T^{le} STI2D

MATHÉMATIQUES

Le polycopié regroupe les documents distribués aux élèves de T^{le} STI2D en cours d'année.

Janson de Sailly (année 2016-2017)

A. YALLOUZ

TABLE DES MATIÈRES

Chapitre 1

LIMITES

La notion intuitive de limite permet de mettre en évidence le comportement d'une fonction dans les cas suivants :

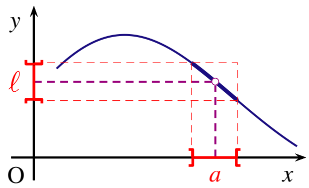
— Que se passe-t-il lorsque la variable x est proche d'une valeur a, sans pour cela l'atteindre ?

— Que se passe-t-il lorsque la variable x s'éloigne infiniment de 0 (limites en $+\infty$ ou en $-\infty$) ?

I NOTION DE LIMITE

1 LIMITE FINIE D'UNE FONCTION EN UN RÉEL

Soit f une fonction définie au « voisinage » d'un réel a.
Dire que la fonction f a pour limite le réel ℓ en a signifie que tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment proche de a.
On note : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$



2 LIMITE INFINIE D'UNE FONCTION EN UN RÉEL

DÉFINITIONS

Soit f une fonction définie au « voisinage » d'un réel a à droite de a (resp. à gauche de a).
Dire que la fonction f tend vers $+\infty$ quand x tend vers a avec $x > a$ (resp. avec $x < a$) signifie que tout intervalle $]M;+\infty[$, où M est un réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment proche de a avec $x > a$ (resp. avec $x < a$).
On note : $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ (resp. $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$)

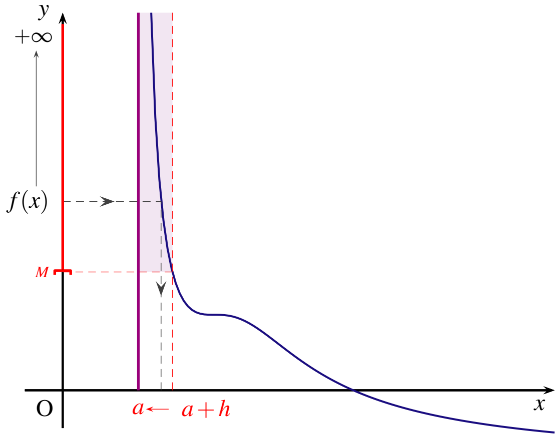
On a des définitions analogues lorsque la limite de f en a est $-\infty$

Soit f une fonction définie au « voisinage » d'un réel a à droite de a (resp. à gauche de a).
Dire que la fonction f tend vers $-\infty$ quand x tend vers a avec $x > a$ (resp. avec $x < a$) signifie que tout intervalle $]-\infty;M[$, où M est un réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment proche de a avec $x > a$ (resp. avec $x < a$).
On note : $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$ (resp. $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$)

INTERPRÉTATION GRAPHIQUE : ASYMPTOTE VERTICALE

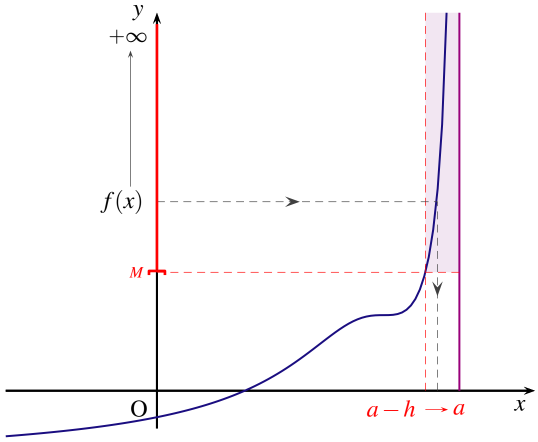
Dans un repère orthogonal du plan, si $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$, on dit alors, que la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction f.

Limite « à droite de a »



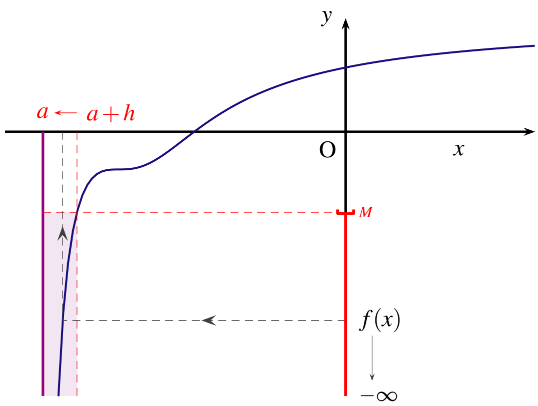
$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = +\infty$$

Limite « à gauche de a »

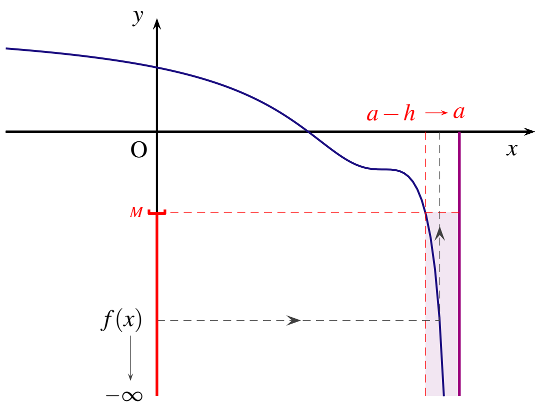


$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = +\infty$$

Pour tout entier naturel k, $f(x) \geqslant 10^k$ à condition de choisir x suffisamment proche de a.



$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = -\infty$$



$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = -\infty$$

Pour tout entier naturel k, $f(x) \leqslant -10^k$ à condition de choisir x suffisamment proche de a.

3 LIMITE FINIE D'UNE FONCTION EN L'INFINI

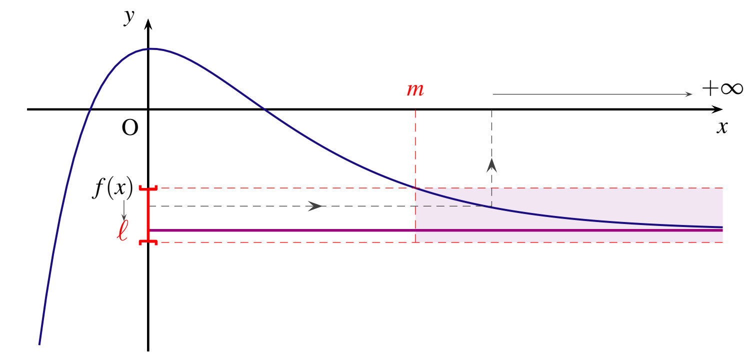
DÉFINITION

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[A;+\infty[$ ou $]-\infty : A]$, où A est un réel.

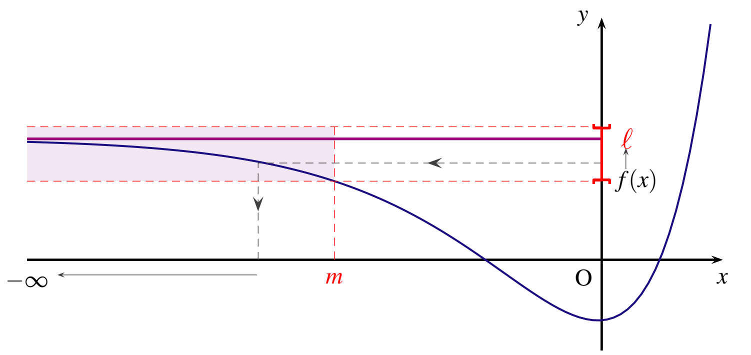
1. Dire que la fonction f a pour limite le réel ℓ en $+\infty$ signifie que tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment grand.
   On note : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$
2. Dire que la fonction f a pour limite le réel ℓ en $-\infty$ signifie que tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour $x < 0$ suffisamment éloigné de 0.
   On note : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$

INTERPRÉTATION GRAPHIQUE : ASYMPTOTE HORIZONTALE

Dans un repère orthogonal du plan, si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ (resp. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$), on dit alors, que la droite d'équation $y = \ell$ est une asymptote horizontale de la courbe représentative de la fonction f en $+\infty$ (resp. en $-\infty$).



$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$: $f(x)$ est aussi proche que l'on veut de ℓ à condition de choisir $x > m$



$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$: $f(x)$ est aussi proche que l'on veut de ℓ à condition de choisir $x < m$

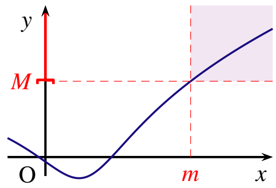
REMARQUE

Pour déterminer la position relative de la courbe représentative de la fonction f par rapport à une asymptote $\mathscr{D}$ d'équation $y = \ell$, il suffit d'étudier le signe de $f(x) - \ell$

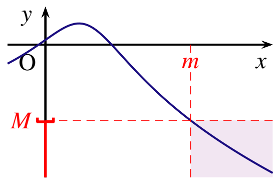
4 LIMITE INFINIE D'UNE FONCTION EN L'INFINI

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[A;+\infty[$, où A est un réel.

1. Dire que la fonction f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ signifie que tout intervalle ouvert de la forme $]M;+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment grand.
   On note : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

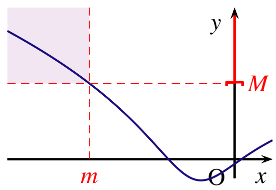


2. Dire que la fonction f a pour limite $-\infty$ en $+\infty$ signifie que tout intervalle ouvert de la forme $]-\infty;M[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment grand.
   On note : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

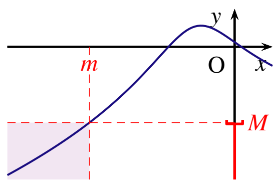


Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]-\infty;A]$, où A est un réel.

1. Dire que la fonction f a pour limite $+\infty$ en $-\infty$ signifie que tout intervalle ouvert de la forme $]M;+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour $x<0$ suffisamment éloigné de 0.
   On note : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

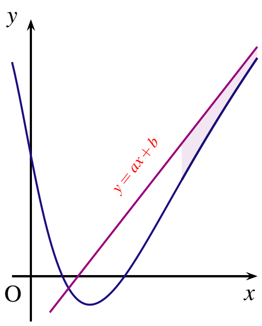


2. Dire que la fonction f a pour limite $-\infty$ en $-\infty$ signifie que tout intervalle ouvert de la forme $]-\infty;M[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour $x<0$ suffisamment éloigné de 0.
   On note : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

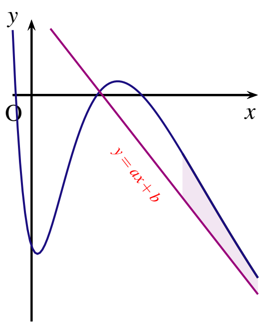


ASYMPTOTE OBLIQUE

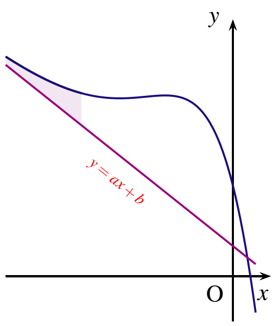
Soit f une fonction définie sur un intervalle de borne $+\infty$ ou $-\infty$, et $\mathscr{D}$ une droite d'équation $y=ax+b$. Si $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$ (ou $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$), on dit alors que la droite d'équation $y=ax+b$ est une asymptote oblique à la courbe représentative de la fonction f en $+\infty$ (ou en $-\infty$).



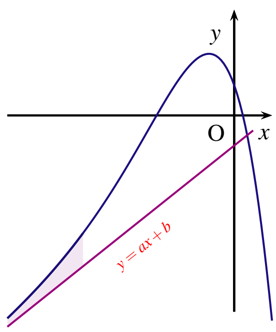
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$



$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$



$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$



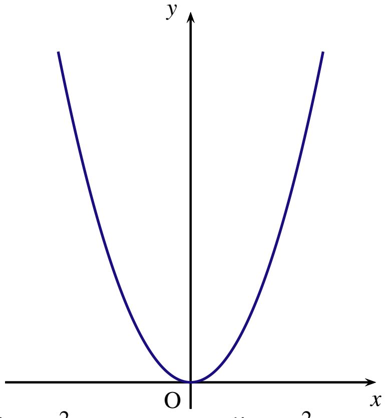
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

REMARQUE

Pour étudier la position relative de la courbe représentative de la fonction f par rapport à une asymptote $\mathscr{D}$ d'équation $y=ax+b$, il suffit d'étudier le signe de la différence $f(x)-(ax+b)$

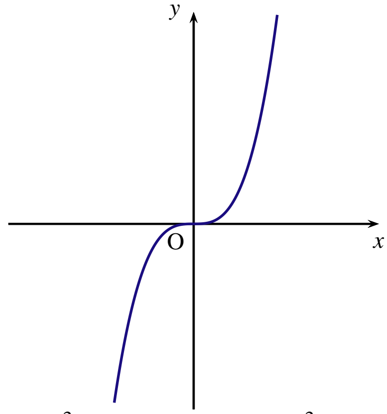
II LIMITES DE FONCTIONS USUELLES

FONCTION CARRÉ



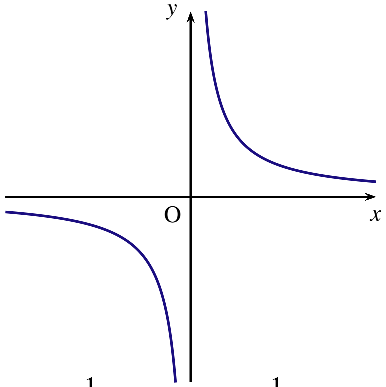
$\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty\,; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$

FONCTION CUBE



$\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = +\infty\,; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$

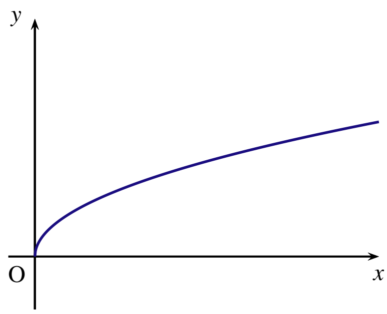
FONCTION INVERSE



$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0\,; \quad \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty\,; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

FONCTION RACINE CARRÉE



$\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x} = 0\,; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

III RÈGLES OPÉRATOIRES SUR LES LIMITES

Dans tout ce paragraphe, u et v désignent deux fonctions, ℓ et ℓ' désignent deux nombres réels, et α désigne $+\infty$ ou $-\infty$ ou un nombre réel.

1 LIMITE D'UNE SOMME DE DEUX FONCTIONS

Si $\lim\limits_{x \to \alpha} u(x) =$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
et $\lim\limits_{x \to \alpha} v(x) =$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors par somme $\lim\limits_{x \to \alpha} (u+v)(x) =$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	À ÉTUDIER

EXEMPLE

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x^2 - 1 + \dfrac{1}{x}$.

Étudions les limites de la fonction f aux bornes de son intervalle de définition.

— $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x^2 - 1 = -1$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$ donc, par somme, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = +\infty$. La courbe représentative de la fonction f admet pour asymtote l'axe des ordonnées.

— $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 - 1 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ donc, par somme, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

2 LIMITE D'UN PRODUIT DE DEUX FONCTIONS

Si $\lim\limits_{x\to\alpha} u(x) =$	ℓ	$\ell \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0
et $\lim\limits_{x\to\alpha} v(x) =$	ℓ'	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors par produit $\lim\limits_{x\to\alpha} (u \times v)(x) =$	$\ell \times \ell'$	$\pm\infty^*$	$\pm\infty^*$	À ÉTUDIER

(*) Lorsque la limite du produit est infinie, c'est la règle des signes du produit qui permet de déterminer le résultat $+\infty$ ou $-\infty$.

EXEMPLE

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x^2 \times \left(\dfrac{1}{x} - 1\right)$.

Étudions les limites de la fonction f aux bornes de son intervalle de définition.

— $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^2 = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{x} - 1 = +\infty$. Nous sommes en présence de la forme indéterminée « $0 \times \infty$ ».

Or pour tout réel x non nul, $x^2 \times \left(\dfrac{1}{x} - 1\right) = x - x^2$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x - x^2 = 0$. Donc, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = 0$

— $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} - 1 = -1$ donc, par produit, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty$

3 LIMITE D'UN QUOTIENT DE DEUX FONCTIONS

Si $\lim\limits_{x\to\alpha} u(x) =$	ℓ	$\ell \neq 0$	ℓ	$+\infty$ ou $-\infty$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
et $\lim\limits_{x\to\alpha} v(x) =$	$\ell' \neq 0$	0	$+\infty$ ou $-\infty$	ℓ'	0	$+\infty$ ou $-\infty$
alors par quotient $\lim\limits_{x\to\alpha} \left(\dfrac{u}{v}\right)(x) =$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	$\pm\infty^*$	0	$\pm\infty^*$	À ÉTUDIER	À ÉTUDIER

(*) Lorsque la limite du quotient est infinie, c'est la règle des signes du produit qui permet de déterminer le résultat $+\infty$ ou $-\infty$.

EXEMPLE

Soit f la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^3-1}{x^2-1}$.

Étudions les limites de la fonction f aux bornes de son intervalle de définition.

— $\lim\limits_{x\to 1} x^3 - 1 = 0$ et $\lim\limits_{x\to 1} x^2 - 1 = 0$. Nous sommes en présence de la forme indéterminée « $\dfrac{0}{0}$ ».
Or pour tout réel $x \neq 1$,

$$\frac{x^3-1}{x^2-1} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^2+x+1}{x+1}$$

Comme $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+x+1}{x+1} = \dfrac{3}{2}$, nous pouvons conclure que, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \dfrac{3}{2}$

— $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 - 1 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 - 1 = +\infty$. Nous sommes en présence de la forme indéterminée « $\dfrac{\infty}{\infty}$ ».
Or pour pour tout réel $x \neq 0$,

$$\frac{x^3-1}{x^2-1} = \frac{x^3\left(1-\dfrac{1}{x^3}\right)}{x^2\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)} = \frac{x\left(1-\dfrac{1}{x^3}\right)}{1-\dfrac{1}{x^2}}$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1-\dfrac{1}{x^3}\right) = +\infty$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \dfrac{1}{x^2} = 1$, il s'ensuit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
La courbe représentative de la fonction f admet pour asymptote l'axe des abscisses en $+\infty$.

4 LIMITE DE LA FONCTION COMPOSÉE u^n

Soit u une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. u^n est la fonction composée de u suivie de la fonction $X \mapsto X^n$.
α, b et c désignent des réels ou $+\infty$ ou $-\infty$.

$$\text{Si } \lim_{x\to\alpha} u(x) = b \text{ et } \lim_{X^n\to b} = c, \text{ alors } \lim_{x\to\alpha} u^n(x) = c$$

EXEMPLE

Soit f la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par $f(x) = \left(\dfrac{2}{1-x}\right)^2$. Déterminons les limites aux bornes de l'intervalle de définition.

— $\displaystyle\lim_{\substack{x\to1\\x>1}} \frac{2}{1-x} = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{X\to-\infty} X^2 = +\infty$, donc $\displaystyle\lim_{\substack{x\to1\\x>1}} \left(\frac{2}{1-x}\right)^2 = +\infty$

— $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{1-x} = 0$ et $\displaystyle\lim_{X\to0} X^2 = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2}{1-x}\right)^2 = 0$

5 FONCTIONS POLYNÔMES OU RATIONNELLES AU VOISINAGE DE $+\infty$ OU DE $-\infty$

RÈGLE 1

Au voisinage de $+\infty$ ou de $-\infty$, une fonction polynôme à la même limite que son monôme de plus haut degré.

EXEMPLE

$$\lim_{x\to+\infty} -3x^3 - 2x^2 + x - 5 = \lim_{x\to+\infty} -3x^3 = -\infty$$

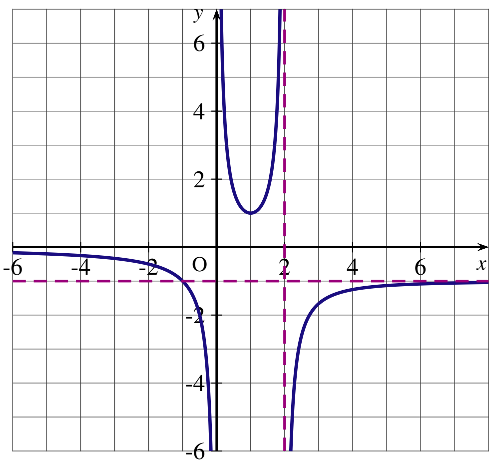
RÈGLE 2

Au voisinage de $+\infty$ ou de $-\infty$, une fonction rationnelle à la même limite que le quotient du monôme de plus haut degré du numérateur par le monôme de plus haut degré du dénominateur.

EXEMPLE

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{5x^2-2x^3}{3x^4+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x^3}{3x^4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2}{3x} = 0$$

EXERCICE 1



La courbe ci-contre, représentative d'une fonction f, admet les quatre asymptotes suivantes :

— deux asymptotes horizontales d'équations respectives $y=-1$ et $y=0$;

— deux asymptotes verticales d'équations respectives $x=0$ et $x=2$.

Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$

EXERCICE 2

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{2-x}{x^3}$. On note C_f sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. À l'aide d'un tableau, étudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs du réel x.
2. a) Déterminer, en justifiant avec soin, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
   b) La courbe C_f admet-elle des asymptotes ?
3. On note f' la dérivée de la fonction f.
   a) Calculer $f'(x)$.
   b) Étudier les variations de f.
4. Déterminer une équation de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse 1.

EXERCICE 3

1. Soit $P(x)=x^2+x-6$ et $Q(x)=2x^2-3x-2$ deux polynômes.
   a) Résoudre $P(x)=0$ et $Q(x)=0$.
   b) En déduire une factorisation de $P(x)$ et $Q(x)$.
2. Soit f la fonction définie sur $]2;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$.
   a) Déterminer $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
   b) La courbe représentative de la fonction f admet-elle des asymptotes ?

EXERCICE 4

Soit f la fonction définie sur $\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ par : $f(x)=\dfrac{2x^2-13x+7}{4x-2}$.
On appelle $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal.

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+} f(x)$, qu'en déduit-on pour la courbe C_f ?
2. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
   a) Déterminer les réels a, b et c tels que $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{4x-2}$.
   b) En déduire que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet pour asymptote la droite Δ d'équation $y=\dfrac{x}{2}-3$.

c) Étudier les positions relatives de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite Δ

d) Résoudre l'inéquation $\dfrac{1}{4x-2} \leqslant 0{,}001$.

e) Calculer le plus simplement possible, une valeur approchée au millième près de l'image par f de 500.

3. Calculer la dérivée de la fonction f.
4. Étudier les variations de f.
5. Donner une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 1.

EXERCICE 5

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-1;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$. On note C_f sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. À l'aide d'un tableau, étudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs du réel x.
2. a) Déterminer, en justifiant avec soin, $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

   b) La courbe C_f admet-elle des asymptotes ?
3. On note f' la dérivée de la fonction f.

   a) Calculer $f'(x)$.

   b) Étudier les variations de f.
4. Déterminer une équation de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse 0.

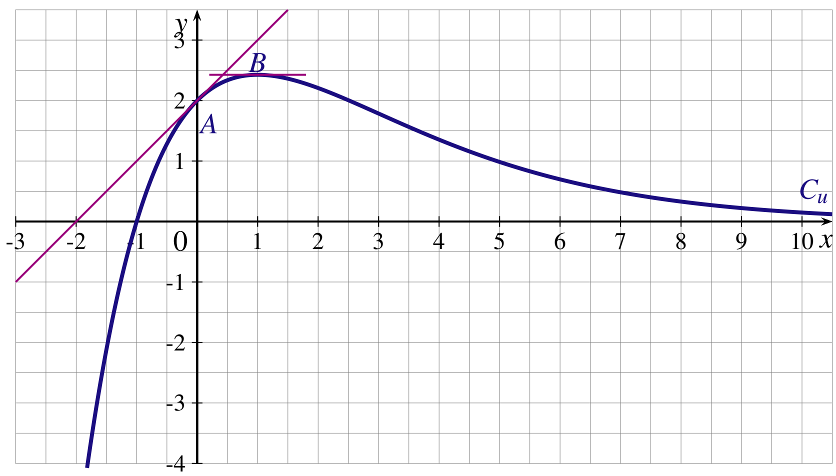
EXERCICE 6

La courbe C_u ci-dessous représente une fonction u définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' la fonction dérivée de la fonction f. On sait que :

— la courbe coupe l'axe des ordonnées au point A et la tangente à la courbe au point A passe par le point de coordonnées $(-2;0)$;

— la courbe admet au point B d'abscisse 1 une tangente parallèle à l'axe des abscisses ;

— l'axe des abscisses est asymptote à la courbe C_u.



1. À partir du graphique et des renseignements fournis :

   a) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} u(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x)$.

   b) Déterminer $u'(0)$ et $u'(1)$.
2. On considère la fonction f définie sur $]-1;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{u(x)}$.

   a) Étudier les limites de la fonction f aux bornes de son intervalle de définition. La courbe représentative de la fonction f admet-elle des asymptotes ?

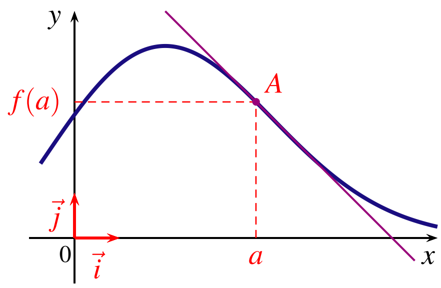
   b) Déterminer $f'(0)$ et $f'(1)$.

Chapitre 2

DÉRIVATION, ÉTUDE DE FONCTIONS

I TANGENTE À UNE COURBE

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, dérivable en a où a est un réel de I, et C_f sa courbe représentative dans un repère du plan. La droite passant par le point $A\,(a;f(a))$ de la courbe C_f et de coefficient directeur $f'(a)$ est appelée la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse a.



Soit f une fonction définie sur un intervalle I, dérivable en a où a est un réel de I, et C_f sa courbe représentative dans un repère du plan.
L'équation réduite de la tangente à la courbe C_f au point A d'abscisse a est :

$$y = f'(a) \times (x-a) + f(a)$$

II DÉRIVÉES DES FONCTIONS DE RÉFÉRENCE

f définie sur ...	$f(x)$	$f'(x)$	f dérivable sur ...
$\mathbb{R}$	k	0	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	$ax+b$	a	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	x^n	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$ pour n entier $n \geqslant 2$
$\mathbb{R}^*$	$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\mathbb{R}^*$	$\dfrac{1}{x^n}$	$-\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$ pour n entier $n \geqslant 1$
$[0;+\infty[$	$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$
$\mathbb{R}$	$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$

III DÉRIVÉES ET OPÉRATIONS

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I :

- $(u+v)' = u' + v'$
- $(ku)' = k \times u'$
- $(uv)' = u'v + uv'$

- $\left(u^2\right)' = 2uu'$
- Si n est un entier non nul, $(u^n)' = nu^{n-1}u'$

Si la fonction v ne s'annule pas sur l'intervalle I (si $v(x) \neq 0$ sur I)

- $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$
- $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

IV DÉRIVÉE ET VARIATIONS D'UNE FONCTION

1 THÉORÈME 1

Soit f une fonction dérivable et monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

— Si f est constante sur I, alors pour tout réel x appartenant à I, $f'(x) = 0$.

— Si f est croissante sur I, alors pour tout réel x appartenant à I, $f'(x) \geqslant 0$.

— Si f est décroissante sur I, alors pour tout réel x appartenant à I, $f'(x) \leqslant 0$.

Le théorème suivant, permet de déterminer les variations d'une fonction sur un intervalle suivant le signe de sa dérivée.

2 THÉORÈME 2

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et f' la dérivée de f sur I.

— Si f' est nulle sur I, alors f est constante sur I.

— Si f' est strictement positive sur I, sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle s'annule, alors f est strictement croissante sur I.

— Si f' est strictement négative sur I, sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle s'annule, alors f est strictement décroissante sur I.

3 THÉORÈME 3

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et x_0 un réel appartenant à I.

1. Si f admet un extremum local en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.
2. Si la dérivée f' s'annule en x_0 **en changeant de signe**, alors f admet un extremum local en x_0.

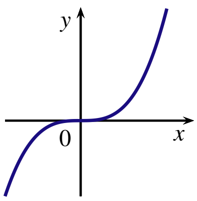
x	a		x_0		b
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	↘		*minimum*		↗

x	a		x_0		b
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	↗		*maximum*		↘

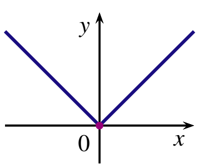
REMARQUES

1. Dans la proposition 2. du théorème 3 l'hypothèse **en changeant de signe** est importante.

   Considérons la fonction cube définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ qui a pour dérivée la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = 3x^2$.
   $f'(0) = 0$ et pour tout réel x non nul, $f'(x) > 0$.
   La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et n'admet pas d'extremum en 0.



2. Une fonction peut admettre un extremum local en x_0 sans être nécessairement dérivable.
   Considérons la fonction valeur absolue f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$.
   f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$.
   f admet un minimum $f(0) = 0$ or f n'est pas dérivable en 0.



EXEMPLE : ÉTUDE D'UNE FONCTION

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=1-\dfrac{4x-3}{x^2+1}$.

1. Étude des limites.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{4x-3}{x^2+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4}{x}=0 \text{ d'où } \lim_{x\to-\infty}1-\frac{4x-3}{x^2+1}=1$$

Par conséquent, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=1$. De même, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$.

2. Calcul de la dérivée $f'(x)$.

Sur $\mathbb{R}$ la fonction f est dérivable comme somme et quotient de deux fonctions dérivables.

$f=1-\dfrac{u}{v}$ d'où $f'=-\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$. Avec pour tout réel x,

$$\begin{aligned} u(x)&=4x-3 &\quad \text{d'où} \quad & u'(x)=4\\ v(x)&=x^2+1 &\quad \text{d'où} \quad & v'(x)=2x \end{aligned}$$

Soit pour tout réel x,

$$\begin{aligned} f'(x)&=-\frac{4(x^2+1)-2x(4x-3)}{(x^2+1)^2}\\ &=-\frac{4x^2+4-8x^2+6x}{(x^2+1)^2}\\ &=\frac{4x^2-6x-4}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

Ainsi, f' est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x)=\dfrac{4x^2-6x-4}{(x^2+1)^2}$

3. Étude des variations de la fonction f

Les variations de la fonction f se déduisent du signe de sa dérivée.

Étudions le signe de $f'(x)=\dfrac{4x^2-6x-4}{(x^2+1)^2}$:

Pour tout réel x, $(x^2+1)^2>0$. Par conséquent, $f'(x)$ est du même signe que le polynôme du second degré $4x^2-6x-4$ avec $a=4$, $b=-6$ et $c=-4$.

Le discriminant du trinôme est $\Delta=b^2-4ac$ Soit

$$\Delta=(-6)^2-4\times4\times(-4)=100$$

Comme $\Delta>0$, le trinôme admet deux racines :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{Soit} \quad x_1=\frac{6-10}{8}=-\frac{1}{2}$$

$$\text{et } x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{Soit} \quad x_2=\frac{6+10}{8}=2$$

Un polynôme du second degré est du signe de a sauf pour les valeurs comprises entre les racines.

Nous pouvons déduire le tableau du signe de $f'(x)$ suivant les valeurs du réel x ainsi que les variations de la fonction f :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	5	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

EXERCICE 1

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left]-\dfrac{3}{2};+\infty\right[$ par $f(x)=8x^2-2x-\dfrac{9}{2x+3}$. On note C_f sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal.

1. a) Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to-\frac{3}{2}^+} f(x)$, qu'en déduit-on pour la courbe C_f ?

   b) Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

2. On note f' la dérivée de la fonction f. Montrer que $f'(x)=\dfrac{8x\left(8x^2+23x+15\right)}{(2x+3)^2}$.

3. Étudier les variations de la fonction f.

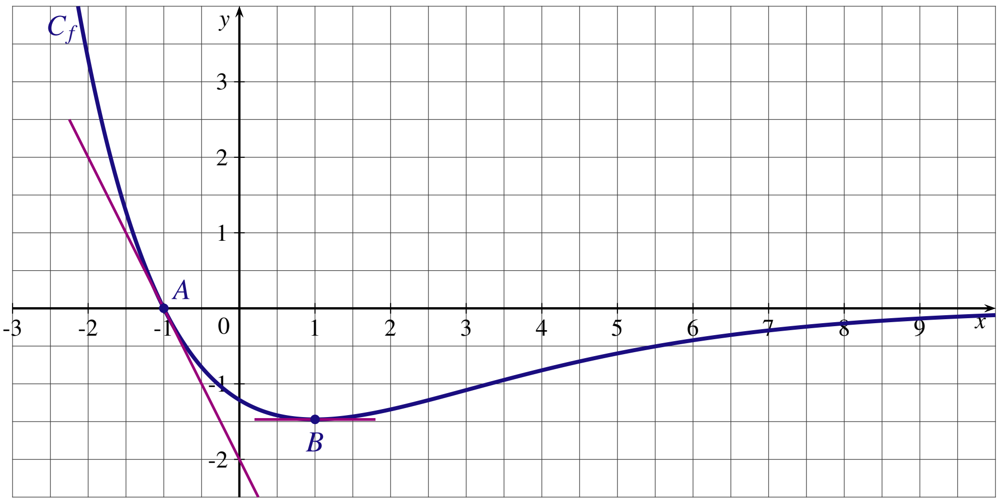
EXERCICE 2

La courbe C_f ci-dessous représente une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' la fonction dérivée de la fonction f. On sait que :

— la courbe coupe l'axe des abscisses au point A et la tangente à la courbe au point A passe par le point de coordonnées $(0;-2)$;

— la courbe admet au point B d'abscisse 1 une tangente parallèle à l'axe des abscisses;

— la courbe admet pour asymptote l'axe des abscisses.

