Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию
Дальневосточный государственный университет

А.Г. КОЛОБОВ, Л.А. МОЛЧАНОВА

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Методические указания и задания для студентов
математических специальностей

В л а д и в о с т о к
Издательство Дальневосточного университета
2008

ББК 22.143
К61

Рецензент:
Т.В. Пак, к.ф.-м.н.; ИМКН ДВГУ

Колобов А.Г., Молчанова Л.А.
К61 **Ч**исленные методы линейной алгебры. Учебно-методическое пособие. - Владивосток: Изд-во Дальневост. ун-та, 2008. - 36 с.

Численные методы линейной алгебры содержат теоретический материал и задания для самостоятельного выполнения лабораторного практикума. Темы: "Методы решения систем линейных алгебраических уравнений "Вычисление обратных матриц и определителей "Вычисление собственных значений и собственных векторов матриц". Приводятся примеры использования этих методов и даются варианты заданий для группы студентов.

Для студентов математических специальностей.

$\text{К}\frac{1702030000}{180(03)-2008}$ ББК 22.143

Содержание

1 Численное решение систем линейных алгебраических уравнений

Пусть дана система n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными, записанная в матричной форме

$$A\overline{x} = \overline{b}, \tag{1}$$

где A - матрица коэффициентов при неизвестных системы (1), $\overline{b}$ – вектор- столбец ее свободных членов, $\overline{x}$ – столбец неизвестных (искомый вектор):

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdot & a \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & a_{nn} \end{bmatrix}, \ \overline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix}, \ \overline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Система (1) в развернутом виде может быть выписана так:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{2}$$

Пусть далее известно, что определитель матрицы A

$$detA = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \Delta \neq 0$$

Требуется найти решение этой системы, т.е. совокупность чисел $x_1, x_2, \cdots, x_n$, обращающих (1) в систему тождеств. В силу того, что $\Delta \neq 0$, по теореме о единственности решения системы линейных алгебраических уравнений такое решение существует и единственно.

Методы решения систем линейных алгебраических уравнений делятся на две большие группы: так называемые *точные методы* и *методы последовательных приближений* [2].

Точные методы характеризуются тем, что с их помощью принципиально возможно, проделав конечное число операций, получить точные значения неизвестных. При этом, конечно, предполагается, что коэффициенты и правые части системы известны точно, а все вычисления производятся без округлений. Чаще всего они осуществляются в два этапа. На первом этапе преобразуют систему к тому или иному простому виду. На втором этапе решают упрощенную систему и получают значения неизвестных.

Методы последовательных приближений (итерационные методы) характеризуются тем, что с самого начала задаются какими-то приближенными значениями неизвестных. Из этих приближенных значений тем или иным способом получают новые "улучшенные"приближенные значения. С новыми приближенными значениями поступают точно так же и т.д. При выполнении определенных условий можно придти, вообще говоря, после бесконечного числа шагов к точному решению.

1.1 Точные методы решения

Эти методы просты и универсальны, однако вследствие неизбежных округлений результаты являются приближенными, причем оценка погрешности корней в общем случае затруднительна. К ним относятся: метод исключения (варианты метода Гаусса), метод квадратного корня, метод Халецкого, метод отражений и другие.

1.1.1 Схема Гаусса с выбором главного элемента

Процесс решения системы линейных алгебраических уравнений по методу Гаусса с выбором главного элемента сводится к построению системы с треугольной матрицей, эквивалентной исходной системе.

Рассмотрим расширенную прямоугольную матрицу, состоящую из коэффициентов при неизвестных и свободных членов системы (1):

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j}\cdots & a_{1q} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j}\cdots & a_{2q} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pj}\cdots & a_{pq} & \cdots & a_{pn} & b_p \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj}\cdots & a_{nq} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix} \tag{3}$$

Выберем наибольший по модулю элемент a_{pq}, не принадлежащий столбцу свободных членов матрицы M. Этот элемент называется <u>главным элементом</u>. Строка матрицы M, содержащая главный элемент, называется <u>главной строкой</u>. Столбец матрицы M. содержащий главный элемент, называется <u>главным столбцом</u>. Далее, производя некоторые операции, построим матрицу $M^{(1)}$ с меньшим на единицу числом строк и столбцов. Матрица $M^{(1)}$ получатся преобразованием из M, при котором главная строка и главный столбец матрицы M исключается. Над матрицей $M^{(1)}$ повторяем те же операции, что и над матрицей M, после чего получаем матрицу $M^{(2)}$, и т.д. Таким образом, мы построим последовательность матриц

$$M, M^{(1)}, M^{(2)}, \cdots, M^{(n-1)}, \tag{4}$$

последняя из которых представляет собой двухэлементную матрицу - строку; ее также считаем главной строкой.

Для получения системы с треугольной матрицей, эквивалентной системе (1), объединяем все <u>главные</u> <u>строки</u> матриц последовательности (4), начиная с последней $M^{(n-1)}$.

Рассмотрим подробнее эту схему для системы четырех уравнений с четырьмя неизвестными.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_n &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_n &= b_3 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_n &= b_4 \end{aligned}$$

Вычисления удобно записать на расчетном бланке.

В таблице 1 показан процесс построения последовательности матриц (4). Главные элементы отмечены рамкой. В III столбце помещены значения m_i, равные отношению соответствующего элемента главного столбца к главному элементу с противоположным знаком. В строках, отмеченных звездочкой, выписываем элементы соответствующих главных строк,

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
M	N	m_i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	b_i
	1	$m_1 = -\dfrac{a_{13}}{a_{23}}$	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	b_1
	2		a_{21}	a_{22}	$\boxed{a_{23}}$	a_{24}	b_2
$M^{(0)}$	3	$m_3 = -\dfrac{a_{33}}{a_{23}}$	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	b_3
	4	$m_4 = -\dfrac{a_{43}}{a_{23}}$	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	b_4
	2*		$\alpha_{21} = \dfrac{a_{21}}{a_{23}}$	$\alpha_{22} = \dfrac{a_{22}}{a_{23}}$	$\alpha_{23} = 1$	$\alpha_{24} = \dfrac{a_{24}}{a_{23}}$	$\beta_2 = \dfrac{b_2}{a_{23}}$
	1	$m_1^{(1)} = -\dfrac{a_{12}^{(1)}}{a_{32}^{(1)}}$	$a_{11}^{(1)} = a_{11} + a_{21}m_1$	$a_{12}^{(1)} = a_{12} + a_{22}m_1$	0	$a_{14}^{(1)} = a_{14} + a_{24}m_1$	$b_1^{(1)} = b_1 + b_2m_1$
$M^{(1)}$	3		$a_{31}^{(1)} = a_{31} + a_{21}m_3$	$\boxed{a_{32}^{(1)} = a_{32} + a_{22}m_3}$	0	$a_{34}^{(1)} = a_{34} + a_{24}m_3$	$b_3^{(1)} = b_3 + b_2m_3$
	4	$m_4^{(1)} = -\dfrac{a_{42}^{(1)}}{a_{32}^{(1)}}$	$a_{41}^{(1)} = a_{41} + a_{21}m_4$	$a_{42}^{(1)} = a_{42} + a_{22}m_4$	0	$a_{44}^{(1)} = a_{44} + a_{24}m_4$	$b_4^{(1)} = b_4 + b_2m_4$
	3*		$\alpha_{31} = \dfrac{a_{31}^{(1)}}{a_{32}^{(1)}}$	$\alpha_{32} = 1$	0	$\alpha_{34} = \dfrac{a_{34}^{(1)}}{a_{32}^{(1)}}$	$\beta_3 = \dfrac{b_3^{(1)}}{a_{32}^{(1)}}$
	1	$m_1^{(2)} = -\dfrac{a_{11}^{(2)}}{a_{41}^{(2)}}$	$a_{11}^{(2)} = a_{11}^{(1)} + a_{31}^{(1)}m_1^{(1)}$	0	0	$a_{14}^{(2)} = a_{14}^{(1)} + a_{34}^{(1)}m_1^{(1)}$	$b_1^{(2)} = b_1^{(1)} + b_3^{(1)}m_1^{(1)}$
$M^{(2)}$	4		$\boxed{a_{41}^{(2)} = a_{41}^{(1)} + a_{31}^{(1)}m_4^{(1)}}$	0	0	$a_{44}^{(2)} = a_{44}^{(1)} + a_{34}^{(1)}m_4^{(1)}$	$b_4^{(2)} = b_4^{(1)} + b_3^{(1)}m_4^{(1)}$
	4*		$\alpha_{41} = 1$	0	0	$\alpha_{44} = \dfrac{a_{44}^{(2)}}{a_{41}^{(2)}}$	$\beta_4 = \dfrac{b_4^{(2)}}{a_{41}^{(2)}}$
$M^{(3)}$	1		0	0	0	$a_{14}^{(3)} = a_{14}^{(2)} + a_{44}^{(2)}m_1^{(2)}$	$b_4^{(3)} = b_1^{(2)} + b_4^{(2)}m_1^{(2)}$
	1*		0	0	0	1	$\beta_4 = \dfrac{b_4^{(3)}}{a_{14}^{(3)}} = x_4$
			1				$x_1 = \beta_4 - \alpha_{44}x_4$
				1			$x_2 = \beta_3 - \alpha_{34}x_4 - \alpha_{31}x_1$
					1		$x_3 = \beta_2 - \alpha_{24}x_4 - \alpha_{22}x_2 - \alpha_{21}x_1$

поделенных на их главные элементы. Объединив уравнения, отмеченные звездочкой, мы получим систему

$$
\begin{matrix} (1^*) \\ (4^*) \\ (3^*) \\ (2^*) \end{matrix}
\begin{cases}
x_4 = \beta_4 \\
x_1 + \alpha_{44}x_4 = \beta_1 \\
\alpha_{31}x_1 + x_2 + \alpha_{34}x_4 = \beta_3 \\
\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + +x_3 + \alpha_{24}x_4 = \beta_2
\end{cases}
$$

с треугольной матрицей, эквивалентную исходной системе. Из этой системы последовательно находим значения компонент искомого вектора $\overline{x}$ по формулам

$$
\begin{array}{rcc}
x_4 & = & \beta_4 \\
x_1 & = & \beta_1 - \alpha_{44}x_4 \\
x_2 & = & \beta_3 - \alpha_{31}x_1 - \alpha_{34}x_4 \\
x_3 & = & \beta_2 - \alpha_{21}x_1 - \alpha_{22}x_2 - \alpha_{24}x_4
\end{array}
$$

Эту часть процесса отражают последние четыре строки таблицы 1.

Сам процесс исключения неизвестных называют прямым ходом, а решение системы с треугольной матрицей - обратным ходом.

Пример. Решить систему линейных алгебраических уравнений методом исключения по схеме Гаусса с выбором главного элемента.

$$
A\overline{x} = \overline{b},\ \text{где } A = \begin{bmatrix} 2,1 & -4,5 & -2,0 \\ 3,0 & 2,5 & 4,3 \\ -6,0 & 3,5 & 2,5 \end{bmatrix};\ b = \begin{bmatrix} 19,07 \\ 3,21 \\ -18,25 \end{bmatrix}
$$

Расчетный бланк решения.

M	N	m	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	b_i
$M^{(0)}$	1	m_1=0,35	2,1	-4,5	-2,0	19,07
	2	m_2=0,5	3,0	2,5	4,3	3,21
	3		$\boxed{-6,0}$	3,5	2,5	-18,25
	3*		1	-0,58333	-0,41667	3,04167
$M^{(1)}$	1	$m_1^{(1)}$=0,20270	0	-3,275	-1,125	12,6825
	2		0	4,25	$\boxed{5,55}$	-5,915
	2*		0	0,76576	1	-1,06576
$M^{(2)}$	1		0	-2,41353	0	11,48353
	1*		0	1	0	x_2=-4,75798 x_3=2,7771 x_1=1,34025

Решением системы является вектор-столбец

$$
\bar{x} = \begin{bmatrix} 1,34025 \\ -4,75798 \\ 2,5771 \end{bmatrix}
$$

1.1.2 Метод единственного деления.

