中南大学考试试卷 A（附答案）

2021 -- 2022 学年 上 学期　时间 100 分钟　2021 年 12 月 31 日

离散数学 课程 48 学时 3 学分 考试形式：闭 卷

专业年级：计科，图灵，物联网 2021 总分 100 分，占总评成绩 60 %

注：此页不作答题纸，请将答案写在答题纸上

一、填空题（每小题 2 分，共 20 分）

1. 基为 11 的集合 X 含有元素 x,y,z,幂集 P（X）中同时含有 x,y,z 的元素个数为 256
2. 无向图 G 有 15 个顶点，12 个顶点度数为 3，其余顶点度数为 2， 则 G 有 21 条边。
3. 4 个元素的集合上可以定义的不同等价关系的个数为 15 个。
4. 设 R 是集合 A 上的全域关系，则 R^2= R
5. 设 A={0,3,7,8}，在 A 上定义二元运算*，a*b=max{a,b}，运算*的零元为 8 。
6. 设 A={0,1,2,3,4,5}，运算为$+_6$（模 6 加法），<A,$+_6$>的所有子群为 <{0},$+_6$>，<A,$+_6$>,<{0,2,4},$+_6$>,<{0,3},$+_6$> 。
7. A={a+b$\sqrt{-3}$|a,b∈整数集}，+、*是复数加法和乘法，则<A-{0},*>中，i^{-1}= -i
8. <B,+,*,’,0,1>是布尔代数，B={0,a,b,1}，g(x,y)=y’+bxy 的主析取范式= x’y’+xy’+bxy
9. 对于下面所示的图邻接矩阵的幂，长度为 4 的回路有 11 条。

$$\begin{array}{c|cccc|} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \hline v_1 & 5 & 6 & 4 & 2 \\ v_2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ v_3 & 4 & 4 & 3 & 2 \\ v_4 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ \hline \end{array}$$

A^4

10. P↔R 的主合取范式= (P∨¬R)∧(¬P∨R) 。

评分细则：全对得分，错误不得分

二、真假判断题（每小题 1 分，共 10 分）

1. 任何有限集合 A 必不能与自己的幂集 P(A)建立双射。(真)
2. 若一个关系 R 是反自反且传递的，则此 R 也一定是反对称的。(真)
3. (A⊆C)∧(B⊆D)⇒(A×B)⊆(C×D)　(真)
4. 全序集一定是良序集。(假)
5. <R,+,*>是环，其中<R,+>是阿贝尔群，则+的么元一定是*的零元。(真)
6. 不与某个自然数 n 等势的集合必是无限集合。(真)
7. 图 G 的极大独立集一定是 G 的极小点支配，反之亦然。(假)
8. 无向图 G 的最小生成树必是唯一的。(假)
9. 有限布尔代数必定与某个有限集合的幂集代数同构。(真)
10. ∀xA(x)→B⇔∀x(A(x)→B)　(假)

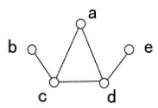
评分细则：全对得分，错误不得分

三、单选或多选题（每小题 2 分，共 10 分）

1．整数集上的关系 R={<x, y>|(x＜0∧y＜0)∨(x≥0∧y≥0)}，下面正确说法是 ACD 。

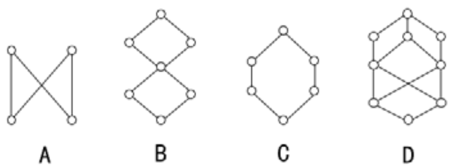
A．R 是等价关系　　B．R 是偏序关系　　C．<31,12>属于 R　　D．<-5,-6>属于 R

