1. Άρα:

$$\begin{aligned}
p_0 &= \left(1 + \sum_{n=1}^4 \prod_{i=1}^n \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} \right)^{-1} \Rightarrow \\
p_0 &= \left(1 + \prod_{i=1}^1 \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} + \prod_{i=1}^2 \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} + \prod_{i=1}^3 \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} + \prod_{i=1}^4 \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} \right)^{-1} \Rightarrow \\
p_0 &= \left(1 + \frac{\lambda_0}{\mu_1} + \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} + \frac{\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2}{\mu_1 \mu_2 \mu_3} + \frac{\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} \right)^{-1}
\end{aligned} \tag{21}$$

Γνωρίζοντας ότι $\lambda = 5$ και $\mu = 10$, αρα $\lambda_0 = 5$, $\lambda_1 = \frac{5}{2}$, $\lambda_2 = \frac{5}{3}$, $\lambda_3 = \frac{5}{4}$ και $\mu_i = 10$, $i = 1, 2, 3$. Αρα απο την εξίσωση 21 και τα παραπάνω, έχουμε τελικά:

$$\begin{aligned}
p_0 &= \left(1 + \frac{5}{10} + \frac{5 \cdot \frac{5}{2}}{10^2} + \frac{5 \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{3}}{10^3} + \frac{5 \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{5}{4}}{10^4} \right)^{-1} \\
p_0 &= \left(1 + 0.5 + \frac{25}{200} + \frac{125}{6000} + \frac{625}{240000} \right)^{-1} \\
p_0 &= 0.607
\end{aligned} \tag{22}$$

Αφού βρήκαμε το p_0 , τώρα μπορούμε εύκολα να βρούμε τις υπόλοιπες πιθανότητες.

Έτσι, έχουμε:

$$\begin{aligned}
p_1 &= \frac{\lambda_0}{\mu_1} p_0 = 0.5 \cdot 0.61 = 0.303 \\
p_2 &= \frac{\lambda_1}{\mu_2} p_1 = \frac{5}{10} \cdot 0.305 = 0.076 \\
p_3 &= \frac{\lambda_2}{\mu_3} p_2 = \frac{5}{10} \cdot 0.076 = 0.0126 \\
p_4 &= \frac{\lambda_3}{\mu_4} p_3 = \frac{5}{10} \cdot 0.0126 = 0.0016
\end{aligned} \tag{23}$$

Η πιθανότητα απώλειας πελάτη είναι η πιθανότητα p_4 , άρα είναι 0.0016.

(β) i. Με την βοήθεια του Octave, έχουμε το παρακάτω πίνακα μεταβάσεων χρησιμοποιώντας την εντολή `ctmcbbd`:

$$\begin{pmatrix} -5 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & -12.5 & 2.5 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & -11.67 & 1.67 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & -11.25 & 1.25 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & -10 \end{pmatrix}$$

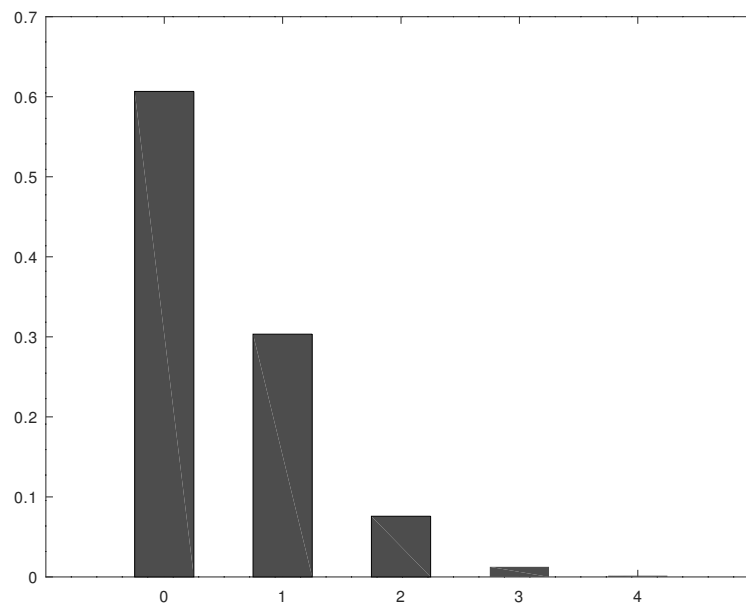
ii. Χρησιμοποιώντας την εντολή `ctmc`, έχουμε τις πιθανότητες:

$$\begin{aligned}
p_0 &= 0.6066351 \\
p_1 &= 0.3033175 \\
p_2 &= 0.0758294 \\
p_3 &= 0.0126382 \\
p_4 &= 0.0015798
\end{aligned} \tag{24}$$