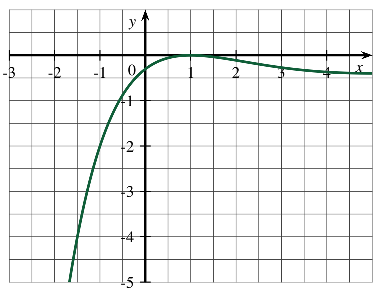


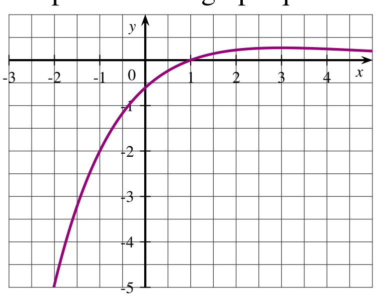
1. À partir du graphique et des renseignements fournis :

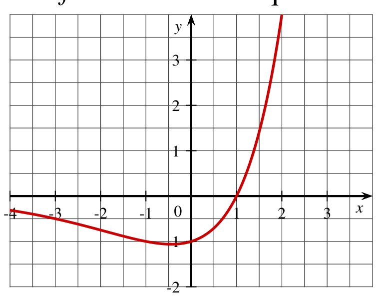
   a) Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

   b) Déterminer $f'(-1)$ et $f'(1)$.

2. Une des trois courbes ci-dessous est la représentation graphique de la fonction f' . Déterminer laquelle.


courbe C_1


courbe C_2


courbe C_3

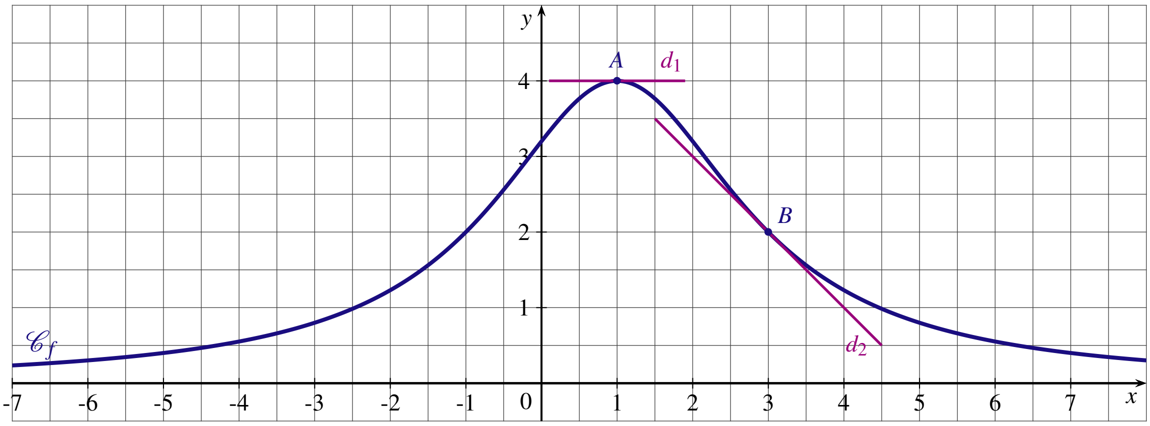
EXERCICE 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 4}{x^2 + 3}$. On note C_f sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.

1. a) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
   b) La courbe représentative de la fonction f admet-elle des asymptotes ?
2. Calculer la dérivée de la fonction f.
3. Étudier les variations de f.
4. Donner une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 1.

EXERCICE 4

La courbe $\mathscr{C}_f$ ci-dessous représente une fonction f strictement positive et dérivable sur $\mathbb{R}$.



On sait que :

— la courbe admet pour asymptote l'axe des abscisses en $-\infty$ et en $+\infty$.

— Les droites d_1 et d_2 sont tangentes à la courbe aux points A et B d'abscisses respectives 1 et 3 ;

— La tangente T à la courbe au point d'abscisse -1 a pour équation $y = x + 3$.

On note f' la dérivée de la fonction f.

1. Tracer la droite T puis, déterminer $f(-1)$ et $f'(-1)$.
2. À partir du graphique et des renseignements fournis, déterminer $f'(1)$ et $f'(3)$.
3. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$.
   a) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.
   b) Donner le tableau des variations de la fonction g.
   c) Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction g au point d'abscisse -1.

EXERCICE 5

Soit f la fonction définie $\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ par $f(x) = \dfrac{2x^3 - 3x^2 - 2x - 1}{2x + 1}$. On note f' sa dérivée.

1. Étudier les limites de la fonction f aux bornes de son intervalle de définition. Que peut-on en déduire pour la courbe C_f ?
2. Calculer $f'(x)$.
3. Donner le tableau des variations de la fonction f.
4. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.
   À l'aide de la calculatrice, donner la valeur arrondie à 10^{-3} près, des solutions de l'équation $f(x) = 0$.

Chapitre 3

COMPLÉMENTS SUR LES SUITES GÉOMÉTRIQUES

I SUITES GÉOMÉTRIQUES

1 DÉFINITION

Dire qu'une suite (u_n) est *géométrique* signifie qu'il existe un nombre réel q non nul tel que, pour tout entier n,

$$u_{n+1} = qu_n$$

Le réel q est appelé la raison de la suite géométrique.

ÉVOLUTION EN POURCENTAGE

- Augmenter une grandeur de $t\%$ équivaut à multiplier sa valeur par $1+\frac{t}{100}$.
- Diminuer une grandeur de $t\%$ équivaut à multiplier sa valeur par $1-\frac{t}{100}$.

Chaque fois qu'on est confronté à une situation d'évolutions successives d'une grandeur de $t\%$, on peut définir une suite géométrique de raison $1+\frac{t}{100}$ (augmentation) ou $1-\frac{t}{100}$ (diminution)

EXEMPLES

1. Un capital de 5 000 € est placé au taux d'intérêt composé de 1% par an.
   On note C_n le capital disponible au bout de n années alors :
   $$C_{n+1} = \left(1+\frac{1}{100}\right)\times C_n = 1{,}01\times C_n$$
   Ainsi, la suite (C_n) est une suite géométrique de premier terme $C_0 = 5000$ et de raison $q = 1{,}01$.
2. Pour lutter contre la pollution, un groupe industriel décide de réduire progressivement sa quantité de rejets de 4% par an. En 2012, la quantité de rejets était de 50 000 tonnes.
   On note r_n la quantité de rejets l'année $2012+n$ d'où :
   $$r_{n+1} = \left(1-\frac{4}{100}\right)\times r_n = 0{,}96\times r_n$$
   Ainsi, la suite (r_n) est une suite géométrique de premier terme $r_0 = 50000$ et de raison 0,96.

2 PROPRIÉTÉ 1

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 alors pour tout entier n,

$$u_n = u_0\times q^n$$

EXEMPLE

L'objectif du groupe industriel est de réduire progressivement la quantité de rejets pour atteindre une quantité inférieure ou égale à 30 000 tonnes (soit une réduction de 40%). Cet objectif sera-t-il atteint au bout de 10 ans ?
Au bout de 10 ans, la quantité de rejets est de :

$$r_{10} = 50000\times 0{,}96^{10}\approx 33242$$

Avec un réduction de 4 % par an, en 2022 l'objectif du groupe industriel ne sera pas atteint.

3 PROPRIÉTÉ 2

Si (u_n) une suite géométrique de raison q alors pour tout entier n et pour tout entier p,

$$u_n = u_p \times q^{n-p}$$

4 MONOTONIE

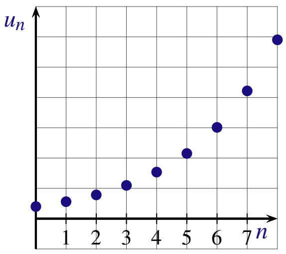
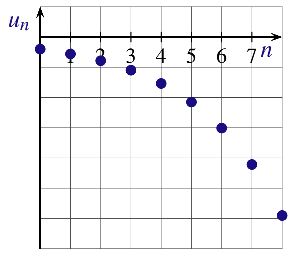
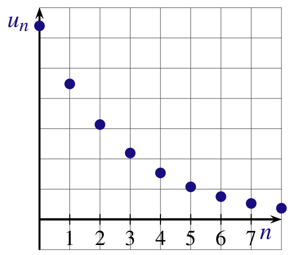
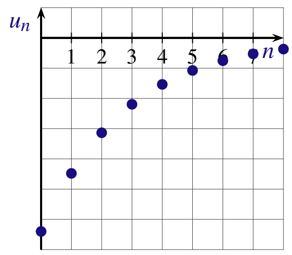
Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 donc :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= u_0 \times q^{n+1} - u_0 \times q^n \\ &= u_0 \times q^n \times (q-1) \end{aligned}$$

La monotonie de la suite dépend du signe de u_0, q^n et $(q-1)$

— Si $q < 0$ alors q^n est positif pour n pair, négatif pour n impair donc la suite n'est pas monotone.

— Si $q > 0$ alors la suite est monotone, croissante ou décroissante selon le signe du produit $u_0 \times (q-1)$.

Si $q > 1$		Si $0 < q < 1$	
Si $u_0 > 0$, alors la suite (u_n) est croissante 	Si $u_0 < 0$, alors la suite (u_n) est décroissante 	Si $u_0 > 0$, alors la suite (u_n) est décroissante 	Si $u_0 < 0$, alors la suite (u_n) est croissante 

Nous pouvons en déduire les deux théorèmes suivants

THÉORÈME 1

Soit q un réel non nul.

— Si $q < 0$ alors la suite (q^n) n'est pas monotone.

— Si $q > 1$ alors la suite (q^n) est strictement croissante.

— Si $0 < q < 1$ alors la suite (q^n) est strictement décroissante.

— Si $q = 1$ alors la suite (q^n) est constante.

THÉORÈME 2

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q non nulle et de premier terme u_0 non nul

— Si $q < 0$ alors la suite (u_n) n'est pas monotone.

— Si $q > 0$ et $u_0 > 0$ alors la suite (u_n) a le même sens de variation que la suite (q^n).

— Si $q > 0$ et $u_0 < 0$ alors la suite (u_n) a le sens de variation contraire de celui de la suite (q^n).

5 SOMME DE TERMES CONSÉCUTIFS

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$ et de premier terme u_0 alors pour tout entier n,

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{i=0}^{n} u_i = u_0 \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right)$$

Cette formule peut se retenir de la façon suivante :

La somme S de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q \neq 1$ est :

$$S = \text{premier terme } \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}$$

II LIMITE D'UNE SUITE

On étudie le comportement d'une suite (u_n) quand n prend de grandes valeurs.

1 LIMITE INFINIE

DÉFINITION

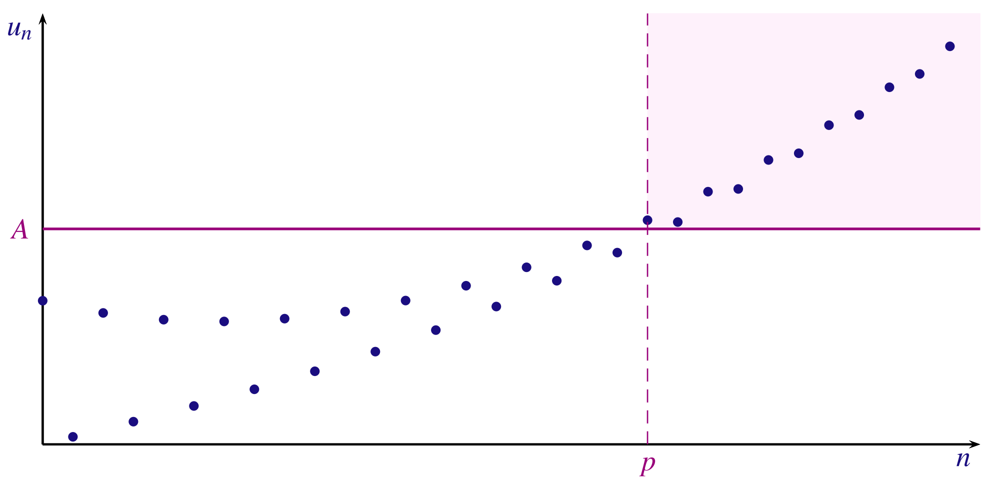
On dit qu'une suite (u_n) admet une limite égale à $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si pour tout nombre réel A strictement positif, tous les termes de la suite sont supérieurs à A à partir d'un certain rang p. On écrit :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$$

Concrètement, une suite (u_n) tend vers $+\infty$ si u_n est aussi grand que l'on veut dès que n est suffisamment grand.

INTERPRÉTATION GRAPHIQUE

On a représenté ci-dessous une suite (u_n) ayant une limite égale à $+\infty$



Pour tout entier $n \geqslant p$, $u_n > A$. p est le seuil à partir duquel $u_n > A$

DÉFINITION

On dit qu'une suite (u_n) admet une limite égale à $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si pour tout nombre réel A strictement négatif, tous les termes de la suite sont inférieurs à A à partir d'un certain rang p. On écrit :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$$

2 LIMITE FINIE

DÉFINITION

Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$ et ℓ un réel.

1. Dire que la suite (u_n) admet pour limite le réel ℓ signifie que tout intervalle ouvert de la forme $]\ell - r; \ell + r[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang p. On écrit :

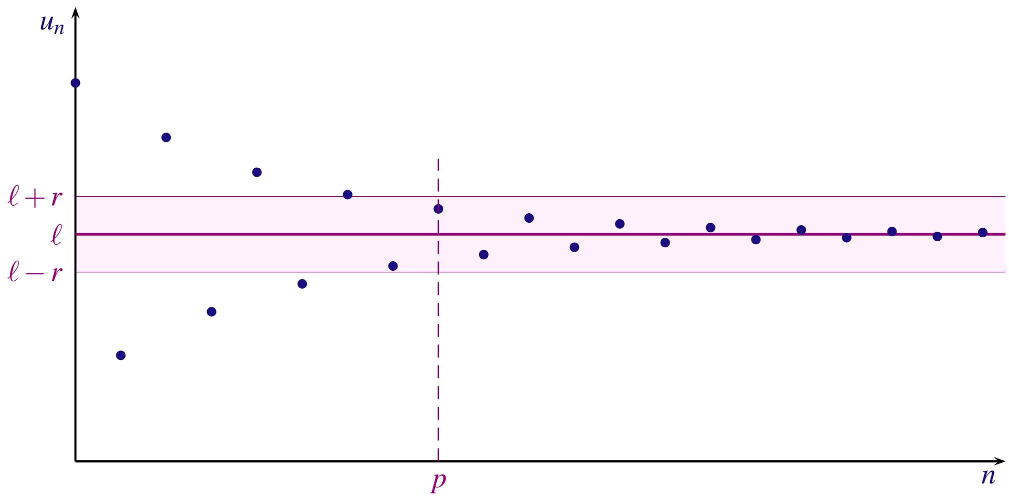
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$$

2. Une suite qui admet pour limite un réel ℓ est dite *convergente*.

Autrement dit, une suite (u_n) est convergente vers un réel ℓ si tous les termes de la suite à partir d'un certain rang p peuvent être aussi proches que voulu de ℓ.

INTERPRÉTATION GRAPHIQUE

Si on représente la suite convergente par un nuage de points dans un repère, à partir d'un certain rang p, tous les points sont dans la bande délimitée par les droites d'équation $y = \ell - r$ et $y = \ell + r$.



Le rang p est le seuil à partir duquel « u_n est à une distance de ℓ inférieure à r »

PROPRIÉTÉ

La suite (u_n) converge vers un réel ℓ si, et seulement si, la suite $(u_n) - \ell$ est convergente vers un 0.

REMARQUE

Une suite peut ne pas admettre de limite. Par exemple la suite de terme général $(-1)^n$ prend alternativement les valeurs 1 et -1. Elle n'admet pas de limite.

3 LIMITES D'UNE SUITE GÉOMÉTRIQUE

THÉORÈME *(admis)*

Soit q un réel strictement positif :

— Si $0 < q < 1$ alors la suite géométrique de terme général q^n converge vers 0 : $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.

— Si $q = 1$ alors la suite géométrique de terme général q^n est constante et sa limite est 1.

— Si $q > 1$ alors la suite géométrique de terme général q^n a pour limite $+\infty$: $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.

COROLLAIRE

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 non nul et de raison q strictement positive.

— Si $0 < q < 1$ alors la suite (u_n) converge et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

— Si $q = 1$ alors la suite (u_n) est constante et égale à u_0.

— Si $q > 1$ alors la suite (u_n) admet une limite infinie avec :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty \text{ si } u_0 < 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty \text{ si } u_0 > 0$$

RECHERCHE D'UN SEUIL À L'AIDE D'UN ALGORITHME

EXEMPLE

Soit (u_n) la suite géométrique de raison 1,01 et de premier terme $u_0 = 5000$

L'algorithme suivant permet d'obtenir le seuil à partir duquel le terme général de la suite est supérieur à 7 500.

C'est à dire déterminer le plus petit entier p tel que pour tout entier $n \geqslant p$, $5000 \times 1{,}01^n \geqslant 7500$

```
INITIALISATION :
U = 5000 ;
N = 0;
TRAITEMENT :
TANT_QUE U < 7500 FAIRE
  | N prend la valeur N + 1 ;
  | U prend la valeur 1,01 × U ;
FIN TANT_QUE
SORTIE :
Afficher N
```

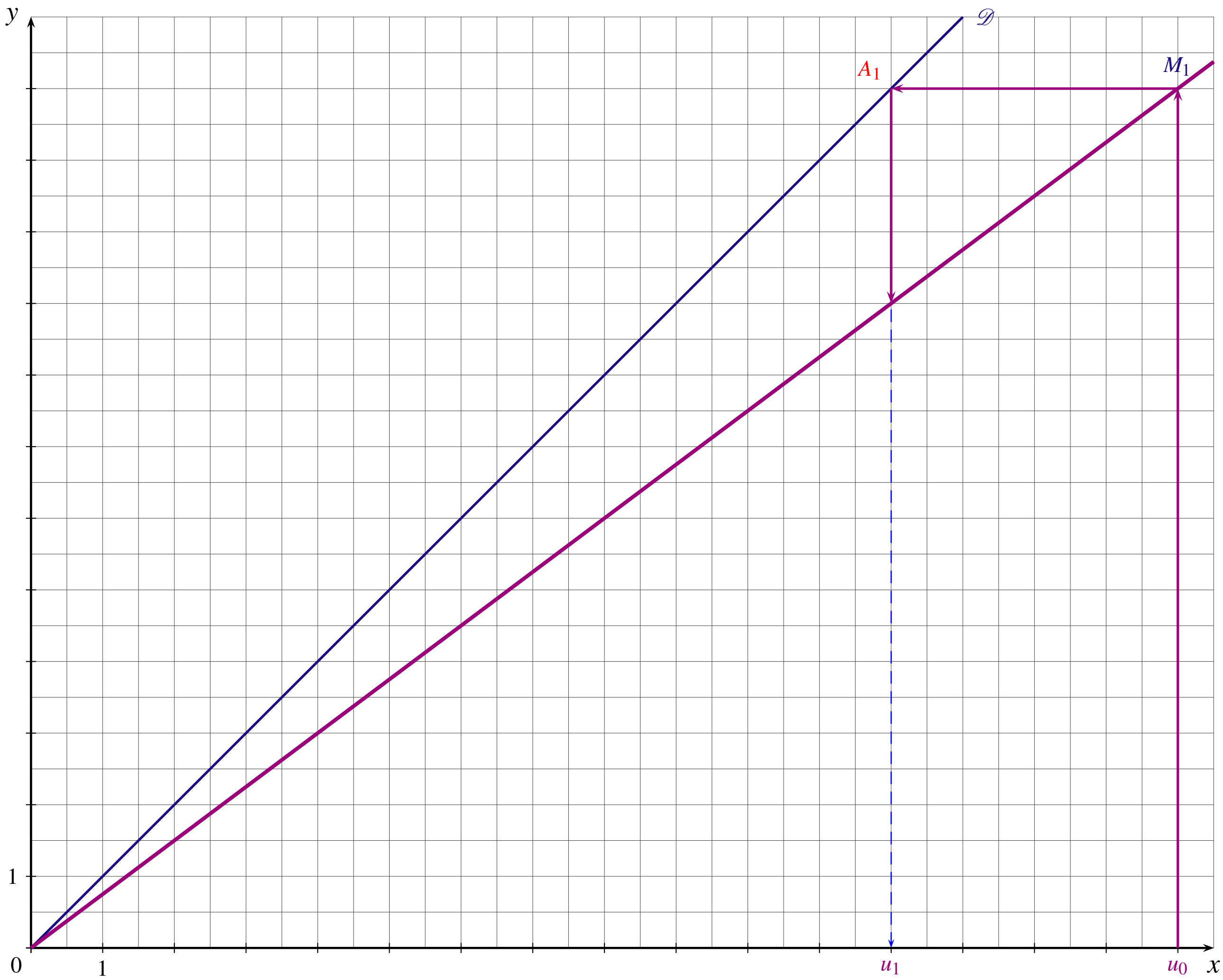
PROGRAMME	
TEXAS	CASIO
PROGRAM : SEUIL	===== SEUIL =====
: 5000 → U	5000 → U ↲
: 0 → N	0 → N ↲
: While U < 7500	While U < 7500 ↲
: N + 1 → N	N + 1 → N ↲
: 1.01*U → U	1.01*U → U ↲
: End	WhileEnd ↲
: Disp U	N

La calculatrice affiche 41. Donc pour tout entier $n \geqslant 41$, on a $5000 \times 1{,}01^n \geqslant 7500$.

EXERCICE 1

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 16$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}75 \times u_n$.

1. a) Quelle est la nature de la suite (u_n) ?
   b) Exprimer, pour tout entier naturel n, u_n en fonction de n.
   c) Étudier la monotonie de la suite (u_n).
   d) On note S_n la somme des $n+1$ premiers termes de la suite u_n. Calculer S_4.
2. On a tracé ci-dessous dans un repère orthonormé, la courbe représentative de la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = 0{,}75x$ et la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$.



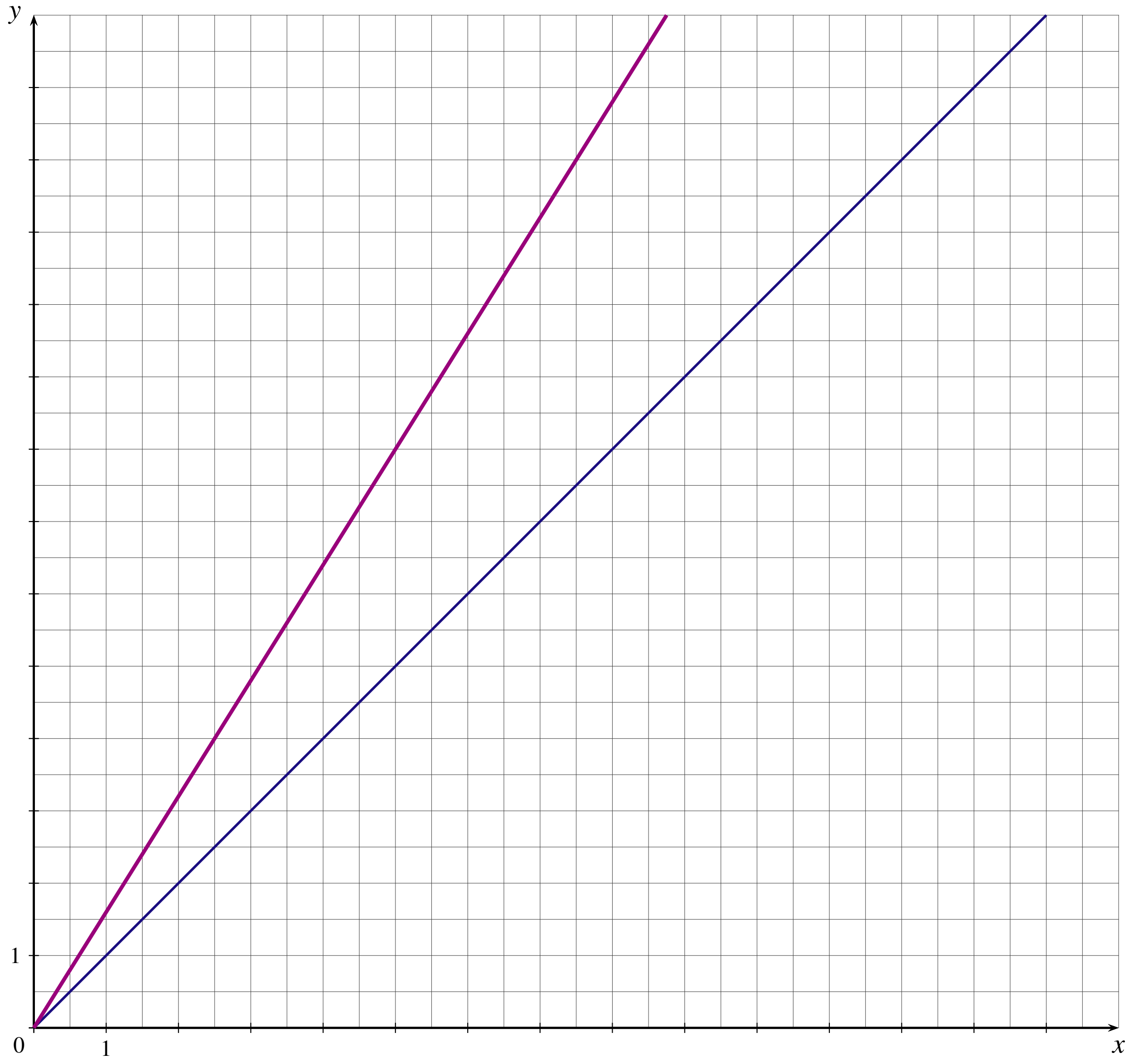
   a) Construire sur le graphique les termes de la suite $u_2, u_3, \cdots, u_{11}$.
   b) Que peut-on conjecturer à propos de la limite de la suite (u_n) ?
3. À l'aide de la calculatrice, déterminer le plus petit entier n tel que $u_n \leqslant 0{,}1$.
4. Montrer que pour tout entier n, $S_n = 64\left(1 - 0{,}75^{n+1}\right)$. Vers quel réel tend S_n quand n tend vers $+\infty$?

EXERCICE 2

Soit (u_n) la suite géométrique définie par : $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{8}{5} \times u_n$.

1. a) Exprimer, pour tout entier naturel n, u_n en fonction de n.
   b) Étudier le sens de variation de la suite (u_n).

2. a) Utiliser les droites d'équations $y = x$ et $y = 1{,}6x$ pour construire les huit premiers termes de la suite (u_n).



   b) Que peut-on conjecturer à propos de la limite de la suite (u_n) ?

3. À l'aide de la calculatrice, déterminer le plus petit entier n tel que $u_n \geqslant 5000$.

4. On note S la somme des n premiers termes de la suite u_n.

   a) Montrer que pour tout entier n, $S = \dfrac{5\left(1{,}6^n - 1\right)}{6}$.

   b) Vers quel réel tend S quand n tend vers $+\infty$?

EXERCICE 3

Le glacier d'Aletsch, situé dans le sud de la Suisse, est le plus grand glacier des Alpes.
En 2010, sa longueur était de 22,7 kilomètres pour une superficie de 128km^2.
Depuis 1980, un réchauffement climatique significatif a conduit à un recul des glaciers de plus en plus rapide.
On émet l'hypothèse que la longueur du glacier d'Aletsch diminue de 2 % tous les 10 ans à partir de 2010.
On note u_n la longueur en kilomètres du glacier d'Aletsch n dizaines d'années après 2010. Ainsi, $u_0 = 22{,}7$.

1. Donner une estimation de la longueur du glacier en 2020.

2. a) Justifier que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}98u_n$.

   b) Quelle est la nature de la suite (u_n) ?

c) Exprimer u_n en fonction de n.

3. Selon ce modèle, le glacier d'Aletsch aura-t-il perdu au moins quatre kilomètres en un siècle ?

4. On souhaite écrire un algorithme qui permette d'afficher dans combien d'années le glacier d'Aletsch aura perdu au moins la moitié de sa longueur.

   Parmi les trois algorithmes suivants, déterminer celui qui convient pour répondre au problème posé et expliquer pourquoi les deux autres ne conviennent pas.

Algorithme 1

Affecter à n la valeur 0
Affecter à U la valeur 22,7
Tant que $U \geqslant 11{,}35$
    Affecter à U la valeur $22{,}7 \times 0{,}98^n$
    Affecter à n la valeur $n+1$
Fin Tant que
Afficher $10 \times n$

Algorithme 2

Affecter à n la valeur 0
Affecter à U la valeur 22,7
Tant que $U \geqslant 11{,}35$
    Affecter à U la valeur $0{,}98 \times U$
    Affecter à n la valeur $n+1$
Fin Tant que
Afficher $10 \times n$

Algorithme 3

Affecter à n la valeur 0
Affecter à U la valeur 22,7
Tant que $U \leqslant 11{,}35$
    Affecter à U la valeur $0{,}98 \times U$
    Affecter à n la valeur $n+10$
Fin Tant que
Afficher n

EXERCICE 4

(D'après sujet bac Nouvelle Calédonie 2013)

La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = 0{,}4u_n + 3$ et $u_0 = -1$.

PARTIE A

1. À l'aide d'un tableur, on a calculé les 11 premières valeurs de u_n. On obtient les résultats suivants :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	Valeur de n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	Valeur de u_n	-1	2,6	4,04	4,616	4,8464	4,9386	4,9754	4,9902	4,9961	4,9984	4,9994

   Parmi les quatre formules ci-dessous, laquelle a-t-on entré dans la cellule C2 pour obtenir par copie vers la droite les valeurs affichées dans les cellules D2 à L2 (on indiquera la réponse sur la copie sans justification) ?

   a. $=0{,}4^n+3$ **b.** $=\$B\$2*0{,}4+3$ **c.** $=B2*0{,}4+3$ **d.** $=0{,}4\hat{\ }C1+3$

2. Quelle conjecture peut-on faire sur la limite de la suite (u_n) ?

3. On considère l'algorithme suivant :

VARIABLES :	p et n sont des entiers naturels, u est un nombre réel
ENTRÉE :	saisir la valeur de p
INITIALISATION :	n prend la valeur 0, u prend la valeur -1
TRAITEMENT :	Tant que $\|u-5\| > 10^{-p}$
	n prend la valeur $n+1$
	u prend la valeur $0{,}4u+3$
	Fin Tant que
SORTIE :	Afficher la valeur de n

À l'aide du tableau de la question 1, donner la valeur affichée par cet algorithme lorsque $p=2$.

PARTIE B

On étudie maintenant la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = 6\times(0{,}4)^n$.

1. Donner la nature de la suite (v_n) et ses éléments caractéristiques.
2. Déterminer la limite de (v_n) quand n tend vers $+\infty$.
3. On admet que pour tout entier naturel n : $u_n = 5 - v_n$. Déterminer la limite de (u_n).
4. a) Déterminer en fonction de n la somme $v_0+v_1+\cdots+v_n$.

   b) En déduire en fonction de n la somme $u_0+u_1+\cdots+u_n$.

EXERCICE 5

La température d'un gâteau à la sortie du four est de 160°C.
L'évolution de la température du gâteau en fonction du temps est modélisée par la suite (T_n) définie par $T_0 = 160$ et, pour tout entier naturel n, $T_{n+1} = 0{,}94\times T_n + 1{,}5$.
Pour tout entier naturel n, le terme T_n de la suite (T_n) est égal à la température en degrés Celsius du gâteau n minutes après la sortie du four.

PARTIE A

1. Quelle est la température, arrondie au degré près, du gâteau 5 minutes après la sortie du four ?
2. Pour déterminer au bout de combien de minutes la température du gâteau sera inférieure ou égale à 30°C, on a commencé par élaborer l'algorithme ci-dessous.
   Recopier et compléter cet algorithme afin qu'il affiche la réponse.

VARIABLES :	N est un entier naturel
	T est un nombre réel
INITIALISATION :	Affecter à N la valeur 0
	Affecter à T la valeur 160
TRAITEMENT :	Tant que ...
	Affecter à T la valeur ...
	Affecter à N la valeur ....
	Fin Tant que
SORTIE :	Afficher N

PARTIE B

1. Pour tout nombre entier naturel n, on définit la suite (V_n) par : $V_n = T_n - 25$.

   a) Montrer que la suite (V_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

b) Montrer que, pour tout nombre entier naturel n, on a : $T_n = 135 \times 0{,}94^n + 25$.

2. Calculer la limite de la suite (T_n) et interpréter ce résultat.

EXERCICE 6

En raison de l'évaporation, une piscine perd chaque semaine 3 % de son volume d'eau.
On remplit un bassin avec 95 m^3 d'eau.

PARTIE A

On note C_n le nombre de m^3 d'eau contenu dans ce bassin au bout de n semaines.

1. Déterminer la nature de la suite (C_n) puis, exprimer C_n en fonction de n.
2. Au bout de six semaines, le bassin aura-t-il perdu 18 % de son volume d'eau ?

PARTIE B

Pour être praticable, le bassin doit contenir au moins 88 m^3 d'eau.
Pour compenser la perte due à l'évaporation, on décide de rajouter chaque semaine 2,4 m^3 d'eau dans le bassin.
On note u_n le nombre de m^3 d'eau contenu dans ce bassin au bout de n semaines.
On a donc $u_0 = 95$ et, pour tout entier n, $u_{n+1} = 0{,}97 \times u_n + 2{,}4$.

1. Pour déterminer au bout de combien de semaines le volume d'eau du bassin sera inférieure ou égale à 88 m^3 d'eau, on a commencé par élaborer l'algorithme ci-dessous :

```
Initialisation :  Affecter à N la valeur 0
                  Affecter à U la valeur 95
Traitement :      Tant_que U ··· :
                  |  Affecter à N la valeur N + 1
                  |  Affecter à U la valeur ...
                  Fin Tant_que
Sortie :          Afficher ...
```

   a) Recopier et compléter cet algorithme afin qu'il affiche la réponse.
   b) Quel nombre obtient-on en sortie de l'algorithme ? Interpréter ce résultat.

