Математическая статистика
Лекция 2

Точечные оценки

Рассмотрим случайную выборку $X_1,\dots,X_n$ - (независимые одинаково распределенные случайные величины)

$X_1,\dots,Xn \sim F(X, \theta)$-семейство распределений

Опр. Оценкой неизвестного параметра θ (статистикой) называется функция от элементов случайной выборки $\hat{\theta}n = T\,(X_1, X_2, .., X_n)$

1. **Состоятельность.** $\hat{\theta}_n \xrightarrow[n \to \infty]{p} \theta$

2. **Несмещенность.** $E(\hat{\theta}_n)=\theta$

3. **Асимптотическая несмещенность** $E(\hat{\theta}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \theta$

4. **Асимптотическая нормальность** $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow[n \to \infty]{d} N(0, \sigma^2(\theta))$ или $\dfrac{\hat{\theta}_n - \theta}{\sigma(\theta)/\sqrt{n}} \xrightarrow[n \to \infty]{d} N(0,1)$

Свойства оценок. Эффективность

- **5. <u>Эффективность.</u>** Оценка $\hat{\theta}_n$ называется эффективной в классе несмещенных оценок, если

$D(\hat{\theta}_n) \leq D(\tilde{\theta}_n)$, для всех возможных значений θ, где $\tilde{\theta}_n$ - любая другая оценка из класса несмещенных, и хотя бы при одном θ это неравенство строгое

Свойства оценок. Эффективность

- <u>Опр</u>. Оценка $\hat{\theta}_n$ называется эффективной в классе оценок K, если $E(\hat{\theta}_n - \theta)^2 \leq E(\tilde{\theta}_n - \theta)^2$, для всех возможных значений θ, где $\tilde{\theta}_n$ - любая другая оценка из класса K, и хотя бы при одном θ это неравенство строгое

Несмещенность. Примеры

Пример 1.

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \text{ — несмещенная оценка для E(X)=μ}$$

Пример 2.

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{X}_i - \bar{X})^2 \text{ — смещенная оценка } D(X) = \sigma^2 \text{, так как}$$

$$E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{X}_i - \bar{X})^2\right) = \frac{\mathrm{n}-1}{n}\sigma^2$$

$$S_0^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{X}_i - \bar{X})^2 \text{ — несмещенная оценка } D(X) = \sigma^2$$

Доказательство (см. лекцию)

Несмещенность. Примеры

Пример 3. Рассмотрим оценки для математического ожидания

$$\hat{\theta}_1 = X_1$$

$$\hat{\theta}_2 = X_1 + 4X_2 - 3X_3$$

$$\hat{\theta}_3 = (X_1 + X_2 + X_3)/3$$

Проверить на несмещенность.

$E(\hat{\theta}_1) = \mu$

$E(\hat{\theta}_2) = 2\mu \neq \mu$

$E(\hat{\theta}_3) = \mu$

Несмещенность. Примеры

- Пример 4 . X_1, X_2, X_3 независимые одинаково распределенные, $E(X_1) = \mu$, $D(X_1) = \sigma^2$
- Даны оценки а) для математического ожидания $2X_1 - 6X_2 + \beta X_3$

  б) для дисперсии $\beta(X_1 + X_2 - 2X_3)^2$

Найти β так, чтобы оценки были несмещенными

а) β-?

б) $E(\beta(X_1 + X_2 - 2X_3)^2) = 6\beta\sigma^2$

β-?

Состоятельность

2) Состоятельность. $\hat{\theta}_n \xrightarrow{p} \theta$ при n → ∞

Т.е. ∀ε>0 имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\hat{\theta}_n - \theta\right| \geq \varepsilon\right) = 0$$

Теорема. Несмещенная оценка $\hat{\theta}_n$ является состоятельной, если

$$\lim_{n\to\infty} D\left(\hat{\theta}_n\right) = 0$$

Пример. $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ состоятельная.

$$D(\bar{X}) = \mathrm{D}(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i) = \frac{\sigma^2}{n}$$

Эффективность. Примеры

Пример 1. $\hat{\theta}_1 = X_1$

$\hat{\theta}_2 = X_1 + 4X_2 - 3X_3$

$\hat{\theta}_3 = (X_1 + X_2 + X_3)/3$

- $D(\hat{\theta}_1) = \sigma^2$
- $D(\hat{\theta}_3) = \sigma^2/3$
- $MSE(\hat{\theta}_2) = E(X_1 + 4X_2 - 3X_3 - \mu)^2 = D(X_1 + 4X_2 - 3X_3 - \mu) + E^2(X_1 + 4X_2 - 3X_3 - \mu)$