Выразим следующую систему в форме расширенной матрицы, найдем эквивалентную ей верхнюю треугольную систему линейных уравнений и ее решение.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 &= 13 \\ 2x_1 + 0x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 28 \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 &= 20 \\ -3x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 6 \end{aligned}$$

Расширенная матрица имеет вид

$$\begin{array}{r} \text{гл. эл.} \rightarrow \\ m_{21} = 2 \\ m_{31} = 4 \\ m_{41} = -3 \end{array} \left[\begin{array}{rrrr|r} \underline{1} & 2 & 1 & 4 & 13 \\ 2 & 0 & 4 & 3 & 28 \\ 4 & 2 & 2 & 1 & 20 \\ -3 & 1 & 3 & 2 & 6 \end{array}\right]$$

Первая строка используется, чтобы исключить элементы под диагональю в первом столбце. Мы обращаемся к первой строке, как к главной, и называем элемент a_{11} главным. Значение m_{k1} является множителем строки 1, которую вычитаем из k строк, $k = 2, 3, 4$. Результатом первого исключения будет

$$\begin{array}{r} \\ \text{гл. эл.} \rightarrow \\ m_{32} = 1,5 \\ m_{42} = -1,75 \end{array} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & 4 & 13 \\ 0 & \underline{-4} & 2 & -5 & 2 \\ 0 & -6 & -2 & -15 & -32 \\ 0 & 7 & 6 & 14 & 45 \end{array}\right]$$

Вторая строка используется, чтобы исключить элементы под диагональю во втором столбце.Эта строка является главной, и значение m_{k1} является множителем строки 2, которую вычитаем из k строк, $k = 3, 4$. Результатом исключения будет

$$\begin{array}{r} \\ \\ \text{гл. эл.} \rightarrow \\ m_{43} = -1,9 \end{array} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & 4 & 13 \\ 0 & -4 & 2 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & \underline{-5} & -7,5 & -35 \\ 0 & 0 & 9,5 & 5,25 & 48.5 \end{array}\right]$$

Наконец, умножаем m_{43}=-1,9 на третью строку, вычитаем из четвертой строки и в результате получаем верхнюю треугольную систему линейных уравнений

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & 4 & 13 \\ 0 & -4 & 2 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & -7,5 & -35 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & -18 \end{array}\right] \tag{5}$$

Для решения системы линейных алгебраических уравнений (5) воспользуемся алгоритмом обратной подстановки и получим

$$x_4 = 2, \quad x_3 = 4, \quad x_2 = -1, \quad x_1 = 3.$$

Если a_{kk} =0, то строку k нельзя использовать для исключения элементов столбца k и строку k следует заменить такой же строкой под диагональю, чтобы получить не равный нулю главный элемент. Если этого сделать нельзя, значит, матрица, коэффициентов системы линейных уравнений является вырожденной и система не имеет единственного решения.

1.1.3 Метод оптимального исключения

Пусть дана система уравнений $A\bar{x} = \bar{b}$. Обозначив b_i через a_{in+1}, преобразуем эту систему к эквивалентной системе более простого вида. Допустим, что $a_{11} \neq 0$. Разделим все коэффициенты первого уравнения системы на a_{11}, который назовем ведущим элементом первого шага, тогда

$$x_1 + a_{12}^{(1)} \cdot x_2 + ... + a_{1n}^{(1)} \cdot x_n = a_{1n+1}^{(1)}$$

Здесь $a_{1j}^{(1)} = a_{1j}/a_{11},\ j = 2, 3, \cdots, n+1$.

Предположим, что после преобразования первых k $(k \geq 1)$ уравнений система приведена к эквивалентной системе

$$\begin{cases} x_1 + \cdots\cdots\cdots\cdots + a_{1k+1}^{(k)} x_{k+1} + \cdots + a_{1n}^{(k)} x_n & = & a_{1n+1}^{(k)} \\ x_2 + \cdots\cdots\cdots\cdots + a_{2k+1}^{(k)} x_{k+1} + \cdots + a_{2n}^{(k)} x_n & = & a_{2n+1}^{(k)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & \cdots \\ x_k + a_{kk+1}^{(k)} x_{k+1} + \cdots + a_{kn}^{(k)} x_n & = & a_{kn+1}^{(k)} \\ a_{k+11} x_1 + a_{k+12} x_2 + \cdots + a_{k+1n+1} x_k + \cdots + a_{k+1n} x_n & = & a_{k+1n+1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & \cdots \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \cdots + a_{nk+1} x_k + \cdots + a_{nn} x_n & = & a_{nn+1} \end{cases}$$

Исключим неизвестные $x_1, x_2, \cdots, x_k$ из $(k+1)$ уравнения посредством вычитания из него первых k уравнений, умноженных соответственно на числа $a_{k+11}, a_{k+12}, \cdots, a_{k+1k}$, и разделив вновь полученное уравнение на коэффициенты при x_{k+1}. Теперь $(k+1)$ уравнение примет вид:

$$x_{k+1} + a_{k+1k+2}^{(k+1)} \cdot x_{k+2} + \cdots + a_{k+1n}^{(k+1)} \cdot x_n = a_{k+1n+1}^{(k+1)}$$

Исключая с помощью этого уравнения неизвестное x_{k+1} из первых k уравнений (3), получаем опять систему вида (3), но с заменой индекса k на $k+1$, причем

$$a_{i1}^{(1)} = \frac{a_{1i}}{a_{11}},\ i = 2, 3, ..., n+1.$$

$$a_{k+1p}^{(k+1)} = \frac{a_{k+1p} - \sum\limits_{r=1}^{k} a_{rp}^{(k)} a_{k+1r}}{a_{k+1k+1} - \sum\limits_{r=1}^{k} a_{rk+1}^{(k)} a_{k+1r}};$$

$$a_{ip}^{(k+1)} = a_{ip}^{(k)} - a_{k+1p}^{(k+1)} a_{ik+1}^{(k)},\ i = 1, 2, \cdots, k;$$

$$p = k+2, k+3, \cdots, n+1; \quad k = 0, 1, \cdots, n-1.$$

После преобразования всех уравнений находим решение исходной системы $x_i = a_{in+1}^{(n)}, i = 1, 2, \cdots, n$.

Указанная схема оптимального исключения работает в случае неравенства нулю ведущих элементов. Наилучшим вариантом методом оптимального исключения является вариант с выбором максимального по модулю элемента в строке. В этом случае структура исключения сохраняется, меняется лишь порядок исключения неизвестных. Теперь в качестве ведущего элемента будем брать максимальный по модулю элемент того уравнения, который получается из $(k+1)$-го уравнения исходной системы после исключения первых k шагов. Ведущим элементом первого шага будет максимальный по модулю элемент первого уравнения системы (3). При проведении расчетов удобно пользоваться следующей вычислительной схемой:

Матрица k-го шага

$1\ 0 \dots 0$	$a^{(k)}_{1k+1}$	$a^{(k)}_{1k+2} \dots\dots a^{(k)}_{1n+1}$
$0\ 1 \cdots 0$	$a^{(k)}_{2k+1}$	$a^{(k)}_{2k+2} \dots\dots a^{(k)}_{2n+1}$
$\dots\ \dots\ \dots$	$\dots$	$\dots\ \dots\ \dots$
$0\ 0 \dots 1$	$a^{(k)}_{kk+1}$	$a^{(k)}_{kk+2} \dots\dots a^{(k)}_{kn+1}$
$a_{k+11}a_{k+12} \dots a_{k+1k}$	a_{k+1k+1}	$a_{k+1k+2} \dots\dots a_{k+1n+1}$
$a_{k+21}a_{k+22} \cdots a_{k+2k}$	a_{k+2k+1}	$a_{k+2k+2} \dots\dots a_{k+2n+1}$
$\dots\ \dots\ \dots$	$\dots$	$\dots\ \dots\ \dots$
$a_{n1}a_{n2} \dots a_{nk}$	a_{nk+1}	$a_{nk+2} \dots\dots a_{nn+1}$

Матрица $(k+1)$-го шага после преобразования:

$1\ 0 \dots 0$	0	$a^{(k+1)}_{ip} = a^{(k)}_{ip} + a^{k+1)}_{k+1p} a_{ik+1}$
$0\ 1 \dots 0$	0	$i = 1, 2, \cdots, k$
$\dots\ \dots\ \dots$	$\dots$	$\dots\ \dots\ \dots$
$0\ 0 \dots 1$	0	$p = k+2, \dots, n+1$
$0\ 0 \dots 0$	1	$a^{(k+1)}_{k+1p} = \dfrac{a_{k+1p} - \sum\limits_{r=1}^{k} a^{(k)}_{rp} a_{k+1r}}{a_{k+1k+1} - \sum\limits_{r=1}^{k} a^{(k)}_{rk+1} a_{k+1r}}$
$a_{k+21}\ a_{k+22}\ \dots\ a_{k+2k}$	a_{k+2k+1}	$a_{k+2k+2} \dots\dots a_{k+2n+1}$
$\dots\ \dots\ \dots$	$\dots$	$\dots\ \dots\ \dots$
$a_{n1}\ a_{n2}\ \dots\ a_{nk}$	a_{nk+1}	$a_{nk+2} \dots\dots a_{nn+1}$

Пример. Решить методом оптимального исключения систему

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ x1 + 6x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 8 \end{cases}$$

Вычислительная схема

k	$a^{(k)}_{i1}$	$a^{(k)}_{i2}$	$a^{(k)}_{i3}$	$a^{(k)}_{i4}$	k	$a^{(k)}_{i1}$	$a^{(k)}_{i2}$	$a^{(k)}_{i3}$	$a^{(k)}_{i4}$
	5	2	3	3		1	2/5	3/5	3/5
0	1	6	1	5	1	1	6	1	5
	3	-4	-2	8		3	-4	-2	8
k	$a^{(k)}_{i1}$	$a^{(k)}_{i2}$	$a^{(k)}_{i3}$	$a^{(k)}_{i4}$	k	$a^{(k)}_{i1}$	$a^{(k)}_{i2}$	$a^{(k)}_{i3}$	$a^{(k)}_{i4}$
	1	0	4/7	2/7		1	0	0	2
2	0	1	1/14	11/14	3	0	1	0	1
	3	-4	-2	8		0	0	1	-3

Ответ: $x_1 = 2,\ x_2 = 1,\ x_3 = -3.$

1.1.4 Метод квадратного корня

Этот метод используется для решения систем, у которых матрица A симметрична. В этом случае матрицу A можно разложить в произведение двух транспонированных друг другу треугольных матриц

$$A = S'S,$$

$$S = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1n} \\ 0 & s_{22} & \cdots & s_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ldots & \\ 0 & 0 & \ldots & s_{nn} \end{bmatrix}.$$

Формулы для определения s_{ij}:

$$s_{11} = \sqrt{a_{11}} \quad , s_{1j} = \frac{a_{1j}}{s_{11}}, \quad (j > 1),$$

$$s_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} s_{ki}^2} \quad (i > 1), \quad s_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum\limits_{k=1}^{i-1} s_{ki}s_{kj}}{s_{ii}} \quad (j > i),$$

$$s_{ij} = 0 \quad (i > j).$$

После того как матрица S найдена, решают систему

$$S'y = b,$$

а затем находят неизвестные $x_1, x_2, ..., x_n$ из системы

$$Sx = y$$

Так как обе системы имеют треугольную форму,то они легко решаются.

$$y_1 = \frac{b_1}{s_{11}}, \quad y_i = \frac{b_i - \sum\limits_{k=1}^{i-1} s_{ki}y_k}{s_{ii}}, \quad (i > 1).$$

$$x_n = \frac{y_n}{s_{nn}}, \quad x_i = \frac{y_i - \sum\limits_{k=i+1}^{n} s_{ik}x_k}{s_{ii}}, \quad (i < n).$$

При практическом применении метода последовательно *прямым ходом* вычисляются коэффициенты s_{ij} и y_i $(i = 1, 2, ..., n)$, а затем *обратным ходом* находятся неизвестные x_i $(i = n, n-1, ..., 1)$.