2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 80$.
   a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   b) Exprimer v_n en fonction de n. En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = 80 + 15 \times 0{,}97^n$.
3. Étudier la monotonie de la suite u_n.
4. Déterminer la limite de la suite (u_n). Interpréter ce résultat.

EXERCICE 7

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = 1{,}05u_n - 30$ et de premier terme u_0.
Pour tout nombre entier naturel n, on définit la suite (v_n) par : $v_n = u_n - 600$.

1. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
2. On suppose dans cette question, que $u_0 = 500$
   a) Montrer que, pour tout nombre entier naturel n, on a : $u_n = 600 - 100 \times 1{,}05^n$.
   b) Étudier la monotonie de la suite u_n.
   c) Déterminer la limite de la suite (u_n).
   d) À l'aide d'un algorithme, déterminer le plus petit entier p tel que pour tout entier $n \geqslant p$ on a $u_n \leqslant 250$.
3. On suppose dans cette question, que $u_0 = 800$

a) Montrer que, pour tout nombre entier naturel n, on a : $u_n = 600 + 200 \times 1{,}05^n$.

b) Étudier la monotonie de la suite u_n.

c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

d) À l'aide d'un algorithme, déterminer le plus petit entier p tel que pour tout entier $n \geqslant p$ on a $u_n \geqslant 1000$.

EXERCICE 8

Au 31 décembre 2014, Pierre n'a réussi à économiser que 40 euros. Ses parents lui versent 50 euros tous les premiers du mois.
Pierre décide que pour s'offrir un smartphone qui coûte 180 euros, il ne dépensera chaque mois que 20 % de son capital accumulé.
Le premier versement lui a été fait au 1er janvier 2015.
Soit u_n le montant des économies de Pierre à la fin du mois après le n-ième versement. Ainsi $u_0 = 40$ et u_1 correspond au montant des économies de Pierre au soir du 31 janvier 2015.

1. Montrer que $u_2 = 97{,}60$.
2. Au terme de quel mois, Pierre aura-t-il économisé la somme nécessaire à l'achat du smartphone ?

Chapitre 4

PRIMITIVES

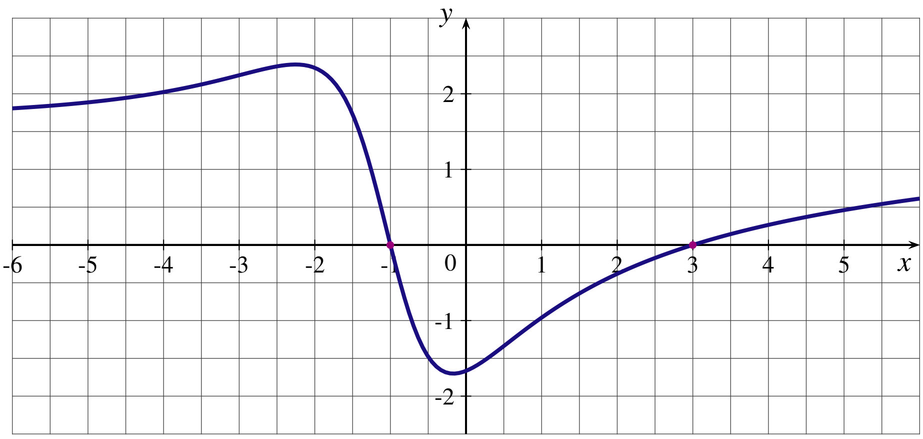
ACTIVITÉS

1. Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 3x - 1$ et $g(x) = -2x + 3$.
   Vérifier que g est la dérivée de f. Trouver d'autres fonctions ayant g pour dérivée.

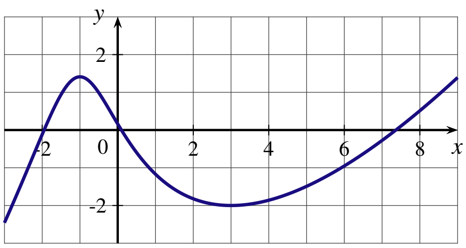
2. À l'aide du tableau des dérivées, trouver une fonction F ayant pour dérivée la fonction f donnée dans chacun des cas suivants :

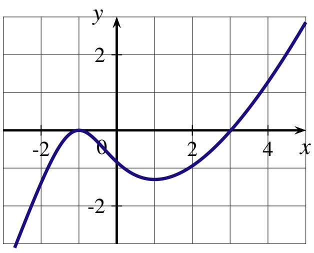
a) $f(x) = \dfrac{1}{2}$	b) $f(x) = x^3$	c) $f(x) = 3x - 2$
d) $f(x) = 2x^2 + x - 1$	e) $f(x) = \dfrac{3}{x^2}$	f) $f(x) = (2x-1)^2$

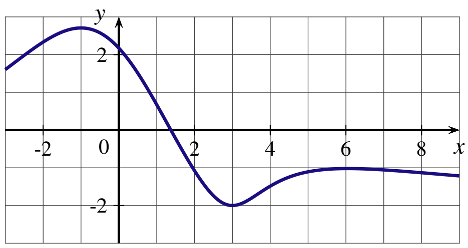
3. La courbe ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$

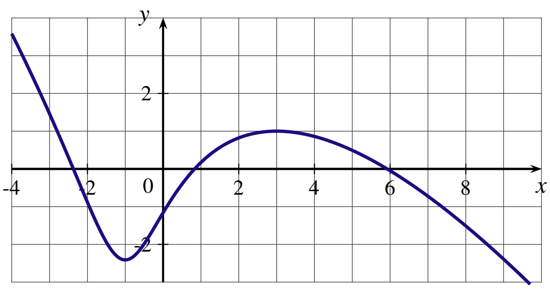


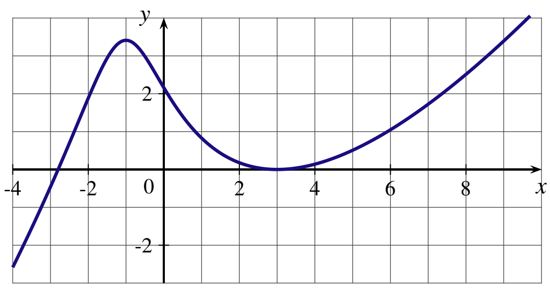
Parmi les cinq courbes suivantes, quelles sont celles susceptibles de représenter une fonction F ayant pour dérivée la fonction f ?


Courbe C_1


Courbe C_2


Courbe C_3


Courbe C_4


Courbe C_5

I PRIMITIVES

1 DÉFINITION

f est une fonction définie sur un intervalle I.
Une primitive de f sur I est une fonction F dérivable sur I et telle que pour tout réel x de I, $F'(x) = f(x)$.

EXEMPLE

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5 - 3x$
Les fonctions F et G définies sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = -\dfrac{3}{2}x^2 + 5x$ et $G(x) = -\dfrac{3}{2}x^2 + 5x - \sqrt{2}$ sont des primitives de f sur $\mathbb{R}$.
De façon générale, toute fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = -\dfrac{3}{2}x^2 + 5x + c$, où c est un réel, est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2 ENSEMBLE DES PRIMITIVES D'UNE FONCTION

Si F est une primitive de f sur un intervalle I, alors les primitives de f sur I sont les fonctions G définies pour tout réel x de I par $G(x) = F(x) + k$ où k est un réel.

✻ DÉMONSTRATION

— Soit F une primitive de la fonction f sur I et G une fonction définie pour tout réel x de I par $G(x) = F(x) + k$ où k est un réel.
  Alors, $G'(x) = F'(x) + 0 = f(x)$ donc G est aussi une primitive de f sur I.
— Soient G et F deux primitives de f sur I montrons qu'il existe un réel k tel que pour tout réel x de I, $G(x) = F(x) + k$.
  On considère la fonction H définie sur I par $H(x) = G(x) - F(x)$ alors,

$$H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

  H' est la fonction nulle sur I ce qui signifie que H est une fonction constante sur I.
  Ainsi, pour tout réel x de I, $H(x) = k$ où k est un réel. Soit $G(x) - F(x) = k$ donc $G(x) = F(x) + k$.

3 PRIMITIVE VÉRIFIANT UNE CONDITION

Soit f une fonction admettant des primitives sur un intervalle I. Soit x_0 un réel de l'intervalle I et y_0 un réel quelconque.
Il existe une *unique* primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$.

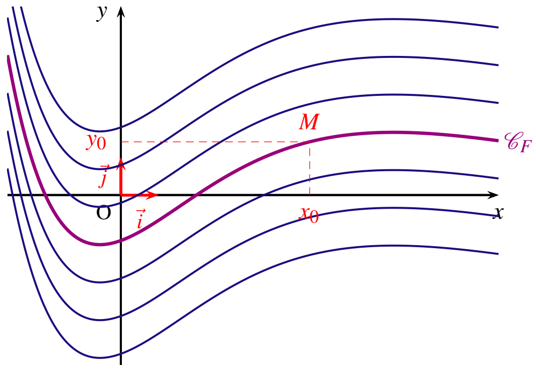
✻ DÉMONSTRATION

Si G est une primitive de f sur I, alors toute primitive F de f sur I est définie par $F(x) = G(x) + k$ avec k réel.
La condition $F(x_0) = y_0$ s'écrit $G(x_0) + k = y_0$ d'où $k = y_0 - G(x_0)$.
Il existe donc une seule primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$, définie par $F(x) = G(x) + y_0 - G(x_0)$.

INTERPRÉTATION GRAPHIQUE

Si on connaît la courbe $\mathscr{C}$ représentative d'une primitive de f sur I, alors les courbes des primitives de f sur I se déduisent de $\mathscr{C}$ par une translation de vecteur $k\vec{j}$ où k est un réel.

Un point $M(x_0;y_0)$ étant donné, il n'existe qu'une seule courbe $\mathscr{C}_F$ de la famille passant par ce point.



II CALCULS DE PRIMITIVES

Nous admettons la propriété suivante :
Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

Les opérations sur les fonctions dérivables et la définition d'une primitive conduisent aux résultats suivants :

— Si F et G sont des primitives des fonctions f et g sur un intervalle I, alors $F+G$ est une primitive de $f+g$ sur I.

— Si F est une primitives de la fonction f sur un intervalle I et k un réel, alors kF est une primitive de kf sur I.

1 PRIMITIVES DES FONCTIONS USUELLES

f est définie sur I par ...	une primitive F est donnée par	validité
$f(x)=a$ (a est un réel)	$F(x)=ax$	sur $\mathbb{R}$
$f(x)=x^n$ (n est un entier naturel)	$F(x)=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	sur $\mathbb{R}$
$f(x)=\dfrac{1}{x}$	*prochain cours*	sur $]0;+\infty[$
$f(x)=\dfrac{1}{x^2}$	$F(x)=-\dfrac{1}{x}$	sur $]-\infty;0[$ ou sur $]0;+\infty[$
$f(x)=\dfrac{1}{x^n}$ (n entier, $n>1$)	$F(x)=-\dfrac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	sur $]-\infty;0[$ ou sur $]0;+\infty[$
$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x)=2\sqrt{x}$	sur $]0;+\infty[$
$f(x)=\cos(x)$	$F(x)=\sin(x)$	sur $\mathbb{R}$
$f(x)=\cos(ax+b)$ ($a\neq 0$)	$F(x)=\dfrac{1}{a}\sin(ax+b)$	sur $\mathbb{R}$
$f(x)=\sin(x)$	$F(x)=-\cos(x)$	sur $\mathbb{R}$
$f(x)=\sin(ax+b)$ ($a\neq 0$)	$F(x)=-\dfrac{1}{a}\cos(ax+b)$	sur $\mathbb{R}$

EXEMPLES

1. Soit f la fonction définie pour tout réel t par $f(t)=-3\cos\left(2t+\dfrac{\pi}{3}\right)$.

Les primitives de la fonction f sont les fonctions F définies sur $\mathbb{R}$ par $F(t) = -\frac{3}{2}\sin\left(2t+\frac{\pi}{3}\right)+c$ où c est un réel quelconque.

2. Déterminer la primitive F de la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 2x^2 - x + \frac{3}{x^2} - 1$ telle que $F(1) = \frac{5}{6}$.

— Une primitive de la fonction f est la fonction F définie pour tout réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$ par

$$F(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{x} - x + c$$

où c est un réel à déterminer.

— Comme $F(1) = \frac{5}{6}$, on en déduit que :

$$\begin{aligned}\frac{2}{3} - \frac{1}{2} - 3 - 1 + c = \frac{5}{6} &\iff -\frac{23}{6} + c = \frac{5}{6}\\ &\iff c = -3\end{aligned}$$

Ainsi, la primitive F de la fonction f est définie sur $]0;+\infty[$ par $F(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{x} - x - 3$

2 PRIMITIVES DES FORMES USUELLES

u est une fonction dérivable sur un intervalle I.
On obtient le tableau suivant à partir de la dérivation d'une fonction composée.

conditions	fonction f	une primitive F est donnée par
n entier, $n > 0$	$f = u'u^n$	$F = \frac{u^{n+1}}{n+1}$
u ne s'annule pas sur I	$f = \frac{u'}{u^2}$	$F = -\frac{1}{u}$
u ne s'annule pas sur I n entier, $n > 1$	$f = \frac{u'}{u^n}$	$F = -\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}$
u strictement positive sur I	$f = \frac{u'}{\sqrt{u}}$	$F = 2\sqrt{u}$
	$f = u'\cos(u)$	$F = \sin(u)$
	$f = u'\sin(u)$	$F = -\cos(u)$

EXEMPLE

Déterminer la primitive F de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{4x+2}{(x^2+x+1)^2}$ telle que $F(-1) = 0$.

Le carré au dénominateur incite à mettre en évidence la forme $\frac{u'}{u^2}$.

$f(x) = 2 \times \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$ soit $f = 2 \times \frac{u'}{u^2}$ avec pour tout réel x, $u(x) = x^2+x+1$ et $u'(x) = 2x+1$.

Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est $F = -2 \times \frac{1}{u} + c$ où c est un réel à déterminer. Soit pour tout réel x,

$$F(x) = \frac{-2}{x^2+x+1} + c$$

Or $F(-1) = 0 \Leftrightarrow -2 + c = 0 \Leftrightarrow c = 2$. Ainsi, la primitive F de la fonction f sur $\mathbb{R}$ est la fonction définie par :

$$F(x) = \frac{-2}{x^2+x+1} + 2$$

EXERCICE 1

1. Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive F de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$

a) $f(x)=3x^2+\dfrac{1}{2}$ b) $f(x)=x^3-4x+\sqrt{2}$ c) $f(x)=\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x}{3}+1$

2. Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive F de la fonction f définie sur $]0;+\infty[$

a) $f(x)=3x+\dfrac{3}{x^2}$ b) $f(x)=\dfrac{x^3-2x^2+1}{x^2}$ c) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}$

EXERCICE 2

Dans chacun des cas suivants, calculer la primitive F de la fonction f qui vérifie la condition donnée.

1. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2-5x-1$ et $F\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$.
2. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3x^2-5x+\dfrac{1}{2}$ et $F(1)=0$.
3. f est définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=x-\dfrac{1}{x^2}+1$ et $F(1)=2$.
4. f est définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=x^3+\dfrac{2}{x^2}$ et $F(1)=-\dfrac{1}{4}$.
5. f est définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=2x^3-1-\dfrac{1}{x^2}$ et $F(1)=1$.

EXERCICE 3

Soit F et G les fonctions définies sur $]-1;+\infty[$ par : $F(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$ et $G(x)=x-2+\dfrac{1}{x+1}$
Montrer que F et G sont deux primitives sur $]-1;+\infty[$ d'une même fonction f que l'on précisera.

EXERCICE 4

Soit f la fonction définie sur $\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ par $f(x)=\dfrac{2x^2-4x}{(2x^2+x-1)^2}$

1. Montrer que la fonction G définie sur $\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ par $G(x)=\dfrac{2x^2}{2x^2+x-1}$ est une primitive de la fonction f.
2. a) Déterminer la primitive F de f sur $\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ telle que $F(1)=0$

   b) Étudier les variations de la fonction F.

   c) Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction F au point d'abscisse 1.

EXERCICE 5

1. Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive F de la fonction f.

   a) f est définie sur $\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ par $f(x)=\dfrac{3}{(2x-1)^3}$.

   b) f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x+1)(x^2+2x-3)^3$.

   c) f est définie sur $]1;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x}{(x^2-1)^2}$.

2. Dans chacun des cas suivants, calculer la primitive F de la fonction f qui vérifie la condition donnée.

   a) f est définie sur $\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ par $f(x)=\dfrac{4}{(1-2x)^2}$ et $F\left(\dfrac{3}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}$.

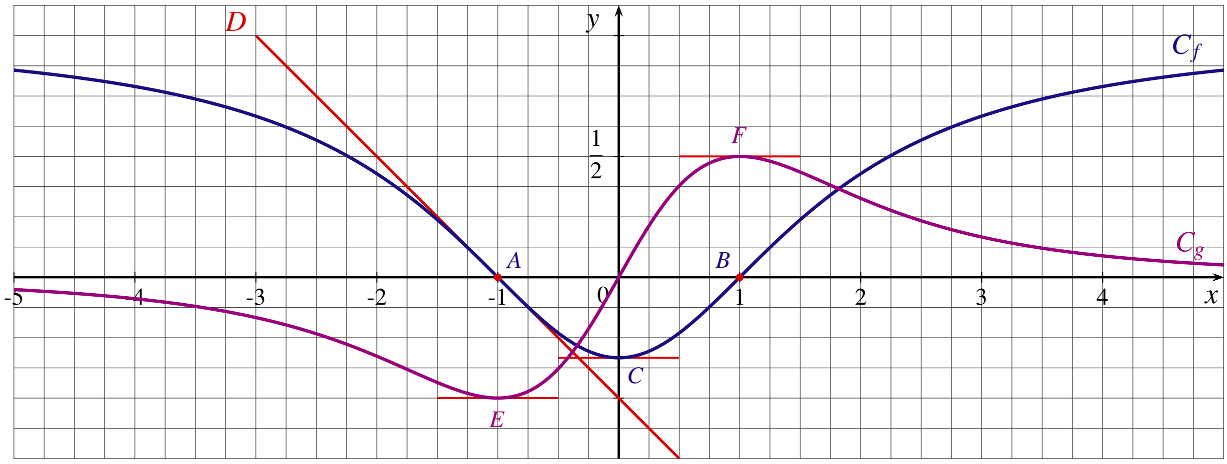
   b) f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t)=\sin(2t)$ et $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=0$.

EXERCICE 6

1. Déterminer une primitive F de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = 6\cos\left(3t + \dfrac{\pi}{6}\right)$.
2. La fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(t) = -2\sin(2t)$ est-elle une primitive de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = 2\sin\left(2t - \dfrac{\pi}{2}\right)$?

EXERCICE 7

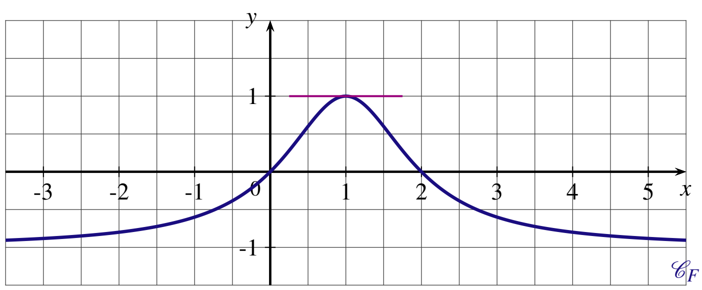
On a tracé ci-dessous, dans le plan muni d'un repère orthogonal, les courbes C_f et C_g représentatives de deux fonctions f et g définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.
La droite D est tangente à la courbe C_f au point $A(-1;0)$ et passe par le point de coordonnées $(-3;1)$.



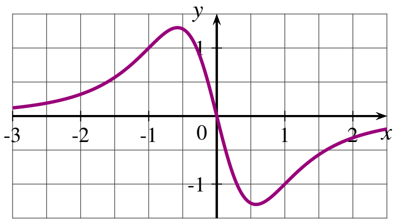
1. Par lecture graphique :
   a) Déterminer $g'(-1)$ et $f'(-1)$.
   b) Une des deux fonctions est la dérivée de l'autre, déterminez laquelle en justifiant votre choix.
2. g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{8x}{(x^2+3)^2}$.
   a) Déterminer une primitive de la fonction g.
   b) En déduire que f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 - \dfrac{4}{x^2+3}$.
3. Calculer la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$. Interpréter graphiquement ces résultats.
4. Étudier les variations de la fonction f.
5. Déterminer une équation de la tangente à la courbe C_f au point B. La tracer sur le graphique précédent.

EXERCICE 8

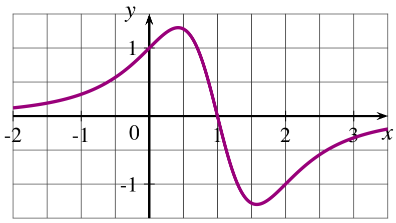
La courbe $\mathscr{C}_F$ suivante, est la courbe représentative d'une primitive F sur $\mathbb{R}$ d'une fonction f.



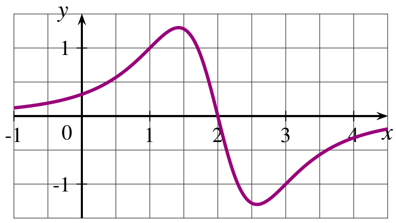
1. Une des trois courbes ci-dessous est la courbe représentative de la fonction f. Déterminer laquelle.



Courbe C_1



Courbe C_2



Courbe C_3

2. La fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = \dfrac{2}{x^2 - 2x + 2}$ est une primitive de la fonction f.
   a) Donner l'expression de $F(x)$.
   b) Déterminer une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_F$ au point A d'abscisse 2. La tracer sur le graphique précédent.

EXERCICE 9

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$. On sait que $f(2) = -4$ et que le signe de la fonction f est donné par le tableau suivant :

x	0		4		$+\infty$
signe de $f(x)$	||	$-$	0	$+$	

PARTIE A

1. Soit F la primitive de la fonction fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$ telle que $F(4) = \dfrac{1}{2}$.
   On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction F.
   a) Donner le tableau de variations de la fonction F.
   b) On suppose que la courbe $\mathscr{C}$ passe par le point $A(2;3)$.
   Donner une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A.
2. Tracer la courbe représentative d'une fonction qui satisfait les conditions obtenues à la question précédente, dans un repère orthonormé du plan. (*Unités graphiques 1 cm sur chaque axe*)
   Placer le point A ainsi que le point d'abscisse 4 et tracer les tangentes à la courbe en ces points.

PARTIE B

f est la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x) = 1 - \dfrac{12}{x^2} - \dfrac{16}{x^3}$

1. a) Calculer la primitive F de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$ telle que $F(4) = \dfrac{1}{2}$.
   b) Vérifier que la tangente à la courbe représentative de la fonction F au point d'abscisse 2 a pour équation $y = -4x + 11$.
2. Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} F(x)$. Interpréter graphiquement le résultat.
3. a) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$.
   b) Montrer que la courbe représentative de la fonction F admet pour asymptote la droite d'équation $y = x - 7$.

Chapitre 5

FONCTION LOGARITHME

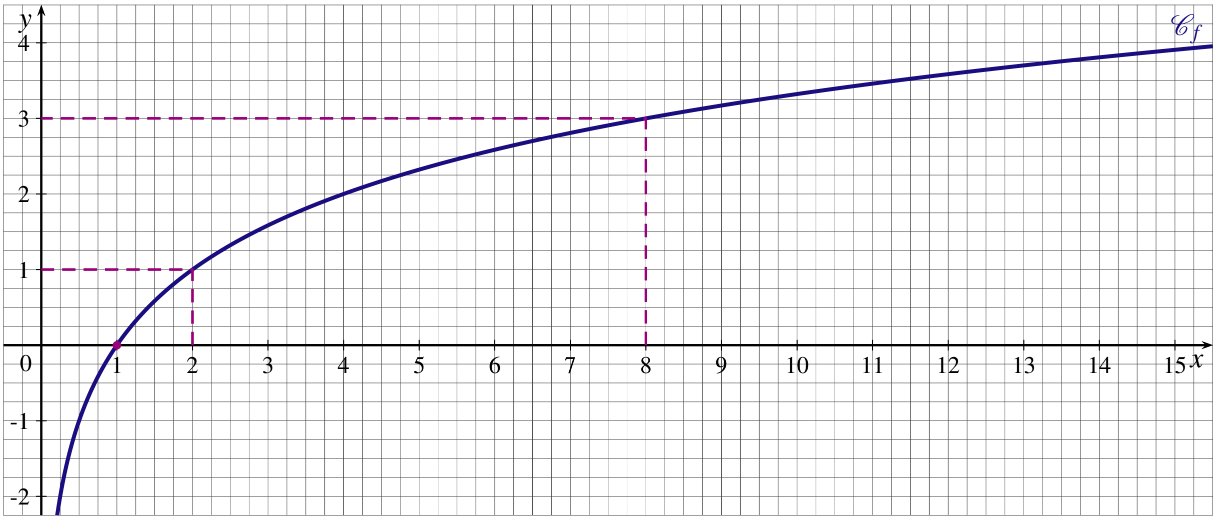
TRANSFORMER LES PRODUITS EN SOMME

Le but de cette activité est de déterminer les fonctions définies et dérivables sur l'intervalle $]0;+\infty[$ telles que, pour tous réels a et b strictement positifs :

$$f(ab) = f(a) + f(b)$$

PARTIE A

La courbe $\mathscr{C}_f$ tracée ci-dessous, est la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$ telle que, pour tous réels a et b strictements positifs $f(ab) = f(a) + f(b)$.



On sait que $f(2) = 1$ et $f(8) = 3$

1. Déterminer les valeurs exactes des images de 16 ; 32 ; 0,5 ; 0,125.
2. Déterminer les antécédents par f de 2 et de 0,5.
3. Déterminer $f\left(\sqrt{8}\right)$, $f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

PARTIE B

1. Supposons qu'il existe une fonction f définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ telle que, pour tous réels a et b strictements positifs :
$$f(ab) = f(a) + f(b)$$
   a) Justifier que f n'est pas définie en 0.
   b) Quelle égalité obtient-on lorsque $a = b = 1$? En déduire la valeur de $f(1)$.
   c) Soit x un réel strictement positif. Montrer que pour tout réel $y > 0$, $f'(xy) = \dfrac{f'(y)}{x}$.
   En posant $k = f'(1)$, déduire que f est la primive qui s'annule pour $x = 1$ de la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{k}{x}$.

2. Réciproquement, soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{k}{x}$ avec k un réel fixé.
   a) Justifier que la fonction g admet des primitives sur $]0;+\infty[$.
   b) Soit f la primive qui s'annule pour $x = 1$ de la fonction g sur $]0;+\infty[$.
   Montrer que les fonctions $x \longmapsto f(x)$ et $x \longmapsto f(ax)$ ont des dérivées égales.
   En déduire alors, que pour tout réel $a > 0$, $f(ax) = f(a) + f(x)$.

I FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

La fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x}$ est dérivable donc continue. Elle admet donc des primitives sur cet intervalle

1 DÉFINITION

La fonction logarithme népérien est la primitive sur $]0;+\infty[$ de la fonction $x\longmapsto\dfrac{1}{x}$ qui s'annule pour $x=1$.
Pour tout réel x strictement positif $\ln x$ est le logarithme népérien de x.

2 CONSÉQUENCES

1. La fonction ln est définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$
2. $\ln 1=0$
3. La fonction ln est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$ et pour tout réel $x>0$, $\ln'(x)=\dfrac{1}{x}$

II PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES

1 PROPRIÉTÉ FONDAMENTALE

Pour tous réels a et b strictement positifs :

$$\ln(a\times b)=\ln(a)+\ln(b)$$

DÉMONSTRATION

a étant un réel strictement positif, on considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\ln(ax)-\ln x$
f est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme somme et composée de fonctions dérivables.
Pour tout réel $x>0$,

$$f'(x)=a\times\frac{1}{ax}-\frac{1}{x}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x}=0$$

La dérivée de la fonction f est toujours nulle, donc f est une fonction constante sur $]0;+\infty[$.
En particulier $f(1)=\ln a-\ln 1=\ln a$, donc pour tout réel $x>0$, $f(x)=\ln a$.
Ainsi, pour tout réel $x>0$, $\ln(ax)-\ln x=\ln a$.
Soit finalement pour tout réel $x>0$, $\ln(ax)=\ln a+\ln x$

2 AUTRES RÈGLES DE CALCUL

Pour tous réels a et b strictement positifs et n entier relatif :

1. $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right)=-\ln a$
2. $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right)=\ln a-\ln b$
3. $\ln\left(a^n\right)=n\ln a$
4. $\ln\left(\sqrt{a}\right)=\dfrac{1}{2}\ln a$

DÉMONSTRATION

1. Soit $a>0$ alors $\dfrac{1}{a}>0$. Or $a\times\dfrac{1}{a}=1$ donc

$$\ln\left(a\times\frac{1}{a}\right)=\ln 1 \Leftrightarrow \ln a+\ln\frac{1}{a}=0 \Leftrightarrow \ln\frac{1}{a}=-\ln a$$

2. Soit $a>0$ et $b>0$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln\left(a\times\frac{1}{b}\right)=\ln a+\ln\frac{1}{b}=\ln a-\ln b$$

3. Si $n=0$, l'égalité est évidente :

$$\ln\left(a^0\right)=\ln 1=0=0\times\ln a$$

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\ln\left(x^n\right)-n\ln x$ avec n entier relatif non nul.
f est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme somme et composée de fonctions dérivables. Pour tout réel $x>0$,

$$f'(x)=\frac{1}{x^n}\times n\times x^{n-1}-\frac{n}{x}=\frac{n}{x}-\frac{n}{x}=0$$

La dérivée de la fonction f est toujours nulle, donc f est une fonction constante sur $]0;+\infty[$.
En particulier $f(1)=\ln 1^n-n\ln 1=0$, donc pour tout réel $x>0$, $f(x)=0$. Soit $\ln\left(x^n\right)-n\ln x=0$.
Ainsi, pour tout réel $x>0$ et pour tout entier n, $\ln\left(x^n\right)=n\ln x$.

4. Soit $a>0$ alors $\left(\sqrt{a}\right)^2=a$ donc

$$\ln a=\ln\left(\sqrt{a}\right)^2=2\ln\sqrt{a}$$

III ÉTUDE DE LA FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

1 VARIATION

La fonction logarithme népérien est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

✻ DÉMONSTRATION

La fonction ln est dérivable sur $]0;+\infty[$ donc continue sur cet intervalle.
La dérivée de la fonction ln est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $\ln'(x)=\dfrac{1}{x}$. Or si $x>0$ alors, $\dfrac{1}{x}>0$.
La dérivée de la fonction ln est strictement positive, donc la fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

PROPRIÉTÉS

On déduit de ce théorème les propriétés suivantes :

Pour tous réels a et b strictement positifs :

$\ln a=\ln b$ si, et seulement si, $a=b$

$\ln a>\ln b$ si, et seulement si, $a>b$

Puisque $\ln 1=0$:

Pour tout réel x strictement positif :

$\ln x=0$ si, et seulement si, $x=1$

$\ln x>0$ si, et seulement si, $x>1$

$\ln x<0$ si, et seulement si, $0<x<1$

EXEMPLE

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\ln(5-x^2)=0$

L'équation est définie pour $5-x^2>0$. Soit pour $x\in\left]-\sqrt{5};\sqrt{5}\right[$

Pour tout réel x de l'intervalle $\left]-\sqrt{5};\sqrt{5}\right[$,

$$\ln(5-x^2)=0\Leftrightarrow 5-x^2=1\Leftrightarrow x^2=4$$

L'équation $x^2=4$ admet deux solutions -2 et 2. Or ces deux solutions sont dans l'intervalle $\left]-\sqrt{5};\sqrt{5}\right[$.

L'ensemble des solutions de l'équation $\ln(5-x^2)=0$ est $S=\{-2;2\}$

2 LIMITES

ÉTUDE DE LA LIMITE EN $+\infty$

Soit A un réel strictement positif.

Comme $\ln 2>0$, nous pouvons choisir un entier n tel que $n>\dfrac{A}{\ln 2}$. Soit

$$n\ln 2>A\Leftrightarrow \ln 2^n>A$$

Puisque la fonction ln est strictement croissante, pour tout réel x de l'intervalle $[2^n;+\infty[$:

$$\ln x>\ln 2^n>A$$

Ainsi, $\ln x$ peut être rendu aussi grand que l'on veut à condition de choisir x suffisamment grand. D'où

> La fonction ln a pour limite $+\infty$ en $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$.

ÉTUDE DE LA LIMITE EN 0

Pour tout réel $x>0$, $\ln x=-\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Or $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}\ln X=+\infty$ donc par composition des limites $\lim\limits_{x\to0^+}-\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)=-\infty$. D'où

> La fonction ln a pour limite $-\infty$ en 0 : $\lim\limits_{x\to0}\ln x=-\infty$.
> L'axe des ordonnées est asymptote à la courbe d'équation $y=\ln x$

3 LE NOMBRE e

La fonction ln est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$ et pour tout réel $x>1$, $\ln x\in]0;+\infty[$.
D'après le théorème de la valeur intermédiaire, l'équation $\ln x=1$ admet une solution unique notée e.

DÉFINITION

> Le nombre e est le nombre dont le logarithme népérien est égal à 1 : $\ln\mathrm{e}=1$.

APPLICATION

Pour tout entier relatif n,

$$\ln\mathrm{e}^n=n\ln\mathrm{e}=n$$

> Pour tout entier relatif n, e^n est le réel solution de l'équation $\ln x=n$.