$= 8\sigma^2 + \mu^2$

Асимптотическая нормальность. Примеры

- 1) $\frac{\bar{\mathrm{X}}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathrm{z}\sim\mathrm{N}(0,1)$
- 2) $\frac{S^2-\sigma^2}{\sqrt{D(S^2)}} \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathrm{z}\sim\mathrm{N}(0,1),$
- 3) $\frac{S_0^2-\sigma^2}{\sqrt{D(S_0^2)}} \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathrm{z}\sim\mathrm{N}(0,1)$

- 4) $\frac{\hat{F}_n(x)-F(x)}{\sqrt{\frac{1}{n}F(x)(1-F(x))}} \xrightarrow{d} \mathrm{z}\sim N(0,1)$

Методы построения статистических оценок

- 1) Метод моментов (Пирсон, 1894 г.).
- 2) Метод максимального правдоподобия (Р. Фишер между 1912 и 1922 годами, но ранее он был использован Гауссом, Лапласом и другими).

1. Метод моментов (ММ)

Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка объёма n из параметрического семейства распределений $\mathcal{F}_\theta$, где $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}$. Выберем некоторую функцию $g(y) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ так, чтобы существовал момент

$$\mathsf{E}g(X_1) = h(\theta)$$

и функция h была обратима в области Θ.

Решим уравнение относительно θ, беря вместо истинного момента выборочный момент

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(X_i) = h(\hat{\theta}_n),$$

$$\hat{\theta}_n = h^{-1}\left(\overline{g(X)}\right) = h^{-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(X_i)\right).$$

Чаще всего в качестве функции $g(y)$ берут $g(y) = y^k$. В этом случае

$$\mathsf{E}X_1^k = h(\theta), \quad \theta = h^{-1}\left(\mathsf{E}X_1^k\right), \quad \hat{\theta} = h^{-1}\left(\overline{X^k}\right) = h^{-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k\right),$$

если, конечно, функция h обратима в области Θ.

Свойства ОММ

Теорема *Пусть* $\hat{\theta} = h^{-1}\left(\overline{g(X)}\right)$ *— оценка параметра* θ, *полученная по методу моментов, причём функция* h^{-1} *непрерывна. Тогда оценка* $\hat{\theta}$ *состоятельна.*

Примеры

- 1) Биномиальное распределение *B(m,p)*

$$P(X=k)=C_m^k p^k (1-p)^{m-k}$$

- Оценим параметр θ для $B(m,\theta)$,
- Известно $E(X)=m\theta$,
- $\bar{X}$ - оценка момента $E(X)$,
- Получим уравнение $\mathrm{m}\cdot\hat{\theta}_n=\bar{X}$, т.е. $\hat{\theta}_n=\frac{1}{\mathrm{m}\cdot n}\sum_{i=1}^{n}X_i$

2. Метод максимального правдоподобия (ММП),(ML)

Известен закон распределения случайных величин, зависящий от набора параметров. Оценки этих параметров подбираются таким образом, чтобы вероятность получить имеющийся набор данных была максимальной.

$P_\theta(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n) \to max$ (дискретный случай)

$f_\theta(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to max$ (абс. непрер. случай)

Метод максимального правдоподобия(ММП),(ML)

Дискретный случай

Функция правдоподобия

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \theta) = \prod_{i=1}^{n} P_\theta\,(X_i = x_i)$$

Логарифмическая функция правдоподобия

$$\ln\bigl(L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \theta)\bigr) = \sum_{i=1}^{n} \ln(P_\theta(X_i = x_i))$$

Абсолютно непрерывный случай

Функция правдоподобия

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \theta) = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i)$$

Логарифмическая функция правдоподобия

$$\ln\bigl(L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \theta)\bigr) = \sum_{i=1}^{n} \ln(f_\theta(x_i))$$

Оценка максимального правдоподобия (ОМП)

$$\hat{\theta} = \arg(\max_{\theta} L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \theta)) = \arg(\max_{\theta} ln\, L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \theta))$$

Свойства ОМП

Оценки максимального правдоподобия, вообще говоря, могут быть смещёнными , но являются ***состоятельными***, ***асимптотически эффективными*** *и* ***асимптотически нормальными*** оценками.

Примеры

- 1) Биномиальное распределение *B(m,p)*

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \theta) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{C}_m^{x_i} \theta^{x_i} (1-\theta)^{m-x_i}$$

$$\ln\big(L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \theta)\big) = \sum_{i=1}^{n} \big(ln C_m^{x_i} + x_i \, ln\theta + (m - x_i) ln(1-\theta)\big)$$

$$\frac{\partial(\ln L)}{\partial\theta} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i}{\theta} - \frac{(m - x_i)}{1-\theta}\right) = 0$$

$$\widehat{\theta_n} = \frac{1}{\mathrm{m} \cdot n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$