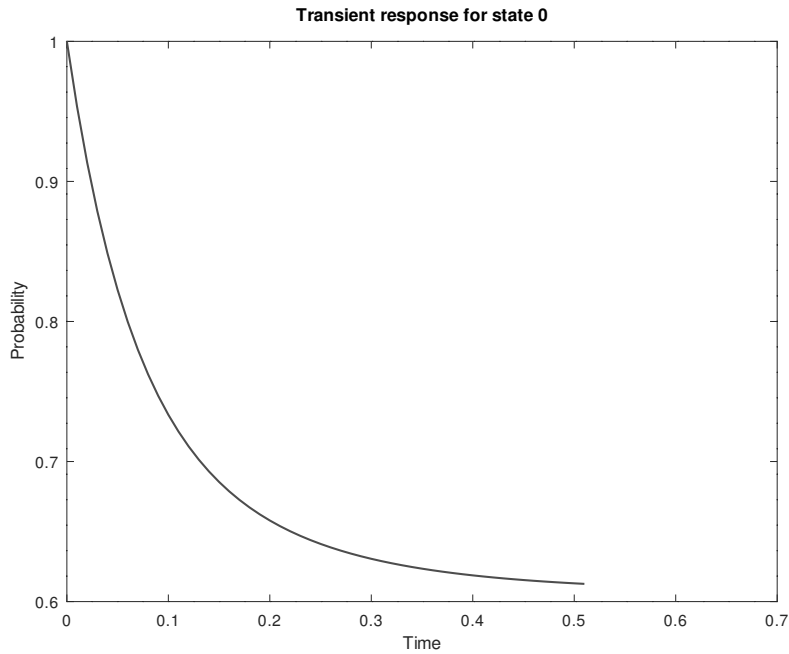
Όπως βλέπουμε, τα αποτελέσματα αυτά επιβεβαιώνουν τα θεωρητικά αποτελέσματα που βρήκαμε στο ερώτημα (α) (Τα αποτελέσματα στο ερώτημα (α) είχαν στρογγυλοποιηθεί για ευκολία των πράξεων). Στο σχήμα 5 φαίνεται και το bar chart των πιθανοτήτων για κάθε κατάσταση.

iii. Ο μέσος όρος των πελατών στο σύστημα βρίσκεται από την μέση τιμή των εργοδικών πιθανοτήτων, δηλαδή:

$$E(T) = \sum_{i=1}^4 i p_i = 0.5 \tag{25}$$



Σχήμα 5: Εργοδικές πιθανότητες συστήματος M/M/1/4.



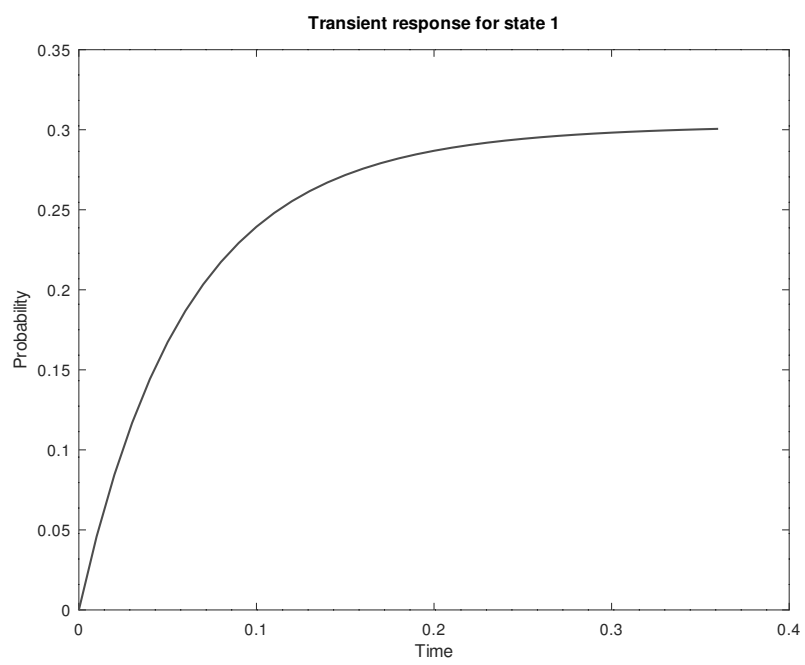
Σχήμα 6: Μεταβατική περίοδος για την κατάσταση 0.

iv. Όπως αναφέρθηκε ήδη, η πιθανότητα απόρριψης πελάτη blocking probability από το σύστημα είναι η πιθανότητα της κατάστασης 4, δηλαδή $p_4 = 0.0015798$.