Пример. Методом квадратного корня решить систему уравнений

$$\begin{array}{rrrrrl} x_1 & +3x_2 & -2x_3 & & -2x_5 & = 0,5 \\ 3x_1 & +4x_2 & -5x_3 & +x_4 & -3x_5 & = 5,4 \\ -2x_1 & -5x_2 & +3x_3 & -2x_4 & +2x_5 & = 5,0 \\ & x_2 & -2x_3 & +5x_4 & +3x_5 & = 7,5 \\ -2x_1 & -3x_2 & +2x_3 & +3x_4 & +4x_5 & = 3,3 \end{array}$$

Расчетный бланк решения.

a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	a_{i5}	b_i
1	3	-2	0	-2	0,5
3	4	-5	1	-3	5,4
-2	-5	3	-2	2	5,0
0	1	-2	5	3	7,5
-2	-3	2	3	4	3,3
s_{i1}	s_{i2}	s_{i3}	s_{i4}	s_{i5}	y_i
1	3	-2	0	-2	0,5
	2,2361i	-0,4472i	-0,4472i	-1,3416i	-1,7471i
		0,8944i	2,0125i	1,5653i	-7,5803i
			3,0414i	2,2194	-2,2928
				0,8221i	0,1643i
-6,0978	-2,2016	-6,8011	-8,8996	0,1998	x_i

1.1.5 Схема Халецкого

Дана система $A\bar{x} = \bar{b}$, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} a_{1n+1} \\ \dots \\ a_{nn+1} \end{pmatrix}$$

Представляем матрицу A в виде произведения двух матриц B и C, т.е. $A = BC$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Элементы b_{ij}, c_{ij} определяются по формуле:

$$\begin{cases} b_{i1} = a_{i1}, & c_{1j} = \dfrac{a_{1j}}{b_{11}}, \\ b_{ij} = a_{ij} - \sum\limits_{k=1}^{j-1} b_{ik}c_{kj}, & c_{ij} = \dfrac{1}{b_{ii}}(a_{ij} - \sum\limits_{k=1}^{i-1} b_{ik}c_{kj}), \\ (i \geq j > 1), & (1 < i < j). \end{cases}$$

Вектор решения $\bar{x}$ может быть найден из последовательного решения уравнений

$$B\bar{y} = \bar{b}, \qquad C\bar{x} = \bar{y}.$$

Так как B и C матрицы треугольные, то

$$y_1 = \frac{a_{1n+1}}{b_{11}}; \quad y_i = \left(a_{in+1} - \sum_{k=1}^{i-1} b_{ik}y_k\right)/b_{ii}, \quad (i > 1),$$

и

$$x_n = y_n; \quad x_i = y_i - \sum_{k=i+1}^{n} c_{ik}x_k, \quad (i < n).$$

Пример. Методом Халецкого решить систему уравнений

$$\begin{array}{rrrrcr} 3x_1 & +x_2 & -x_3 & +2x_4 & = & 6 \\ -5x_1 & +x_2 & +3x_3 & -x_4 & = & -12 \\ 2x_1 & & +x_3 & -x_4 & = & 1,0 \\ x_1 & -5x_2 & +3x_3 & -3x_4 & = & 3 \end{array}$$

Расчетный вид бланка и схема решения системы.

x_1	x_2	x_3	x_4		x_1	x_2	x_3	x_4	
a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	3	1	-1	2	6
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	-5	1	3	-4	-12
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}	2	0	1	-1	1
a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}	1	-5	3	-3	3
$b_{11}\|1$	c_{12}	c_{13}	c_{14}	c_{15}	$3\|1$	$1/3$	$-1/3$	$2/6$	2
b_{21}	$b_{22}\|1$	c_{23}	c_{24}	c_{25}	-5	$8/3$ $\|1$	$0,5$	$-0,25$	$-0,75$
b_{31}	b_{32}	$b_{33}\|1$	c_{34}	c_{35}	2	$-2/3$	2 $\|1$	$-1,25$	$-1,75$
b_{41}	$b_{42}\|1$	b_{43}	$b_{44}\|1$	c_{45}	1	$-16/3$	6	$2,5$ $\|1$	3
				x_1					1
				x_2					-1
				x_3					2
				x_4					3

Ответ: $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 2, x_4 = 3$.

1.1.6 Метод отражений. Вариант 1

Метод отражений решения системы уравнений $Ax = f$ состоит в выполнении $n-1$ шагов (n - порядок матрицы), в результате чего матрица A системы приводится к верхней треугольной форме, и последующем решении системы с верхней треугольной матрицей.

Пусть в результате выполнения $k-1$ шагов матрица A привелась к виду

$$A_{k-1} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1k-1}^{(1)} & a_{1k}^{(1)} & a_{1k+1}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \dots & a_{2k-1}^{(2)} & a_{2k}^{(2)} & a_{2k+1}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & a_{k-1k-1}^{(k-1)} & a_{k-1k}^{(k-1)} & a_{k-1k+1}^{(k-1)} & \dots & a_{k-1n}^{(k-1)} \\ & & & & a_{kk}^{(k-1)} & a_{kk+1}^{(k-1)} & \dots & a_{kn}^{(k-1)} \\ & 0 & & & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & & a_{nk}^{(k-1)} & a_{nk+1}^{(k-1)} & \dots & a_{nn}^{(k-1)} \end{bmatrix}$$

Опишем k-й шаг процесса. Цель k-го шага - обнулить все поддиагональные элементы k-го столбца. Для этого определим вектор нормали $p^{(k)} = (0, ..., 0, p_k^{(k)}, p_{k+1}^{(k)}, ..., p_n^{(k)})^T$, положив

$$p_k^{(k)} = a_{kk}^{(k-1)} + \sigma_k \sqrt{\sum_{l=k}^{n} (a_{lk}^{(k-1)})^2}, \quad \sigma_k = \begin{cases} 1, a_{kk}^{(k-1)} \geq 0, \\ -1, a_{kk}^{(k-1)} < 0, \end{cases} \tag{6}$$

$$p_l^{(k)} = a_{lk}^{(k-1)}, l = k+1, ..., n. \tag{7}$$

Определим теперь матрицу отражения P_k с элементами $p_{ij}^{(k)} = \sigma_{ij} - 2p_i^{(k)} p_j^{(k)} / \sum\limits_{l=k}^{n} (p_l^{(k)})^2$, где σ_{ij} — символ Кронеккера.

Легко проверить, что матрица $A_k = P_k A_{k-1}$ имеет вид

$$A_{k-1} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \ldots & a_{1k-1}^{(1)} & a_{1k}^{(1)} & a_{1k+1}^{(1)} & \ldots & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \ldots & a_{2k-1}^{(2)} & a_{2k}^{(2)} & a_{2k+1}^{(2)} & \ldots & a_{2n}^{(2)} \\ & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & & a_{k-1k-1}^{(k-1)} & a_{k-1k}^{(k-1)} & a_{k-1k+1}^{(k-1)} & \ldots & a_{k-1n}^{(k-1)} \\ & & & & 0 & a_{kk+1}^{(k-1)} & \ldots & a_{kn}^{(k-1)} \\ & 0 & & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & & & 0 & a_{nk+1}^{(k-1)} & \ldots & a_{nn}^{(k-1)} \end{bmatrix}$$

т.е. поддиагональные элементы ее k-ого столбца равны нулю, а первые $k-1$ строк и столбцов ее совпадают, с соответствующими строками и столбцами матрицами A_{k-1}. Кроме того, можно показать, что остальные элементы вычисляются по формулам

$$a_{kk}^{(k)} = -\sigma_k \sqrt{\sum_{l=k}^{n} (a_{lk}^{(k-1)})^2}, \quad a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - 2p_i^{(k)} \frac{\sum\limits_{l=k}^{n} (p_l^{(k)} a_{lj}^{(k-1)})}{\sum\limits_{l=k}^{n} (p_l^{(k)})^2}, \tag{8}$$

$$i = k, k+1, \ldots, n, \quad j = k+1, \ldots, n.$$

В результате выполнения всех $n-1$ шагов матрица A приведется к верхней треугольной матрице

$$A_{n-1} = P_{n-1} P_{n-2} \ldots P_2 P_1 A,$$

которую мы в дальнейшем будем обозначать через R : $R = A_{n-1}$. Обозначив еще $Q = P_1 P_2 \ldots P_{n-1}$, приходим к равенству $A = QR$, которое удобно использовать для получения решения системы $Ax = f$.

Обратимся теперь к решению системы $Ax = f$. Если мы получили разложение $A = QR$, то для решения этой системы нам, очевидно, достаточно решить систему $Rx = Q^* f$ с треугольной матрицей R и правой частью $g = Q^* f$.Решение этой системы находится по простым явным формулам:

$$x_n = g_n / r_{nn}, \quad x_i = \frac{g_i - \sum\limits_{j=i+1}^{n} r_{ij} x_j}{r_{ij}}, \quad i = n-1, n-2, \ldots, 1.$$

Однако прежде чем находить решение по этим формулам, нам необходимо сначала вычислить правую часть преобразованной системы, т.е. вектор $g = P_{n-1} \ldots P_2 P_1 f$. Обозначим $f^{(k)} = P_k P_{k-1} P_1 f$.Тогда $f^{(k)} = P_k f^{(k-1)}$. Предположим, что вектор $f^{(k-1)}$ имеет вид

$$f^{(k-1)} = (f_1^{(1)}, f_2^{(2)}, \ldots, f_{k-1}^{(k-1)}, f_k^{(k-1)}, f_{k+1}^{(k-1)}, \ldots, f_n^{(k-1)})^T.$$

В силу определения матрицы P_k и определяющего ее вектора $p^{(k)}$ легко проверить, что вектор $f^{(k)}$ будет иметь вид

$$f^{(k)} = (f_1^{(1)}, f_2^{(2)}, \ldots, f_{k-1}^{(k-1)}, f_k^{(k)}, f_{k+1}^{(k)}, \ldots, f_n^{(k)})^T,$$

где элементы $f_i^{(k)}$ вычисляются по формулам

$$f_i^{(k)} = f_i^{(k-1)} - 2p_l^{(k)} \frac{\sum\limits_{l=k}^{n} p_l^{(k)} f_l^{(k-1)}}{\sum\limits_{l=k}^{n} (p_l^{(k)})^2}, \quad i = k, k+1, ..., n.$$

Пример. Решить систему методом отражения

$$\begin{cases} 6,03x_1 + 13x_2 - 17x_3 = 2,0909 \\ 13x_1 + 29,03x_2 - 38x_3 = 4,1509 \\ -17x_1 - 38x_2 + 50,03x_3 = -5,1191 \end{cases}$$

Расчетный бланк

k	a_1	a_2	a_3	a_4	p	$z^{(2)}$	$z^{(3)}$	$z^{(4)}$
k	a_{11} a_{21} a_{31}	a_{12} a_{22} a_{32}	a_{13} a_{23} a_{33}	a_{14} a_{24} a_{34}	p_1 p_2 p_3	$2r_2p_1/s$ $2r_2p_2/s$ $2r_2p_3/s$	$2r_3p_1/s$ $2r_3p_2/s$ $2r_3p_3/s$	$2r_4p_1/s$ $2r_4p_2/s$ $2r_4p_3/s$
					$s = \|p\|^2$	$r_2 = (p, a_2)$	$r_3 = (p, a_3)$	$r_4 = (p, a_4)$
0	6,03 13 -17	13 29,03 -38	-17 -38 50,03	2,0909 4,1509 -5,1191	28,2642 13 -17	62,5533 28,7711 -37,6238	-82,0807 -37,7526 49,3688	8,9989 4,1390 -5,4126
					1256,867	1390,825	-1825,002	200,084
1	-22,2342 0 0	-49,5533 0,2589 -0,3762	65,0807 -0,2473 0,6611	-6,9080 0,0119 0,2934	0 0,7156 -0,3762		0 -0,9322 0,4901	0 -0,2231 0,1173
					0,6536		-0,4257	-0,1019
	$a^{(1)}$	$a^{(2)}$	$a^{(3)}$	$a^{(4)}$	x			
2	-22,2342 0 0	-49,5533 -0,4567 0	65,0807 0,6849 0,1710	-6,9080 0,2350 0,1761	1,03 1,03 1,03			

Ответ: $x_1 = 1,03,\ x_2 = 1,03,\ x_3 = 1,03.$

1.1.7 Метод отражений. Вариант 2

Метод отражений применяется для решения системы уравнений $Ax = f$ с комплексно неособенной матрицей. В этом методе матрица A раскладывается на произведение двух матриц: унитарной матрицы и правой треугольной.

При реализации данного метода необходимо воспользоваться следующими соотношениями:

$$\bar{\omega} = \chi(\bar{s} - \alpha\bar{e}), \alpha = |\alpha| e^{iarg\alpha}, |\alpha| = \sqrt{(\bar{s}, \bar{s})}, arg\alpha = arg(\bar{s}, \bar{e}) - \pi,$$

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{2[|\alpha|^2 + |\alpha||(\bar{s}, \bar{e})|]}}. \tag{9}$$

Разложение комплексной матрицы A в произведение унитарной и правой треугольной происходит за несколько шагов.

Шаг 1.

В качестве вектора $\bar{s}$ выберем первый столбец матрицы A, т.е. $\bar{s} = (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n1})$, а за $\bar{e}$ возьмем вектор $\bar{e} = (1, 0, \ldots, 0)'$. Воспользуемся соотношениями (9) для нахождения $\alpha, \chi, \bar{\omega}_1$. Построим матрицу $C_1 = E - 2\bar{\omega}_1\bar{\omega}_1^*$. Обозначим $A_1 = C_1 A$. Матрица A_1 имеет вид

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdot & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdot & a_{2n}^{(1)} \\ \cdots & \cdots & \cdot & a\cdots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \cdot & a_{nn}^{(1)} \end{bmatrix}$$

Шаг 2.