4 COURBE REPRÉSENTATIVE

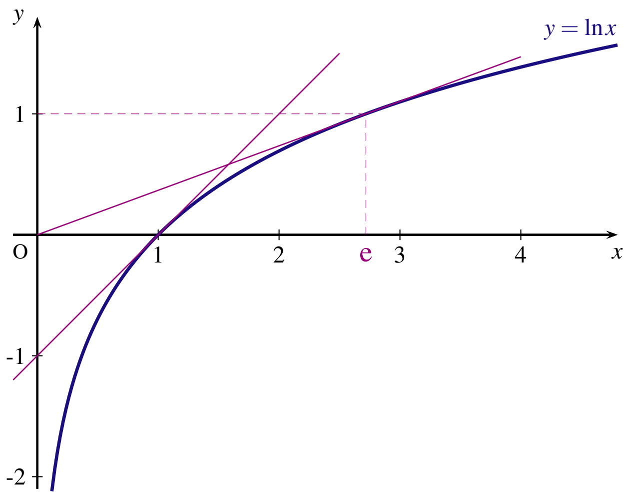
Tangentes remarquables :

La tangente à la courbe représentative de la fonction ln au point $(1;0)$ a pour équation :

$$y = x - 1$$

La tangente à la courbe représentative de la fonction ln au point $(\mathrm{e};1)$ a pour équation :

$$y = \frac{1}{\mathrm{e}}(x - \mathrm{e}) + 1 \Leftrightarrow y = \frac{1}{\mathrm{e}}x$$



5 LIMITES IMPORTANTES

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0} x \ln x = 0.$$

✳ DÉMONSTRATION

1. *Un résultat préliminaire* : Montrons que pour tout réel $x \geqslant 1$, $\ln x \leqslant x$
   Soit f la fonction définie sur $[1;+\infty[$ par $f(x) = \ln x - x$. f est dérivable et pour tout réel $x \geqslant 1$,
   $$f'(x) = \frac{1}{x} - 1 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1-x}{x}$$
   Or, pour tout réel $x \geqslant 1$, $\dfrac{1-x}{x} \leqslant 0$, donc f est décroissante.
   D'autre part, $f(1) = -1$, donc pour tout réel $x \geqslant 1$, $f(x) \leqslant f(1) \leqslant 0$.
   Ainsi, pour tout réel $x \geqslant 1$, $\ln x \leqslant x$.
   Remarque : lorsque $0 < x < 1$, $\ln x < 0$ donc $\ln x < x$

   Pour tout réel $x > 0$, $\ln x \leqslant x$.
   Graphiquement, la courbe représentative de la fonction ln est au dessous de la droite d'équation $y = x$

2. Limite en $+\infty$ de $\dfrac{\ln x}{x}$
   Nous avons établi que pour tout réel $X \geqslant 1$, $\ln X \leqslant X$.
   Pour tout réel $x \geqslant 1$, $\sqrt{x} \geqslant 1$ et $\ln\sqrt{x} \geqslant 0$. Donc pour tout réel $x \geqslant 1$,
   $$0 \leqslant \ln\sqrt{x} \leqslant \sqrt{x} \Leftrightarrow 0 \leqslant \frac{1}{2}\ln x \leqslant \sqrt{x} \Leftrightarrow 0 \leqslant \ln x \leqslant 2\sqrt{x} \Leftrightarrow 0 \leqslant \frac{\ln x}{x} \leqslant \frac{2\sqrt{x}}{x}$$
   Or $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{2\sqrt{x}}{x} = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes , $\boxed{\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0}$
   Conséquence :
   Pour tout réel $x > 0$ et pour tout entier $n \geqslant 2$, $\dfrac{\ln x}{x^n} = \dfrac{\ln x}{x} \times \dfrac{1}{x^{n-1}}$
   Or, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^{n-1}} = 0$ donc par produit des limites $\boxed{\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0}$

3. Limite en 0 de $x\ln x$
Le théorème sur la limite d'un produit de permet pas de calculer $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x$.
Pour tout réel $x>0$, nous avons :

$$x\ln x = \frac{1}{\frac{1}{x}} \times \left(-\ln\frac{1}{x}\right) = \frac{-\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$$

Or $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \frac{-\ln X}{X} = 0$ donc par composition des limites $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0}$

IV ÉTUDE D'UNE FONCTION $\ln(u)$

1 DÉFINITION

Soit u une fonction définie et strictement positive sur un intervalle I.
La composée de la fonction u suivie de la fonction ln est notée $\ln(u)$.

EXEMPLE
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1;+\infty[$ par $f(x) = \ln\left(x^2-1\right)$.
f est la composée de la fonction u définie sur l'intervalle $]1;+\infty[$ par $u(x) = x^2-1$ suivie de la fonction ln.

2 LIMITES

Pour étudier une limite d'une fonction $\ln(u)$, on utilise le théorème sur la limite d'une fonction composée.

EXEMPLE
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1;+\infty[$ par $f(x) = \ln\left(x^2-1\right)$.

1. $\lim\limits_{x\to 1^+} x^2-1 = 0$ et $\lim\limits_{X\to 0} \ln X = -\infty$ donc par composition des limites $\boxed{\lim\limits_{x\to 1} \ln\left(x^2-1\right) = -\infty}$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-1 = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \ln X = +\infty$ donc par composition des limites $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(x^2-1\right) = +\infty}$

3 VARIATIONS

Soit u une fonction définie et strictement positive sur un intervalle I.
Les fonctions u et $\ln(u)$ ont les mêmes variations sur I.

☼ DÉMONSTRATION

Pour tout réel $x\in I$, $u(x)>0$. Or la fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.
D'après le théorème sur les variations des fonctions composées, u et $\ln(u)$ ont les mêmes variations sur I.

4 DÉRIVÉE

Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I.
La fonction $\ln(u)$ est dérivable sur I et $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$.

☼ DÉMONSTRATION

La fonction u est dérivable sur I et pour tout réel $x \in I$, $u(x) > 0$. Or la fonction ln est dérivable sur $]0;+\infty[$.
Donc la fonction composée $f = \ln u$ est dérivable sur I.
D'après la formule de dérivation d'une fonction composée

$$f' = \ln'(u) \times u' \quad \text{soit} \quad f' = \frac{1}{u} \times u' = \frac{u'}{u}$$

EXEMPLE
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1;+\infty[$ par $f(x) = \ln\left(x^2 - 1\right)$.
La fonction u définie sur $]1;+\infty[$ par $u(x) = x^2 - 1$ est dérivable et strictement positive sur $]1;+\infty[$; $u'(x) = 2x$.
f est dérivable sur $]1;+\infty[$ et pour tout réel $x > 1$, $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 1}$

PRIMITIVES

Si u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I.
Une primitive de $\dfrac{u'}{u}$ sur I est $\ln u$.

EXERCICE 1

Simplifier l'écriture des nombres suivants :

$A=\ln(16)-7\ln(2)+4\ln(32)+3\ln\left(\frac{1}{8}\right)$

$B=3\ln(125)-2\ln(25)+6\ln\left(\frac{1}{5}\right)$

$C=2\ln\sqrt{8}-3\ln\left(\frac{1}{4}\right)$

$D=\dfrac{\ln\left(\sqrt{3}-1\right)+\ln\left(\sqrt{3}+1\right)}{2}$

$E=\ln\left(\sin\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{4}\right)+\ln\left(\sin\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$F=7\ln\left(2\sin\frac{\pi}{3}\right)+5\ln(9)-\ln\left(6\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$G=\dfrac{\ln 5-\ln 10}{2\ln\left(\sqrt{2}\right)}$

$H=\dfrac{\ln 36}{\ln 3+\ln 2}$

$I=\dfrac{\frac{1}{3}\ln 9-4\ln\sqrt{3}-\ln\frac{1}{3}}{\ln 3}$

$J=\dfrac{\ln(12)-\ln(9)}{\ln\left(\frac{1}{27}\right)+\ln(64)}$

EXERCICE 2

Démontrer les propriétés suivantes :

1. Pour tout réel $x>1$, $\ln\left(x^2+x-2\right)=\ln(x+2)+\ln(x-1)$
2. Pour tout réel x strictement positif, $\ln(x+1)=\ln x+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$
3. Pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]-2;2[$, $\ln\sqrt{2-x}+\ln\sqrt{2+x}=\frac{1}{2}\ln\left(4-x^2\right)$

EXERCICE 3

Résoudre les équations suivantes après avoir précisé l'ensemble des valeurs du réel x pour lesquelles l'équation est définie.

1. $\ln(1-2x)=\ln(x+2)+\ln 3$
2. $\ln\left(1-x^2\right)=\ln(2x-1)$
3. $\ln(x-2)+\ln(x+3)=\ln(3x+2)$
4. $\ln\sqrt{2x-2}=\ln(4-x)-\frac{1}{2}\ln x$

EXERCICE 4

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $\ln(x-2)\leqslant\ln(2x+1)$
2. $\ln(3x+2)\geqslant\ln\left(x^2+\frac{1}{4}\right)$
3. $\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)\leqslant\ln x$

EXERCICE 5

Simplifier l'écriture des nombres suivants :

$A=\ln\left(e^3\right)+\left(e^2\right)$; $B=\dfrac{\ln e}{\ln\left(e^2\right)}-\ln\left(\dfrac{1}{e}\right)$; $C=\ln\left(4e^2\right)+\ln\left(\dfrac{2}{\sqrt{e}}\right)$; $D=\dfrac{\ln\left(\frac{1}{e^3}\right)}{\ln 3}\times\dfrac{\ln 9}{e^2}$

EXERCICE 6

1. Résoudre les équations suivantes :

   a) $\ln\dfrac{x+2}{x}=1$; b) $\ln\dfrac{x-1}{2x+1}=-1$; c) $2(\ln x)^2+3\ln x=2$

2. Résoudre les inéquations suivantes :

   a) $\ln\dfrac{x}{x+1}\leqslant -1$; b) $\ln(2x+1)-\ln(x-1)\leqslant 1$; c) $(\ln x)^2-\ln x\leqslant 6$

EXERCICE 7

Dans chacun des cas suivants, déterminer le plus petit entier n solution de l'inéquation :

a) $1{,}05^n\geqslant 1{,}5$; b) $0{,}92^n\leqslant 0{,}75$; c) $\left(1+\dfrac{3}{100}\right)^n\geqslant 2$; d) $0{,}2\geqslant\left(1-\dfrac{9}{100}\right)^n$

EXERCICE 8

1. Actuellement, le taux du livret A d'épargne est égal à 0,75%.

   En supposant que ce taux reste inchangé sur le long terme, au bout de combien d'années, un capital placé sur le livret A aura-t-il augmenté d'au moins 75% ?

2. Le gouvernement d'un pays envisage de baisser l'impôt de 2% par an. Au bout de combien d'années, l'impôt aura-t-il baissé de 20% ?

3. D'une année sur l'autre, un produit perd 5% de sa valeur. Au bout de combien d'années ce produit aura-t-il a perdu plus de 40% de sa valeur initiale ?

4. En 2014, la population mondiale était d'environ 7,25 milliards de personnes. Avec un taux de croissance annuel de 1,14% , en quelle année la population mondiale dépassera-t-elle 9 milliards ?

EXERCICE 9

Dans chacun des cas suivants, calculer la dérivée f' de la fonction f définie sur $]0;+\infty[$:

a) $f(x)=x\ln x-x$; b) $f(x)=\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$; c) $f(x)=\dfrac{1}{\ln x}$; d) $f(x)=\ln\sqrt{x}$; e) $f(x)=(\ln x)^2+\ln\left(x^2\right)$

EXERCICE 10

Dans chacun des cas suivants, étudier les limites aux bornes de son ensemble de définition de la fonction f définie sur $]0;+\infty[$:

a) $f(x)=3x+2-\ln x$; b) $f(x)=\dfrac{2x+\ln x}{x}$; c) $f(x)=\dfrac{2\ln x-1}{x}$; d) $f(x)=\dfrac{1}{x}-\ln x$

EXERCICE 11

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x}+\ln x$

1. Étudier les limites de f en 0 et en $+\infty$.
2. On note f' la dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$.
3. Étudier les variations de f.

EXERCICE 12

PARTIE A

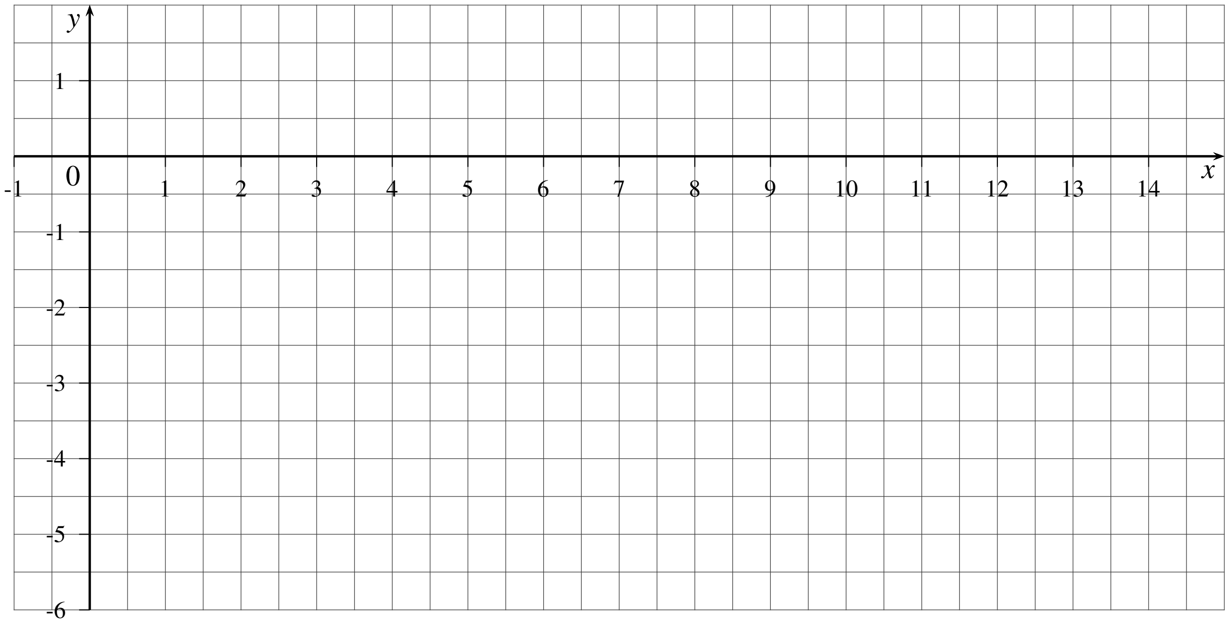
Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=1-x^2-\ln(x)$.

1. Calculer la dérivée de la fonction g et étudier son signe. En déduire les variations de la fonction g.
2. Calculer $g(1)$. En déduire le signe de $g(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$.

PARTIE B

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{2x}-\dfrac{x}{2}+1$. On note C_f sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. a) Calculer la limite de f en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.
   b) Calculer la limite de f en $+\infty$.
   c) Montrer que la droite D d'équation $y=-\dfrac{x}{2}+1$ est asymptote à la courbe C_f en $+\infty$.
   d) Calculer les coordonnées du point A, intersection de la droite D et de la courbe C_f.
2. a) Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{g(x)}{2x^2}$.
   b) En déduire le signe de $f'(x)$ puis les variations de la fonction f.
3. Tracer la droite D et la courbe C_f dans le repère ci-dessous.



EXERCICE 13

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$. On note C_f sa courbe représentative.

1. a) Étudier les limites de f aux bornes son intervalle de définition.
   b) La courbe C_f admet-elle des asymptotes ?
2. a) Montrer que $f'(x)=\dfrac{1-2\ln x}{x^3}$
   b) Étudier les variations de la fonction f.
3. Donner une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 1.

EXERCICE 14

(D'après sujet bac France Métropolitaine, La Réunion septembre 2015)

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis à 10^{-2} près.

Un smartphone est équipé d'une batterie Li-ion qui débite en usage normal un courant d'intensité moyenne I de 0,03 ampère (A).
La capacité C de cette batterie, exprimée en ampères-heures (Ah), est la quantité maximale d'électricité qu'elle peut emmagasiner.
On dit que la batterie a effectué un cycle de charge lorsque la quantité d'électricité absorbée, éventuellement en plusieurs fois, est égale à sa capacité.
Lors des 300 premiers cycles de charge de la batterie, sa capacité reste égale à 1,8 Ah.

1. L'autonomie T de ce smartphone, en heures, est fonction de la capacité C de sa batterie et de l'intensité moyenne I du courant qu'elle débite en usage normal.

   On estime que $T = 0{,}7 \times \dfrac{C}{I}$.

   Calculer l'autonomie T, en heures, de ce smartphone au cours de l'un des 300 premiers cycles de charge.

2. On considère qu'après 300 cycles de charge, l'autonomie de la batterie diminue de 1% à chaque nouveau cycle de charge.

   Pour tout entier naturel n, on note T_n l'autonomie, en heures, de la batterie au bout de « $300+n$ » cycles de charge.

   On admet que $T_0 = 42$.

   a) Calculer T_1 et T_2. Interpréter les résultats.

   b) Exprimer T_{n+1} en fonction de T_n.

   c) Justifier que $T_n = 42 \times 0{,}99^n$.

3. Un utilisateur souhaite déterminer à partir de combien de cycles de charge l'autonomie de la batterie aura diminué de moitié par rapport à son état initial.

   a) On propose l'algorithme suivant pour déterminer le nombre de cycles de charge correspondant.

Variables
n : nombre entier naturel
T : nombre réel
q : nombre réel
Initialisation
n prend la valeur 0
T prend la valeur 42
q prend la valeur 0,99
Traitement
Tant que ...
T prend la valeur ...
n prend la valeur ...
Fin Tant que
Sortie
Afficher $n+300$

   Recopier et compléter la partie relative au traitement.

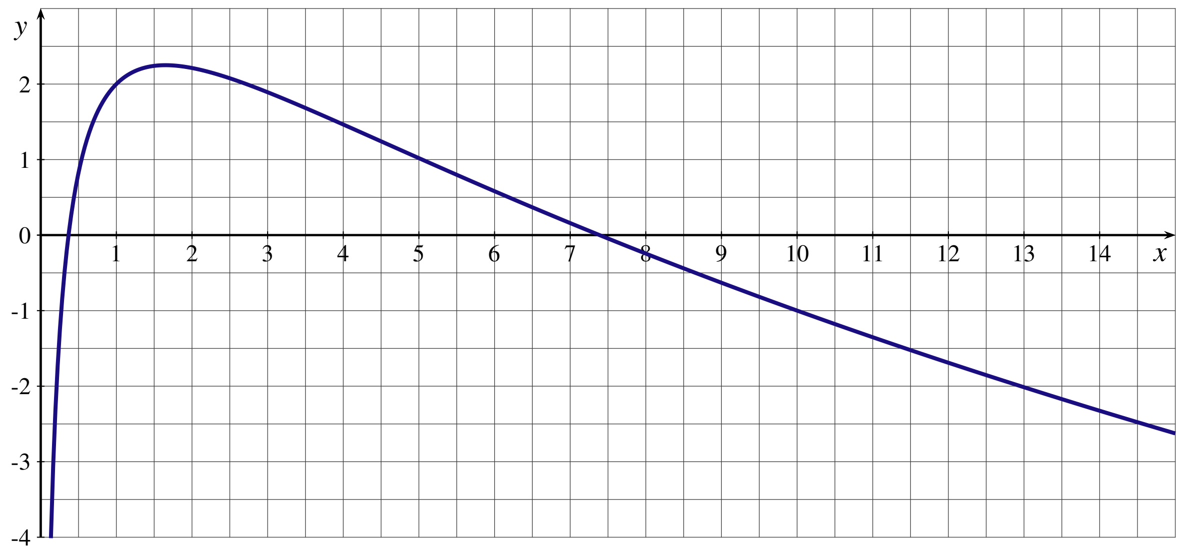
   b) Déterminer à partir de combien de cycles de charge l'autonomie de la batterie aura diminué de moitié par rapport à son état initial.

4. Lorsque l'autonomie de la batterie devient inférieure à 5 heures, on estime qu'elle ne permet plus un usage normal du smartphone. Le nombre de cycles de charge correspondant est alors appelé durée de vie de la batterie.

   Déterminer la durée de vie de cette batterie.

EXERCICE 15

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ telle que pour tout réel x de cet intervalle $f(x) = (1+\ln x)(2-\ln x)$ et dont la courbe représentative C_f est donnée ci-dessous.



1. a) Résoudre l'équation $f(x)=0$. Les valeurs exactes sont demandées.
   b) Montrer que le signe de $f(x)$ est donné pour tout réel de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par le tableau suivant :

x	0		$\frac{1}{\mathrm{e}}$		e^2		$+\infty$
Signe de $f(x)$	||	$-$	0	$+$	0	$-$	

2. Calculer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
3. a) On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x)=\dfrac{1-2\ln x}{x}$ pour tout réel x de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   b) Étudier les variations de f. On précisera la valeur exacte du maximum de f et la valeur exacte de x pour laquelle il est atteint.
4. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 1 et la tracer sur le graphique.
5. a) Donner le nombre de solutions de l'équation $f(x)=2$.
   b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(1+X)(2-X)=2$.
   c) En déduire les solutions de l'équation $f(x)=2$.

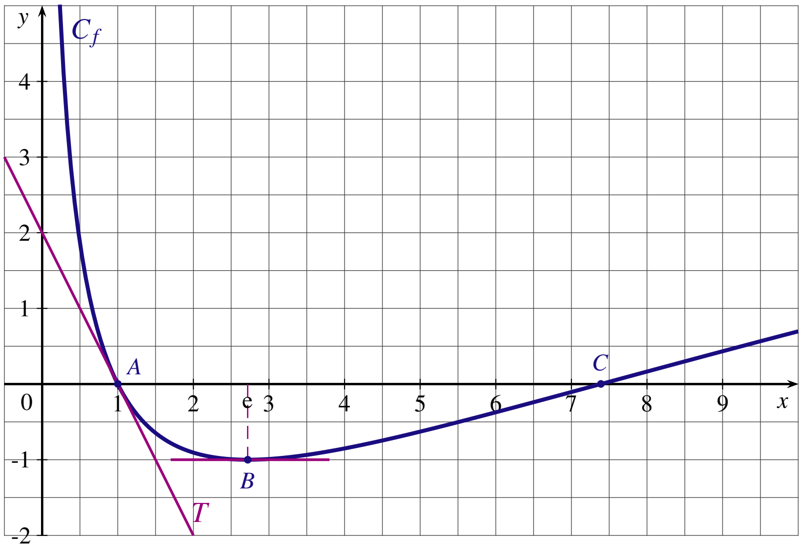
EXERCICE 16

Dans chacun des cas suivants, calculer la primitive F de la fonction f qui vérifie la condition donnée.

1. f est définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=1-\dfrac{1}{x^2}$ et $F(1)=2$.
2. f est définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=1-\dfrac{1}{x}$ et $F(1)=2$.
3. f est définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=3x^2-\dfrac{2}{x}$ et $F(1)=-1$.
4. f est définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{2\ln(x)}{x}$ et $F(\mathrm{e})=0$.
5. f est définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x^2}$ et $F(1)=2$.

EXERCICE 17

On considère la fonction f définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ dont on donne la représentation graphique C_f dans le repère ci-dessous.



PARTIE A

Dans cette partie , on admet que :

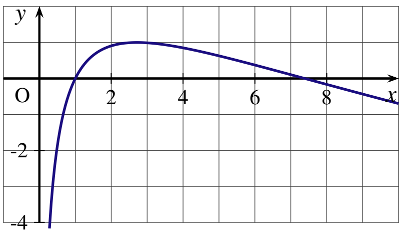
— la courbe C_f coupe l'axe des abscisses en deux points A et C ;

— la droite T est tangente en A à la courbe C_f ;

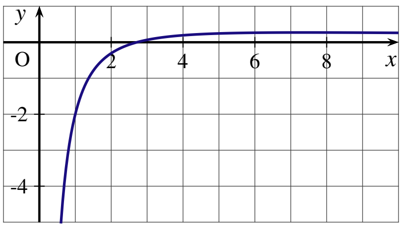
— la courbe C_f admet une tangente horizontale au point B d'abscisse e.

1. Avec la précision permise par le graphique, donner les valeurs de $f(1)$, $f'(1)$, et $f'(\mathrm{e})$, où f' est la fonction dérivée de f sur $]0;+\infty[$.
2. Une des trois courbes ci-dessous est la représentation graphique de la fonction f' et une autre d'une primitive F de la fonction f. Déterminer la courbe associée à la fonction f' et celle qui est associée à la fonction F.

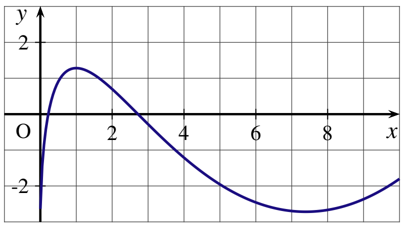
Courbe C_1



Courbe C_2



Courbe C_3



PARTIE B

Dans cette partie, on admet que la fonction f représentée ci-dessus est définie pour tout réel x appartenant à $]0;+\infty[$ par $f(x) = (\ln(x))^2 - 2\ln(x)$

1. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
2. a) Étudier la limite de f en $+\infty$.

   b) Justifier que l'axe des ordonnées est asymptote à la courbe représentative de f.
3. a) Calculer la dérivée f' de la fonction f.

   b) Étudier les variations de la fonction f.
4. Soit F la primitive de la fonction f telle que $F(\mathrm{e}) = -\mathrm{e}$. Donner une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction F au point d'abscisse e.

EXERCICE 18

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \ln\left(x^2\right) - \sqrt{x}$.

1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$.
2. Étudier les variations de f. On précisera la valeur exacte du maximum de f.
3. Existe-t-il un entier M tel que pour tout réel $x \geqslant M$, $\ln\left(x^2\right) \geqslant \sqrt{x}$?

EXERCICE 19

PARTIE A

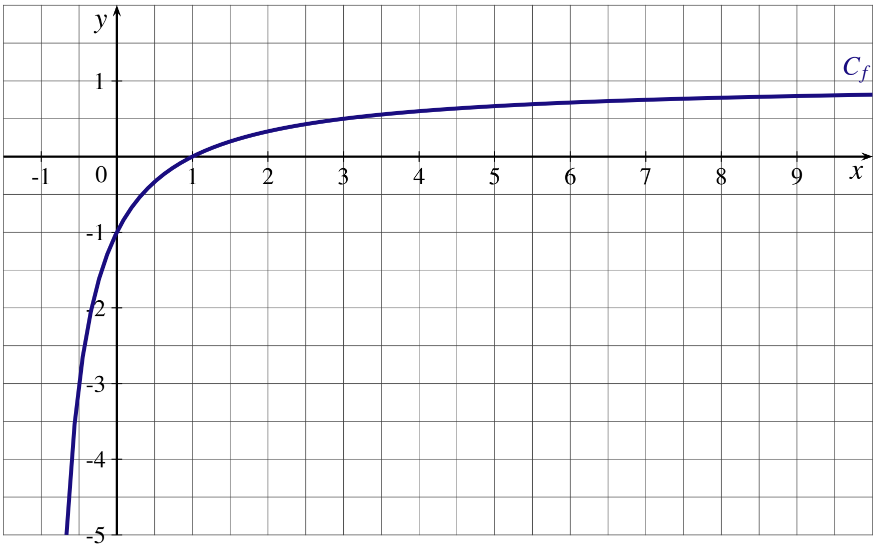
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-1;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. On note f' la dérivée de la fonction f . Calculer $f'(x)$.
3. Étudier le signe de f sur l'intervalle $]-1;+\infty[$.

PARTIE B

Soit g la fonction définie par $g(x)=\ln[f(x)]$ et C_g sa représentation graphique.

1. Déterminer l'intervalle I de définition de g.
2. Calculer les limites de g en $+\infty$ et en 1.
   En déduire les asymptotes à la courbe C_g en précisant une équation pour chacune d'elles.
3. Exprimer $g'(x)$. En déduire le tableau de variations de g.
4. Donner une équation de la tangente à la courbe C_g au point d'abscisse 2.
5. Ci-dessous, la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal a été tracée. Tracer la courbe C_g dans le même repère.



EXERCICE 20

Dans chacun des cas suivants, calculer la primitive F de la fonction f qui vérifie la condition donnée.

1. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{x}{x^2+\mathrm{e}}$ et $F(0)=\dfrac{1}{2}$.
2. f est définie sur $\left]\dfrac{2}{3};+\infty\right[$ par $f(x)=-\dfrac{2}{3x-2}$ et $F(1)=\dfrac{1}{3}$.
3. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-2x+2}$ et $F(0)=\ln 2$.
4. f est définie sur $]-1;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x+3}{x+1}$ et $F(1)=\ln 4$.

EXERCICE 21

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0;\pi[$ par $f(t)=\dfrac{\cos(t)}{\sin(t)}$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son intervalle de définition.
   En déduire les asymptotes à la courbe C_f en précisant une équation pour chacune d'elles.
2. On note f' la dérivée de la fonction f.
   a) Calculer la dérivée $f'(t)$.
   b) Étudier les variations de la fonction f.
3. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C_f au point A d'abscisse $\dfrac{\pi}{2}$.
4. Soit F la primitive de la fonction f telle que $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=0$.
   a) Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction F au point d'abscisse $\dfrac{\pi}{6}$.
   b) Étudier les variations de la fonction F.
   c) Calculer $F(t)$.
   d) En déduire la valeur exacte du maximum de la fonction F.

Chapitre 6

FONCTION EXPONENTIELLE

I DÉFINITION ET PREMIÈRES PROPRIÉTÉS

La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$, on en déduit que pour tout réel k l'équation $\ln(x) = k$ admet une solution unique a dans l'intervalle $]0;+\infty[$

x	0		a		$+\infty$
$\ln(x)$	||				$+\infty$
	||		k		
	|| $-\infty$				

Cette propriété, permet de définir une nouvelle fonction « réciproque » de la fonction logarithme népérien.

1 DÉFINITION

La fonction exponentielle, notée exp, est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui à tout réel x associe associe le réel y strictement positif tel que :

$$y = \exp(x) \iff x = \ln(y)$$

NOTATION

Pour tout entier relatif n, $\ln\left(\mathrm{e}^n\right) = n$. Ainsi, pour tout entier relatif n, $\exp(n) = \mathrm{e}^n$. On convient d'étendre cette écriture à tout réel x.
C'est à dire que pour tout réel x, on écrit $\exp(x) = \mathrm{e}^x$. e^x se lit donc « exponentielle de x ».

2 PREMIÈRES PROPRIÉTÉS DE LA FONCTION EXPONENTIELLE

Les propriétés suivantes se déduisent de la définition :

- Pour tout réel x, $\mathrm{e}^x > 0$.
- Pour tout réel x et pour tout réel $y > 0$, $y = \mathrm{e}^x \iff x = \ln(y)$.
- Pour tout réel x, $\ln\left(\mathrm{e}^x\right) = x$.
- Pour tout réel $x > 0$, $\mathrm{e}^{\ln(x)} = x$.

EXEMPLES

$\ln(1) = 0 \iff \mathrm{e}^0 = 1$; $\quad$ $\mathrm{e}^x = 3 \iff x = \ln 3$; $\quad$ L'équation $\mathrm{e}^x = 0$ n'a pas de solution.

II PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES DE LA FONCTION EXPONENTIELLE

1 EXPONENTIELLE D'UNE SOMME

Pour tout réel a et pour tout réel b

$$\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a \times \mathrm{e}^b$$

✳ DÉMONSTRATION

Pour tout réel a et pour tout réel b, e^{a+b}, e^a et e^b sont des réels strictement positifs.
Nous avons, d'une part, $\ln\left(\mathrm{e}^{a+b}\right) = a + b$.
D'autre part, $\ln\left(\mathrm{e}^a \times \mathrm{e}^b\right) = \ln\left(\mathrm{e}^a\right) + \ln\left(\mathrm{e}^b\right) = a + b$
Donc $\ln\left(\mathrm{e}^{a+b}\right) = \ln\left(\mathrm{e}^a \times \mathrm{e}^b\right) \iff \mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a \times \mathrm{e}^b$

2 AUTRES PROPRIÉTÉS

1. Pour tout réel a, $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$
2. Pour tout réel a et pour tout réel b, $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$
3. Pour tout réel a et pour tout entier relatif n, $e^{na} = (e^a)^n$

Démonstrations

1. Pour tout réel a, $e^a \times e^{-a} = e^0 = 1$ donc $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$
2. Pour tout réel a et pour tout réel b, $e^{a-b} = e^a \times e^{-b} = e^a \times \dfrac{1}{e^b} = \dfrac{e^a}{e^b}$
3. Pour tout réel a et pour tout entier relatif n, $\ln(e^{na}) = na$ et $\ln(e^a)^n = n\ln(e^a) = na$
   Donc $\ln(e^{na}) = \ln(e^a)^n \iff e^{na} = (e^a)^n$

EXEMPLES

$e^{2+\ln 3} = e^2 \times e^{\ln 3} = 3e^2$; $\dfrac{1}{e^{x-2}} = e^{-(x-2)} = e^{2-x}$; $\dfrac{e^{2x+1}}{e^x} = e^{2x+1-x} = e^{x+1}$; $e^{2x} \times e^2 = \left(e^{x+1}\right)^2$

III ÉTUDE DE LA FONCTION EXPONENTIELLE

1 DÉRIVÉE ET SENS DE VARIATION

DÉRIVÉE

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\exp'(x) = \exp(x)$

Preuve :
On admet que la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$.
e^x étant strictement positif, la fonction composée définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(\exp(x))$ est dérivable et pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{\exp'(x)}{\exp(x)}$.
Or $f(x) = \ln(e^x) = x$, donc $f'(x) = 1$.
Ainsi, pour tout réel x, $\dfrac{\exp'(x)}{\exp(x)} = 1$ donc $\exp'(x) = \exp(x) = e^x$.