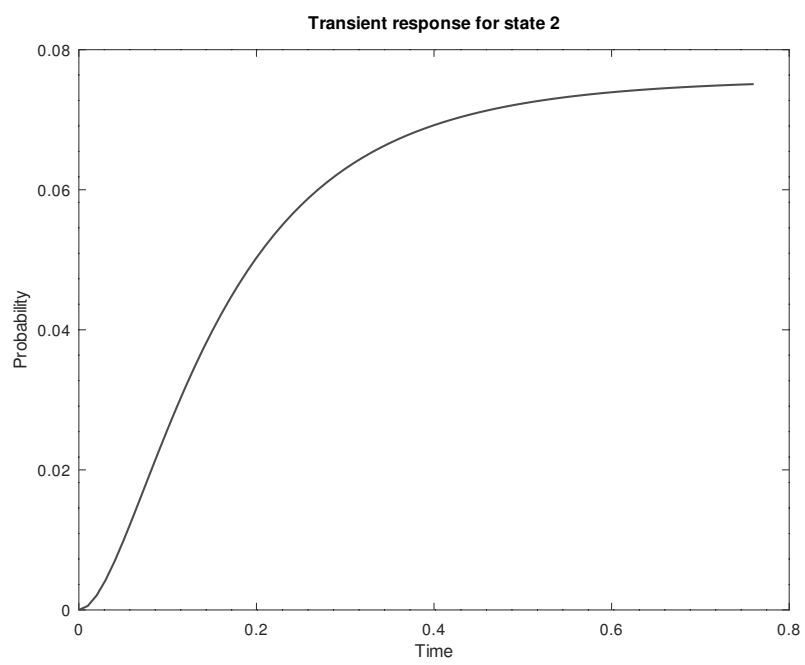
v. Γνωρίζουμε ότι το σύστημα ξεκινάει χωρίς πελάτες, αρα θα ξεκινήσει από την κατάσταση 0. Έτσι υπολογίζουμε τις μεταβατικές περιόδους για κάθε κατάσταση στα Σχήματα 6, 7, 8, 9 και 10:

vi. Σε αυτό το βήμα επαναλάβαμε το βήμα v. για διάφορες τιμές του μ . Έτσι για $\mu = 1$ έχουμε το σχήμα 11, για $\mu = 5$ έχουμε το σχήμα 12 και για $\mu = 20$ έχουμε το σχήμα 13.

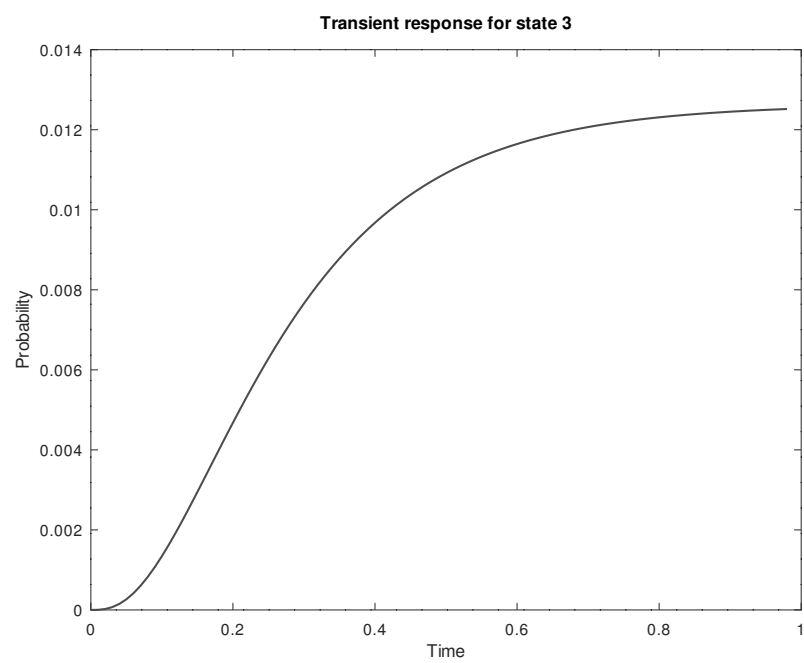
Όπως αναμέναμε, βλέπουμε ότι όσο το μ μικραίνει, η πιθανότητα των μικρότερων καταστάσεων στην σταθερή κατάσταση είναι μικρότερη, δηλαδή το σύστημα να έχει στην ουρά λίγους πελάτες και η πιθανότητα των μεγαλύτερων καταστάσεων (3 και 4) είναι αρκετά μεγάλη. Ακόμα για μικρό μ , η σταθερότητα σε όλες τις καταστάσεις έρχεται πολύ αργά σε σχέση με μεγάλο μ .