В качестве вектора $\bar{s}$ выберем $\bar{s} = (0, a_{21}^{(1)}, \ldots, a_{n1}^{(1)})'$, а за $\bar{e}$ возьмем вектор $\bar{e} = (0, 1, \ldots, 0)'$. Затем находим $\bar{\omega}_2$ и строим матрицу $C_2 = E - 2\bar{\omega}_2\bar{\omega}_2^*$. Обозначим $A_2 = C_2 A$. Матрица A_2 имеет вид

$$A_2 = \begin{bmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & a_{31}^{(2)} & \cdot & a_{1n}^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdot & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \cdot & a_{3n}^{(2)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdot & \cdots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(2)} & \cdot & a_{nn}^{(2)} \end{bmatrix}$$

Продолжая этот процесс, получаем в итоге матрицу A_{n-1}, имеющую правотреугольный вид.

Рассмотрим, как находится решение системы линейных алгебраических уравнений методом отражений.

Обозначим через $A_0 = \{a_1^{(0)}, \ldots, a_{n+1}^{(0)}\}$ расширенную матрицу системы $Ax = f$, где $a_{n+1}^{(0)} = (b_1, b_2, ..., b_n)'$, $a_k^{(0)} = (a_{1k}, a_{2k}, ..., a_{1n})'$, $k = 1, ..., n$.

Данная матрица преобразуется к правой треугольной с помощью матриц отражения

$$A_{k+1} = C_{k+1} A_k \quad \text{или } \bar{a}_i^{(k+1)} = C_{k+1}\bar{a}_i^{(k)}, \quad k = 0, ..., n-1, \ i = 1, ..n+1.$$

При построении матрицы C_{k+1} в качестве векторов $\bar{e}$ и $\bar{s}$ возьмем векторы $\bar{e}$=$(0, ..., 0, 1, ..., 0)'$, $\bar{s}$=$(0, ..., 0, a_{k+1k+1}^{(k)}, a_{k+2k+1}^{(k)}, ..., a_{nk+1}^{(1)})'$.

После $n-1$ шага система $Ax = f$ имеет вид

$$\begin{array}{cccccc} a_{11}^{(n-1)}x_1 & +a_{12}^{(n-1)}x_2 & +... & a_{1n}^{(n-1)}x_n & = & a_{1n+1}^{(n-1)}, \\ & a_{22}^{(n-1)}x_2 & +... & a_{2n}^{(n-1)}x_n & = & a_{2n+1}^{(n-1)}, \\ ... & ... & ... & .... & ... & ... \\ & & & a_{nn}^{(n-1)}x_n & = & a_{nn+1}^{(n-1)}. \end{array} \tag{10}$$

Решение системы (10) находится по формулам

$$x_n = \frac{a_{nn+1}^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}}, \quad x_k = \frac{a_{kn+1}^{(n-1)} - \sum\limits_{i=k+1}^{n} a_{ni}^{(n-1)} x_i}{a_{kk}^{(n-1)}}. \tag{11}$$

Пример. Решить систему линейных алгебраических уравнений методом отражений.

$$\begin{cases} 2x_1 + (-9+4i)x_2 + (4-3i)x_3 = 15 - i \\ -(9+4i)x_1 + 6x_2 + (-1+2i)x_3 = -22 + 26i \\ -(4+5i)x_1 - (1+2i)x_2 - 3x_3 = -12 + 10i \end{cases}$$

Решение. Пользуясь приведенным алгоритмом, находим:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -9+4\,i & 4-3\,i & 15-i \\ -9-4\,i & 6 & -1+2\,i & -22+26\,i \\ -4-5\,i & -1-2\,i & -3 & -12+10\,i \end{bmatrix}$$

Шаг первый прямого хода.

$$\overline{s} = (2,\ -9-4\,i, -4-5\,i), \quad \overline{e} = (1,0,0)$$

$$\alpha = -11,9164; \quad \chi = 0,05491$$

$$\bar{\omega}_1 = \begin{bmatrix} 0,7641 \\ -0,4942-0,2196\,i \\ -0,2196-0,2746\,i \end{bmatrix} \quad \bar{\omega}_1^* = \begin{bmatrix} 0,7641, & -0,4942+0,2196\,i, & -0,2196+0,2746\,i \end{bmatrix}$$

$$V_1 = \begin{bmatrix} -0,1678 & 0,7553-0,3357i & 0,3357-0,4196i \\ 0,7553+0,3357i & 0,4151 & -0,3377+0,1749 \\ 0,3357+0,4196 & -0,3377-0,1749\,i & 0,528 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} -11,9163 & 4,8671-2,9371\,i & -1,7622+3,6084\,i & -10,2378+35,581\,i \\ 0 & -4,9621+0,5005\,i & 4,626-0,6176\,i & 4,8363+9,5965\,i \\ 0 & -7,4783-4,98837\,i & 1,0306+0,1708\,i & 8,3972+8,5532\,i \end{bmatrix}$$

Шаг второй прямого хода.

$$\bar{s} = (0, -4,9621+0,5005\,i, -7,4783-4,9884\,i), \quad \bar{e} = (0,1,0)$$

$$arg\alpha = -\pi + 3,0411; \quad \alpha = 10,2282-1,0316\,i; \quad \chi = 0,05644$$

$$\bar{\omega}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -0,8574+0,08648\,i \\ -0,4221-0,2816\,i \end{bmatrix} \quad \bar{\omega}_2^* = \begin{bmatrix} 0, & -0,8574-0,08648\,i, & -0,4221+0,2816\,i \end{bmatrix}$$

$$V_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0,4851 & -0,6751+0,5558\,i \\ 0 & -0,6751-0,5558\,i & 0,4851 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -11,9163 & 4.8671-2,9371\,i & -1,7622+3,6084\,i & -10,2378+35,581\,i \\ 0 & 10,2283-1,0317\,i & -3,0349+0,7571\,i & -12,7689-5,7625\,i \\ 0 & 0 & -2,9662-2,0714\,i & 6,1426-5,017\,i \end{bmatrix}$$

Обратный ход.

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} -0,214-3,1751\,i \\ -1,2676-0,0212\,i \\ -0,5981+2,1091\,i \end{bmatrix}$$

1.2 Итерационные методы

Пусть дана система n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{12}$$

Итерационные методы дают решение системы линейных алгебраических уравнений в виде предела последовательности некоторых векторов, построение которых осуществляется при помощи единообразного процесса, называемого процессом итерации. Для решения системы линейных алгебраических уравнений итерационными методами предварительно приводят систему к виду удобному для итерации

$$\bar{x} = \bar{\beta} + \alpha\bar{x}. \tag{13}$$

Сделать это можно несколькими способами. Например, если в матрице A $|a_{ii}| > \sum\limits_{j\neq i} |a_{ij}|$ для каждого $i = 1, .., n$, то удобно разрешить каждое из уравнений системы относительно диагонального неизвестного, поделив обе части i-го уравнения на a_{ii} и перенеся все члены его, кроме x_i, вправо.

Можно также привести систему (12) к виду (13), если прибавить к обеим частям i-го уравнения x_i, а затем перенести свободные члены влево.

Сходящийся процесс обладает важным свойством самоисправляемости, т.е. отдельная ошибка в вычислениях не отразится на окончательном результате, так как ошибочное приближение можно рассматривать как новый начальный вектор.

Обычно итерации продолжаются до тех пор, пока $\|\bar{x}^{(k+1)} - \bar{x}^{(k)}\| \leq \varepsilon$, где ε - заданная точность.

1.2.1 Метод простой итерации

В методе простой итерации в качестве начального приближения берем произвольный вектор $\bar{x}^{(0)}$ и подставляем в правую часть системы, приведенной к виду, удобному для итерации. Получаем некоторый вектор $\bar{x}^{(1)}$. Продолжая этот процесс, получим последовательность векторов

$$\bar{x}^{(1)} = \bar{\beta} + \alpha\bar{x}^{(0)}$$

$$\bar{x}^{(2)} = \bar{\beta} + \alpha\bar{x}^{(1)}$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$\bar{x}^{(k)} = \bar{\beta} + \alpha\bar{x}^{(k-1)}$$

Если при $k \to \infty$ $\bar{x}^{(k)} \to \bar{x}$, то вектор $\bar{x}^{(k)}$ будет решением системы (13), т. е. системы (12).

Достаточные условия сходимости метода простой итерации устанавливаются теоремой 1. Для сходимости процесса простой итерации достаточно, чтобы какая-либо из норм матрицы α была меньше единицы

$$\|\alpha\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}| < 1, \tag{14}$$

$$\|\alpha\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{n} |\alpha_{ij}| < 1, \tag{15}$$

$$\|\alpha\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}|^2} < 1. \tag{16}$$

Следствие. Для системы $A\bar{x} = \bar{b}$ метод простой итерации сходится, если

$$|a_{ii}| > \sum_{i \neq j} |a_{ij}| \ (i = 1, 2, ..., n)$$

или

$$|a_{jj}| > \sum_{i \neq j} |a_{ij}| \ (j = 1, 2, ..., n).$$

Пример. Методом простой итерации решить систему уравнений с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$:

$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 + 10x_2 + 2x_3 = 12 \\ x_1 + x_2 + 10x_3 = 8 \end{cases}$$

Решение. Так как диагональные элементы матрицы A данной системы по модулю превосходят сумму модулей остальных элементов соответствующих строк, то метод простой итерации в этом случае сходится [Положий].

Разрешая систему относительно неизвестных, стоящих на диагонали, получаем:

$$\begin{cases} x_1 = -0,2x_2 - 0,1x_3 + 1 \\ x_2 = -0,1x_1 - 0,2x_3 + 1,2 \\ x_3 = -0,1x_1 - 0,1x_2 + 0,8 \end{cases}$$

Принимая начальное приближение $\bar{x}^{(0)} = 0$, получаем следующие результаты вычислений:

k	x_1	x_2	x_3	$\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|_1$
1	1	1,2	0,8	
2	0,68	0,94	0,58	0,32
3	0,754	1,016	0,638	0,076
4	0,733	0,997	0,623	0,021
5	0,7383	1,0021	0,6270	0,0053
6	0,73688	1,00077	0,62596	0,00142
7	0,73725	1,00112	0,62624	0,00037

Сравнивая эти результаты с точным решением

$$x_1 = \frac{704}{955} = 0,73717, \ x_2 = \frac{956}{955} = 1,00105, \ x_3 = \frac{598}{955} = 0,62618,$$

видим, что метод простой итерации в данном случае сходится довольно быстро [8].

1.2.2 Метод Зейделя

Метод Зейделя представляет собой модификацию метода простой итерайции. Основная его идея состоит в том, что при вычислении $(k+1)$-го приближения неизвестной x_i учитывается уже вычисленное ранее $(k+1)$-е приближения неизвестных $x_1, x_2, ..., x_k$.

Пусть система, приведенная к виду удобному для итерации, записана так:

$$x_i = \beta_i + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i, \quad (i = 1, .., n)$$

Выберем произвольно начальные приближения корней $x_1^{(0)},\ x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}$.

Далее, предполагая, что k-е приближения $x_i^{(k)}$ корней известны, согласно Зейделю будем строить $(k+1)$-е приближение корней по следуюшим формулам:

$$x_1^{(k+1)} = \beta_1 + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j^{(k)}$$

$$x_2^{(k+1)} = \beta_2 + \alpha_{21} x_1^{(k+1)} \sum_{j=2}^{n} \alpha_{ij} x_j^{(k)}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_i^{(k+1)} = \beta_i + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i}^{n} \alpha_{ij} x_j^{(k)}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_n^{(k+1)} = \beta_n + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_{ij} x_j^{(k+1)} + \alpha_{nn} x_n^{(k)}, \quad (k = 0, 1, 2, ...)$$

Указанная ранее теорема сходимости для метода простой итерации остается верной для итерации по методу Зейделя.

Пример. Методом Зейделя решить следующую систему с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$:

$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 + 10x_2 + 2x_3 = 12 \\ x_1 + x_2 + 10x_3 = 8 \end{cases}$$

Разрешая систему относительно неизвестных, стоящих на диагонали, получаем:

$$\begin{cases} x_1 = -0,2x_2 - 0,1x_3 + 1 \\ x_2 = -0,1x_1 - 0,2x_3 + 1,2 \\ x_3 = -0,1x_1 - 0,1x_2 + 0,8 \end{cases}$$

Достаточные условия сходимости метода Зейделя здесь выполнены.