VARIATION

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

✳ DÉMONSTRATION

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et est égale à sa dérivée.
Or pour tout réel x, $e^x > 0$. On en déduit que la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

CONSÉQUENCES

Pour tout réel x et pour tout réel y,

$$e^x = e^y \iff x = y \qquad \text{et} \qquad e^x < e^y \iff x < y$$

2 LIMITES

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$$

Démonstrations

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x - x$.
   La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x, $f'(x) = \mathrm{e}^x - 1$.
   Or la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $\mathrm{e}^0 = 1$. Donc si $x \geqslant 0$, alors $\mathrm{e}^x \geqslant 1$.
   On en déduit le signe de f' ainsi que le tableau des variations de la fonction f

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	

   Le minimum de la fonction f est égal à 1. Donc pour tout réel x, $f(x) > 0$. C'est à dire pour tout réel x, $\mathrm{e}^x - x > 0 \iff \mathrm{e}^x > x$.
   Or $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ donc d'après les théorèmes de comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$
2. La limite de la fonction exponentielle en $-\infty$ se déduit de sa limite en $+\infty$
   Si x tend vers $+\infty$, alors $-x$ tend vers $-\infty$. Par conséquent

$$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^x}$$

   Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\mathrm{e}^x} = 0$. Soit $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$

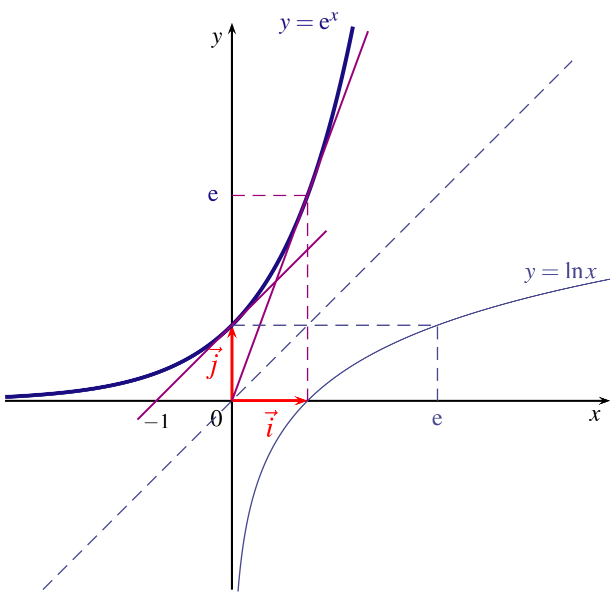
3 COURBE REPRÉSENTATIVE

— $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$ donc l'axe des abscisses est asymptote à la courbe représentative de la fonction exponentielle en $-\infty$.

— $\mathrm{e}^0 = 1$ et la tangente à la courbe représentative de la fonction exponentielle au point d'abscisse 0 a pour équation $y = x + 1$.

— La tangente à la courbe représentative de la fonction exponentielle au point d'abscisse 1 a pour équation $y = \mathrm{e}x$.

— La fonction exponentielle est la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien.
Dans un repère orthonormé, leurs courbes représentatives sont symétriques par rapport à la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$.



4 CROISSANCES COMPARÉES

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{x}=+\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^x=0$$

Pour tout entier naturel n non nul, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{x^n}=+\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^n\mathrm{e}^x=0$.

Démonstrations

1. Pour tout réel x strictement positif, $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}=\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{\ln(x)}}=\mathrm{e}^{x-\ln(x)}=\mathrm{e}^{x\left(1-\frac{\ln(x)}{x}\right)}$

   Or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{\ln(x)}{x}\right)=+\infty$

   Ainsi, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{\ln(x)}{x}\right)=+\infty$ et $\displaystyle\lim_{X\to+\infty}\mathrm{e}^X=+\infty$, donc par composition, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{x\left(1-\frac{\ln(x)}{x}\right)}=+\infty$. Soit $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{x}=+\infty$.

2. Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{x}=+\infty$, on en déduit par passage à l'inverse que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\mathrm{e}^x}=0$. C'est à dire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}x\mathrm{e}^{-x}=0$ donc $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}x\mathrm{e}^x=0$.

3. Soit n un entier naturel non nul quelconque.

   Pour tout réel x, $\mathrm{e}^x=\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}\right)^n$

   Donc pour tout réel x non nul, $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^n}=\dfrac{\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}\right)^n}{\left(n\times\frac{x}{n}\right)^n}=\dfrac{1}{n^n}\times\dfrac{\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}\right)^n}{\left(\frac{x}{n}\right)^n}=\dfrac{1}{n^n}\times\left(\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right)^n$

   $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{n}=+\infty$ et $\displaystyle\lim_{X\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^X}{X}=+\infty$, donc par composition, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}=+\infty$.

   On en déduit que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right)^n=+\infty$ d'où, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{n^n}\times\left(\frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right)^n=+\infty$.

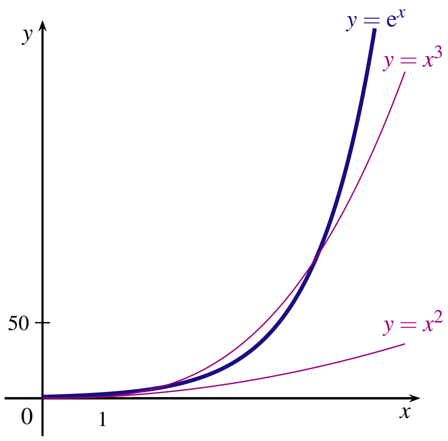
   C'est à dire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{x^n}=+\infty$.

   Ce résultat est vrai pour un entier naturel n non nul quelconque, ce qui signifie qu'il est vrai pour tout entier naturel n non nul.

   REMARQUE :

   On peut résumer cette propriété à l'aide de la règle opératoire :

   En $+\infty$, l'exponentielle de x l'emporte sur toutes les puissances de x



IV EXPONENTIELLE D'UNE FONCTION : $\exp(u)$

On considère une fonction u définie sur un intervalle I.
La fonction $f = \exp(u)$ est la composée de la fonction u suivie de la fonction exponentielle notée également $f = \mathrm{e}^u$.

1 LIMITES

Soit u une fonction définie sur un intervalle I. α désigne soit un réel, soit $-\infty$, soit $+\infty$.

— Si $\lim\limits_{x\to\alpha} u(x) = -\infty$ alors, $\lim\limits_{x\to\alpha} \mathrm{e}^{u(x)} = 0$.

— Si $\lim\limits_{x\to\alpha} u(x) = +\infty$ alors, $\lim\limits_{x\to\alpha} \mathrm{e}^{u(x)} = +\infty$.

— Si $\lim\limits_{x\to\alpha} u(x) = b$ avec b réel alors, $\lim\limits_{x\to\alpha} \mathrm{e}^{u(x)} = \mathrm{e}^b$.

EXEMPLE
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1;+\infty[$ par $f(x) = \mathrm{e}^{x-\frac{1}{x-1}}$.

1. $\lim\limits_{x\to 1^+} x-1 = 0^+$ d'où $\lim\limits_{x\to 1^+} x - \dfrac{1}{x-1} = -\infty$ et comme $\lim\limits_{X\to-\infty} \mathrm{e}^X = 0$ on en déduit que $\boxed{\lim\limits_{x\to 1} \mathrm{e}^{x-\frac{1}{x-1}} = 0}$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} x - \dfrac{1}{x-1} = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \mathrm{e}^X = +\infty$ donc par composition des limites $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{x-\frac{1}{x-1}} = +\infty}$

2 DÉRIVÉE

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. La fonction e^u est dérivable sur I et $(\mathrm{e}^u)' = u' \times \mathrm{e}^u$.

EXEMPLE
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{x^2-1}$.
La fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^2 - 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = 2x$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $\boxed{f'(x) = 2x\mathrm{e}^{x^2-1}}$

3 VARIATION

Les fonctions u et e^u ont les mêmes variations sur l'intervalle I.

Démonstration

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, par composée :

— si la fonction u est croissante sur I, alors la fonction e^u est croissante sur I ;

— si la fonction u est décroissante sur I, alors la fonction e^u est décroissante sur I.

EXEMPLE
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{1-2x}$.
f est la composée de la fonction affine u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 1 - 2x$ suivie de la fonction exp.
Or la fonction u est décroissante sur $\mathbb{R}$ donc la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

4 PRIMITIVES

Soit u est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. La fonction f définie par $f(x) = u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$ admet des primitives sur I.
L'ensemble des primitives de f sur I est l'ensemble des fonctions F définies par $F(x) = \mathrm{e}^{u(x)} + k$.

EXERCICE 1

Simplifier les écritures suivantes :

$A=\left(\mathrm{e}^{x}\right)^{2}-\dfrac{1}{\mathrm{e}^{-2x}}$; $\quad B=\left(\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}\right)^{2}-\left(\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}\right)^{2}$; $\quad C=\mathrm{e}^{-x}\left(\mathrm{e}^{2x}-\dfrac{1}{\mathrm{e}^{x}}\right)$; $\quad D=\dfrac{\mathrm{e}^{2x+1}}{\mathrm{e}^{1-x}}$.

$E=\dfrac{\left(\mathrm{e}^{x+2}\right)^{2}}{\mathrm{e}^{2x-1}}$; $\quad F=\ln\left(\mathrm{e}^{2x+1}\times\mathrm{e}^{2-x}\right)$; $\quad G=\dfrac{\mathrm{e}^{2x+\ln 2}}{\mathrm{e}^{-x}}$; $\quad H=\dfrac{\mathrm{e}^{x+\ln 8}}{\mathrm{e}^{x-\ln 2}}$.

EXERCICE 2

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

   a) $\mathrm{e}^{x^{2}+x-1}=1$ $\qquad$ b) $\dfrac{\mathrm{e}^{3x+5}}{\mathrm{e}^{3-2x}}=\mathrm{e}^{2x^{2}-1}$ $\qquad$ c) $2\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{x}-1=0$

   d) $\ln\left(\mathrm{e}^{x+1}\right)=\mathrm{e}^{x+1}+x$ $\qquad$ e) $\mathrm{e}^{\ln\left(x^{2}+1\right)}-\ln\left(\mathrm{e}^{1-x^{2}}\right)=\dfrac{1}{2}$ $\qquad$ f) $\ln\left(\mathrm{e}^{-x}\right)+\mathrm{e}^{-\ln x}=0$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

   a) $\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\geqslant\mathrm{e}$ $\qquad$ b) $\mathrm{e}^{2x}\leqslant\mathrm{e}^{x}$ $\qquad$ c) $\mathrm{e}^{2x}\mathrm{e}^{x^{2}}<1$

EXERCICE 3

(D'après sujet bac France métropolitaine, La Réunion 2016)

Quand l'oreille humaine est soumise à une intensité acoustique, exprimée en watts par mètre carré $\left(\mathrm{W}/\mathrm{m}^{2}\right)$, le niveau sonore du bruit responsable de cette intensité acoustique est exprimé en décibels (dB).

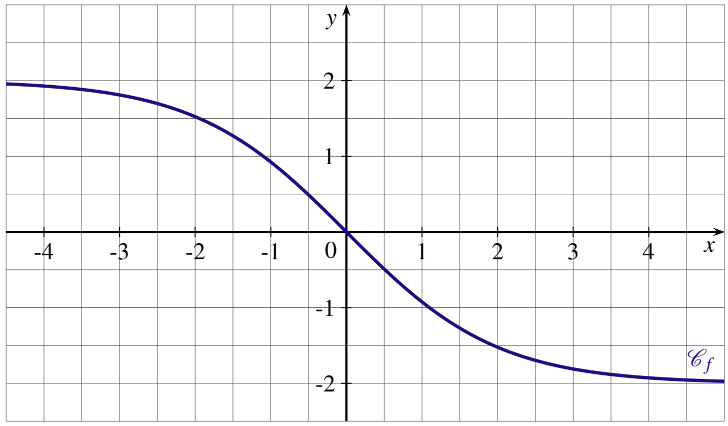
Échelle de bruit

Sources sonores	Intensité acoustique $\left(\mathrm{W}/\mathrm{m}^{2}\right)$	Niveau sonore (dB) arrondi éventuellement à l'unité	Sensation auditive
Décollage de la Fusée Ariane	10^{6}	180	Exige une protection spéciale
Turboréacteur	10^{2}	140	
Course de Formule 1	10	130	
Avion au décollage	1	120	Seuil de douleur
Concert et discothèque	10^{-1}	110	Très difficilement supportable
Baladeur à puissance maximum	10^{-2}	100	
Moto	10^{-5}	70	Pénible à entendre
Voiture au ralenti	10^{-7}	50	Bruit courant
Seuil d'audibilité	10^{-12}	0,08	Silence anormal

1. D'après le tableau, lorsque l'intensité acoustique est multipliée par 10, quelle semble être l'augmentation du niveau sonore ?
2. La relation liant l'intensité acoustique x où x appartient à l'intervalle $\left[10^{-12};10^{6}\right]$ et le niveau sonore est donnée par :
$$f(x)=\frac{10}{\ln 10}\times\ln(x)+120.$$
On pourra prendre $\dfrac{10}{\ln 10}\approx 4{,}34$.
   a) Vérifier la conjecture émise à la question 1.
   b) Quel serait le niveau sonore de deux motos ?
3. Pour éviter tout risque sur la santé, le port d'un casque de protection acoustique est donc conseillé au delà de 85 dB.
Déterminer l'intensité acoustique à partir de laquelle le port d'un tel casque est conseillé.

EXERCICE 4

On a tracé ci-dessous, la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{4}{1+\mathrm{e}^x} - 2$.



1. a) Calculer $f(-\ln 7)$ et $f(\ln 3)$.
   b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$.
2. La courbe C_f représentative de la fonction f admet-elle des asymptotes ?
3. a) On note f' la dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$.
   b) Étudier les variations de la fonction f.
4. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $\ln 3$.

EXERCICE 5

Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = \mathrm{e}^x + \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$. On note f' la dérivée de la fonction f.

1. On note f' la dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$.
2. Donner le tableau de variations de f.
3. En déduire que pour tout réel x, $\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} \geqslant 2$.

EXERCICE 6

Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = \dfrac{3-2x}{\mathrm{e}^x}$.
On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

1. a) Montrer que pour tout nombre réel x, on a : $f'(x) = (2x-5) \times \mathrm{e}^{-x}$.
   b) Étudier les variations de la fonction f.
2. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 0.

EXERCICE 7

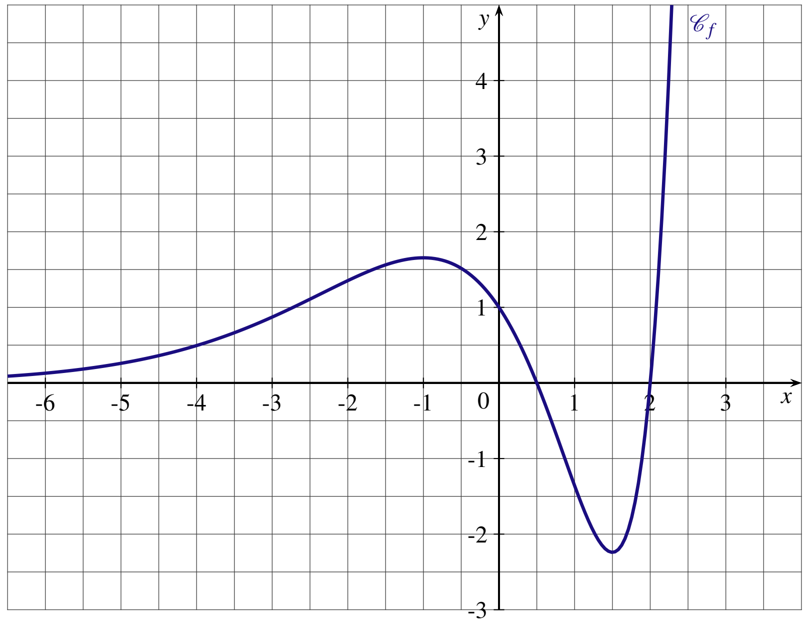
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (4-x)\mathrm{e}^x - 2$.

1. a) Déterminer, en justifiant avec soin, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
   b) La courbe C_f représentative de la fonction f admet-elle des asymptotes ?
2. a) On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$.
   b) Étudier les variations de la fonction f.
3. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2.

EXERCICE 8

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(x^2 - \dfrac{5}{2}x + 1\right)\mathrm{e}^x$.

Sa courbe représentative notée $\mathscr{C}_f$ est donnée ci-dessous.



1. a) On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$.
   b) Étudier les variations de la fonction f.
2. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.
   Tracer la droite T sur le graphique précédent.

EXERCICE 9

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{x^2} - (\mathrm{e}^x)^2$
2. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x^2}}{\mathrm{e}^{1-x}}$
3. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2} \times \mathrm{e}^{x^2-2x+1}$

EXERCICE 10

(*D'après sujet bac France métropolitaine, La Réunion septembre 2016*)

Dans cet exercice, la température est exprimée en degrés Celsius (°C) et le temps t est exprimé en minutes.
Dans une entreprise de fabrication de pièces métalliques, un ouvrier doit manipuler des plaques chaudes pendant une dizaine de secondes. À la sortie du four, les plaques sont à une température de 300 °C et disposées dans une pièce dont la température ambiante est maintenue à 26 °C par un système de ventilation.
La commission de sécurité prescrit qu'avec les gants actuels, l'ouvrier doit attendre 10 minutes pour manipuler les plaques à leur sortie du four. Afin de réduire ce délai d'attente, le directeur s'interroge sur l'achat de nouveaux gants dont les caractéristiques techniques établies par la commission de sécurité sont les suivantes :

- Sans couture.
- Très doux et confortables.
- Température maximale d'utilisation : 240 °C.

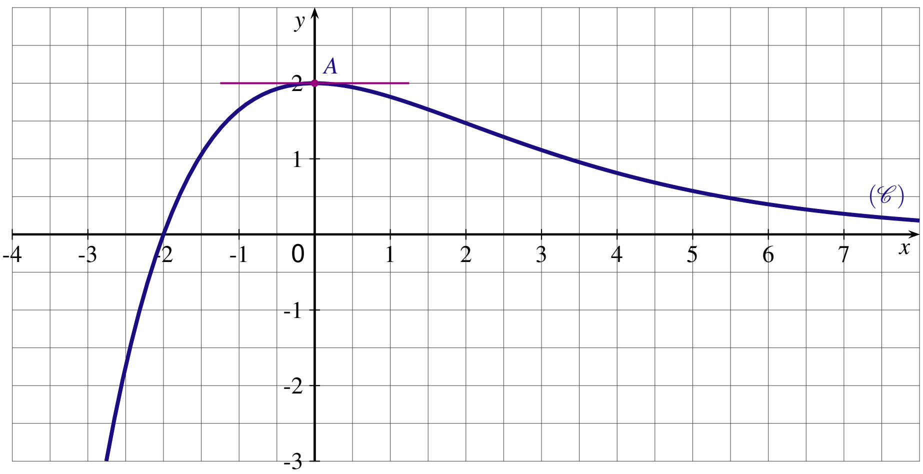
1. Dans cette question, on ne demande pas de justification.
   a) Quelle est, à la sortie du four, la température des plaques ?

   b) Comment varie, à la sortie du four, la température des plaques au cours du temps ?
   c) Vers quelle valeur la température des plaques devrait-elle se stabiliser ?
2. La température d'une plaque depuis sa sortie du four, est modélisée en fonction du temps t, exprimé en minutes, par une fonction g.
   On admet que cette fonction g est définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $g(t) = 274\mathrm{e}^{at} + 26$ où a est un nombre réel.
   a) Calculer $g(0)$. Ce résultat est-il conforme aux données ?
   b) D'après la question 1, quel doit être le signe du nombre réel a ?
   c) On sait que 3 minutes après sa sortie du four la température de la plaque, arrondie à l'unité, est de 262 °C. Montrer que la valeur approchée à 10^{-2} près du coefficient a est $-0{,}05$.
3. Dans cette question on considère que, pour tout nombre réel t de l'intervalle $[0;+\infty[$: $g(t) = 274\mathrm{e}^{-0{,}05t} + 26$.
   a) Avec les gants actuellement utilisés, à quelle température l'ouvrier pourra-t-il manipuler les plaques après leur sortie du four, en respectant les caractéristiques techniques de la commission de sécurité ?
   b) Si le directeur décidait d'équiper les ouvriers avec les nouveaux gants, quel délai d'attente minimal serait requis avant que les ouvriers puissent manipuler les plaques ?
   c) En déduire le gain de temps, en pourcentage, dû à l'utilisation de ces nouveaux gants.

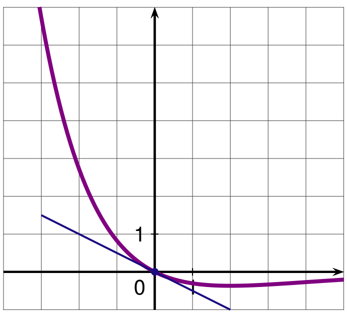
EXERCICE 11

PARTIE A

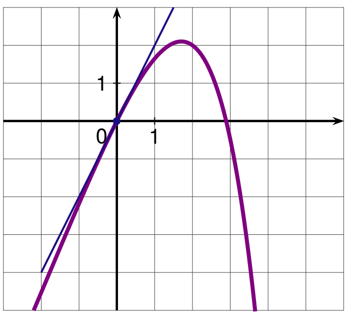
La courbe $(\mathscr{C})$ tracée ci-dessous dans un repère orthonormé est la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$. On désigne par f' la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$.



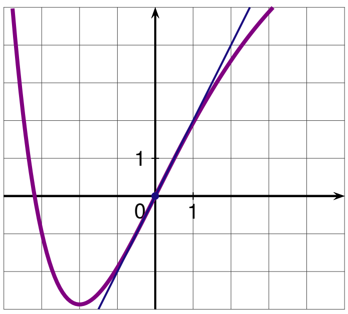
1. Au point $A(0;2)$, la courbe $(\mathscr{C})$ admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses. En déduire $f(0)$ et $f'(0)$.
2. Parmi les trois représentations graphiques ci-dessous, une représente la fonction f' dérivée de la fonction f et une autre une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.



Courbe 1



Courbe 2



Courbe 3

Déterminer la courbe associée à la fonction f' et celle qui est associée à la fonction F.

PARTIE B

Pour la suite, on admet que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-0,5x}$.

1. a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
   b) La courbe $(\mathscr{C})$ a-t-elle des asymptotes ? Si oui lesquelles ?
2. a) Calculer $f'(x)$.
   b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variation complet de f.
3. Soit F la primitive de la fonction f telle que $F(0) = 0$. On note (Γ) sa courbe représentative.
   Déterminer une équation de la tangente à la courbe (Γ) au point d'abscisse 0.

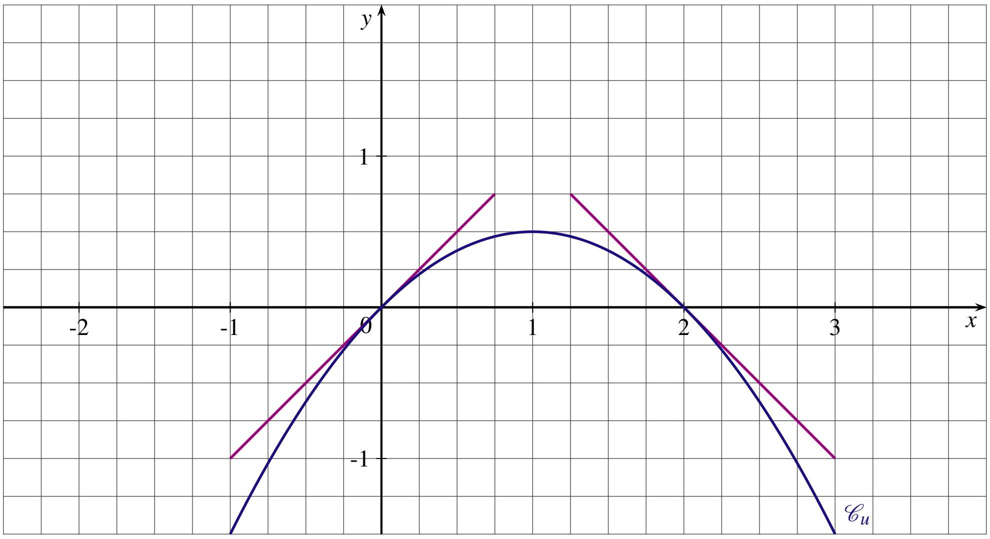
EXERCICE 12

PARTIE A

Soit u la fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}_u$ est donnée en annexe ci-dessous.
On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = \mathrm{e}^{u(x)}$. On note f' sa fonction dérivée.
À l'aide du graphique, répondre aux questions suivantes.

1. La proposition « L'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions. » est-elle vraie ou fausse ?
2. Déterminer $f(0)$ et $f'(0)$.
3. Donner le tableau de variation de la fonction f.

ANNEXE



PARTIE B

On considère dans cette partie, que la fonction f est définie pour tout réel x par $f(x) = \mathrm{e}^{x-0,5x^2}$.
On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $f(x) = 1$.
2. On note f' la dérivée de la fonction f.
   a) Calculer $f'(x)$.
   b) Étudier les variations de la fonction f.
3. Représentation graphique de la fonction f.
   a) La courbe $\mathscr{C}_f$ admet-elle des points d'inflexion ?
   b) Déterminer une équation de la tangente T_A à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 0.
   c) Déterminer une équation de la tangente T_B à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point B d'abscisse 2.
   d) Tracer dans le repère fourni en annexe la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f.
   On placera les points d'abscisses 0, 1, 2 et on tracera les tangentes à la courbe en ces points.

Chapitre 7

TRIGONOMÉTRIE (COMPLÉMENTS)

Chapitre 8

NOMBRES COMPLEXES

EXERCICE 1

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

On considère les nombres complexes z_1 et z_2 définis par $z_1 = 1 - \mathrm{i}$ et $z_2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$.

1. Déterminer une forme trigonométrique de z_1.
2. Déterminer l'écriture algébrique de z_2.
3. Soit $Z = z_1 \times z_2$.
   a) Déterminer l'écriture algébrique de Z.
   b) Déterminer une forme exponentielle de Z.
   c) En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

EXERCICE 2

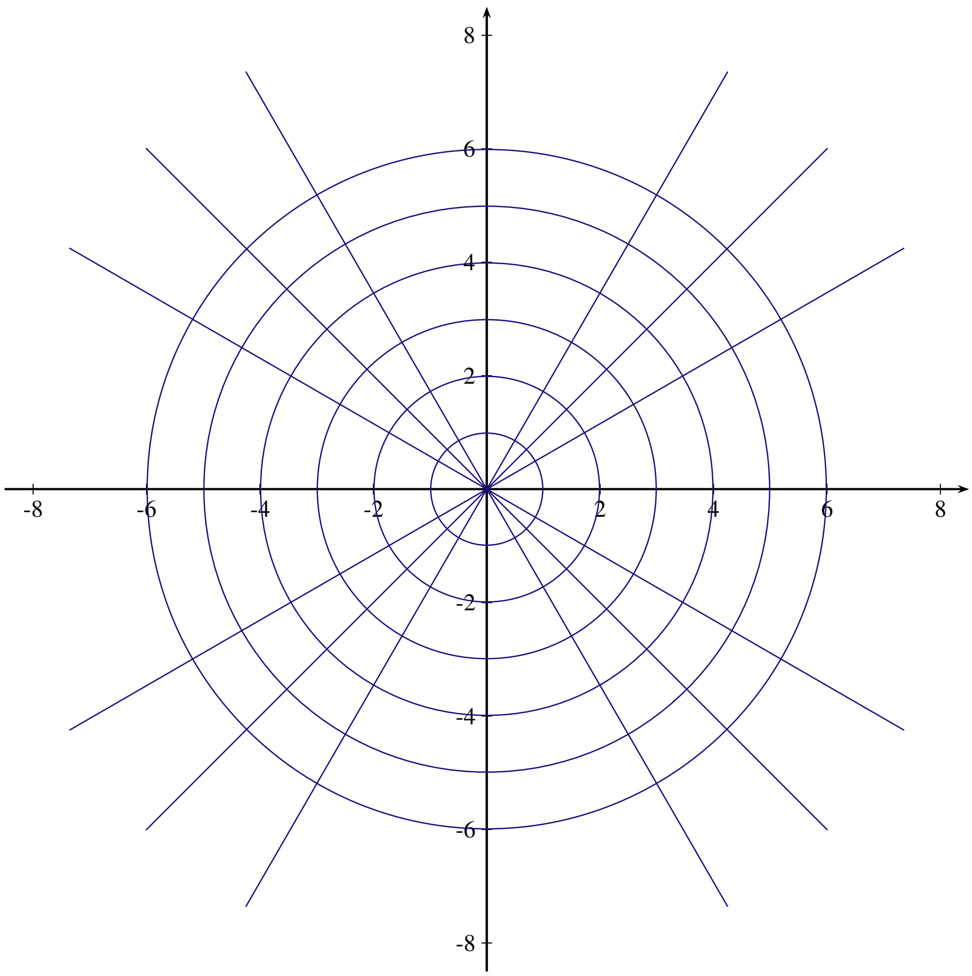
(D'après sujet bac Polynésie septembre 2014)

On considère les nombres complexes Z_1 et Z_2 :

$$Z_1 = \frac{3\sqrt{2}}{1+\mathrm{i}} \quad \text{et} \quad Z_2 = \frac{4\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}.$$

1. Écrire les nombres Z_1 et Z_2 sous forme algébrique et trigonométrique.
2. Placer les points A_1 et A_2 d'affixes respectives Z_1 et Z_2 dans le repère donné en annexe.
3. Calculer sous forme algébrique le produit $Z_1 \times Z_2$ et donner sa forme trigonométrique.
4. En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

ANNEXE à rendre avec la copie



EXERCICE 3

(D'après sujet bac Nouvelle Calédonie mars 2014 2013)

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.
On considère les nombres complexes z_1,z_2 et z_3 définis par :

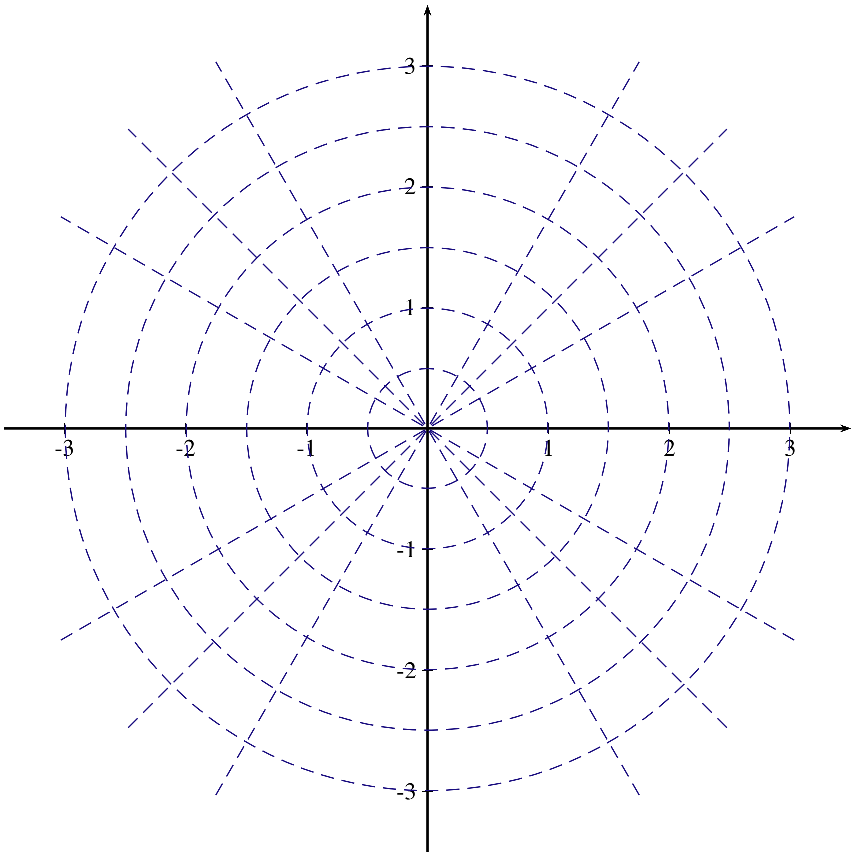
$$z_1 = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}, \quad z_2 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \quad \text{et} \quad z_3 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}.$$

1. Déterminer l'écriture exponentielle de z_1.
2. Déterminer l'écriture algébrique de z_2.
3. Démontrer que $z_1 \times z_2 = 2z_3$.
4. En déduire l'écriture algébrique de z_3.
5. En déduire que $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

EXERCICE 4

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(\mathrm{O};\vec{u},\vec{v})$.
On considère les nombre complexes $z_0 = \sqrt{3} + \mathrm{i}$, $z_1 = \overline{z_0}$ et $z_2 = -\sqrt{3} + \mathrm{i}$.

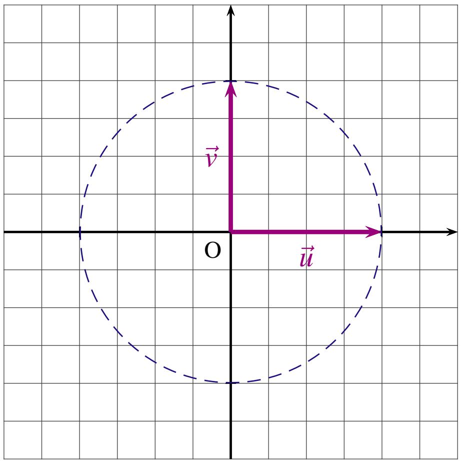
1. Écrire le nombres z_0, z_1 et z_2 sous forme trigonométrique et exponentielle.
2. Soit z le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{3}$. Donner l'écriture algébrique de z.
3. Calculer $z_3 = z \times z_2 + z_1$.
4. Placer les points A, B, C et D d'affixes respectives z_0, z_1 , z_2 et z_3 dans le repère donné ci-dessous.
5. Quelle est la nature du triangle ABD ?



