中南大学模拟试卷及答案

2023 年 12 月 27 日，下午 13：50-15：30

一、填空题（每小题 2 分，共 24 分）

1. 基为 11 的集合 X 含有元素 x,y,z,幂集 P(X) 中同时含有 x,y,z 的元素个数为 2^8 （知识点：幂集的含义）
2. 无向图 G 有 15 个顶点，12 个顶点度数为 3，其余顶点度数为 2， 则 G 有 21 条边。（握手定理）
3. 4 个元素的集合上可以定义的不同等价关系的个数为 15 个（等价关系等价于划分）。
4. 设 R 是集合 A 上的全关系， 则 R^2= R （关系合成运算）
5. 设 A={0,3,7,8}，在 A 上定义二元运算*，a*b=max{a,b}，运算*的零元为 8 。（零元的定义）
6. 设 A={0,1,2,3,4,5}，运算为 $+_6$（模 6 加法），<A,$+_6$>的所有子群为 <{0},+6>,<{0,3},+6>,<{0,2,4},+6>,<A,+6> 。（子群，拉格朗日定理）
7. <B,+,*, ’ ,0,1>是布尔代数，B={0,a,b,1}，g(x,y)=y’+bxy 的主析取范式= y’ x+y’ x’ +bxy （主范式）
8. P↔R 的主合取范式= (P∨¬R)∧(¬P∨R)。（主范式）
9. A={x|x∈N∧x<16},R 为模 5 等价关系，设规范映射 f：A→A/R,则 f(1) = {1,6,11} 。规范映射定义
10. [a,b]表示 a 到 b 实数闭区间，||[0,1]|*(|有理数集|+|[10,20]|)|= c（无限实数集基数）
11. 拥有 5 个原子的布尔代数的元素个数为 2^5 （原子的含义与相关结论）。
12. 设 a 是 6 阶群的生成元，则 a^3 的阶为 2 。（元素阶的含义应用）

二、真假判断题（每小题 1 分，共 16 分）

1. 任何有限集合 A 必不能与自己的幂集 P(A) 建立双射。T （幂集的含义）
2. 能与自己的子集建立起双射的集合一定是无限集合。T （抽屉原则的应用）
3. 若一个关系 R 是反自反且传递的，则此 R 也一定是反对称的。T （可证明）
4. (A⊆C)∧(B⊆D)⇒(A×B)⊆(C×D) T （可证明）
5. 全序集一定是良序集。F （按定义，Z 是全序，但不是良序）
6. <R,+,*>是环，其中<R,+>是阿贝尔群，则+的幺元一定是*的零元。T （定义应用）
7. 不与某个自然数 n 等势的集合必是无限集合。T （基本结论）
8. 图 G 的极大独立集一定是 G 的极小点支配，反之亦然。F （反之是不成立的，支配集不一定是独立集）
9. 无向图 G 的最小生成树必是唯一的。F （可以有多颗最小生成树）
10. 有限布尔代数必定与某个有限集合的幂集代数同构。T （基本结论）
11. ∀xA(x)→B⇔∀x(A(x)→B) F （等价变换，可知二者不等价）
12. 质数阶的群一定是循环群，且生成元的阶和群阶相等。T （基本结论）
13. 设布尔代数<B,*, +, ‘>，则存在 $|B|^{|B|^n}$ 个 n 元布尔表达式（布尔函数）。F （没有这么多，分析有多少个主析取范式，就有多少布尔函数！只有 $|B|^{2^n}$ 个主析取范式。

14. 如果 A⊆B，则 A∉B 一定为真。F　反例：A={1，2}，B={1，2，{1，2}}

15. 如果 R1 和 R2 是反对称和传递的，那么 R1∪R2 也是反对称和传递的。 F 反例：R1={<a,b>},R2={<b,a>}

16. n 阶完全图都是哈密尔顿图(n>2)。T　完全图都有 H-回路。

三、解答或计算题（32 分，每小题 8 分）

1．请证明：K5 必定不是平面图。

思路：因为： K5 的点数 n=5,边数 m=10,m>3n-6, 不满足平面图的必要条件（m≤3n-6）,故一定不是平面图。

2．对于|G|≥2 的无向图 G，请设计一个算法，判断图 G 是否为二部图。

思路：对图 BFS 遍历。从第一个节点开始遍历，对其着色，其邻接点着与其不同的色。按照 BFS 规则进行遍历，如果在遍历过程中，发现某个点的邻接点已经着色，且和那个点的着色一样，则表示不是二部图。算法结束。如果 BFS 遍历结束，且能按规则进行 2 颜色着色。则是二部图。

3. f={<<x,y>,z>|z=x+y∧x,y,z∈整数集}，请说明 f 的单满性质并求 f(x,x)和 f(x,-x)。

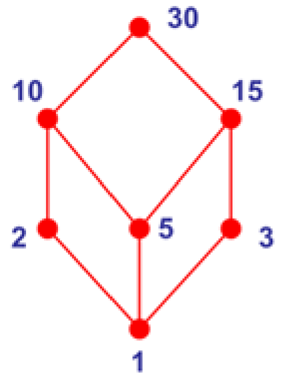
思路：显然，f 是满射。对任意的整数 z,存在原象如<z,0>。显然，不是单射，因为：z=z+0=（z-1）+1。

f(x,x)=2x,f(x,-x)=0

4．设 A={1，2，3，5，10，15，30}，$\forall x,y\in A, x\le y \Leftrightarrow x|y.$ （1）请画出（A，≤）的哈斯图。(2) 请判断（A，≤）是格吗？是分配格吗？ 是有补格吗？ 是布尔格吗？

思路：(1) 哈斯图如图所示。

按定义知：是格，不是分配格（有 5 角子格），不是有补格（5 没有补元素），不是布尔格。



四、证明题（共 28 分，每小题 7 分）

1. 非空集 A 上的二元关系 R 和 S 是偏序关系，试证明：R∩S 也是 A 上的偏序关系。

思路：按定义，验证 R∩S 也满足自反性，反对称性和传递性。

2. 请证明：从环<R,+,*>到环<Z,+,*>必存在同态映射，其中 R 是实数集，Z 是整数集，+为普通加法，*为普通乘法。

思路：构造一个从环<R,+,*>到环<Z,+,*>的同态映射！

设 f：R→Z 是同态映射，则需满足 f(x+y)=f(x)+f(y)，同时 f(x*y)=f(x)*f(y)，显然：当 f(x)=0 时成立。

3．设〈G，*〉是群，〈A，*〉和〈B，*〉是它的两个子群，且 $C=\{a*b \mid a\in A, b\in B\}$。请证明：若*满足交换律，则<C,*>也是<G,*>的子群。

思路：验证<C,*>满足子群的定义：

（1） C 是 G 的子集

（2） C 对运算*封闭。

（3） 单位元 $e\in C$

（4） 若 $a\in C$，则 $a^{-1}\in C$

4．请证明：$\forall x(A(x)\to B(x)), \forall x(C(x)\to\neg B(x)) \Rightarrow \forall x(C(x)\to\neg A(x))$

（形式化证明）

1．$\forall x(A(x)\to B(x))$　P

2．$A(x)\to B(x)$，T，1，US

3．$\neg B(x)\to\neg A(x)$　T,2,

4. $\forall x(C(x)\to\neg B(x))$　P

5. $C(x)\to\neg B(x)$　T,4,US

6. $C(x)\to\neg A(x)$　T,3,5

7. $\forall x(C(x)\to\neg A(x))$　T,6,UG