Принимая начальное приближение $\bar{x}^{(0)} = 0$, из первого уравнения найдем $x_1 = 1$. При $x_1 = 1$ и $x_3 = 0$ второе уравнение дает $x_2 = 1,1$. Наконец, при $x_1 = 1$ и $x_2 = 1,1$ находим из третьего уравнения $x_3 = 0,59$. Таким образом, первое приближение будет:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 1,1, \quad x_3 = 0,59.$$

Аналогично вычисляем последующие приближения. Получаем следующие результаты вычислений:

k	x_1	x_2	x_3	$\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|_1$
1	1	1,1	0,59	
2	0,721	1,00990	0,62691	0,279
3	0,73533	1,00109	0,62636	0,01433
4	0,73715	1,00101	0,62618	0,00182
5	0,73718	1,00105	0,62618	0,00003

Если сравнить полученные результаты с точным решением

$$x_1 = \frac{704}{955} = 0,73717,\ x_2 = \frac{956}{955} = 1,00105,\ x_3 = \frac{598}{955} = 0,62618,$$

то видно, что метод Зейделя в данном случае сходится быстро, так как уже пятое приближение совпадает с точным решением до пятого знака [8].

1.2.3 Метод релаксации

При решении системы линейных алгебраических уравнений методом релаксации поступают следующим образом.

Систему $A\bar{x} = \bar{b}$ преобразуем к виду

$$-\bar{x} + \bar{\beta} + \alpha\bar{x} = 0,$$

т.е.

$$-x_i + \beta_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \alpha_{ij}x_j = 0, (i = \overline{1,n}) \tag{1}$$

Взяв в качестве начального приближения $\bar{x}^{(0)}$ и подставив его в систему (1), получим невязки

$$\delta_i^{(0)} = -x_i + \beta_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \alpha_{ij}x_j = 0. \tag{2}$$

Если одной из неизвестных $x_k^{(0)}$ дать приращение $\Delta x_k^{(0)}$, то соответствующая невязка $\delta_k^{(0)}$ уменьшиться на величину $\Delta x_k^{(0)}$, а все остальные невязки $\Delta x_i^{(0)} (i \neq k)$ увеличатся на величину $\alpha_{ik}\Delta x_k^{(0)}$. Таким образом, чтобы обратить невязку $\delta x_k^{(0)}$ в нуль, достаточно величине $x_k^{(0)}$ дать приращение $\Delta x_k^{(0)} = \delta_k^{(0)}$, тогда

$$\delta_k^{(1)} = 0,$$

а все

$$\delta_i^{(1)} = \delta_i^{(0)} + \alpha_{ik}\delta_k^{(0)} \quad (i \neq k).$$

Обращаем в нуль максимальную по модулю невязку путем изменения соответствующей компоненты на величину, равную этой невязке, т.е. мы получаем невязки $\delta_i^{(1)}$. С ними поступаем аналогично и т.д. Процесс заканчивается на N шаге, когда все невязки будут равны нулю с заданной степенью точности ε.

Суммируя все приращения $\Delta x_i^{(m)} (i = \overline{1,n}, m = \overline{1,N})$ с $x_i^{(0)}$, получим значения корней

$$x_i^{(N+1)} = x_i^{(0)} + \sum_{m=1}^{N} \Delta x_i^{(m)} \quad (i = \overline{1,n}).$$

Пример. Решить систему методом релаксации с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$

$$\begin{cases} 15,21x_1 + 1,11x_3 = 9,01 \\ 1,32x_1 + 14,82x_2 - 0,61x_3 = 8,52 \\ 0,75x_1 - 1,26x_2 - 15,44x_3 = 8,33 \end{cases}$$

Решение. Исходная система, подготовленная к релаксации, имеет вид:

$$\begin{cases} -x_1 - 0,0730x_3 + 0,5924 = 0 \\ -x_2 - 0,0891x_1 + 0,0412x_3 + 0,5790 = 0 \\ -x_3 + 0,048x_1 - 0,081x_2 - 0,5395 = 0 \end{cases}$$

Выбрав в качестве $x^{(0)} = 0$, находим вектор невязки $\bar{\delta}^{(0)} = (0,5924; 0,5790; -0,5395)$. Норма этого вектора больше 10^{-3}, поэтому будем улучшать "пробное"решение с целью уменьшения невязок $\delta_i^{(0)}$. Выбираем одну из них, которая имеет наибольшее по модулю численное значение. Это $\delta_1^{(0)} = 0,5924$. Будем приводить ее к нулю, путем соответствующего изменения значения переменной x_1 на величину $\Delta x_1^{(0)} = \delta_1^{(0)} = 0,5924$.

Для удобства выписываем матрицу α:

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0,0730 \\ -0,0890 & 0 & 0,0412 \\ 0,0486 & -0,0816 & 0 \end{bmatrix},$$

Возьмем $x^{(0)} = (0, 0, 0)$. Тогда $\delta^{(0)} = (0,5924; 0,5790; -0,5395)$.

Расчетный бланк дальнейших вычислений

k	$\Delta x_k^{(m)}$	$\delta_1^{(m)}$	$\delta_2^{(m)}$	$\delta_3^{(m)}$	m
1	0,5924	0	0,5263	-0,5107	1
2	0,5263	0	0	-0,5536	2
3	-0,5536	0,0404	-0,0228	0	3
1	0,0404	0	-0,0264	0,0019	4
2	0,0264	0	0	0,0040	5
3	0,0040	-0,0002	0,0001	0	6
1	-0,0002	0	0	0	7

Решение $x^{(8)} = (0,6326; 0,5000; -0,5496)$, невязка $\delta^{(8)} = (-0,0001;\ 0;\ 0)$.

1.3 Задания

1. Решить системы методом Гаусса с выбором главного элемента.
2. Решить системы методом единственного деления.
3. Решить системы методом оптимального исключения.
4. Решить системы методом отражения (вариант 1).

1.

$$\begin{cases} -6,45x_1+7,11x_2-9,34x_3+7,78x_4=-36; \\ 8,45x_1+6,23x_2+4,68x_3+0,91x_4=2,1; \\ -4,41x_1+6,51x_2-7,89x_3+0,63x_4=-0,2; \\ 9,26x_1+9,37x_2-9,89x_3+9,49x_4=35,6. \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} 6,54x_1+4,37x_2+0,92x_3-4,71x_4=96,1; \\ 6,21x_1-8,49x_2+7,72x_3+9,24x_4=91,0; \\ 6,96x_1+6,21x_2+3,18x_3-0,61x_4=87,2; \\ -7,43x_1+1,96x_2+4,53x_3-3,51x_4=78,2. \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} -5,38x_1-9,31x_2-4,68x_3-3,99x_4=-89,8;\\ 1,33x_1+7,35x_2-1,31x_3-3,96x_4=-24,8;\\ 4,73x_1-9,22x_2+5,52x_3+6,31x_4=-14,5;\\ 1,83x_1-1,85x_2+9,99x_3-1,86x_4=60,7. \end{cases}$$

4.
$$\begin{cases} 4,92x_1+4,25x_2-0,84x_3-6,60x_4=18,7;\\ 2,56x_1+5,96x_2-1,48x_3-5,53x_4=-62,7;\\ 2,99x_1+7,46x_2+0,44x_3-2,11x_4=56;\\ 8,32x_1-3,80x_2-5,48x_3+0,71x_4=93,3. \end{cases}$$

5.
$$\begin{cases} 1,77x_1-5,31x_2+6,46x_3-8,85x_4=-52,3;\\ 7,62x_1+8,77x_2+6,40x_3+5,17x_4=40,7;\\ 1,58x_1-3,24x_2+8,34x_3-4,90x_4=88,5;\\ -6,56x_1-1,46x_2+1,98x_3-9,48x_4=29,2. \end{cases}$$

6.
$$\begin{cases} -5,87x_1-7,28x_2-3,15x_3-0,42x_4=25,1;\\ 6,43x_1-3,98x_2-7,55x_3-1,53x_4=30,3;\\ 0,93x_1+9,41x_2+0,35x_3-0,23x_4=-44,6;\\ -9,87x_1-0,09x_2+0,04x_3+9,96x_4=85,8. \end{cases}$$

7
$$\begin{cases} -0,07x_1+9,89x_2-0,17x_3-0,28x_4=0,1;\\ 9,55x_1-0,72x_2-1,16x_3+8,13x_4=-0,3;\\ 3,03x_1-4,90x_2+2,08x_3+7,19x_4=99,8;\\ -0,72x_1-3,53x_2+5,75x_3-7,77x_4=-0,5. \end{cases}$$

8
$$\begin{cases} 6,61x_1+5,03x_2+1,64x_3-3,32x_4=79,8;\\ 8,33x_1-4,99x_2-6,66x_3-1,65x_4=-97,9;\\ 1,69x_1-9,95x_2+1,75x_3+1,80x_4=82;\\ -6,45x_1+5,36x_2+8,92x_3+4,29x_4=84,1. \end{cases}$$

9.
$$\begin{cases} -1,03x_1+7,21x_2-3,28x_3-6,61x_4=32,1;\\ -0,43x_1+2,97x_2-7,46x_3+5,51x_4=-24,9;\\ 8,06x_1+3,58x_2+1,65x_3-4,77x_4=-92,8;\\ 6,88x_1-7,88x_2+9,00x_3-8,88x_4=-17,6. \end{cases}$$

10
$$\begin{cases} 5,97x_1+3,33x_2-0,70x_3-7,38x_4=98,7;\\ 1,92x_1+4,54x_2-3,55x_3-0,01x_4=87,5;\\ -2,57x_1-1,59x_2+5,84x_3-5,75x_4=86,2;\\ -9,91x_1-5,66x_2-5,57x_3-1,24x_4=73,6. \end{cases}$$

11.
$$\begin{cases} -3,64x_1+4,65x_2-8,99x_3+5,66x_4=-21,5;\\ 6,68x_1+2,35x_2-0,97x_3-8,61x_4=2,1;\\ 0,43x_1+1,82x_2-7,75x_3+4,08x_4=80,7;\\ 6,34x_1+0,42x_2-3,24x_3+7,19x_4=-17,1. \end{cases}$$

12
$$\begin{cases} 1,4x_1+7,68x_2-0,92x_3-3,23x_4=-60,4;\\ 5,85x_1-7,38x_2+8,48x_3-8,89x_4=-88,5;\\ 9,6x_1-9,28x_2-9,67x_3-8,95x_4=-48,8;\\ -8,61x_1-7,55x_2-6,16x_3-3,71x_4=-37,2. \end{cases}$$

13.
$$\begin{cases} -0,44x_1+2,56x_2-7,87x_3+4,7x_4=1,3;\\ 6,84x_1+1,55x_2-1,6x_3+9,95x_4=64,3;\\ -1,65x_1-1,7x_2+6,66x_3-5,03x_4=-34,4;\\ -8,37x_1-3,4x_2-1,77x_3+4,83x_4=-70. \end{cases}$$

14.
$$\begin{cases} 9,86x_1+8,75x_2+8,61x_3+7,36x_4=-69,3;\\ 5,98x_1+3,35x_2-0,67x_3-7,31x_4=79;\\ 2,03x_1+4,72x_2-3,24x_3-8,52x_4=-90,3;\\ -1,75x_1-0,26x_2+7,99x_3-2,27x_4=88,8. \end{cases}$$

15.
$$\begin{cases} 1,8x_1-5,57x_2+6,24x_3-9,33x_4=-42,8;\\ 6,92x_1+7,59x_2+4,51x_3+2,11x_4=34,5;\\ -3,37x_1+8,75x_2-4,62x_3-5,87x_4=91,7;\\ -0,48x_1+3,66x_2-6,82x_3+6,84x_4=26,2. \end{cases}$$

16.
$$\begin{cases} 0,68x_1-5,55x_2+5,13x_3+9,59x_4=-99,8;\\ 4,73x_1+4,33x_2-0,94x_3-6,61x_4=68,7;\\ 2,46x_1+5,85x_2-1,69x_3-5,83x_4=69;\\ 2,49x_1+6,67x_2-0,83x_3-4,16x_4=37,7. \end{cases}$$

17.
$$\begin{cases} 2,62x_1-0,64x_2-8,02x_3+1,35x_4=50,1;\\ 3,33x_1-5,32x_2+8,02x_3-7,3x_4=-91,4;\\ -9,27x_1-6,56x_2-5,83x_3-2,39x_4=58,7;\\ 1,79x_1+9,4x_2+1,19x_3+0,6x_4=67,4. \end{cases}$$