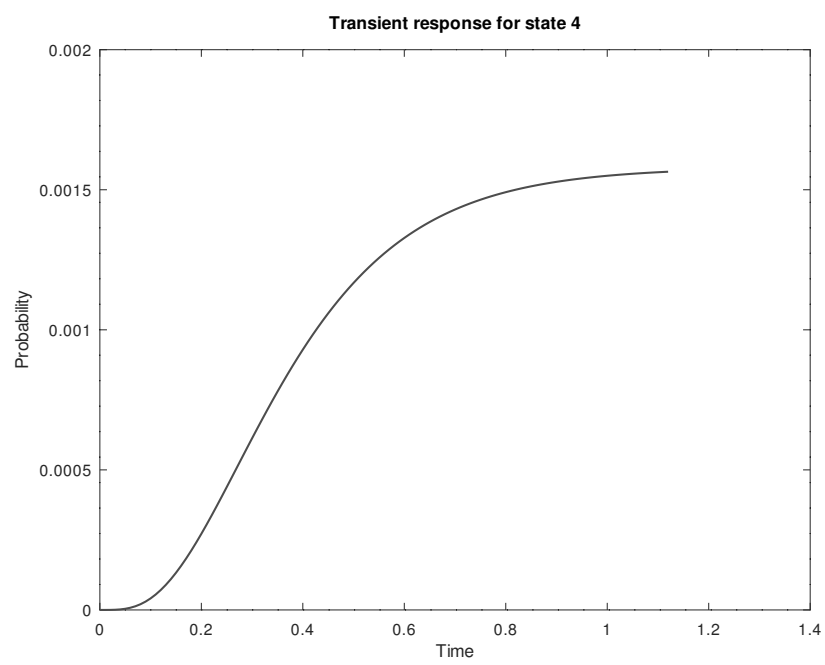
Σχήμα 7: Μεταβατική περίοδος για την κατάσταση 1.



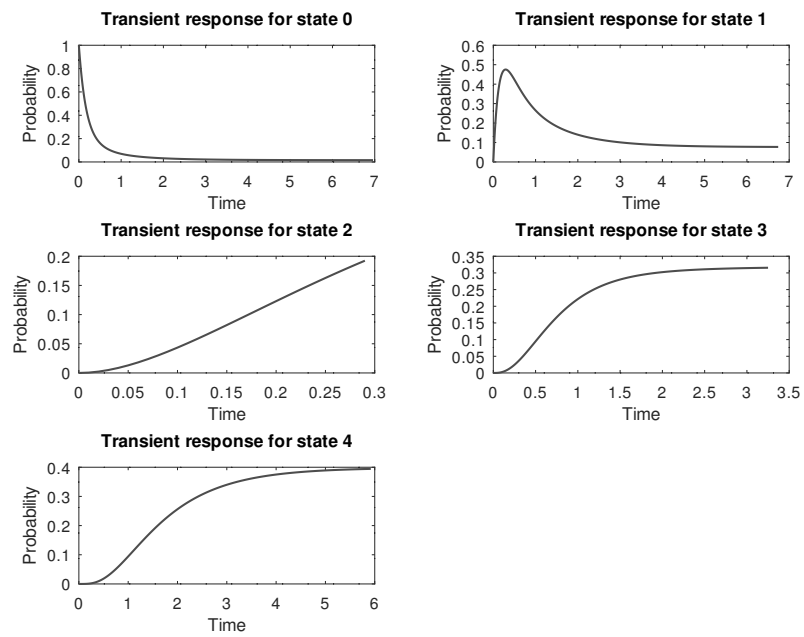
Σχήμα 8: Μεταβατική περίοδος για την κατάσταση 2.