EXERCICE 5

On donne le nombre complexe $\mathrm{j} = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1. Déterminer le module et un argument du nombre complexe j, puis donner sa forme exponentielle.
2. Démontrer les égalités suivantes :
   a) $j^3 = 1$;
   b) $j + j^2 + j^3 = 0$.
3. a) Placer les points A, B et C d'affixes respectives j , j^2 et j^3 dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$.
   b) Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier la réponse.



EXERCICE 6

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 10 cm, on considère le point M_0 d'affixe $z_0 = 1$.

Pour tout entier naturel n non nul, on note M_n le point d'affixe $z_n = \dfrac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}} z_{n-1}$.

1. a) Déterminer l'écriture exponentielle de z_1, z_2 et z_3.
   b) Construire les points M_0, M_1, M_2 et M_3 dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$.
2. On appelle r_n le module de z_n.
   a) Montrer que (r_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   b) Quelle est la limite de la suite (r_n) ?
   c) On considère que sur la représentation, on ne peut plus distinguer le point M_n du point O si la distance OM_n est strictement inférieure à 1 mm.
   Déterminer la plus grande valeur N de n pour laquelle M_n peut être distingué de O.
3. On admet que $z_6 = \left(\dfrac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^6$.
   Donner l'écriture exponentielle de z_6 puis construire M_6 dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$.

EXERCICE 7

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère le point M_0 d'affixe $z_0 = \sqrt{3} + 1$.
Pour tout entier naturel n non nul, on note M_n le point d'affixe $z_n = {z_0}^n$.

1. a) Déterminer l'écriture exponentielle de z_1, z_2 et z_3.
   b) Construire les points M_0, M_1, M_2 et M_3 dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$.
2. a) Donner l'écriture exponentielle de z_n en fonction de n.
   b) Déterminer la plus petite valeur N de n telle que M_n soit situé sur l'axe des ordonnées avec une ordonnée négative.
   Quelle est alors la distance OM_n ?

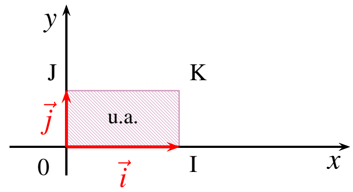
Chapitre 9

CALCUL INTÉGRAL

I INTÉGRALE ET AIRE

1 UNITÉ D'AIRE

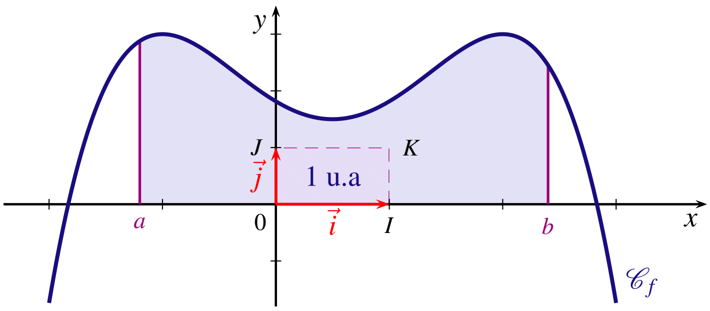
Soit $\left(\text{O};\vec{i},\vec{j}\right)$ un repère orthogonal du plan.
L'unité d'aire, notée u.a, est l'aire du rectangle unitaire OIJK avec $\text{I}(0;1)$, $\text{J}(0;1)$ et $\text{K}(1;1)$.



2 INTÉGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE ET POSITIVE

DÉFINITION

Soit f une fonction définie, continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\text{O};\vec{i},\vec{j}\right)$.
L'intégrale de f entre a et b est l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine $\mathscr{D}_f$ compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$
Ce nombre est noté : $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$



REMARQUES

— $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ se lit « intégrale de a à b de $f(x)\mathrm{d}x$ » ou encore « somme de a à b de $f(x)\mathrm{d}x$ ».

— Les réels a et b sont appelés les bornes de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

— La variable x est dite « muette », elle n'intervient pas dans le résultat. C'est à dire qu'on peut la remplacer par n'importe quelle autre variable distincte des lettres a et b : $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=\int_a^b f(u)\mathrm{d}u$

— $\displaystyle\int_a^a f(x)\mathrm{d}x=0$, car le domaine $\mathscr{D}_f$ est alors réduit à un segment.

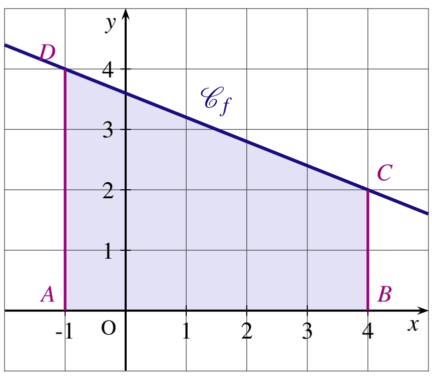
EXEMPLES

1. Calculons $\displaystyle\int_{-1}^{4}(-0{,}4x+3{,}6)\,\mathrm{d}x$.

   La fonction affine f définie pour tout réel x par $f(x)=-0{,}4x+3{,}6$ est continue et positive sur l'intervalle $[-1;4]$

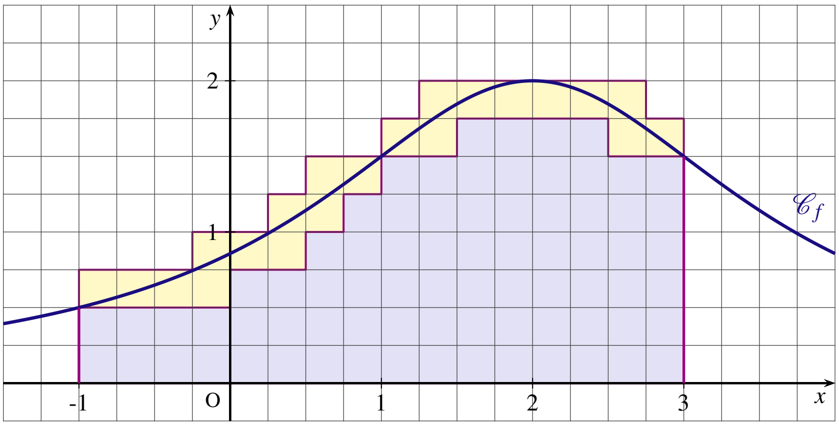
   L'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{4}(-0{,}4x+3{,}6)\,\mathrm{d}x$ est égale à l'aire du trapèze $ABCD$.

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{4}(-0{,}4x+3{,}6)\,\mathrm{d}x &= \frac{(AD+BC)\times AB}{2}\\ &= \frac{(4+2)\times 5}{2}\\ &= 15\end{aligned}$$



2. Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x)=\dfrac{6}{x^2-4x+7}$ dont la courbe $\mathscr{C}_f$ est représentée ci-dessous.

   Déterminer un encadrement de l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{3} f(x)\mathrm{d}x$.

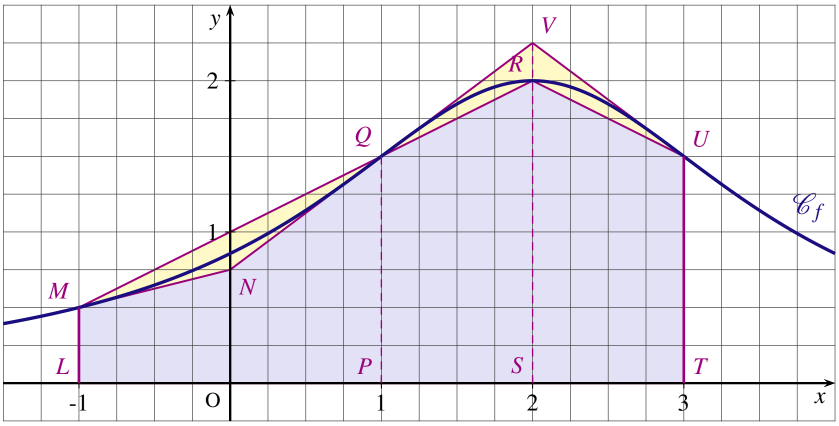


Sur l'intervalle $[-1;3]$, la fonction f est continue et positive. L'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{3} f(x)\mathrm{d}x$ est égale à l'aire, en unités d'aire, du domaine $\mathscr{D}_f$ compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=-1$ et $x=3$.

On peut déterminer un encadrement de l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{3} f(x)\mathrm{d}x$ à l'aide du quadrillage. D'où l'encadrement

$$\frac{75}{16}\leqslant\int_{-1}^{3} f(x)\mathrm{d}x\leqslant 6$$

Un encadrement plus précis est obtenu à partir de trapèzes. Les droites (MN) , (NV) et (VU) étant les tangentes respectives à la courbe $\mathscr{C}_f$ aux points d'abscisses -1, 1 et 3.



L'aire du domaine $\mathscr{D}_f$ est comprise entre la somme des aires des trapèzes $LMNO$, $NOPQ$, $PQRS$ et $RSTU$ et, la somme des aires des trapèzes $LMPQ$, $PQVS$ et $VSTU$. Soit

$$0{,}625+1{,}25+1{,}75+1{,}75\leqslant\int_{-1}^{3} f(x)\mathrm{d}x\leqslant 2+1{,}875++1{,}875\iff 5{,}375\leqslant\int_{-1}^{3} f(x)\mathrm{d}x\leqslant 5{,}75$$

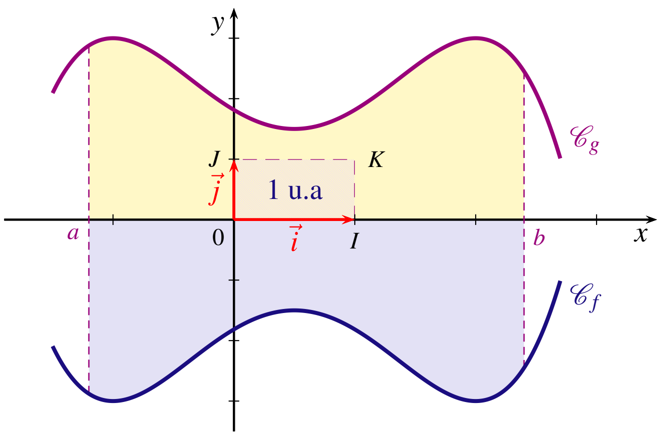
Remarque :

— À l'aide de la calculatrice, on trouve $\displaystyle\int_{-1}^{3}\left(\frac{6}{x^2-4x+7}\right)\mathrm{d}x\approx 5{,}44$.

— À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on obtient $\displaystyle\int_{-1}^{3}\left(\frac{6}{x^2-4x+7}\right)\mathrm{d}x=\pi\sqrt{3}$.

3 INTÉGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE ET NÉGATIVE

Si f est une fonction continue et négative sur un intervalle $[a;b]$ alors, la fonction g définie sur l'intervalle $[a;b]$ par $g=-f$ est une fonction continue et positive sur cet intervalle.
Par symétrie par rapport à l'axe des abscisses, l'aire du domaine $\mathscr{D}_f$ compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ est égale à l'aire du domaine $\mathscr{D}_g$ compris entre la courbe $\mathscr{C}_g$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$.



DÉFINITION

Soit f une fonction définie, continue et négative sur un intervalle $[a;b]$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j}\right)$.
L'intégrale de la fonction f entre a et b est égale à l'opposé de l'aire $\mathscr{A}$, exprimée en unités d'aire, du domaine $\mathscr{D}_f$ compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=-\mathscr{A}$$

4 LIEN ENTRE INTÉGRALE ET PRIMITIVE

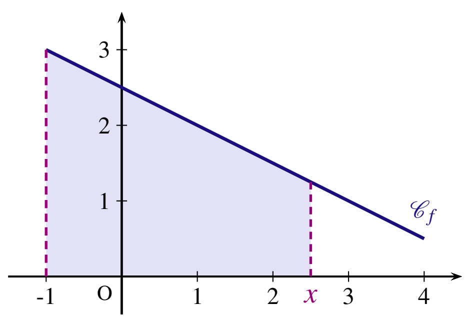
Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$. On peut définir une nouvelle fonction F qui à tout réel x de l'intervalle $[a;b]$, associe l'intégrale de f entre a et x : $F(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$

THÉORÈME *(admis)*

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$.
La fonction F définie sur $[a;b]$ par $F(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est dérivable sur $[a;b]$ et a pour dérivée f.

EXEMPLE

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-1;4]$ par $f(x)=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{2}$.
Si x est un réel de l'intervalle $[-1;4]$, la fonction F définie par $F(x)=\displaystyle\int_{-1}^x f(t)\mathrm{d}t$ est égale à l'aire du trapèze colorié.
On a donc $F(x)=\dfrac{(3+(-0{,}5x+2{,}5))\times(x+1)}{2}=-\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{5x}{2}+\dfrac{11}{4}$
La fonction F est dérivable sur $[-1;4]$ et $F'(x)=-\dfrac{x}{2}+\dfrac{5}{2}=f(x)$.



II INTÉGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE

1 DÉFINITION

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ et F une primitive de la fonction f sur $[a;b]$.
L'intégrale de f entre a à b est le nombre réel égal à $F(b)-F(a)$:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b)-F(a)$$

REMARQUES

— La différence $F(b)-F(a)$ se note $\Big[F(x)\Big]_a^b$; ainsi $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b)-F(a)$.

— Le choix de la primitive F n'influe pas sur la valeur de l'intégrale.
En effet, si G est une autre primitive de f sur I, il existe un réel k tel que $G(x)=F(x)+k$ d'où

$$G(b)-G(a)=(F(b)+k)-(F(a)+k)=F(b)-F(a)$$

— Si f est une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b)-F(a)$ est l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$.

EXEMPLE

$$\begin{aligned}\int_1^{\mathrm{e}} \left(x-\frac{1}{x}+\frac{\mathrm{e}}{x^2}\right)\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^2}{2}-\ln(x)-\frac{\mathrm{e}}{x}\right]_1^{\mathrm{e}}\\ &= \left(\frac{\mathrm{e}^2}{2}-\ln(\mathrm{e})-\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}}\right)-\left(\frac{1^2}{2}-\ln(1)-\frac{\mathrm{e}}{1}\right)\\ &= \frac{\mathrm{e}^2}{2}+\mathrm{e}-\frac{5}{2}\end{aligned}$$

2 PREMIÈRES PROPRIÉTÉS

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Pour tout réel a appartenant à I.

$$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$$

Preuve :
Soit F une primitive de f sur I.

$$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = F(a)-F(a)=0$$

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, a et b deux réels appartenant à I.

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$$

Preuve :
Soit F une primitive de f sur I.

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b)-F(a) \qquad \text{et} \qquad \int_b^a f(x)\mathrm{d}x = F(a)-F(b)$$

III PROPRIÉTÉS DE L'INTÉGRALE

1 POSITIVITÉ

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux réels appartenant à I.
Si $a \leqslant b$ et $f \geqslant 0$ sur l'intervalle $[a;b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$.

✼ DÉMONSTRATION

Soit F une primitive de f sur I. Pour tout réel x de l'intervalle I, $F'(x) = f(x)$.
Or $f \geqslant 0$ sur l'intervalle $[a;b]$ donc F est croissante sur $[a;b]$. Par conséquent, si $a \leqslant b$, alors $F(a) \leqslant F(b)$.
On en déduit que $F(b) - F(a) \geqslant 0$ et $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$.

Attention la réciproque est fausse :
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 3x + 1$

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{3} \left(-x^2+3x+1\right)\,\mathrm{d}x &= \left[-\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2+x\right]_{-2}^{3}\\ &= \left(-9+\frac{27}{2}+3\right)-\left(\frac{8}{3}+6-2\right)=\frac{5}{6}\end{aligned}$$

Ainsi $\displaystyle\int_{-2}^{3} f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$ mais $f(-1) = -3$.
On démontre de manière analogue la propriété suivante :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux réels appartenant à I.
Si $a \leqslant b$ et $f \leqslant 0$ sur l'intervalle $[a;b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant 0$.

2 LINÉARITÉ

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Pour tous réels a et b appartenant à I, et pour tout réel α

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad \int_a^b \alpha f(x)\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

✼ DÉMONSTRATION

1. Si F et G sont deux primitives respectives des fonctions f et g sur I, alors $F+G$ est une primitive sur I de la fonction $f+g$.

$$\begin{aligned}\int_a^b (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x &= (F(b)+G(b))-(F(a)+G(a))\\ &= (F(b)-F(a))+(G(b)-G(a))\\ &= \int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

2. Soit F une primitive de f sur I et α un réel.

$$\begin{aligned}\int_a^b kf(t)\mathrm{d}t &= \alpha F(b)-\alpha F(a)\\ &= \alpha\,(F(b)-F(a))\\ &= \alpha\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

3 RELATION DE CHASLES

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Pour tous réels a, b et c appartenant à I

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

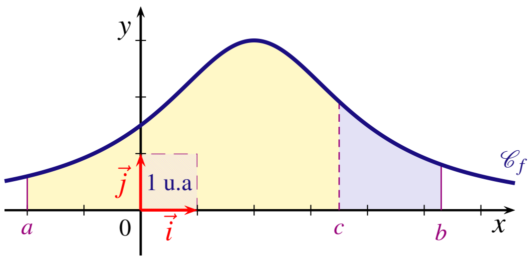
✻ DÉMONSTRATION

Soit F une primitive de f sur I. Pour tous réels a, b et c appartenant à I

$$\begin{aligned}\int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x &= (F(c)-F(a)) + (F(b)-F(c))\\ &= F(b)-F(a)\\ &= \int_a^b f(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

INTERPRÉTATION GRAPHIQUE :

Dans le cas où f est une fonction continue et positive sur $[a;b]$. L'aire du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ est égale à la somme des aires du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=c$ et du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=c$ et $x=b$.



4 ORDRE

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, a et b deux réels appartenant à I tels que $a \leqslant b$.
Si pour tout réel x appartenant à $[a;b]$, $f(x) \leqslant g(x)$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$

✻ DÉMONSTRATION

Si pour tout réel x appartenant à $[a;b]$, $f(x) \leqslant g(x)$, alors $f(x)-g(x) \leqslant 0$. Comme f et g sont deux fonctions continues sur $[a;b]$, la fonction $f-g$ est continue sur $[a;b]$.
Par conséquent, si $a \leqslant b$ et $f-g \leqslant 0$ alors

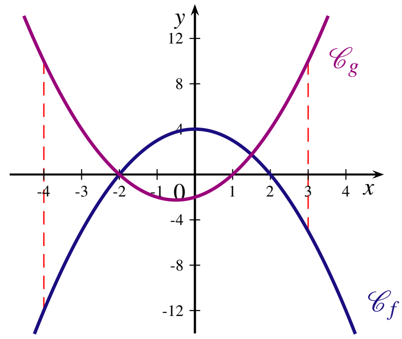
$$\int_a^b (f-g)(x)\mathrm{d}x \leqslant 0 \Leftrightarrow \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\mathrm{d}x \leqslant 0$$

Attention la réciproque est fausse :
Considérons les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4-x^2$ et $g(x) = x^2+x-2$.

$$\begin{aligned}\int_{-4}^3 \left(4-x^2\right)\mathrm{d}x &= \left[4x-\frac{x^3}{3}\right]_{-4}^3\\ &= \left(12-\frac{27}{3}\right)-\left(-16+\frac{64}{3}\right)\\ &= -\frac{7}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{-4}^3 \left(x^2+x-2\right)\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^2}{3}+\frac{x^2}{2}-2x\right]_{-4}^3\\ &= \left(\frac{27}{3}+\frac{9}{2}-6\right)-\left(-\frac{64}{3}+\frac{16}{2}+8\right)\\ &= \frac{77}{6}\end{aligned}$$

Ainsi, $\int_{-4}^{3} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_{-4}^{3} g(x)\mathrm{d}x$ mais nous ne pouvons pas conclure que sur l'intervalle $[-4;3]$, $f(x) \leqslant g(x)$ comme on peut le constater sur le graphique ci-contre.



IV INTÉGRALE ET MOYENNE

1 INÉGALITÉS DE LA MOYENNE

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $[a;b]$ de $\mathbb{R}$ ($a < b$). Soit m et M deux réels.
Si pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[a;b]$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$, alors :

$$m \times (b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M \times (b-a)$$

✻ DÉMONSTRATION

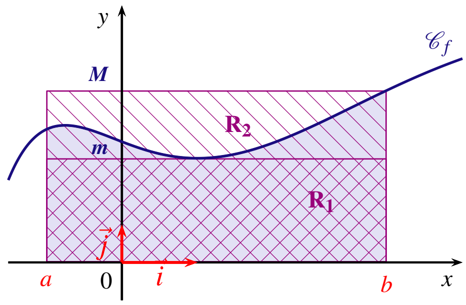
Les fonctions définies sur $[a;b]$ par $x \longmapsto m$ et $x \longmapsto M$ sont constantes donc continues.
Si pour tout réel x appartenant à $[a;b]$ ($a < b$), $m \leqslant f(x) \leqslant M$, alors d'après la propriété de l'intégration d'une inégalité :

$$\int_a^b m\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b M\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow m\int_a^b \mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M\int_a^b \mathrm{d}x$$
$$\Leftrightarrow m \times (b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M \times (b-a)$$

INTERPRÉTATION GRAPHIQUE :

Dans le cas où f est une fonction continue et positive sur $[a;b]$

L'aire du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est comprise entre les aires des rectangles R_1 et R_2 :
R_1 de côtés m et $b-a$;
R_2 de côtés M et $b-a$.



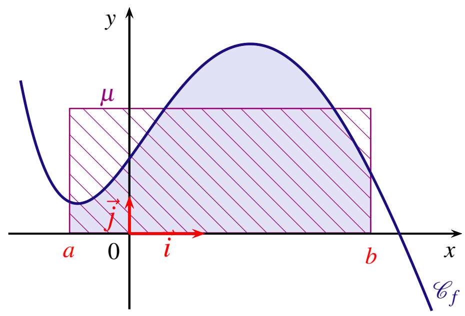
2 VALEUR MOYENNE

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $[a;b]$ de $\mathbb{R}$ ($a < b$).
On appelle valeur moyenne de f sur $[a;b]$ le réel $\mu = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

INTERPRÉTATION GRAPHIQUE :

Dans le cas où f est une fonction continue et positive sur $[a;b]$

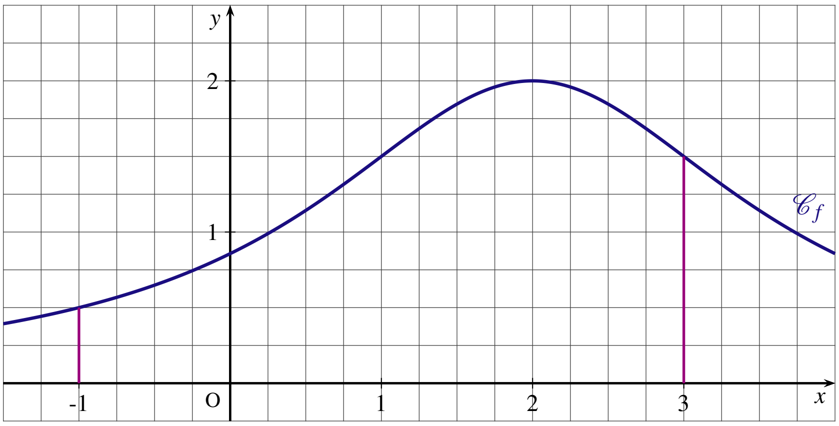
L'aire du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est égale à l'aire du rectangle de côtés μ et $b-a$.



EXERCICE 1

1. La courbe $\mathscr{C}_f$ est la représentation graphique d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

   Déterminer un encadrement de l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{3} f(x)\mathrm{d}x$.



2. La fonction f est définie pour tout réel x par $f(x)=\dfrac{6}{x^2-4x+7}$.

   À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement au centième près, de l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{3} f(x)\mathrm{d}x$.

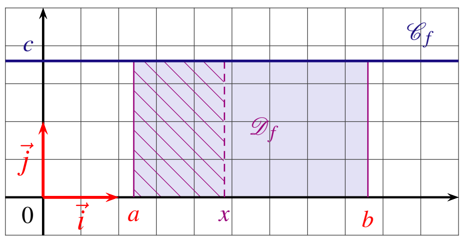
EXERCICE 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 1 cm. a et b sont deux réels tels que $a<b$.
Dans chaque cas, on considère une fonction f définie et positive sur l'intervalle $[a;b]$.
$\mathscr{C}_f$ désigne la courbe représentative de la fonction f dans le repère $\left(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ et $\mathscr{D}_f$ le domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$.

FONCTION CONSTANTE :

Soit c un réel positif. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=c$.

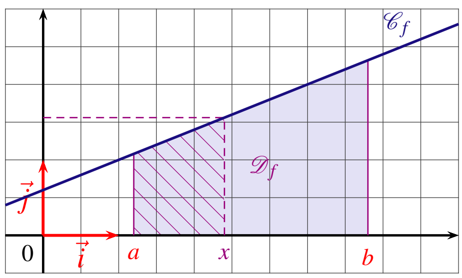
1. Exprimer en fonction de a et de b l'aire en cm^2 du domaine $\mathscr{D}_f$.
2. On considère la fonction F qui à tout réel x de l'intervalle $[a;b]$, associe l'aire $\mathscr{A}_x$ du domaine hachuré.
   a) Donner une expression de F en fonction de x.
   b) Calculer $F'(x)$ où F' est la dérivée de la fonction F sur $[a;b]$
   c) Calculer $F(b)-F(a)$. Que constate-t-on ?



FONCTION AFFINE :

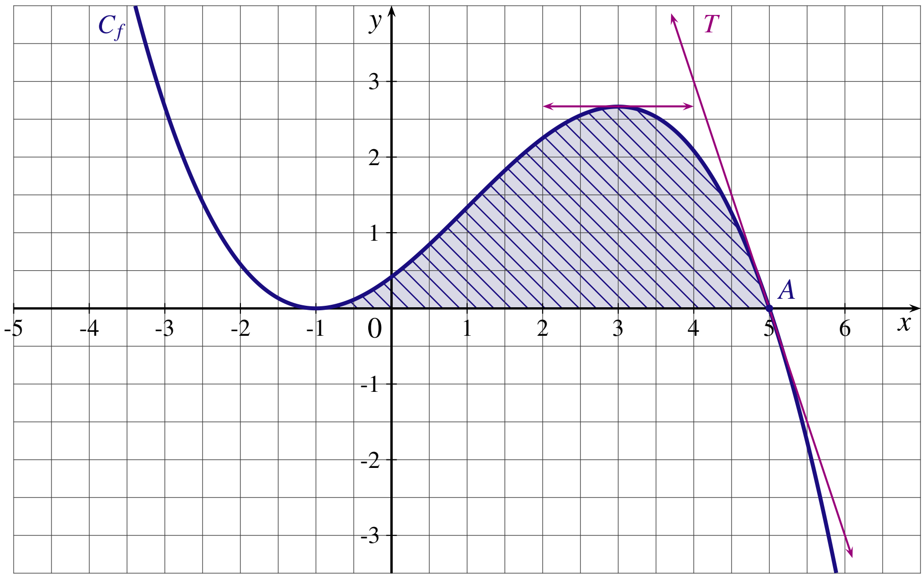
f est une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=mx+p$ où m et p sont des réels fixés avec m non nul. f est supposée positive sur $[a;b]$.

1. Exprimer en fonction de a et de b l'aire en cm^2 du domaine $\mathscr{D}_f$.
2. On considère la fonction F qui à tout réel x de l'intervalle $[a;b]$, associe l'aire $\mathscr{A}_x$ du domaine hachuré.
   a) Donner une expression de F en fonction de x.
   b) Calculer $F'(x)$ où F' est la dérivée de la fonction F sur $[a;b]$
   c) Calculer $F(b)-F(a)$. Que constate-t-on ?

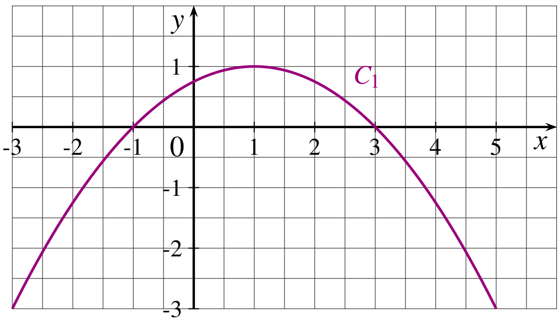


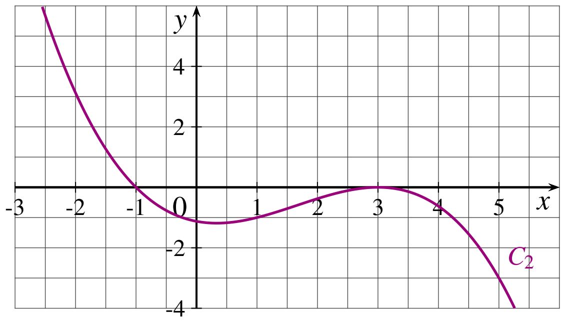
EXERCICE 3

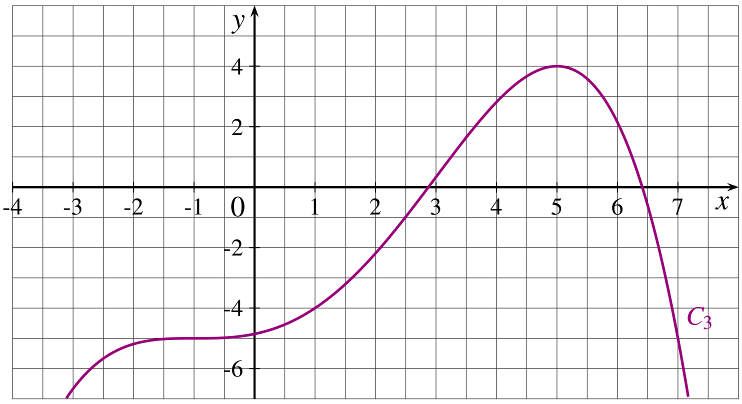
La courbe $\mathscr{C}_f$ tracée ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
La tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A passe par le point de coordonnées $(4;3)$.
On note f' la dérivée de la fonction fonction f et F une primitive de la fonction fonction f.



1. Déterminer $f'(3)$ et $f'(5)$.
2. Donner le tableau de variations de la fonction F.
3. Donner un encadrement de l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x$.
4. Une des trois courbes ci-dessous est la représentation graphique de la fonction f' et une autre celle de la fonction F.
   a) Déterminer la courbe associée à la fonction f' et celle qui est associée à la fonction F.







   b) En déduire la valeur exacte de l'aire du domaine colorié.

EXERCICE 4

Calculer la valeur exacte de chacune des intégrales suivantes :

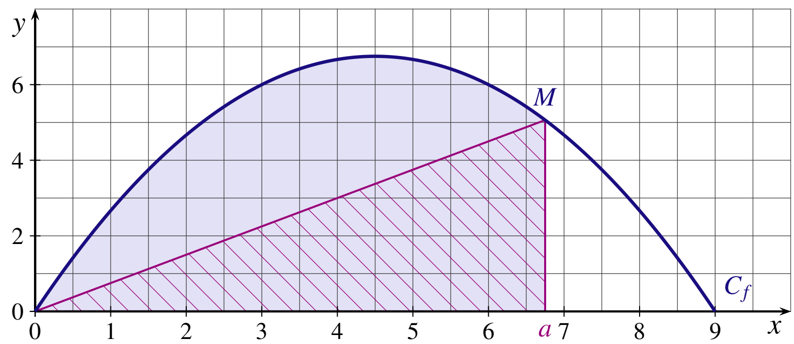
1. $A = \int_{-1}^{2} \left(x^2 - 3x + 1\right)\, \mathrm{d}x$
2. $B = \int_{2}^{6} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{2}{x^2} - 1\right)\, \mathrm{d}x$
3. $C = \int_{-2}^{1} 2\mathrm{e}^{2x+1}\, \mathrm{d}x$
4. $D = \int_{0}^{\ln 2} 2\mathrm{e}^{x} \times \left(\mathrm{e}^{x} + 1\right)\, \mathrm{d}x$
5. $E = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{\ln x}{x}\, \mathrm{d}x$
6. $F = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t\, \mathrm{d}t$
7. $G = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin t\, \mathrm{d}t$
8. $H = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(2t + \pi\right)\, \mathrm{d}t$

EXERCICE 5

1. Calculer l'intégrale $\int_{-2}^{2} \mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}\, \mathrm{d}x$.
2. Peut-on en déduire que la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = \mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}$ est constante sur l'intervalle $[-2;2]$?

EXERCICE 6

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;9]$ par $f(x) = 3x - \frac{x^2}{3}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal.

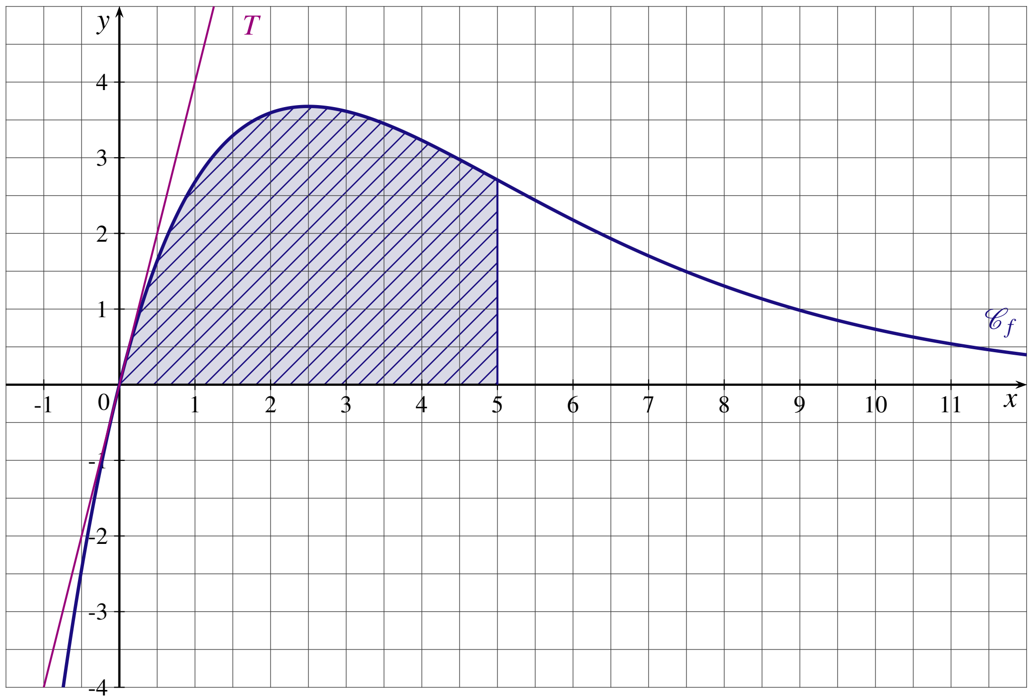


L'objet de cet exercice est de déterminer l'abscisse a du point M de la parabole $\mathscr{C}_f$ telle que l'aire du triangle hachuré soit égale à la moitié de l'aire du domaine délimité par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = a$.