18.
$$\begin{cases} -9,21x_1-2,61x_2-1,81x_3+5,59x_4=-82,1;\\ 6,21x_1+9,38x_2-6,83x_3-7,45x_4=24;\\ -4,27x_1-1,71x_2+4,02x_3-7,68x_4=41,9;\\ 6,35x_1+8,67x_2+5,02x_3+3,69x_4=-34,1. \end{cases}$$

19.
$$\begin{cases} -5,31x_1+8,25x_2-7,05x_3-8,79x_4=-12,8;\\ -5,83x_1-4,62x_2-0,45x_3+4,94x_4=-75,9;\\ -5,51x_1+9,44x_2-6,06x_3-6,62x_4=11,4;\\ -2,68x_1+0,7x_2+8,02x_3-1,28x_4=35,5. \end{cases}$$

20.
$$\begin{cases} 9,96x_1+7,68x_2+7,64x_3+5,33x_4=-32,5;\\ 2,97x_1-1,69x_2-8,71x_3-0,4x_4=54,8;\\ 0,89x_1-9,51x_2+1,39x_3+1,89x_4=-77,7;\\ -6,71x_1+5,18x_2+6,47x_3+3,66x_4=77,2. \end{cases}$$

5. Решить системы $(D + kC)x = b$ методом квадратного корня.
6. Решить системы $(D + kC)x = b$ методом Халецкого.
1. $k = 0,1(0,1)1,5$.

$$D = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 6 & 5 \\ 7 & 10 & 8 & 7 \\ 6 & 8 & 10 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 10 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 0,1 & 0 & 0 & 0,1 \\ 0 & 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1 & 0 \\ 0,1 & 0 & 0 & 0,1 \end{bmatrix},\ \overline{b} = \begin{bmatrix} 23 \\ 32 \\ 33 \\ 31 \end{bmatrix}$$

2. $k = 0,1(0,1)1,5$.

$$D = \begin{bmatrix} 1,28 & 2,32 & 4,14 & -3,24 & ,-5,15 \\ 2,32 & 1,49 & 5,26 & 1,56 & 3,92 \\ 4,14 & 5,26 & 4,06 & 2,44 & 4,39 \\ -3,24 & 1,56 & 2,44 & 5,42 & 1,94 \\ -5,15 & 3,92 & 4,39 & 1,94 & 4,63 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 0,1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,1 \end{bmatrix},\ \overline{b} = \begin{bmatrix} -3,02 \\ 3,26 \\ 0,83 \\ -8,20 \\ -6,45 \end{bmatrix}$$

7. Решить системы методом простой итерации и методом Зейделя с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$.
8. Решить системы методом релаксации с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$.

$$D = \begin{bmatrix} 6,22 & 1,42 & -1,72 & 1,91 \\ 1,42 & 5,33 & 1,11 & -1,82 \\ -1,72 & 1,11 & 5,24 & 1,42 \\ 1,91 & -1,82 & 1,42 & 6,55 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ \overline{b} = \begin{bmatrix} 7,53 \\ 6,06 \\ 8,05 \\ 8,06 \end{bmatrix} \quad k = 0(1)15.$$

9. Решить системы методом отражения (вариант 2).

1. $\begin{cases} (1+2i)x_1+(4-5i)x_2+(7+4i)x_3=16+38i; \\ (8+i)x_1+(2-i)x_2+(1+i)x_3=17+25i; \\ (3+i)x_1+(1+i)x_2+(2+3i)x_3=1+25i. \end{cases}$

2. $\begin{cases} (1+2i)x_1+(4-5i)x_2+(7+4i)x_3=30-12i; \\ (8+i)x_1+(2-i)x_2+(1+i)x_3=21+15i; \\ (3+i)x_1+(1+i)x_2+(2+3i)x_3=21+11. \end{cases}$

3. $\begin{cases} (1+2i)x_1+(4-5i)x_2+(7+4i)x_3=61-i; \\ (8+i)x_1+(2-i)x_2+(1+i)x_3=51-3i; \\ (3+i)x_1+(1+i)x_2+(2+3i)x_3=21+21i. \end{cases}$

4. $\begin{cases} (1+2i)x_1+(4-5i)x_2+(7+4i)x_3=26+34i; \\ (8+i)x_1+(2-i)x_2+(1+i)x_3=13+17i; \\ (3+i)x_1+(1+i)x_2+(2+3i)x_3=-1+23i. \end{cases}$

5. $\begin{cases} (1+2i)x_1+(4-5i)x_2+(7+4i)x_3=15+35i; \\ (8+i)x_1+(2-i)x_2+(1+i)x_3=35+25i; \\ (3+i)x_1+(1+i)x_2+(2+3i)x_3=4+28i. \end{cases}$

6. $\begin{cases} (1+2i)x_1+(4-5i)x_2+(7+4i)x_3=55i; \\ (8+i)x_1+(2-i)x_2+(1+i)x_3=-8+21i; \\ (3+i)x_1+(1+i)x_2+(2+3i)x_3=-16+40i. \end{cases}$

7. $\begin{cases} (1+2i)x_1+(4-5i)x_2+(7+4i)x_3=40+67i; \\ (8+i)x_1+(2-i)x_2+(1+i)x_3=15+33i; \\ (3+i)x_1+(1+i)x_2+(2+3i)x_3=-8+41i. \end{cases}$

8. $\begin{cases} (1+2i)x_1+(4-5i)x_2+(7+4i)x_3=-40-67i; \\ (8+i)x_1+(2-i)x_2+(1+i)x_3=-15-33i; \\ (3+i)x_1+(1+i)x_2+(2+3i)x_3=8-41i. \end{cases}$

9. $\begin{cases} (1+2i)x_1+(4-5i)x_2+(7+4i)x_3=68+16i; \\ (8+i)x_1+(2-i)x_2+(1+i)x_3=40+18i; \\ (3+i)x_1+(1+i)x_2+(2+3i)x_3=37+17i. \end{cases}$

10. $\begin{cases} (1+2i)x_1+(4-5i)x_2+(7+4i)x_3=-6+23i; \\ (8+i)x_1+(2-i)x_2+(1+i)x_3=10i; \\ (3+i)x_1+(1+i)x_2+(2+3i)x_3=-16+3i. \end{cases}$

2 Вычисление собственных значений и собственных векторов матриц

Собственным значением квадратной матрицы A называется такое число λ, для которого выполняется соотношение

$$A\bar{x} = \lambda\bar{x}, \tag{17}$$

если $\bar{x}$ - некоторый не нулевой вектор, называемый собственным вектором матрицы A, соответствующий собственному значению λ.

Это соотношение можно переписать в виде:

$$(A - \lambda E)\bar{x} = \bar{0}. \tag{18}$$

Условием существования ненулевого решения однородной системы (18) является требование

$$|A - \lambda E| = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix} = (-1)^n[\lambda^n - p_1\lambda^{n-1} - \cdots - p_n] = 0. \tag{19}$$

Определение компонент собственного вектора требует решения системы n однородных уравнений с n неизвестными; для вычисления всех собственных векторов матрицы требуется решать n систем вида

$$(A - \lambda_i E)X_i = 0,$$

где $X_i = (x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{ni})$ - собственный вектор матрицы A, принадлежащий собственному значению λ_i.

Под полной проблемой собственных значений понимается проблема нахождения всех собственных значений матрицы A, так же как и принадлежащих этим собственным значениям собственных векторов.

2.1 Методы получения характеристического многочлена

2.1.1 Метод Леверье.

Метод Леверье основан на формулах Ньютона для сумм степеней корней алгебраического уравнения (19).

Пусть

$$Q_n(\lambda) = (-1)^n\left[\lambda^n - p_1\lambda^{n-1} - \cdots - p_n\right] \tag{20}$$

характеристический полином матрицы A и $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ его корни, среди которых могут быть равные.

Тогда характеристический полином можно разложить на множители:

$$Q_n(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\ldots(\lambda - \lambda_n). \tag{21}$$

Перемножая скобки, стоящие справа в (21), а затем приведя подобные члены и сравнивая с коэффициентами из (20) получим, так называемые формулы Виета, выражающие коэффициенты многочлена через его корни:

$p_1 = \sigma_1$, $p_2 = -\sigma_2$, ..., $p_{n-1} = (-1)^{n-2}\sigma_{n-1}$, $p_n = (-1)^{n-1}\sigma_n$,
$\sigma_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$,
$\sigma_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \cdots + \lambda_{n-1}\lambda_n$,
$\sigma_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_1 + \cdots + \lambda_{n-2}\lambda_{n-1}\lambda_n$,
$\cdots$
$\sigma_n = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$ — элементарные симметрические функции корней характеристического уравнения. Рассмотрим еще следующие симметрические функции корней:

$S_k = \lambda_1^k + \lambda_2^k + \cdots + \lambda_n^k, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$

Теорема единственности, известная из курса высшей алгебры, утверждает: любой симметрический многочлен можно единственным образом представить в виде многочлена от элементарных симметрических многочленов. Это представление выражается для степенных сумм по формуле Ньютона

$$S_k - p_1S_{k-1} - p_2S_{k-2} - \cdots - p_{k-1}S_1 - kp_k = 0, \quad (k = 1, \ldots, n). \tag{22}$$

Отсюда получаем

$$\begin{cases} p_1 = S_1, \\ p_2 = \dfrac{1}{2}(S_2 - p_1S_1), \\ \cdots\cdots\cdots \\ p_k = \dfrac{1}{k}(S_k - p_1S_{k-1} - \ldots - p_{k-1}S_1), \end{cases} \tag{23}$$

и можно найти все p_k, если будут известны S_k.

Эти суммы вычисляются следующим образом:

$$S_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = SpA,$$

т.е.

$$S_1 = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}.$$

Как известно, $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \cdots, \lambda_n^k$ являются собственными значениями матрицы A^k. Поэтому

$$S_k = \lambda_1^k + \lambda_2^k + \ldots + \lambda_n^k = SpA^k,$$

т. е. если $A^k = [a_{ij}^{(k)}]$, то

$$S_k = a_{11}^{(k)} + a_{22}^{(k)} + \ldots + a_{nn}^{(k)}.$$

Таким образом, схема раскрытия векового определителя по методу Леверье весьма простая, а именно: сначала вычисляются A^k $(k = 1, 2, \ldots n)$ - степени матрицы A, затем находятся соответствующие S_k - суммы элементов главных диагоналей матриц A^k и, наконец, по формулам (23) определяются искомые коэффициенты p_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Пример. Раскрыть характеристическое уравнение, найти собственные значения заданной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2.5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

k	A^k			SpA^k	p_k
1	2 1 1	1 2,5 1	1 1 3	7,5	7,5
2	6 5,5 6	5,5 8,25 6,5	6 6,5 11	25,25	-15,5
3	23,5 25,75 29,5	25,75 32,625 33,25	29,5 33,25 45,5	101,625	9,5

Ответ: $Q_3(\lambda) = -(\lambda^3 - 7,5\lambda^2 + 15,5\lambda - 9,5)$; $\lambda_1 = 1,185$; $\lambda_2 = 1,76$; $\lambda_3 = 4,555$.

2.1.2 Метод Фадеева

Метод Д.К. Фадеева является видоизменением метода Леверье. Помимо упрощений при вычислении коэффициентов характеристического полинома он позволяет определить обратную матрицу и собственные вектора матрицы.

Будем вместо последовательности A, A^2, ..., A^n вычислять последовательность матриц $A_1, A_2, \ldots, A_n$, построенную следующим образом:

$$
\begin{array}{lll}
A_1 = A, & SpA_1 = p_1, & B_1 = A_1 - p_1 E, \\
A_2 = AB_1, & \dfrac{SpA_2}{2} = p_2, & B_2 = A_2 - p_2 E, \\
\ldots & & \\
A_{n-1} = AB_{n-2}, & \dfrac{SpA_{n-1}}{n-1} = p_{n-1}, & B_{n-1} = A_{n-1} - p_{n-1} E, \\
A_n = AB_{n-1}, & \dfrac{SpA_n}{n} = p_n, & B_n = A_n - p_n E.
\end{array}
$$

Можно доказать, что

1) B_n -нулевая матрица,

2) если А - неособенная матрица, то $A^{-1} = B_{n-1}/p_n$,

3) каждый столбец матрицы

$$R_k = \lambda_k^{n-1} E + \lambda_k^{n-2} B_1 + \ldots + B_{n-1}$$

состоит из компонент собственного вектора, принадлежащего собственному числу λ_k.