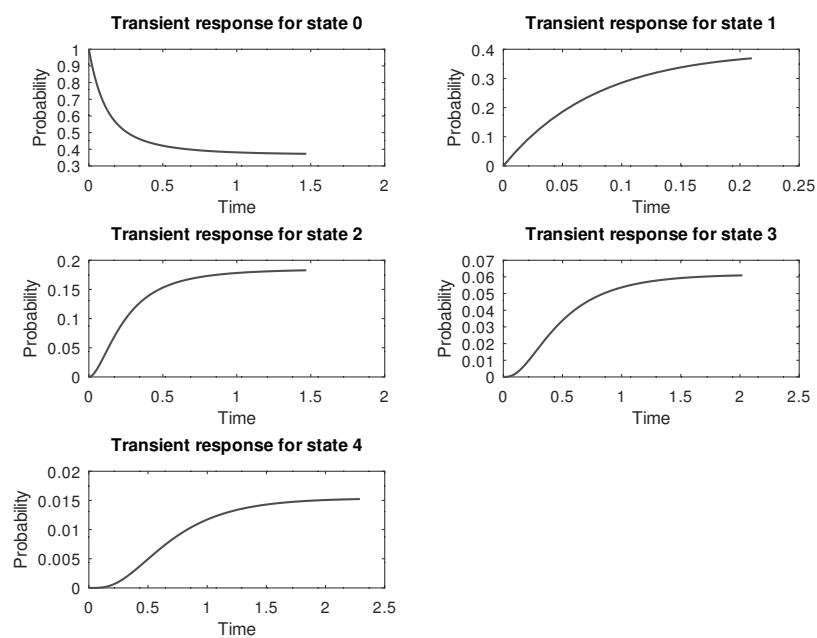
Σχήμα 9: Μεταβατική περίοδος για την κατάσταση 3.



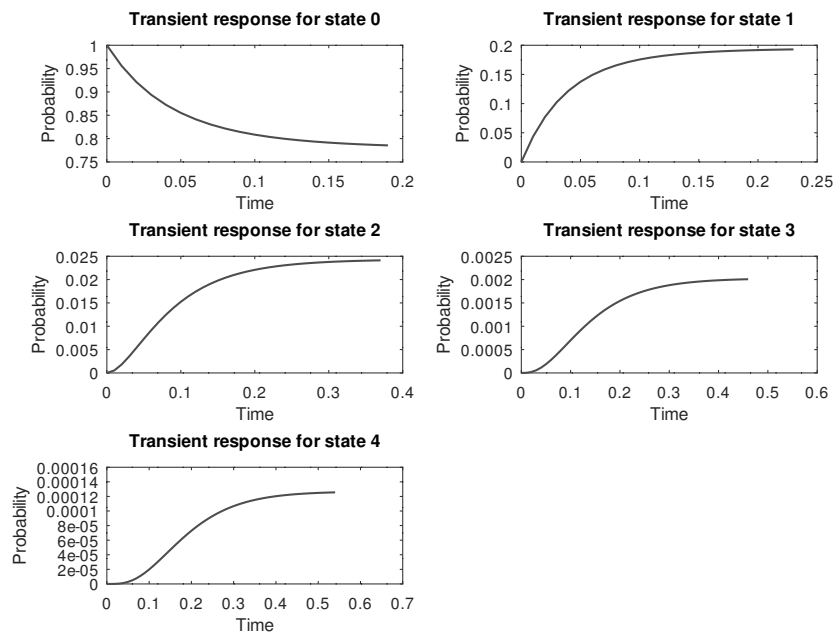
Σχήμα 10: Μεταβατική περίοδος για την κατάσταση 4.



Σχήμα 11: Μεταβατική περίοδος όλων των καταστάσεων για $\mu = 1$.



Σχήμα 12: Μεταβατική περίοδος όλων των καταστάσεων για $\mu = 5$.



Σχήμα 13: Μεταβατική περίοδος όλων των καταστάσεων για $\mu = 20$.