1. Quelle est l'ordonnée du point M de la parabole $\mathscr{C}_f$ d'abscisse a ? En déduire l'aire T en fonction de a du triangle hachuré.
2. Exprimer l'aire A en fonction de a du domaine délimité par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = a$.
3. Déterminer a pour que $A = 2T$.

EXERCICE 7

La courbe $\mathscr{C}_f$ tracée ci-dessous dans le plan muni d'un repère orthogonal est la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
La droite T est tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.



PARTIE A - Lecture graphique

1. On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f. Par lecture graphique, déterminer $f'(0)$.
2. Soit F une primitive de f. Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

   PROPOSITION A : Sur l'intervalle $[5;+\infty[$, la fonction F est croissante.

   PROPOSITION B : $F(-1) \leqslant F(0)$.

   PROPOSITION C : $12 \leqslant F(5)-F(0) \leqslant 18$.

PARTIE B - Calcul d'aire

La fonction f est définie pour tout réel x par $f(x)=4x\mathrm{e}^{-0,4x}$.

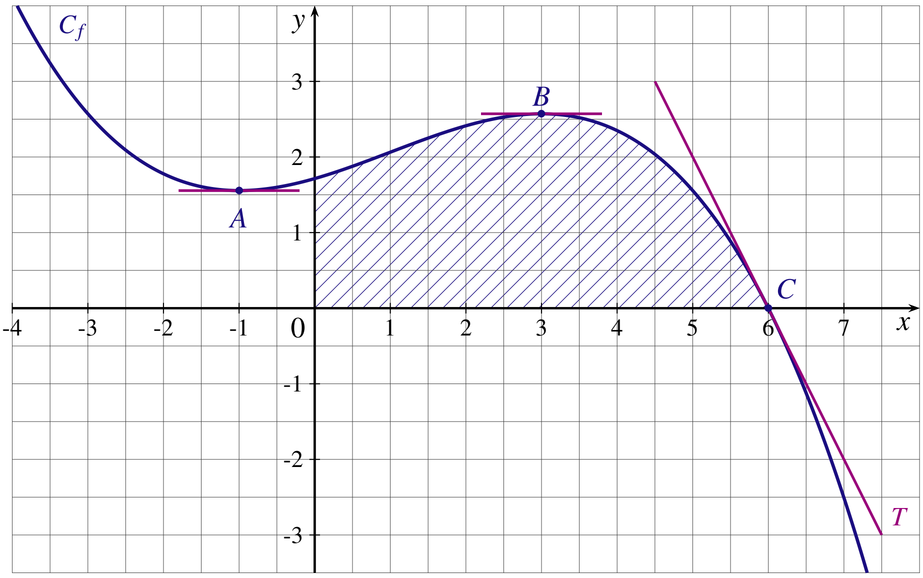
1. On cherche une primitive F de la fonction f de la forme $F(x)=(ax+b)\mathrm{e}^{-0,4x}$ avec a et b deux nombres réels.

   a) Montrer que a et b sont solutions du système d'équations suivant : $\begin{cases} -0,4a & = & 4 \\ a-0,4b & = & 0 \end{cases}$

   b) Calculer a et b et donner l'expression de $F(x)$.
2. On note A l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine colorié sur le graphique. Déterminer la valeur exacte de A.

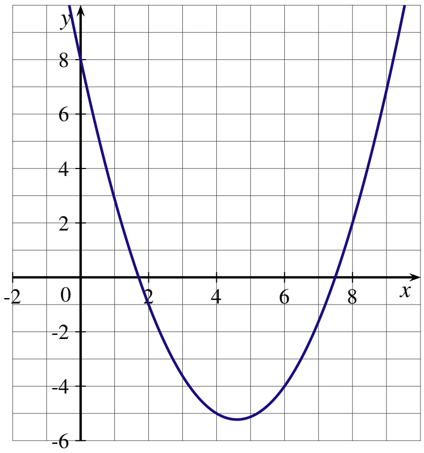
EXERCICE 8

La courbe $\mathscr{C}_f$ tracée ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
La tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $C(6;0)$ passe par le point de coordonnées $(5;2)$

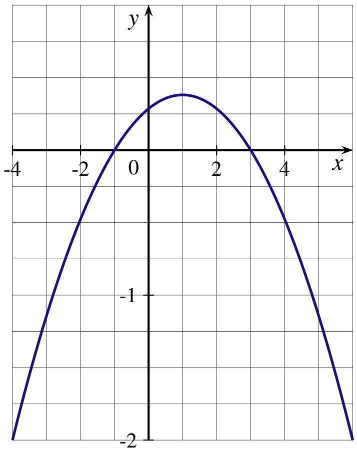


On note f' la dérivée de la fonction fonction f et F une primitive de la fonction fonction f.
À partir du graphique et des renseignements fournis, répondre aux questions suivantes :

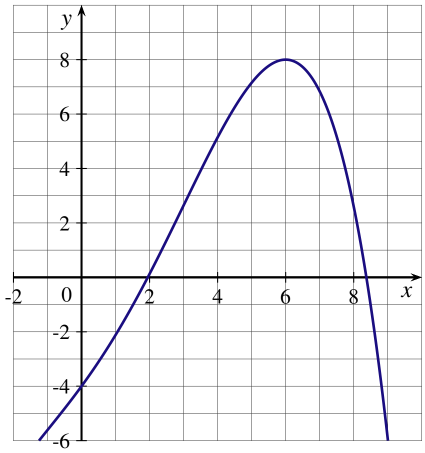
1. Déterminer $f'(-1)$ et $f'(6)$.
2. Donner le tableau de variations de la fonction F.
3. Une des trois courbes ci-dessous est la représentation graphique de la dérivée f' et une autre de la primitive F.
   Déterminer la courbe associée à la fonction f' et celle qui est associée à la fonction F.



Courbe C_1



Courbe C_2



Courbe C_3

4. Donner une valeur approchée (en unité d'aire) de l'aire du domaine hachuré.

EXERCICE 9 (*D'après sujet bac Antilles Guyane 2015*)

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

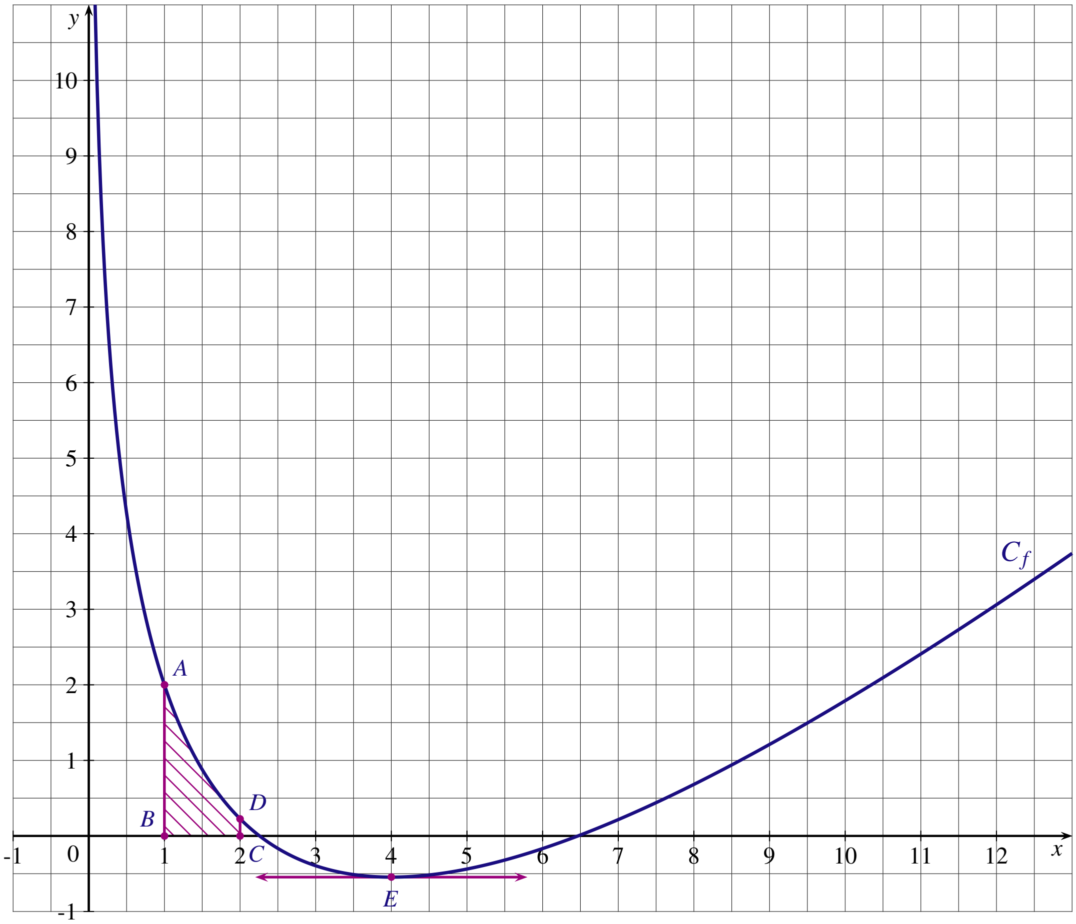
Dans cet exercice, ln désigne la fonction logarithme népérien.

PARTIE A

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = ax + b\ln(x) + 1$$

où a et b sont deux nombres réels.
C_f est la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormé.
Les points A et E sont deux points de la courbe C_f.
Le point A a pour coordonnées $(1;2)$ et le point E a pour abscisse 4.
La tangente à C_f au point E est horizontale.



1. Déterminer $f(1)$ et $f'(4)$ où f' désigne la fonction dérivée de f.
2. Calculer $f'(x)$ puis exprimer $f'(4)$ en fonction de a et b.
3. Déterminer les valeurs de a et b.

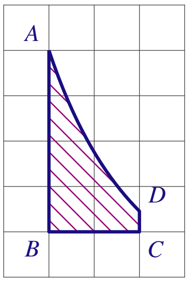
PARTIE B

Soit la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = x - 4\ln(x) + 1$$

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ en justifiant la réponse. Donner une interprétation graphique du résultat.
2. Déterminer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ en justifiant la réponse (on pourra factoriser l'expression de $f(x)$ par x).
3. Calculer la dérivée f' de f. En déduire le tableau des variations de f.

PARTIE C



Une entreprise fabrique des pièces de carrosserie de voiture.
La forme d'une pièce est donnée sur la figure ci-contre et correspond à la zone hachurée sur le graphique précédent.
On souhaite déterminer la mesure de l'aire de la pièce en unité d'aire.
Le point D est le point de la courbe C_f d'abscisse 2.
Les points B et C ont pour coordonnées respectives $(1;0)$ et $(2;0)$.

Soit la fonction G définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$G(x) = x\ln(x) - x.$$

1. Calculer la dérivée G' de G.
2. En déduire une primitive F de la fonction f donnée dans la partie B sur $]0;+\infty[$.
3. Déterminer la valeur exacte de l'aire de la pièce en unité d'aire ; puis en donner une valeur arrondie à 10^{-2}.

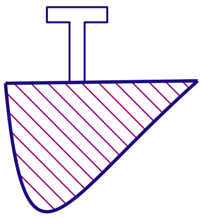
EXERCICE 10

(D'après sujet bac Nouvelle Calédonie 2015)

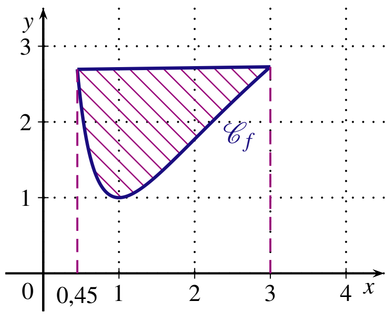
Une entreprise fabriquant des planches de surf conçoit un nouveau modèle d'aileron. Cet aileron est composé de deux parties :

— la partie supérieure ou « boîtier » permettant de fixer l'aileron à la planche,

— la partie inférieure destinée à être immergée dans l'eau.



Pour estimer la quantité de matière nécessaire à la fabrication de la partie inférieure de l'aileron, l'entreprise souhaite connaître le mieux possible l'aire A du domaine hachuré.
Pour modéliser le profil latéral de la partie inférieure on se place dans un repère orthonormé avec une échelle de 1 carreau pour 10 cm et on se propose d'utiliser, pour des abscisses comprises entre 0,45 et 3, la courbe C_f représentative de la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{a}{x} + b + 4\ln(x)$ où a et b sont des constantes réelles qui restent à déterminer.

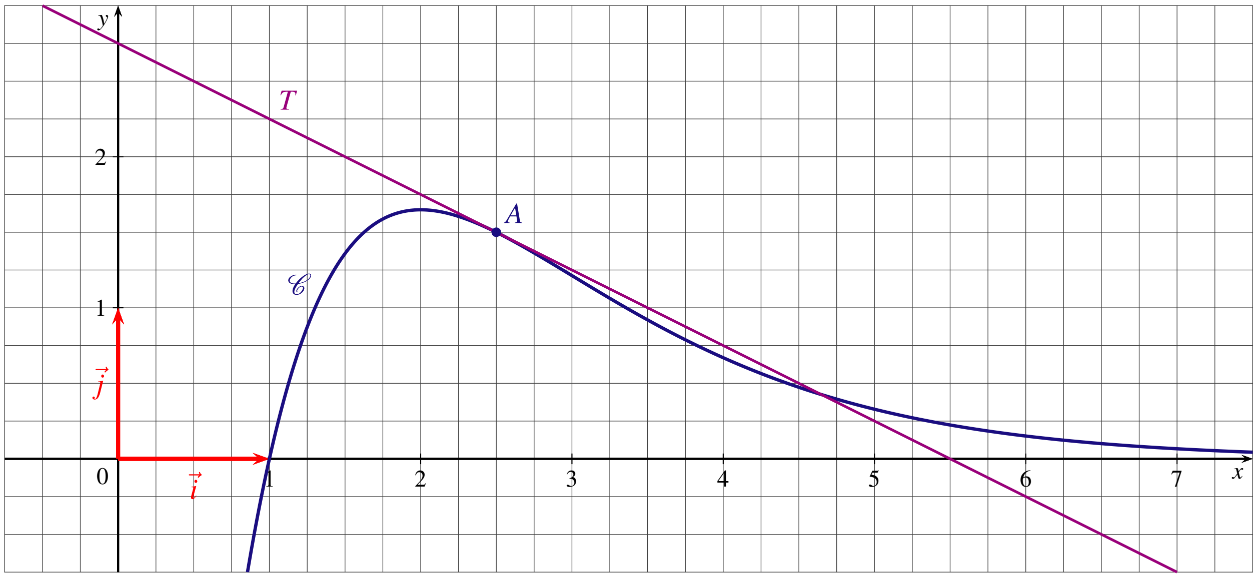


1. Évaluer l'aire A en nombre entier de carreaux en expliquant votre démarche.
2. Déterminer graphiquement les valeurs de $f(1)$ et de $f'(1)$.
3. Vérifier que le choix de $a = 4$ et $b = -3$ répond au problème posé.
4. Soit la fonction F définie sur $]0;+\infty[$ par $F(x) = (4x+4)\ln(x) - 7x$.
   Montrer que F est une primitive de f.
5. Déterminer en cm^2 près une valeur approchée de l'aire A.

EXERCICE 11

(D'après sujet bac Antilles Guyane 2016)

Sur le graphique ci-dessous, $\mathscr{C}$ est la courbe représentative, dans le repère orthonormé $\left(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j}\right)$, d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.



PARTIE A - Étude graphique

La droite T est tangente à $\mathscr{C}$ au point $A(2,5;1,5)$ et d'ordonnée à l'origine 2,75.
L'axe des abscisses est asymptote horizontale à $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$.
Déterminer graphiquement et indiquer sur votre copie :

1. $f(1)$;
2. $f'(2,5)$;
3. Une équation de la tangente T ;
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

PARTIE B - Modélisation

On admet qu'il existe deux réels a et b tels que pour tout réel x, $f(x)=(ax+b)\mathrm{e}^{-x+2,5}$.

1. Calculer $f'(x)$ en fonction de a et b.
2. Exprimer en fonction des réels a et b les nombres suivants $f(1)$; $f'(2,5)$.
3. Déduire des questions précédentes un système d'équations vérifiées par a et b.
4. Résoudre ce système et en déduire l'expression de $f(x)$ en fonction de x.

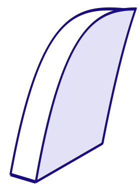
PARTIE C - Étude algébrique

On admet que pour tout réel x, $f(x)=(x-1)\mathrm{e}^{-x+2,5}$.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
2. a) Montrer que pour tout réel x, $f(x)=\mathrm{e}^{2,5}\left(\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}-\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}\right)$.

   b) Déterminer la limite de f en $+\infty$
3. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x.
4. Étudier le signe de f' et en déduire le tableau des variations de la fonction f en faisant figurer les limites trouvées précédemment.

PARTIE D - Application



On souhaite déterminer l'aire S en unité d'aire de la surface d'une des faces principales du boîtier plastique de l'appareil auditif schématisé ci-contre.
Une modélisation mathématique a permis de représenter cette surface.

Dans le plan muni du repère orthonormé $\left(\text{O};\vec{i},\vec{j}\right)$ cette surface correspond à la partie du plan limitée par :

— l'axe des abscisses ;
— les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2{,}5$;
— la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f étudiée précédemment ;
— la courbe représentative $\mathscr{C}_g$ de la fonction g définie par :

$$\text{pour tout réel } x,\ g(x) = -2x^2 + 12x - 16.$$

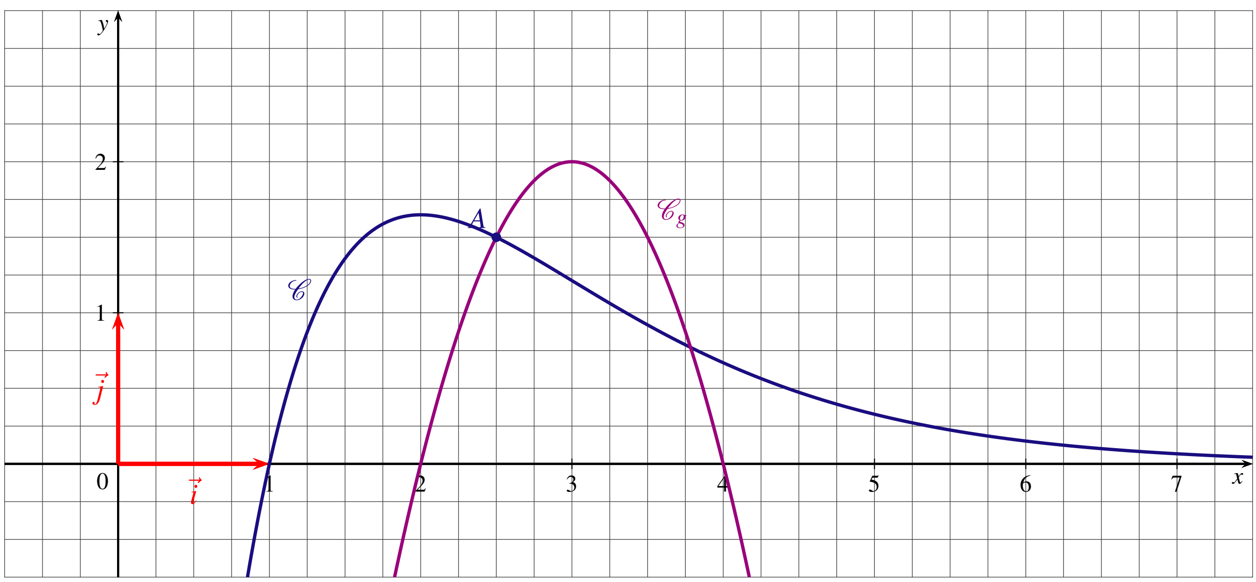
1. Sur l'annexe fournie, hachurer la surface décrite précédemment.

Pour déterminer l'aire S de cette surface, on décompose le calcul en deux parties.

2. Calculer la valeur exacte de l'intégrale suivante : $I = \displaystyle\int_2^{2,5} g(x)\mathrm{d}x$.
3. on souhaite calculer la valeur exacte de l'intégrale suivante : $J = \displaystyle\int_1^{2,5} f(x)\mathrm{d}x$ où f est la fonction dont une expression est donnée dans la partie C.
   a) Vérifier qu'une primitive F de la fonction f sur $\mathbb{R}$ est la fonction définie par :
   $$\text{pour tout réel } x,\ F(x) = -x\mathrm{e}^{-x+2,5}.$$
   b) En déduire la valeur exacte de l'intégrale J.
4. Déterminer la valeur exacte de l'aire S en unité d'aire.
5. En déduire la valeur arrondie à 10^{-2} de l'aire S en unité d'aire.

ANNEXE

À rendre avec la copie



EXERCICE 12 (*D'après sujet bac France Métropolitaine, La Réunion septembre 2015*)

« Avec une centaine de décès en moyenne par an, le monoxyde de carbone (CO) est la première cause de mortalité accidentelle par intoxication en France. [...] Pourtant certains symptômes annonciateurs d'une intoxication au monoxyde de carbone existent. Maux de tête, nausées et vomissements sont notamment les premiers signes qui doivent alerter. Bien identifiés, ils permettent de réagir rapidement et d'éviter le pire. »

Source Ministère des Affaires Sociales et de la Santé. (octobre 2012)

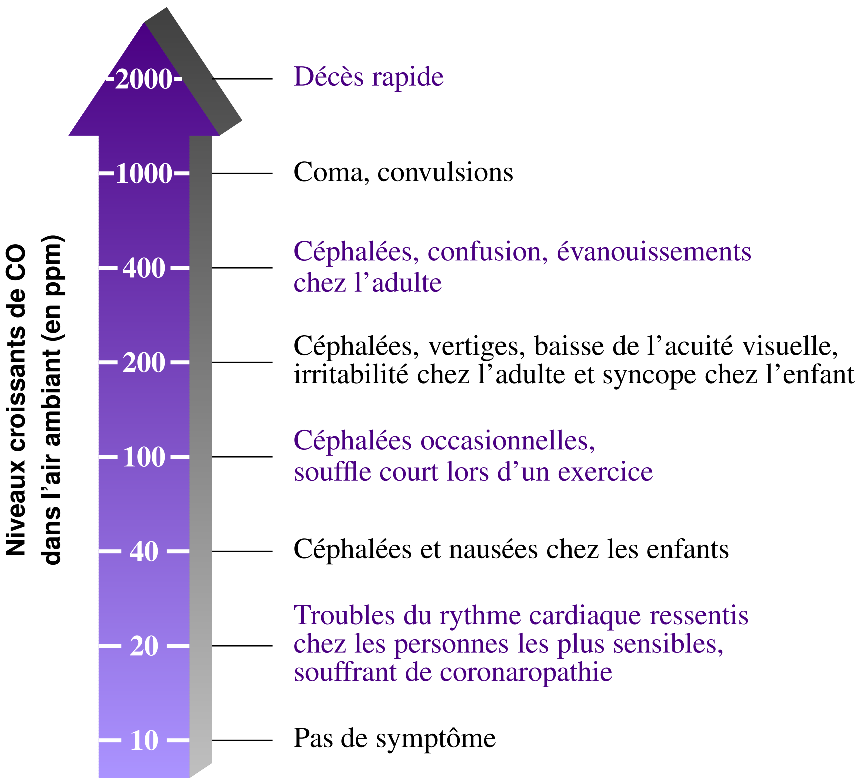
DOCUMENT 1

La société COalerte fabrique un modèle de détecteurs qui enregistre en temps réel la concentration de monoxyde de carbone en parties par million (ppm).
Un tel détecteur produit un signal d'alarme respectant les modalités fixées par la norme européenne EN 50 291 ci-dessous.
Il déclenche un signal d'alarme :

- si la concentration est supérieure à 30 ppm pendant au moins 120 minutes ;
- si la concentration est supérieure à 50 ppm pendant au moins 60 minutes ;
- si la concentration est supérieure à 100 ppm pendant au moins 10 minutes ;
- si la concentration est supérieure à 300 ppm pendant au moins 3 minutes.

DOCUMENT 2

Symptômes et effets sur la santé du monoxyde de carbone

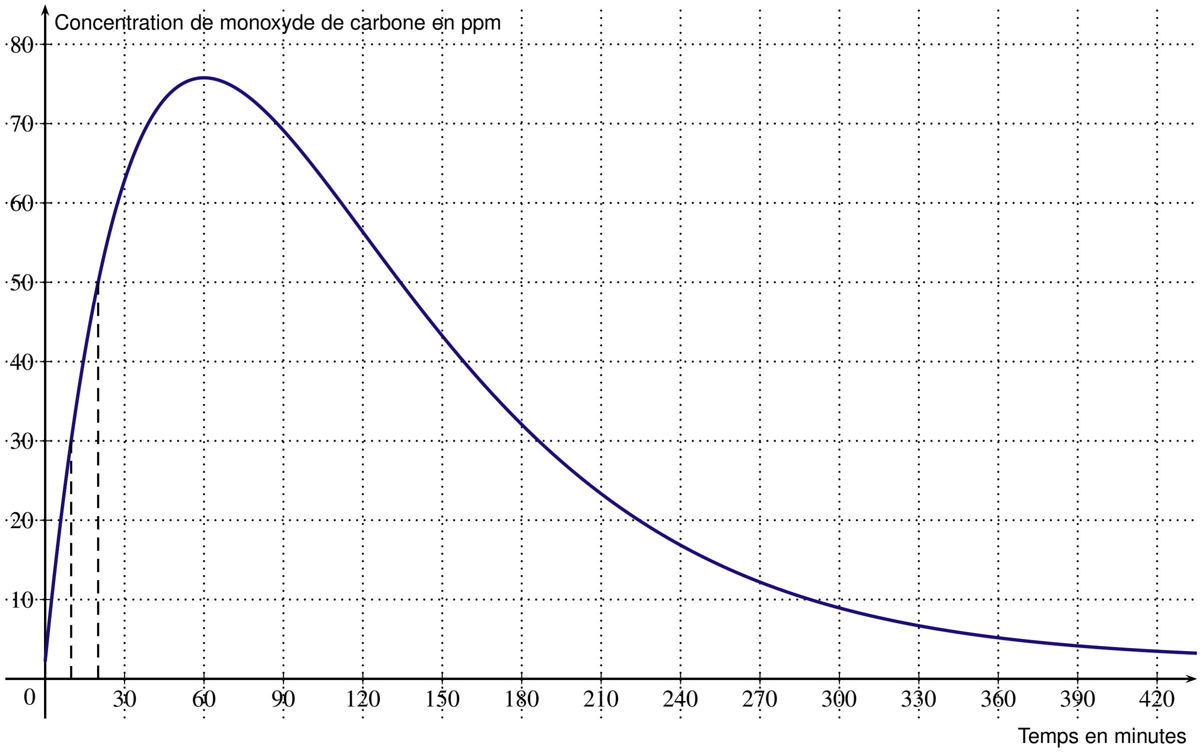


Source : Commission européenne 2014.

Un laboratoire d'essais procède à des tests sur un détecteur produit par la société COalerte en simulant un accident qui provoque une concentration anormale de monoxyde de carbone dans une pièce.

PARTIE A

Le laboratoire relève la concentration de monoxyde de carbone en fonction du temps, exprimé en heures. Les enregistrements effectués sur une période de 8 heures se traduisent par la représentation graphique ci-dessous.



1. Estimer au bout de combien de temps devrait retentir un signal d'alarme.
2. Une personne présente dans la pièce depuis le début d'un tel accident risquerait-elle de présenter des symptômes ? Si oui, lesquels ?

PARTIE B

Dans cette partie, tous les résultats seront arrondis à 10^{-2} près.
La concentration de monoxyde de carbone exprimée en ppm dans la pièce en fonction du temps, exprimé en heures, est modélisée par la fonction f définie sur $[0;8]$ par

$$f(t) = 2{,}2 + 200t\mathrm{e}^{-t}.$$

1. Calculer la concentration de monoxyde de carbone en ppm dans la pièce :
   a) au moment de l'accident ;
   b) 30 minutes après.
2. À l'aide du graphique de la partie A, conjecturer les variations de la concentration de monoxyde de carbone dans la pièce en fonction du temps.
3. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0;8]$.
   a) Montrer que pour tout réel t de l'intervalle $[0;8]$, $f'(t) = 200(1-t)\mathrm{e}^{-t}$.
   b) Étudier le signe de $f'(t)$ sur l'intervalle $[0;8]$.
   c) Valider ou invalider la conjecture émise à la question 2.
4. On note F la fonction définie sur l'intervalle $[0;8]$ par $F(t) = 2{,}2t - 200(t+1)\mathrm{e}^{-t}$. On admet que F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0;8]$.
   a) On rappelle que la valeur moyenne d'une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$ est le nombre réel défini par : $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.
   Calculer la valeur moyenne de la concentration de monoxyde de carbone lors des 8 heures qui ont suivi l'accident.

b) Pour des raisons de sécurité, le ministère du travail fixe un seuil pour la concentration moyenne de monoxyde de carbone. Ce seuil est de 50 ppm pour une période de 8 heures.

La sécurité des personnes présentes dans la pièce aurait-elle été remise en cause lors de l'accident simulé ?

EXERCICE 13

(*D'après sujet bac Polynésie 2016*)

PARTIE A : Lecture graphique

On considère la courbe C associée à une fonction f représentée en annexe 2 avec la droite T, tangente à la courbe C au point d'abscisse 0.

1. Résoudre graphiquement sur l'intervalle $[-1;1{,}5]$ et avec la précision permise par le dessin les deux inéquations suivantes :

   a) $f(x) \geqslant 1$.

   b) $f'(x) \geqslant 0$.

2. a) Donner l'équation de la tangente T à la courbe C au point de coordonnées $(0;1)$ en sachant que cette tangente passe par le point de coordonnées $(2;7)$.

   b) En déduire le nombre dérivé $f'(0)$.

PARTIE B : Étude de la fonction f

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par la relation $f(x) = \mathrm{e}^{-2x} + 5x$.

1. Déterminer, en la justifiant, la limite de f en $+\infty$.
   On admet pour la suite que la limite de f en $-\infty$ est $+\infty$.
2. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire le tableau des variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
4. a) Déterminer à partir du tableau des variations le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 2$.

   b) Donner une valeur arrondie à 10^{-2} près de chaque solution.

PARTIE C : Calcul d'aire

On admet :

— que la courbe C de la partie A est la représentation de la fonction f définie dans la partie B ;

— que la courbe C se situe « au-dessus » de la droite tangente T sur $\mathbb{R}$.

L'objectif de cette partie est de déterminer par un calcul l'aire $\mathscr{A}$ comprise entre la courbe C, la droite T et les droites verticales d'équations $x = 0$ et $x = 1{,}5$.