2．下图的最大匹配为 ABD

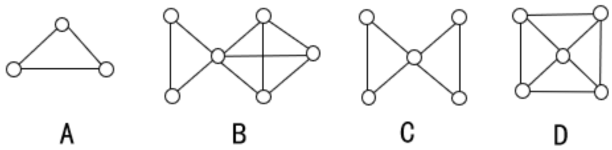


A. {bc, ed}　B. {de, ac}　C. {ac, ad}　D. {ad, bc}

3．下列哈斯图中， B 是分配格。



4．下列图中不是欧拉图也不是哈图的有 B 。



5．有限群 G 的子群的阶=11 且 G 中仅么元的逆是其本身，则 AD 可能是 G 的阶。

A．33　　B．22　　C．110　　D．77

评分细则：全对得分，错误不得分

四、解答或计算题（30 分，每小题 6 分）

1．设 L 为格，a, b, c∈L，且 a≼b≼c，⊗和⊕为保交和保联，请证明：a⊕b=b⊗c

解：因为 a≼b，故 a⊕b=b；又因 b≼c，故 b⊗c=b，得 a⊕b=b⊗c

[评分细则：前面两步各 2 分，后一步 2 分，若部分正确则酌情给分]

2．图 G 的任意结点 u 的度数 d(u) 均为偶数，请说明删掉 u 后 G 最多分成 $\frac{d(u)}{2}$ 个连通分量。

解：因为 G 的结点度数都为偶数，因此 G-u 最多形成 d(u)个奇数度点，而奇数度点必须成对出现在连通分支中，所以 ω(G-u) 的最大值为 $\frac{d(u)}{2}$，所以 ω(G-u)≤ $\frac{d(u)}{2}$

[评分标准：写出奇数度点为偶数 3 分，指出奇数度点必须成对 3 分，部分正确则酌情给分]

3．设 H,K 都是 G 的子群，若 H 是 G 的正规子群且 $H_{载体} \subseteq K_{载体}$，请说明 H 是 K 的正规子群。

解：因为 H 是 G 的子群，所以 H 满足封闭性等群性质，对 K 而言，H 的这些性质是不变的，故 H 也是 K 的子群。又因为 H 是 G 的正规子群，所以有 $\forall a\in G, aH=Ha$，因为 K 是 G 的子群，故若 a 属于 K，必然也属于 G，也有 aH=Ha，故 H 也是 K 的正规子群。

[评分细则：写出 H 是 K 的子群算 3 分，写出 aH=Ha 算 3 分，部分正确则酌情给分]

4．对于 $|G|\geqslant 2$ 的无向图 G，请设计一个算法，判断图 G 是否为二部图。

解：利用图着色算法，如果能用两种颜色实现对点的着色（相邻接的点着不同的颜色）。则该图为二部图。

[评分细则：着色具体算法不限，可以用自然语言表达，也可以用伪代码表达，此题为开放题，即主要考虑正确性，算法复杂度不计。根据上述标准酌情给分]

5．$f=\{\langle\langle x,y\rangle,z\rangle \mid z=x+y \wedge x,y,z\in$ 整数集$\}$，请说明 f 的单满性质并求 f(x,x) 和 f(x,-x)。

解：$\forall x\in Z$，$\exists\langle 0,x\rangle\in Z\times Z$，总有 $f(0,x)=x$，故 f 是满射；对于 $\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle\in Z\times Z$，有 $f(1,2)=3=f(2,1)$，而 $\langle 1,2\rangle\neq\langle 2,1\rangle$，故 f 不是单射；$f(x,x)=x+x=2x$；$f(x,-x)=x-x=0$

[评分细则：判断满射算 3 分，判断非单射算 3 分，部分正确则酌情给分]

五、证明题（30 分，第 1、4 小题每题 10 分，其余每小题 5 分）

1. 非空集 A 上的二元关系 R 和 S 是偏序关系，试证明：$R\cap S$ 也是 A 上的偏序关系。(10 分)

证：

(1)、$\forall x\in A$，$\langle x,x\rangle\in R, \langle x,x\rangle\in S \Rightarrow \langle x,x\rangle\in R\cap S$，所以 $R\cap S$ 有自反性；

(2)、$\forall x,y\in A$，因为 R,S 是反对称的，

$\langle x,y\rangle\in R\cap S\wedge\langle y,x\rangle\in R\cap S \Leftrightarrow (\langle x,y\rangle\in R\wedge\langle x,y\rangle\in S)\wedge(\langle y,x\rangle\in R\wedge\langle y,x\rangle\in S)$