Παράρτημα: Κώδικας Octave

```
1 pkg load queueing;
2 pkg load statistics;
3
4
5 clc;
6 clear all;
7 close all;
8
9 % M/M/1 queue analysis
10
11 samples = 51;
12
13 lambda = 5 * ones(1, samples-1);
14 mu = linspace(5,10, samples);
15 mu = mu(2:end);
16
17 [U, R, Q, X, ~] = qsmm1(lambda, mu);
18
19 % Utilization to serving rate plot
20
21 figure(1);
22 plot(mu, U);
23 ylabel('\rho', 'Rotation', 0);
24 xlabel('\mu');
25 grid on;
26 title('Server utilization - serving rate plot with \lambda = 5');
27
28 % Average delay to serving rate plot
29 %  $E(T) = \frac{1}{\mu - \lambda}$ 
30
31 figure(2);
32 plot(mu, R);
33 ylabel('E(T)', 'Rotation', 50);
34 xlabel('\mu');
35 grid on;
36 title('Average delay - serving rate plot with \lambda = 5');
37
38 % Average number of requests to server serving rate plot
39
40 figure(3);
41 plot(mu, Q);
42 ylabel('n(t)', 'Rotation', 45);
43 xlabel('\mu');
44 grid on;
45 title('Average number of requests - serving rate plot with \lambda = 5');
46
47 % Throughput to server serving rate plot
48
49 figure(4);
50 plot(mu, X);
51 ylabel('Thrpt', 'Rotation', 60);
52 xlabel('\mu');
53 grid on;
54 title('Throughput - serving rate plot with \lambda = 5');
55
56 %% Comparing systems with two servers
57
58 % M/M/2
59 lambda = 10;
60 mu = 10;
61
62 [~, R, ~, ~, ~] = qsmmm(lambda, mu, 2);
63
64 disp(['The average delay for M/M/2 with mu = 10 is ', num2str(R)]);
65
```

```

66 % 2 M/M/1
67
68 lambdas = [5, 5];
69 mus = [10, 10];
70
71 [~, R, ~, ~, ~] = qsmm1(lambdas, mus);
72
73
74 disp(['The average delay for 2x M/M/1 with mu = 10 is ', num2str(mean(R))]);
75
76 %% system M/M/1/4
77 lambda = 5;
78 mu = 10;
79 states = [0,1,2,3,4]; % system with capacity 4 states
80 initial_state = [1,0,0,0,0];
81
82 % births and deaths
83 births_B = ones(1,4);
84 for i = 1:length(births_B)
85     births_B(i) = lambda/i;
86 endfor
87
88 deaths_D = mu * ones(1,4);
89
90 % step i.
91 % get the transition matrix of the birth-death process
92 transition_matrix = ctmcdb(births_B,deaths_D);
93
94 disp('The transition matrix is:');
95 disp(transition_matrix);
96
97 % step ii.
98 % get the ergodic probabilities of the system
99 P = ctmc(transition_matrix);
100
101 disp('The ergodic probabilities are:');
102 disp(P);
103
104 % plot the ergodic probabilities (bar for bar chart)
105 figure(5);
106 bar(states,P,"r",0.5);
107
108 % step iii
109 % average number of customers in the system
110 avg_customers = sum(states.*P);
111
112 disp('The average number of customers is:');
113 disp(avg_customers);
114
115 % step v
116 % Transient probabilities for all states
117 for i = 1:length(states)
118     Prob = 0;
119     index = 0;
120     TMax = 50
121     for T=0:0.01:50
122         index = index + 1;
123         Pi = ctmc(transition_matrix,T,initial_state);
124         Prob(index) = Pi(i);
125         if (abs(Pi(i) - P(i)) < 0.01 * P(i))
126             break;
127         endif
128     endfor
129
130     T = 0:0.01:T;
131     figure(5+i);
132     plot(T,Prob,"r","linewidth",1.3);
133     title(["Transient response for state ", num2str(i-1)])

```

```

134     xlabel("Time");
135     ylabel("Probability");
136 endfor
137
138 % step vi
139
140 % Transient probabilities for all states
141 j = 0;
142 for mu = [1, 5, 20]
143     j= j+1;
144     deaths_D = mu * ones(1,4);
145     transition_matrix = ctmcdbd(births_B,deaths_D);
146     P = ctmc(transition_matrix);
147     hf = figure(10+j);
148
149     for i = 1:length(states)
150         Prob = [];
151         index = 0;
152         for T=0:0.01:100
153             index = index + 1;
154             Pi = ctmc(transition_matrix,T,initial_state);
155             Prob(index) = Pi(i);
156             if (abs(Pi(i) - P(i)) < 0.01 * P(i))
157                 break;
158             endif
159         endfor
160
161         T = 0:0.01:T;
162         subplot(3,2,i);
163         plot(T,Prob,"r","linewidth",1.3);
164         title(["Transient response for state ", num2str(i-1)])
165         xlabel("Time");
166         ylabel("Probability");
167     endfor
168 endfor

```