Пример. Построить характеристическое уравнение матрицы по методу Д.К. Фадеева

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2.5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

k	A_k			$p_k = q_k$	B_k		
1	2 1 1	1 2,5 1	1 1 3	7,5	-5,5 1 1	1 -5 1	1 1 -4,5
2	-9 -2 -1,5	-2 -10,5 -1	-1,5 -1 -11,5	-15,5	6,5 -2 -1,5	-2 5 -1	-1,5 -1 4
3	9,5 0 0	0 9,5 0	0 0 9,5	9,5	0 0 0	0 0 0	0 0 0

Ответ: $Q_3(\lambda) = -(\lambda^3 - 7,5\lambda^2 + 15,5\lambda - 9,5)$; $\lambda_1 = 1,185$; $\lambda_2 = 1,76$; $\lambda_3 = 4,555$.

Попутно получилась обратная матрица $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0,68421 & -0,21053 & -0,15789 \\ -0,21053 & 0,52632 & -0.10526 \\ -0,15789 & -0,10526 & 0,42105 \end{bmatrix}$

2.2 Частичная проблема собственных значений.

Для решения *частичной проблемы собственных значений*, состоящей в определении одного или нескольких собственных значений и соответствующих им собственных векторов, обычно используются итерационные методы. Строится такой итерационный процесс, который сходится к одному собственному значению и собственному вектору, причем используемые алгоритмы обычно весьма экономичны.

2.2.1 Метод простой итерации

Построим итерационный процесс, применяя метод простой итерации к решению системы уравнений

$$\lambda\vec{x} = A\vec{x}. \tag{24}$$

Запишем (24), введя вспомогательный вектор y:

$$\vec{y} = A\vec{x}, \tag{25}$$

$$\lambda\vec{x} = \vec{y}. \tag{26}$$

Пусть $\vec{x}^{(0)}$ - начальное приближение собственного вектора $\vec{x}$, причем собственные векторы на каждой итерации нормированы, так что $|\vec{x}| = 1 (k = 1, 1, \ldots)$. Используем соотношение (25) для вычисления $\vec{y}^{(1)}$:

$$\vec{y}^{(1)} = A\vec{x}^{(0)}.$$

Соотношение (26) используем для вычисления первого приближения $\lambda^{(1)}$, применяя умножение обеих частей равенства скалярно на $\vec{x}^{(0)}$:

$$\lambda = \frac{\vec{y} \cdot \vec{x}^{(0)}}{\vec{x}^{(0)} \cdot \vec{x}^{(0)}} = \vec{y}^{(1)} \cdot \vec{x}^{(0)}.$$

Здесь учтено, что вектор $\vec{x}^{(0)}$ нормирован. Следующее приближение собственного вектора $\vec{x}^{(1)}$ можно вычислить, нормируя вектор $\vec{y}^{(1)}$.

Окончательно итерационный процесс записывается в виде

$$\begin{aligned} \vec{y}^{(k+1)} &= A\vec{x}^{(k)}, \\ \lambda^{(k+1)} &= \vec{y}^{(k+1)} \cdot \vec{x}^{(k)}, \\ \vec{x}^{(k+1)} &= \frac{\vec{y}^{(k+1)}}{|\vec{y}^{(k+1)}|}, \quad k = 0, 1, \ldots, \end{aligned} \tag{27}$$

и продолжается до установления постоянных значений λ и $\vec{x}$. В качестве критерия завершения итераций следует проверять близость векторов $(sign\lambda^{(k+1)})\vec{x}^{(k+1)}$ и $\vec{x}^{(k)}$.

Найденное в результате итерационного процесса (27) число λ является наибольшим по модулю собственным значением данной матрицы A, а $\vec{x}$ - соответствующим ему собственным вектором. Скорость сходимости этого итерационного процесса зависит от удачного выбора начального приближения. Если начальный вектор близок к истинному собственному вектору, то итерации сходятся быстро.

Пример. Найти максимальное собственное значение и собственный вектор матрицы A

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2,5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

За начальный вектор примем $\vec{x} = (1, 1, 1)$. Итерации дадут:

k	1	2	3	4	5
x_1	0,5111	0,4913	0,4855	0,4837	0,4831
x_2	0,5750	0,5686	0,5648	0,5631	0,5623
x_3	0,6389	0,6598	0,6673	0,6701	0,6711
λ	13,5000	4,5490	4,5543	4,5549	4,5550
y_1	4,0000	2,2361	2,2110	2,2031	2,2005
y_2	4,5000	2,5875	2,5725	2,5648	2,5615
y_3	5,0000	3,0027	3,0393	3,0522	3,0570
$\|y\|$	7,8262	4,5510	4,5545	4,5550	4,5550
$\max_i \|\vec{x}^{k+1} - \vec{x}^k\|$	0,4889	0,0209	0,0075	0,0028	0,0010
$\|\lambda^{(k+1)} - \lambda^{(k)}\|$		8,951	0,0053	0,0007	0,0001

Ответ: $\lambda_{max} = 4,555$, $\vec{x} = (0,4831; 0,5623; 0,6711)$.

2.2.2 Метод прямых итераций

Предположим, что матрица A имеет только вещественные различные по модулю собственные значения. Занумеруем их в порядке убывания модулей:

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \ldots |\lambda_n| > 0.$$

Метод прямых итераций предназначен для вычисления наибольшего по модулю собственного значения λ_1 и отвечающего ему собственного вектора $u^{(1)}$ и состоит в следующем. Выберем произвольный вектор $x^{(0)}$ и построим последовательность векторов $x^{(k)}$ по правилу

$$x^{(k)} = A(x^{(k-1)}/\alpha_{k-1}), \quad k = 1, 2, \ldots,$$

где α_{k-1} - наибольшая по модулю компонента вектора $x^{(k-1)}$, т.е. $|\alpha_{k-1} = \max\limits_{1\le i\le n} |x_i^{(k-1)}|$. Известно, что при $k \to \infty$

$$\alpha_k = \lambda_1, \quad x^{(k)} \to u^{(1)}.$$

На практике вычисления продолжают до тех пор, пока не будет выполнено неравенство

$$|\alpha_k - \alpha_{k-1}| < \varepsilon,$$

где ε - заданная точность вычисления собственного значения λ_1. При этом α_k принимают за приближенное значение λ_1, а $x^{(k)}$ - за приближение к $u^{(1)}$. Если за M итераций (M - предельно допустимое число итераций, задаваемое программистом), заданная точность не достигается, вычисления прекращаются.

Пример. Найти наибольшее собственное значение матрицы

$$A= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2,5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

и соответствующий ему собственный вектор.

Решение. Выберем начальный вектор $y = (1, 1, 1)$ и составим таблицу:

k y	1 Ay	2 A^2y	3 A^3y	4 A^4y	5 A^5y	6 A^6y
1	4	17,5	78,75	357,375	1625,93	7403,34
1	4,5	20,25	91,625	416,062	1892,65	8616,39
1	5	23,5	108,25	495,125	2258,81	10295,03
$c_1^{(k)} = y_1^{(k+1)}/y_1^{(k)}$	4	4,375	4,5	4,5381	4,5500	4,5533
$c_2^{(k)} = y_2^{(k+1)}/y_2^{(k)}$	4,5	4,5	4,5247	4,5409	4,5490	4,5525
$c_3^{(k)} = y_3^{(k+1)}/y_3^{(k)}$	5	4,7	4,6064	4,5739	4,5621	4,5577
$\lambda^{(k)} = \dfrac{1}{3}(c_1^{(k)} + c_2^{(k)} + c_3^{(k)})$	4,5	4,525	4,5437	4,5510	4,5536	4,5545
$\lambda^{(k+1)} - \lambda^{(k)}$		0,025	0,0187	0,0073	0,0026	0,0009

В качестве собственного вектора матрицы A можно взять

$$A^6y= \begin{bmatrix} 7403,34 \\ 8616.39 \\ 10295.03 \end{bmatrix}$$

Нормируя его ($|z| = \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}$), окончательно получаем

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 0,4829 \\ 0,5620 \\ 0,6715 \end{bmatrix}, \quad \text{а} \quad \lambda_{max} = 4,5545.$$

2.2.3 Метод обратных итераций

Предположим, что матрица A имеет только вещественные различные по модулю собственные значения. Занумеруем их в порядке убывания модулей:

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \ldots |\lambda_n| > 0.$$

Метод обратных итераций предназначен для вычисления наименьшего по модулю собственного значения λ_n и отвечающего ему собственного вектора $u^{(n)}$ и состоит в следующем. Выберем произвольный вектор $x^{(0)}$ и построим последовательность векторов $x^{(k)}$, каждый из которых является решением системы уравнений

$$Ax^{(k)} = x^{(k-1)}/\alpha_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где α_{k-1} - наибольшая по модулю компонента вектора $x^{(k-1)}$, т.е. $|\alpha_{k-1} = \max\limits_{1\le i\le n} |x_i^{(k-1)}|$. Известно, что при $k \to \infty$

$$1/\alpha_k = \lambda_n, \quad x^{(k)} \to u^{(n)}.$$

На практике вычисления продолжают до тех пор, пока не будет выполнено неравенство

$$|1/\alpha_k - 1/\alpha_{k-1}| < \varepsilon,$$

где ε - заданная точность вычисления собственного значения λ_n. При этом $1/\alpha_k$ принимают за приближенное значение λ_n, а $x^{(k)}$ - за приближение к $u^{(n)}$. Если за K итераций (K - предельно допустимое число итераций, задаваемое программистом), заданная точность не достигается, вычисления прекращаются.

Для решения систем уравнений $Ax^{(k)} = x^{(k-1)}/\alpha_{k-1}$ на каждом шаге можно воспользоваться методом Гаусса. Поскольку матрица у всех систем одна и та же, то ее треугольное разложение $U + MA$ следует выполнить только один раз. Решение каждой системы $Ax^{(k)} = x^{(k-1)}/\alpha_{k-1}$ сводится, следовательно, к получению преобразованной правой части $g^{(k)} = M(x^{(k-1)}/\alpha_{k-1})$ и последующему решению системы с треугольной матрицей

$$Ux^{(k)} = g^{(k)}.$$

2.3 Полная проблема собственных значений

2.3.1 Метод вращения с преградами

Метод вращения предназначен для решения полной проблемы собственных значений невырожденной симметричной матрицы , т. е. для нахождения собственных значений и собственных векторов исходной матрицы. Эта проблема решается с помощью сходящихся итерационных процессов. Для симметричных матриц эти процессы состоят в цепочке преобразований подобия, в результате которых в пределе получается диагональная матрица так, что ее собственные значения определяются непосредственно. Впервые этот процесс был предложен Якоби в 1976 г., однако практическое применение стало возможным лишь с развитием быстродействующих счетных устройств. В настоящее время имеется целый ряд модификаций метода Якоби. Одной из модификаций является метод вращений с преградами.

Элементарный шаг каждого эрмитова процесса заключается в преобразовании подобия посредством матрицы вращения

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & c & \dots\dots & -s & & \\ & & & \ddots 1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & s & \dots & c & & \\ & & & & & & \ddots 1 \end{bmatrix}$$

где $c^2+s^2=1$. Эти матрицы принадлежат к классу ортогональных матриц, т.е. $T_{ij}\cdot T_{ij}^*=E$.

Процесс состоит в построении последовательности матриц $A_o=A, A_1, ...$, каждая из которых получается из предыдущей с помощью элементарного шага. Эти элементарные шаги должны быть подобраны так, чтобы A^{n+1} безгранично приближалась к диагональной матрице при $m\to\infty$. Дадим расчетные формулы $(m+1)$ шага (при котором $A^{m+1}=T_{ij}^*A^mT_{ij}$).