$\Leftrightarrow (\langle x,y\rangle\in R\wedge\langle y,x\rangle\in R)\wedge(\langle x,y\rangle\in S\wedge\langle y,x\rangle\in S) \Leftrightarrow x=y\wedge y=x \Leftrightarrow x=y$

所以，$R\cap S$ 有反对称性

(3)、$\forall x,y,z\in A$，因为 R,S 是传递的，

$\langle x,y\rangle\in R\cap S\wedge\langle y,z\rangle\in R\cap S \Leftrightarrow \langle x,y\rangle\in R\wedge\langle x,y\rangle\in S\wedge\langle y,z\rangle\in R\wedge\langle y,z\rangle\in S$

$\Leftrightarrow \langle x,y\rangle\in R\wedge\langle y,z\rangle\in R\wedge\langle x,y\rangle\in S\wedge\langle y,z\rangle\in S \Rightarrow \langle x,z\rangle\in R\wedge\langle x,z\rangle\in S$

$\Leftrightarrow \langle x,z\rangle\in R\cap S$，所以，$R\cap S$ 有传递性，R 是偏序关系。

[评分细则：自反性正确算 3 分，反对称性正确算 3 分，传递性正确算 4 分，部分正确则酌情给分]

2. $A=\langle R,+\rangle$，$B=\langle\{R-0\},*\rangle$，R 为实数集，+、*为普通加、乘，请证明 A、B 间无同构。(5 分)

证：假设 f 是 B 到 A 的同构，则存在单位元之间的映射，f(1)=0，于是有：

$f(-1)+f(-1)=f((-1)*(-1))=f(1)=0$，另外，由上述方程有：$f(-1)=0$

但 f 不存多对一映射（即同构 f 应该有单射性），故 A、B 间不存在同构。

[评分细则：自反性正确算 1 分，反对称性正确算 2 分，传递性正确算 2 分，部分正确则酌情给分]

3. 设群$<G,*>$，a,b,c 是 G 中的任意元素，请证明：元素 abc、bca、cab 同阶。(5 分)

证：设 abc 的阶为 r，bca 的阶为 p，则 $(abc)^r=e=(bca)^p$

$(abc)^r=(abc)(abc)...(abc)=a(bca)(bca)...(bca)bc=e \Rightarrow (bca)^{r-1}=a^{-1}(bc)^{-1}$

$\Rightarrow (bca)^r=e$

即，$(abc)^r=(bca)^r=e$；类似地，有：$(bca)^p=(abc)^p=e$；

综合有：$(abc)^r=(abc)^p=(bca)^r=(bca)^p$；由 $(abc)^r=(abc)^p$ 以及阶的唯一性，$r\leqslant p$；

由 $(bca)^r=(bca)^p$ 以及阶的唯一性，$r\geqslant p$，故：$r=p$。

同理可得 bca、cab 同阶，故 abc、bca、cab 同阶。

[评分细则：设置群阶算 1 分，正确给出 $(abc)^r=(bca)^r=e$ 的证明算 3 分，其余算 1 分。部分正确则酌情给分]

4. 请证明：$\forall x(A(x)\rightarrow B(x)),\forall x(C(x)\rightarrow\neg B(x))\Rightarrow\forall x(C(x)\rightarrow\neg A(x))$（10 分）

证：

1. $\forall x(C(x)\rightarrow\neg B(x))$　　P 规则
2. $C(a)\rightarrow\neg B(a)$　　US 规则
3. $\forall x(A(x)\rightarrow B(x))$　　P 规则
4. $A(a)\rightarrow B(a)$　　US 规则
5. $\neg B(a)\rightarrow\neg A(a)$　　逆反律或假言易位
6. $C(a)\rightarrow\neg A(a)$　　2、5 假言三段论
7. $\forall x(C(x)\rightarrow\neg A(x)$　　UG 规则

[评分细则：前五步 6 分，后二步 4 分，部分正确则酌情给分。]