Для удобства введем обозначения $C=A^{m+1}$, тогда

$$C_{kl}=a_{kl}^{(m)} \quad \text{при} \quad k\neq i, k\neq j, l\neq i, l\neq j$$

$$C_{ki}=C_{ik}=ca_{ki}^{(m)}+sa_{kj}^{(m)} \quad \text{при} \quad k\neq i, k\neq j,$$

$$C_{kj}=C_{jk}=-sa_{ki}^{(m)}+ca_{kj}^{(m)} \quad \text{при} \quad k\neq i, k\neq j,$$

$$C_{ii}=c^2a_{ii}^{(m)}+2csa_{ij}^{(m)}+s^2a_{jj}^{(m)}, \quad C_{jj}=s^2a_{ii}^{(m)}-2csa_{ij}^{(m)}+c^2a_{jj}^{(m)}$$

$$C_{ij}=C_{ji}=0$$

Числа c, s определяются по формулам

$$c=\sqrt{\frac{1}{2}(1+\frac{|a_{ii}^{(m)}-a_{jj}^{(m)}|}{d}}),$$

$$s=sgn[a_{ij}^{(m)}(a_{ii}^{(m)}-a_{jj}^{(m)})]\sqrt{\frac{1}{2}(1-\frac{|a_{ii}^{(m)}-a_{jj}^{(m)}|}{d}}), \quad d=\sqrt{(a_{ii}^{(m)}-a_{jj}^{(m)})^2+4a_{ij}^{(m)2}}$$

Матрица вращения выбирается на $(m+1)$ шаге так, чтобы элемент a_{ij} стал нулем. При этом пара индексов (ij) выбирается так, чтобы аннулировался наибольший по модулю внедиагональный элемент матрицы $A^{(m)}$, а именно $|a_{ij}^{(m)}|\geq\sigma_k$, где $\sigma_1,\sigma_2,...$ монотонно убывающая к нулю последовательность чисел, называемых "преградами". Один из способов задания "преград"состоит в нахождении σ_k по формуле $\sigma_k=\sqrt{max|a_{ii}^{(m)}|}\cdot 10^{-k}$, где $k=1,2,...,p$. Число p зависит от разрядности машины и требуемой точности решения поставленной задачи. После того как все внедиагональные элементы станут по модулю не больше σ_k, то "преграда"σ_k заменяется на σ_{k+1} и т.д. $k=1,2,...p$. Процесс заканчивается, когда все внедиагональные элементы станут меньше по модулю σ_p. Известно, что процесс с "преградами"сходится.

Так как характеристические полиномы подобных матриц совпадают, следовательно,

$$det(A-\lambda E)=det(D-\lambda E)=(d_{11}-\lambda)(d_{22}-\lambda)...(d_{nn}-\lambda)=0,$$

где D - есть диагональная матрица, полученная в результате выполнения описанного выше итерационного процесса.

Скажем несколько слов о нахождении собственных векторов матрицы A. Пусть итерационный процесс, описанный выше, доведен до того, что матрица

$$D=\prod_m T'_{i_mi_m}\cdot A\cdot\prod_m T_{i_mj_m}$$

оказалась практически диагональной. Тогда столбцы матрицы $\prod\limits_m T_{i_mj_m}$ будут собственными векторами исходной матрицы A. Домножив матрицу слева на $W=\prod\limits_m T_{i_mj_m}$ и справа на

W', получим $A = WDW'$. Из этого равенства получаем, что $AW = WD$. Если расписать это равенство по столбцам, то окажется, что каждый i-ый столбец матрицы W является собственным вектором, соответствующим собственном значению λ_i.

В отличие от прямых методов, алгоритмы которых состоят из разнородных частей: преобразования исходной матрицы, вычисления корней многочлена, нахождения собственных векторов, метод вращения позволяет в результате выполнения итерационного процесса найти собственные значения и собственные вектора.

Хотя количество умножений в этом методе весьма значительно, ошибки округления накапливаются медленно, так как умножения происходит на коэффициенты c и s по модулю меньше единицы.

Пример. Решить полную проблему собственных значений методом вращения с преградами для матрицы A.

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2,5 & 1\\ 1 & 1 & 3\end{bmatrix} \qquad \sigma = (10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4})$$

k	$a_{i1}^{(k)}$	$a_{i1}^{(k)}$	$a_{i1}^{(k)}$	c	s	(ij)
0	2 1 1	1 2,5 1	1 1 3	0,788205	-0,615412	(1,2)

T_{ij}			σ
0,788205	0,615412	0	10^{-1}
-0,615112	0,788205	0	
0	0	1	

k	$a_{i1}^{(k)}$	$a_{i1}^{(k)}$	$a_{i1}^{(k)}$	c	s	(ij)
1	1,219223 0 0,172793	0 3,280773 1,403617	0,172793 1,403617 3	0,741458	0,670999	(2,3)

T_{ij}			σ
1	0	0	10^{-1}
0	0,741458	-0,670999	
0	0,670999	0,741458	

k	$a_{i1}^{(k)}$	$a_{i1}^{(k)}$	$a_{i1}^{(k)}$	c	s	(ij)
2	1,219223 0,115924 0,128119	0,115944 4,551005 0	0,128119 0 1,729769	0,973075	0,230488	(1,3)

T_{ij}			σ
0,973075	0	0,230488	10^{-1}
0	1	0	
-0,230488	0	0,973075	

k	$a_{i1}^{(k)}$	$a_{i1}^{(k)}$	$a_{i1}^{(k)}$	c	s	(ij)
3	1,188876 0,112822 0	0,112822 4,551005 0,026724	0 0,026724 1,760114	0,999439	0,033501	(1,2)

T_{ij}			σ
0,999439	0,033501	0	
-0,033501	0,999439	0	10^{-1}
0	0	1	

k	$a_{i1}^{(k)}$	$a_{i1}^{(k)}$	$a_{i1}^{(k)}$	c	s	(ij)
	1,185091	0	0,000895			
4	0	4,554774	0,026709	0,999954	0,009555	(2,3)
	-0,000895	0,026709	1,760114			

T_{ij}			σ
1	0	0	
0	0,999954	-0,009555	10^{-2}
0	0,009555	0,999954	

k	$a_{i1}^{(k)}$	$a_{i1}^{(k)}$	$a_{i1}^{(k)}$	c	s	(ij)
	1,185091	-0,000009	0,000895			
5	0,000009	1,555030	0	0,999999	-0,001549	(1,3)
	0,000895	0	1,759858			

T_{ij}			σ
0,999995	0	0,001549	
0	1	0	10^{-3}
-0,001549	0	0,999999	

k	$a_{i1}^{(k)}$	$a_{i1}^{(k)}$	$a_{i1}^{(k)}$	c	s	(ij)
	1,185089	-0,000008	0			
6	-0,000008	4,555030	0			
	0	0	1,759858			

Ответ: $\lambda_1 = 1,185089 \quad \lambda_2 = 4,555030 \quad \lambda_3 = 1,759839$

$$W = T_{12}T_{23}T_{13}T_{12}T_{23}T_{13} = \begin{bmatrix} 0,846727 & 0,482795 & -0,223458 \\ -0,495220 & 0,561790 & -0,662646 \\ -0,194385 & 0,671789 & 0,714802 \end{bmatrix}$$

$$\bar{x}_1 = (0,846727; -0,495220; -0,194385)$$

$$\bar{x}_2 = (0,482795; 0,561790; 0,671789)$$

$$\bar{x}_3 = (-0,223458; -0,662646; 0,714802)$$

2.4 Задания

1. Раскрыть вековые определители методами Леверье и Фадеева, найти собственные значения следующих матриц.

2. Решить частную проблему нахождения собственных значений методом прямой или обратной итерации.

3. Найти методом вращения собственные значения и собственные вектора матриц с точностью 10^{-3}.

1. $\begin{bmatrix} -0,755 & 0,392 & 0,562 & 3,599 \\ 6,968 & -3,273 & 4,121 & 2,521 \\ -1,374 & 2,456 & -1,507 & 7,163 \\ -0,359 & 6,148 & 2,542 & 0,783 \end{bmatrix}$ 2. $\begin{bmatrix} -3,916 & -2,795 & -1,392 & 2,993 \\ -1,719 & -0,860 & 3,906 & 2,613 \\ -0,581 & -0,773 & -0,063 & -4,53 \\ 1,878 & 1,123 & -0,802 & 1,331 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} -1,204 & 3,147 & 6,296 & -4,55 \\ -4,206 & 0,885 & 2,589 & 2,095 \\ -1,497 & 0,679 & 2,993 & 0,353 \\ 3,8953,732 & 5,577 & 0,704 & \end{bmatrix}$ 4. $\begin{bmatrix} -1,814 & 1,843 & -2,626 & -6,011 \\ 1,922 & 0,199 & -4,987 & -2,687 \\ -1,254 & -1,423 & 4,205 & -0,785 \\ -1,469 & -8,239 & -1,221 & -0,276 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} -7,519 & 1,042 & -4,896 & -0,873 \\ 6,831 & 2,969 & 6,192 & -5,857 \\ 0,137 & -1,21 & 1,881 & 4,47 \\ -0,689 & 13,012 & 0,622 & -2,331 \end{bmatrix}$ 6. $\begin{bmatrix} -3,921 & 6,24 & -0,052 & 2,524 \\ 13,926 & -0,506 & 10,705 & -1,52 \\ 3,702 & -2,802 & -1,267 & 4,394 \\ -4,707 & -1,599 & -1,157 & 0,717 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 3,76 & 2,631 & 5,601 & -6,291 \\ 1,149 & -2,53 & 0,497 & -0,05 \\ 2,981 & 5,613 & 0,345 & 0,281 \\ 6,624 & 2,021 & -4,508 & 4,243 \end{bmatrix}$ 8. $\begin{bmatrix} -3,432 & -0,2 & 3,443 & -1,696 \\ -13,427 & -0,508 & 3,298 & 8,875 \\ -2,85 & 4,398 & 06,323 & -0,33 \\ -6,696 & 0,205 & -7,817 & -1,419 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} -2,071 & -3,107 & 3,08 & -2,49 \\ 2,85 & 1,658 & 0,007 & 11,607 \\ 1,108 & 8,249 & 0,964 & -2,536 \\ 0,239 & 3,139 & -4,587 & 4,513 \end{bmatrix}$ 10. $\begin{bmatrix} -6,834 & 0,61 & -2,941 & -11,302 \\ -1,292 & 2,357 & 3,539 & -4,173 \\ 3,241 & 10,977 & -1,337 & -1,444 \\ 3,882 & 1,769 & 2,233 & -0,797 \end{bmatrix}$

В следующих вариантах матрица $A = D + kC$, где C, D - матрицы, а k - параметр.

11. $D = \begin{bmatrix} 9,9 & 8,8 & 7,7 & 6,6 \\ 8,8 & 5,5 & 4,4 & 3,3 \\ 7,7 & 4,4 & 2,2 & 1,1 \\ 6,6 & 3,3 & 1,1 & 0,0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0 & 0,5 \end{bmatrix},$ k=0(1)10.

12. $D = \begin{bmatrix} 1,111 & 1,222 & 0,333 \\ 1,222 & 1,444 & 0,555 \\ 0,333 & 0,555 & 1,666 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$ k=0(1)15.

13. $D = \begin{bmatrix} 1,4 & 1,2 & -1,3 \\ 1,2 & 0.9 & 0,4 \\ -1,3 & 0,4 & 0,8 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0,2 & 0 & 0,2 \\ 0 & 0,2 & 0,2 \\ 0,2 & 0,2 & 0 \end{bmatrix},$ k=0(1)7.

Список литературы

1. Бахвалов Н.С.Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. -М.: Наука,1987.
2. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Том II. -М.: Физматгиз, 1962. 640 с.
3. Волков Е.А. Численные методы.-М.: Наука, 1987. 248 с.
4. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. -М.: Наука, 1966.

5. Калиткин Н.Н. Численные методы.-М.: Наука, 1978. 512 с.
6. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Вычислительные методы: В 2-х т. -М.: Наука, 1976-1977.
7. Митченко А.Д. Численные методы линейной алгебры. -Владивосток, ДВГУ, 1991. 142 с.
8. Митченко А.Д., Хайрутдинова Г.З. Алгоритмы линейной алгебры. Методические указания (для студентов математического факультета). Владивосток, ДВГУ, 1993. 32 с.
9. Положий Г.Н., Пахарева Н.А. и др. Математический практикум. -М.: ГИФМЛ, 1960. 512 с.
10. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы.-М.: Наука,1989. 432 с.
11. Фадеев Д.К., Фадеев В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. -М.-Л.: ГИФМЛ, 1963. 735 с.

Учебное издание

Александр Георгиевич Колобов
Лилия Александровна Молчанова

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Методические указания и задания для студентов
математических специальностей

В авторской редакции
Технический редактор Л.М. Гурова
Компьютерный набор и верстка Л. А. Молчановой

Подписано в печать 16.05.2008
Формат 60×84 1/16. Усл. печ. л. 2,3. Уч.-изд. л. 2,1
Тираж 100 экз.

Издательство Дальневосточного университета
690950, Владивосток, ул. Октябрьская, 27.
Отпечатано в лаборатории
кафедры компьютерных наук ИМКН ДВГУ
690950, Владивосток, ул. Октябрьская, 27, к. 132.