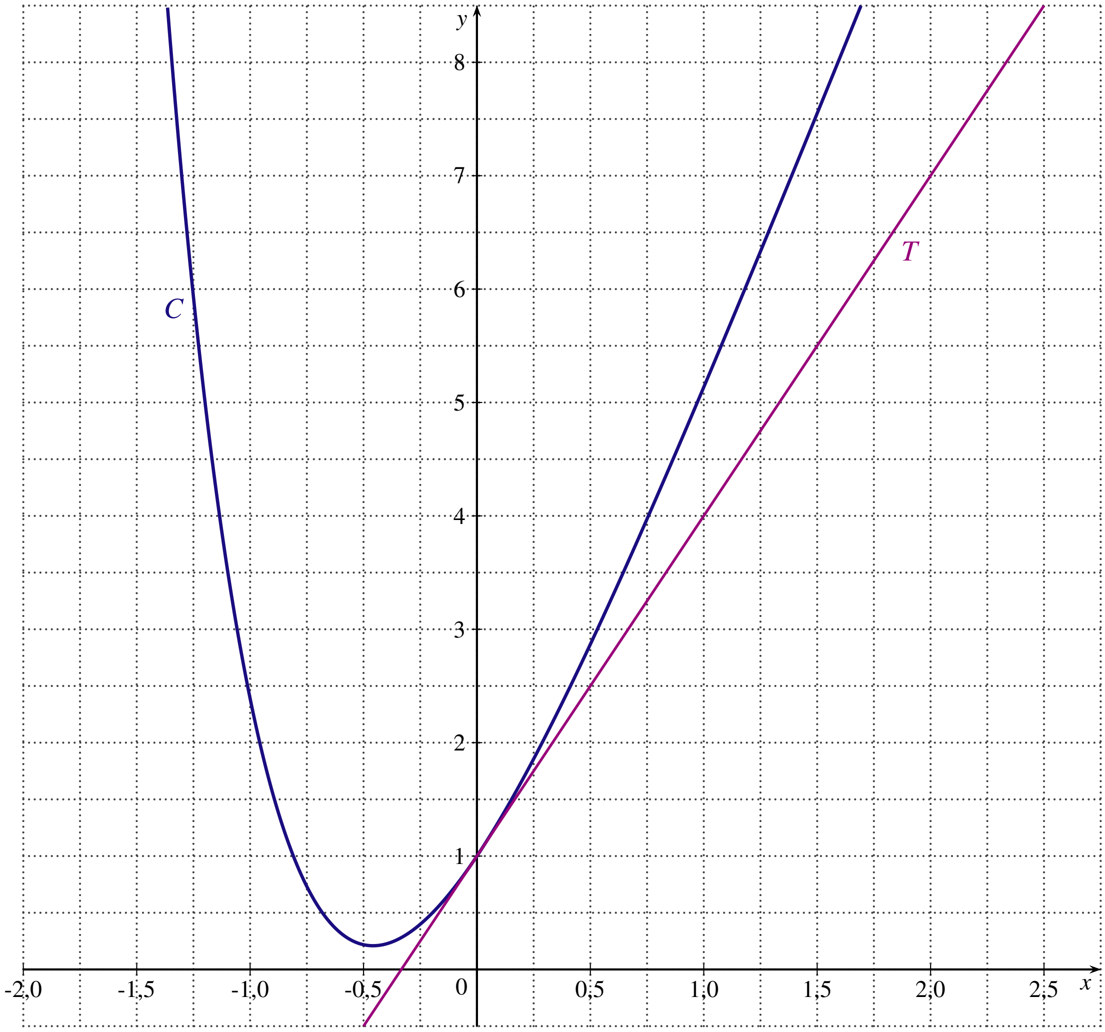
1. Hachurer sur le dessin, en annexe 2, l'aire $\mathscr{A}$ que l'on veut déterminer.
2. a) Déterminer une primitive de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\text{pour tout réel } x, g(x) = \mathrm{e}^{-2x} + 2x - 1.$$

   b) Justifier que l'aire $\mathscr{A}$ recherchée vaut, en unité d'aire : $\mathscr{A} = \displaystyle\int_0^{1{,}5} g(x)\mathrm{d}x$.

   c) En déduire la valeur exacte puis l'arrondi à 10^{-2} de $\mathscr{A}$.

ANNEXE 2
à rendre avec la copie



Chapitre 10

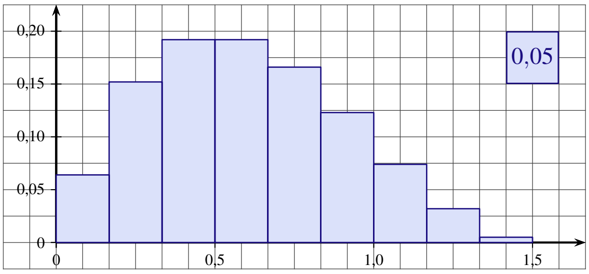
LOIS DE PROBABILITÉ À DENSITÉ

I INTRODUCTION

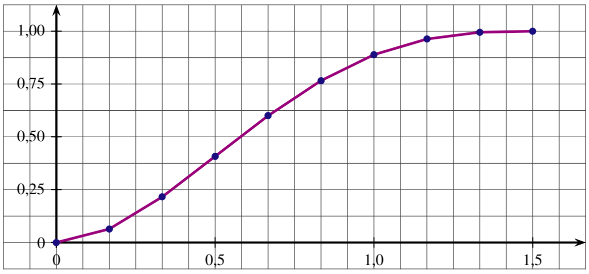
Dans différents domaines on est amené à étudier des variables aléatoires pouvant prendre théoriquement toute valeur réelle d'un intervalle I de $\mathbb{R}$. Ces variables aléatoires sont dites continues.
C'est le cas, par exemple, de la durée du temps d'attente aux consultations d'un hôpital fictif.

Temps d'attente (en minutes)	$[0;10[$	$[10;20[$	$[20;30[$	$[30;40[$	$[40;50[$	$[50;60[$	$[60;70[$	$[70;80[$	$[80;90]$
Fréquences	0,064	0,152	0,192	0,192	0,166	0,123	0,074	0,032	0,005

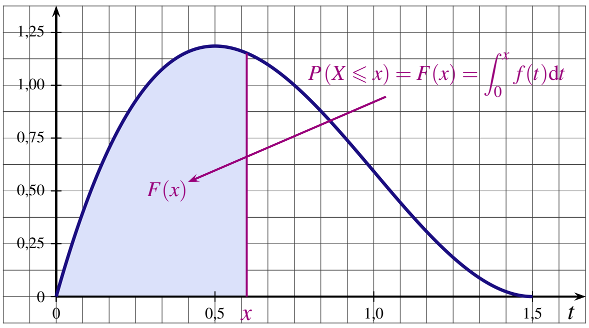
La série statistique à caractère quantitatif continu est représentée par un histogramme constitué d'une juxtaposition de rectangles dont les aires sont proportionnelles aux fréquences.



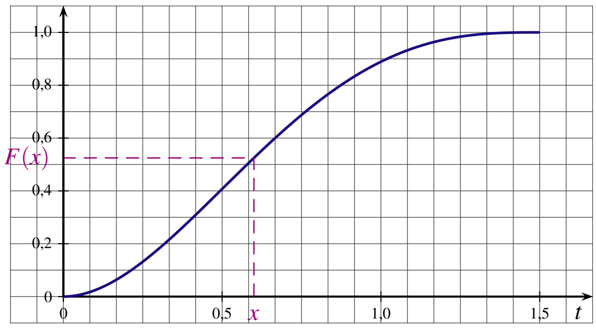
Histogramme


Polygone des fréquences cumulées

On modélise la situation à l'aide d'une variable aléatoire X mesurant la durée en heure du temps d'attente aux consultations de cet hôpital avec $X \in [0;1,5]$.
Pour une telle variable aléatoire, les évènements étudiés sont ceux qui correspondent à des intervalles du type $X \in [0;0,3]$, $0,5 \leqslant X \leqslant 1$ ou $X > 0,5$.
Le calcul de la probabilité $P(X = 0,345)$ que le temps d'attente soit exactement de 20 minutes et 42 secondes n'a pas de sens.
Dans le cas d'une variable aléatoire continue le polygone des fréquences cumulées croissantes est remplacé par la courbe représentative de la fonction de répartition F permettant de calculer des probabilités.
On suppose que la fonction F est définie sur l'intervalle $[0;1,5]$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ où f est la fonction définie sur $[0;1,5]$ par $f(t) = \dfrac{64t^3}{27} - \dfrac{64t^2}{9} + \dfrac{16t}{3}$. On dit que f est la fonction de densité de probabilité de la variable aléatoire X.



Fonction de densité



Fonction de répartition

Ainsi, pour tout réel x de l'intervalle $[0;1,5]$, $F(x)$ est l'aire du domaine compris entre la courbe représentative de la fonction de densité f, les axes du repère et la droite d'équation $t = x$.
On en déduit que :

— $P(X \leqslant 0,3) = F(0,3) = \displaystyle\int_0^{0,3} f(t)\mathrm{d}t = 0,1808$.

— $P(0,5 \leqslant X \leqslant 1) = F(1) - F(0,5) = \displaystyle\int_{0,5}^{1} f(t)\mathrm{d}t = \dfrac{13}{27}$.

— $P(X > 0,5) = 1 - P(X \leqslant 0,5) = 1 - F(0,5) = 1 - \displaystyle\int_0^{0,5} f(t)\mathrm{d}t = \dfrac{16}{27}$.

II DENSITÉ DE PROBABILITÉ ET LOI DE PROBABILITÉ

1 VARIABLE ALÉATOIRE CONTINUE

Une variable aléatoire pouvant prendre toute valeur d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ est dite continue.

2 FONCTION DE DENSITÉ

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle fonction de densité de probabilité sur I toute fonction f définie, continue et positive sur I telle que l'intégrale de f sur I soit égale à 1.

EXEMPLE

Vérifions que la fonction f définie pour tout réel t de l'intervalle $[0;1{,}5]$ par $f(t)=\dfrac{64t^3}{27}-\dfrac{64t^2}{9}+\dfrac{16t}{3}$ est une fonction de densité de probabilité sur $[0;1{,}5]$.

— La fonction f est dérivable sur $[0;1{,}5]$ donc continue.

— Pour tout réel t, $\dfrac{64t^3}{27}-\dfrac{64t^2}{9}+\dfrac{16t}{3}=\dfrac{16t\left(4t^2-12t+9\right)}{27}=\dfrac{16t\,(2t-3)^2}{27}$.
Par conséquent, la fonction f est positive sur l'intervalle $[0;1{,}5]$.

— Une primitive de la fonction f est la fonction F définie sur sur $[0;1{,}5]$ par $F(t)=\dfrac{16t^4}{27}-\dfrac{64t^3}{27}+\dfrac{8t^2}{3}$ d'où

$$\int_0^{1{,}5} f(t)\mathrm{d}t = F(1{,}5)-F(0)=1$$

Ainsi, f est une fonction de densité de probabilité sur $[0;1{,}5]$

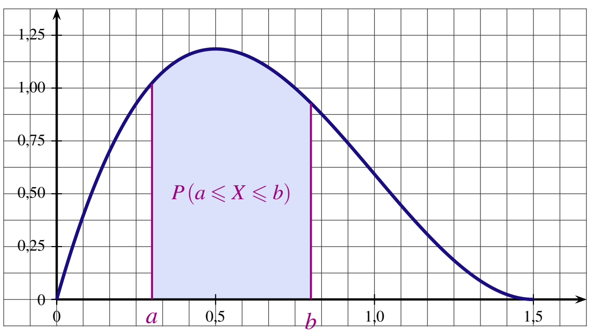
3 LOI DE PROBABILITÉ

Soit f une fonction de densité de probabilité sur un intervalle I.
On dit que la variable aléatoire X suit la loi de probabilité de densité f sur l'intervalle I lorsque, pour tout intervalle $[a;b]$ inclus dans I, la probabilité de l'événement $X\in[a;b]$ est :

$$P(X\in[a;b])=P(a\leqslant X\leqslant b)=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

REMARQUE

$P(a\leqslant X\leqslant b)$ est la mesure, en unités d'aire, de l'aire du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$.
On a représenté ci-dessous la courbe représentative de la fonction de densité étudiée dans l'exemple précédent.



On observe sur cet exemple, que la fonction f prend des valeurs supérieures à 1 sur l'intervalle $[0;1{,}5]$: c'est possible car $f(x)$ n'est pas une probabilité, c'est une densité de probabilité.

PROPRIÉTÉS

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de probabilité de densité f sur un intervalle I.
Pour tous réels a et b appartenant à I

1. $P(X=a)=\int_a^a f(t)\mathrm{d}t=0$
2. $P(a \leqslant X \leqslant b)=P(a<X \leqslant b)=P(a \leqslant X<b)=P(a<X<b)$
3. $P(X \geqslant a)=P(X>a)=1-P(X \leqslant a)$

4 ESPÉRANCE MATHÉMATIQUE

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de probabilité de densité f sur l'intervalle $[a;b]$, alors l'espérance mathématique de X est le réel

$$E(X)=\int_a^b t \times f(t)\mathrm{d}t$$

EXEMPLE

Calculons l'espérance mathématique de la variable aléatoire X mesurant la durée en heure du temps d'attente aux consultations dont la fonction de densité f est définie sur $[0;1{,}5]$ par $f(t)=\frac{64t^3}{27}-\frac{64t^2}{9}+\frac{16t}{3}$.

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_0^{1,5} \frac{64t^4}{27}-\frac{64t^3}{9}+\frac{16t^2}{3}\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{64t^5}{135}-\frac{16t^4}{9}+\frac{16t^3}{9}\right]_0^{1,5} \\
&= 3{,}6-9+6 \\
&= 0{,}6
\end{aligned}$$

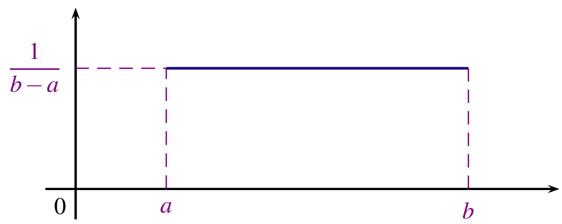
Le temps d'attente moyen aux consultations est de 0,6 h soit 36 minutes.

III LOI UNIFORME

1 DÉFINITION

Soient a et b deux réels tels que $a<b$.
On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi uniforme sur l'intervalle $[a;b]$ si la densité de probabilité de X est la fonction constante f définie sur $[a;b]$ par $f(x)=\frac{1}{b-a}$.

REMARQUE



La fonction f définie sur $[a;b]$ par $f(x)=\frac{1}{b-a}$ est une densité de probabilité sur $[a;b]$:

— f est continue et positive sur $[a;b]$.

— $\int_a^b \frac{1}{b-a}\mathrm{d}x=\left[\frac{x}{b-a}\right]_a^b=\frac{b}{b-a}-\frac{a}{b-a}=1$.

2 PROPRIÉTÉ

X est une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur l'intervalle $[a;b]$.
Pour tout intervalle $[c;d]$ inclus dans $[a;b]$, $P(c \leqslant X \leqslant d) = \dfrac{d-c}{b-a}$.

✳ DÉMONSTRATION

$$\begin{aligned} P(c \leqslant X \leqslant d) &= \int_c^d \frac{1}{b-a}\mathrm{d}x = \left[\frac{x}{b-a}\right]_c^d \\ &= \frac{d}{b-a} - \frac{c}{b-a} = \frac{d-c}{b-a} \end{aligned}$$

3 ESPÉRANCE MATHÉMATIQUE

Soient a et b deux réels tels que $a < b$.
L'espérance mathématique d'une variable aléatoire X suivant une loi uniforme sur l'intervalle $[a;b]$ est le réel

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

✳ DÉMONSTRATION

Par définition :

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_a^b x \times \frac{1}{b-a}\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2(b-a)}\right]_a^b \\ &= \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2} \end{aligned}$$

EXEMPLE

Le temps d'attente T, en minutes, auprès du standard téléphonique du service après vente d'une entreprise suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0,5;9,5]$.

1. Quelle est la probabilité que le temps d'attente soit inférieur à 2 minutes ?
2. Quelle est la probabilité que le temps d'attente soit supérieur à 3 minutes ?
3. Quelle est le temps d'attente moyen auprès du standard téléphonique ?

Solution

La variable aléatoire T suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0,5;9,5]$, donc la densité de probabilité est la fonction f définie sur $[0,5;9,5]$ par $f(t) = \dfrac{1}{9,5-0,5} = \dfrac{1}{9}$.

Le temps d'attente T, en minutes, auprès du standard téléphonique du service après vente d'une entreprise suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0,5;9,5]$.

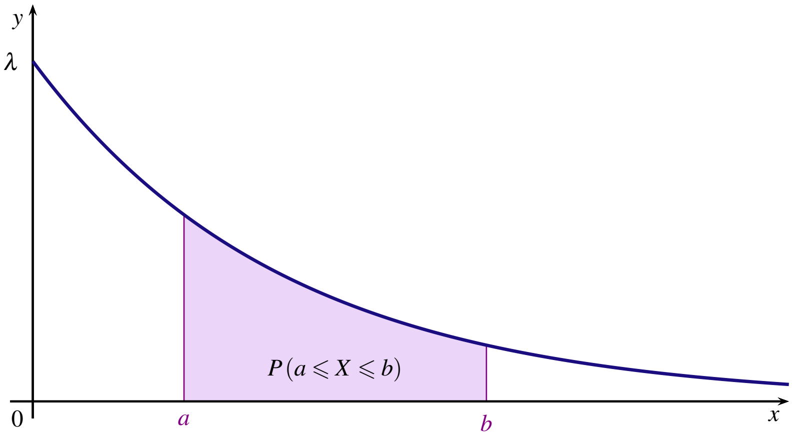
1. La probabilité que le temps d'attente soit inférieur à 2 minutes est $P(X \leqslant 2) = \dfrac{2-0,5}{9} = \dfrac{1}{6}$.
2. La probabilité que le temps d'attente soit supérieur à 3 minutes est $P(X \geqslant 3) = \dfrac{9,5-3}{9} = \dfrac{13}{18}$.
3. L'espérance mathématique de T est $E(T) = \dfrac{0,5+9,5}{2} = 5$.
   Le temps d'attente moyen auprès du standard téléphonique est de 5 minutes.

IV LOI EXPONENTIELLE

1 DÉFINITION

Soit λ un nombre réel strictement positif.
On dit qu'une variable aléatoire X à valeurs dans $[0;+\infty[$ suit la loi exponentielle de paramètre λ si la densité de probabilité de X est la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}$.

REMARQUE



La variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda>0$ si, pour tout intervalle fermé $I=[a;b]$ inclus dans $[0;+\infty[$, la probabilité de l'évènement « $X \in I$ » est l'aire du domaine $\{M(x;y)\,;x\in I \text{ et } 0\leqslant y\leqslant f(x)\}$, où f est la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}$.

2 PROPRIÉTÉS

Soit X est une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda>0$.

1. Pour tout intervalle $I=[a;b]$ avec $0\leqslant a\leqslant b$, $P(a\leqslant X\leqslant b)=\mathrm{e}^{-\lambda a}-\mathrm{e}^{-\lambda b}$.
2. Pour tout réel $a\geqslant 0$, $P(X\leqslant a)=P(X<a)=1-\mathrm{e}^{-\lambda a}$.
3. Pour tout réel $a\geqslant 0$, $P(X\geqslant a)=P(X>a)=1-P(X\leqslant a)=\mathrm{e}^{-\lambda a}$.

DÉMONSTRATION

X est une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda>0$, a et b deux réels tels que $0\leqslant a\leqslant b$

1. $P(a\leqslant X\leqslant b)=\displaystyle\int_a^b \lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x=\left[-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_a^b=\mathrm{e}^{-\lambda a}-\mathrm{e}^{-\lambda b}$.
2. $P(X\leqslant a)=P(0\leqslant X\leqslant a)=\mathrm{e}^{-\lambda\times 0}-\mathrm{e}^{-\lambda a}=1-\mathrm{e}^{-\lambda a}$.

REMARQUE
L'aire, en unité d'aire, du domaine compris entre l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction de densité de la loi exponentielle est égale à 1 :

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x \lambda\mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}t=\lim_{x\to+\infty}P(X\leqslant x)=\lim_{x\to+\infty}1-\mathrm{e}^{-\lambda x}=1$$

3 ESPÉRANCE MATHÉMATIQUE

L'espérance mathématique d'une variable aléatoire X suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda>0$ est le réel

$$E(X)=\frac{1}{\lambda}$$

EXEMPLE

La durée de vie en heures, d'une ampoule led est une variable aléatoire D, qui suit la loi exponentielle de paramètre 0,00005.

1. Quelle est la probabilité que la durée de vie d'une ampoule soit inférieure à 20 000 heures ?
2. Quelle est la probabilité que la durée de vie d'une ampoule soit comprise entre 20 000 et 30 000 heures ?
3. Quelle est la durée de vie moyenne d'une ampoule ?

Solution
La durée de vie en heures D suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}00005$.

1. La probabilité que la durée de vie d'une ampoule soit inférieure à 20 000 heures est :
$$P(D \leqslant 20000) = 1 - \mathrm{e}^{-0{,}00005 \times 20000} = 1 - \mathrm{e}^{-1} \approx 0{,}632$$
2. La probabilité que la durée de vie d'une ampoule soit comprise entre 20 000 et 30 000 heures est :
$$P(20000 \leqslant D \leqslant 30000) = \mathrm{e}^{-0{,}00005 \times 20000} - \mathrm{e}^{-0{,}00005 \times 30000} = \mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-1.5} \approx 0{,}145$$
3. La durée de vie moyenne d'une ampoule est $\dfrac{1}{0{,}00005} = 20000$ heures.

V LOI NORMALE

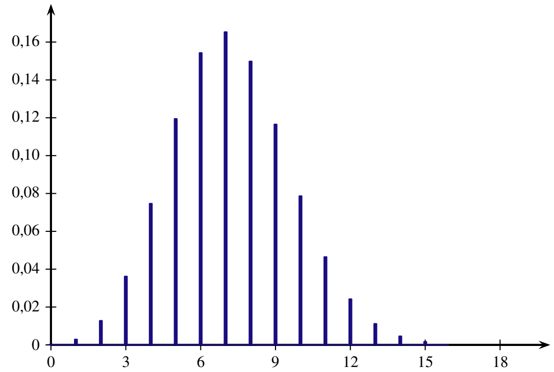
1 VERS UNE APPROXIMATION DE LA LOI BINOMIALE

RAPPEL

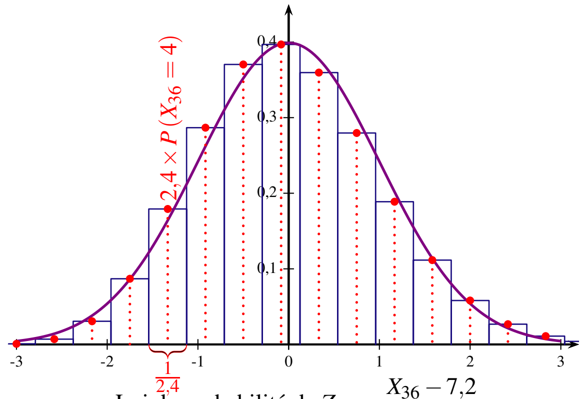
Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p notée $\mathscr{B}(n;p)$.
L'espérance mathématique est $E(X) = np$; l'écart-type est $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$.

LA FONCTION DE GAUSS

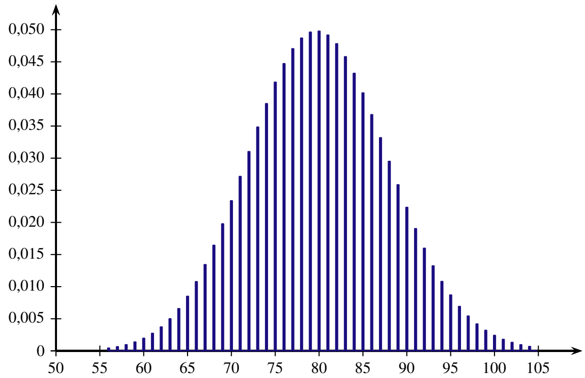
Soit (X_n) une suite de variables aléatoires suivant une loi binomiale de paramètres n et de même probabilité p.
On s'intéresse à la loi de probabilité de la variable aléatoire $Z_n = \dfrac{X_n - E(X_n)}{\sigma_n} = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$.
La variable aléatoire Z_n prend les valeurs suivantes :
$$z_k = \frac{k - np}{\sqrt{np(1-p)}} \quad \text{où } k \text{ est un entier naturel tel que } 0 \leqslant k \leqslant n$$
Pour tout entier naturel k compris entre 0 et n on a :
$$P(Z_n = z_k) = P\left(\frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{k - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) = P(X_n = k) = p_k$$
Ainsi, quand X_n prend la valeur k avec la probabilité p_k, alors Z_n prend la valeur $\dfrac{k - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ avec la même probabilité p_k.
On a représenté graphiquement ci-dessous, pour $X_n \in [E(X_n) - 3\sigma_n ; E(X_n) + 3\sigma_n]$, les lois de probabilité de X_n et de Z_n pour $n = 36$ et $n = 400$ avec $p = 0{,}2$.
La loi de probabilité de Z_n est représentée à l'aide d'un histogramme.
L'aire de chaque rectangle centré sur la valeur z_k est égale à la probabilité $P(Z_n = z_k) = p_k$, il s'ensuit que chaque rectangle a pour dimensions $\sigma_n \times P(X_n = k)$ et $\dfrac{1}{\sigma_n}$.



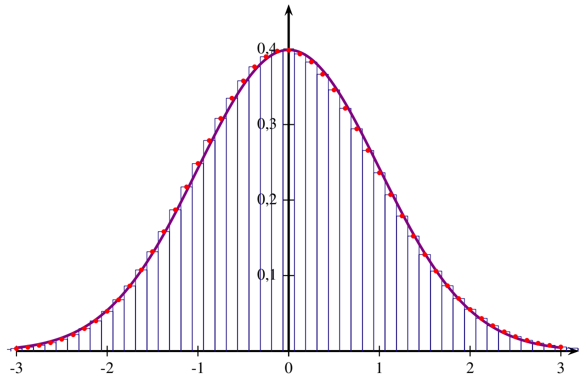
Loi binomiale de paramètres $n = 36$ et $p = 0{,}2$



Loi de probabilité de $Z_{36} = \dfrac{X_{36} - 7{,}2}{2{,}4}$



Loi binomiale de paramètres $n = 400$ et $p = 0{,}2$



Loi de probabilité de $Z_{400} = \dfrac{X_{400} - 80}{8}$

La « courbe en cloche » est la courbe représentative de la fonction de Gauss définie pour tout réel x par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$

Quand n est de plus en plus grand, les aires des rectangles deviennent de plus en plus proches des aires correspondantes limitées par la courbe représentant la fonction la fonction de Gauss :

$$P\left(a \leqslant Z_n \leqslant b\right) \approx \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x$$

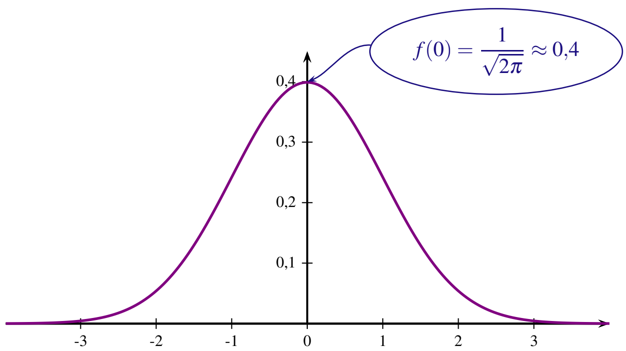
2 LOI NORMALE CENTRÉE RÉDUITE

DÉFINITION

Dire qu'une variable aléatoire X suit la loi normale centrée réduite notée $\mathcal{N}(0;1)$ signifie que sa densité de probabilité est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$.

COURBE REPRÉSENTATIVE

Pour tout réel x, $f(-x) = f(x)$, la courbe représentative de la densité f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



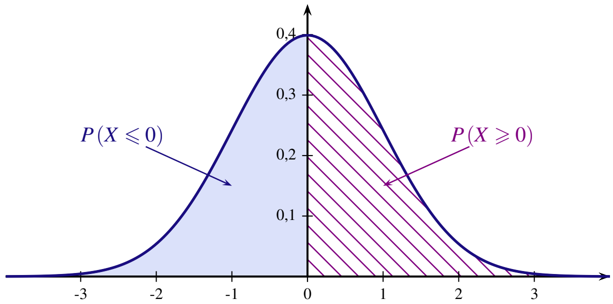
ESPÉRANCE ET ÉCART-TYPE DE LA LOI NORMALE CENTRÉE RÉDUITE

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$ on a : $E(X)=0$ et $\sigma(X)=1$.

PROPRIÉTÉ

La courbe de la fonction de densité de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, donc les mesures des aires égales aux probabilités $P(X \leqslant 0)$ et $P(X \geqslant 0)$ sont égales, d'où $P(X \leqslant 0) = P(X \geqslant 0)$.
Comme $P(X \leqslant 0) + P(X > 0) = 1$, on en déduit que

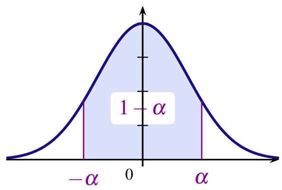
$$P(X \leqslant 0) = P(X \geqslant 0) = \frac{1}{2}$$



Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$ on a : $P(X \leqslant 0) = P(X \geqslant 0) = \frac{1}{2}$.

INTERVALLE ASSOCIÉ À UNE PROBABILITÉ DONNÉE

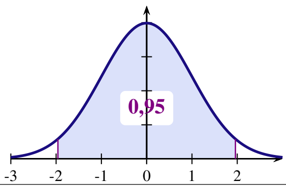
Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$.
Pour tout réel $\alpha \in]0;1[$ il existe un unique réel positif u_α tel que : $P(-u_\alpha \leqslant X \leqslant u_\alpha) = 1-\alpha$.



On retient en particulier :

Si X est une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$ alors :

$$P(-1{,}96 \leqslant X \leqslant 1{,}96) \approx 0{,}95$$

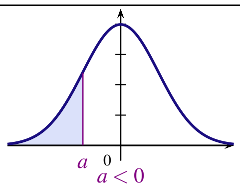
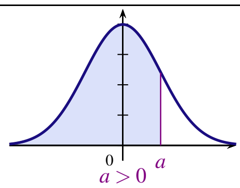
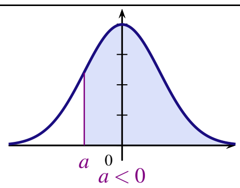
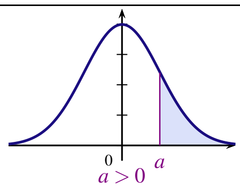


CALCULS

Il n'est pas possible de déterminer les primitives de la fonction de densité de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$ à l'aide de fonctions usuelles.

On peut néanmoins calculer des valeurs approchées des intégrales $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \,\mathrm{d}x$ par des méthodes numériques, disponibles dans les calculatrices et permettant d'obtenir directement des valeurs approchées de certaines probabilités liées à la loi normale.

Du fait de la symétrie de la courbe de la fonction de densité de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$, pour calculer $P(X \leqslant a)$ ou $P(X \geqslant a)$, on peut utiliser la méthode suivante :

Probabilité	$P(X \leqslant a)$ avec $a<0$	$P(X \leqslant a)$ avec $a>0$	$P(X \geqslant a)$ avec $a<0$	$P(X \geqslant a)$ avec $a>0$
Graphique				
Calcul	$0{,}5-P(a<X<0)$	$0{,}5+P(0<X \leqslant a)$	$0{,}5+P(a \leqslant X<0)$	$0{,}5-P(0<X<a)$

3 LOI NORMALE

DÉFINITION

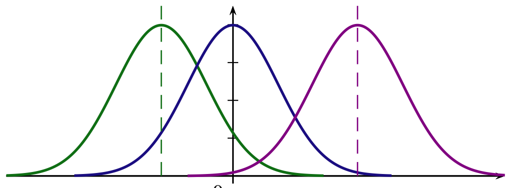
Soit μ un réel et σ un réel strictement positif. Dire qu'une variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ, signifie que la variable aléatoire $\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$.
On note : X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma)$.

REMARQUES :

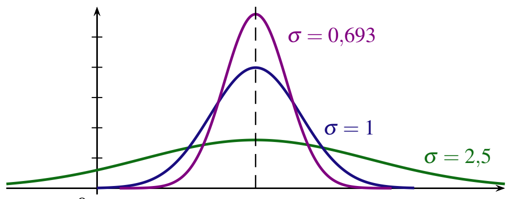
— Si X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma)$ alors sa variance $V(X)=\sigma^2$.

— La densité associée à une variable aléatoire X qui suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma)$ est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2}$.

— L'espérance μ de la loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma)$ est un paramètre de position : la courbe représentative de la fonction de densité admet pour axe de symétrie la droite d'équation $x=\mu$.



— L'écart-type $\sigma>0$ de la loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma)$ est un paramètre de dispersion : plus σ est élevé, plus les réalisations de X sont dispersées autour de μ.



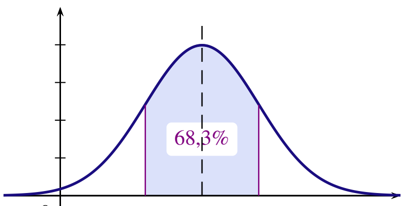
INTERVALLES DE FLUCTUATION D'UNE LOI NORMALE

Si la variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma)$ alors :

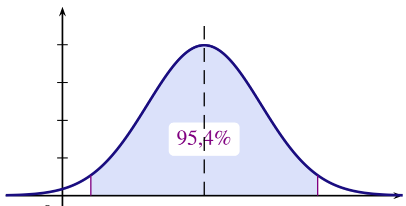
— $P(\mu-\sigma \leqslant X \leqslant \mu+\sigma) \approx 0{,}683$.

— $P(\mu-2\sigma \leqslant X \leqslant \mu+2\sigma) \approx 0{,}954$.

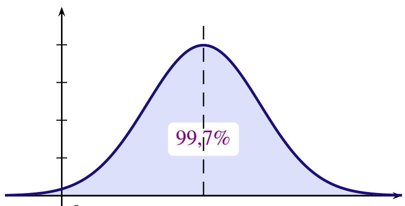
— $P(\mu-3\sigma \leqslant X \leqslant \mu+3\sigma) \approx 0{,}997$.



$X \in [\mu-\sigma;\mu+\sigma]$



$X \in [\mu-2\sigma;\mu+2\sigma]$



$X \in [\mu-3\sigma;\mu+3\sigma]$

LOI NORMALE ET CALCULATRICES

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma)$. Les calculatrices disposent de commandes permettant de calculer :

1. $P(a \leqslant X \leqslant b)$
2. Le réel k tel que $P(X \leqslant k) = \alpha$ avec $\alpha \in]0;1[$

Commandes spécifiques des calculatrices :

	Sur TI 83	Sur Casio
Menu	2nde puis sur la touche var (distrib)	OPTN puis STAT DIST NORM
$P(a \leqslant X \leqslant b)$	normalFrep(a,b,μ,σ) ou normalCdf(a,b,μ,σ) borninf : a ; bornsup : b puis, renseigner μ et σ	Ncd normCD (a, b, σ, μ) Lower : a ; Upper : b puis, renseigner σ et μ
$P(X \leqslant k) = \alpha$	FracNormale(α,μ,σ) ou invNorm(α,μ,σ) aire : α puis, renseigner μ et σ	InvN InvNormCD(α,σ,μ) Area : α puis, renseigner σ et μ

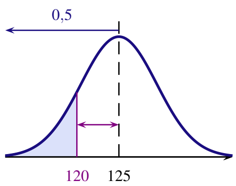
EXEMPLE

La variable X suit la loi normale $\mathcal{N}(125;4,5)$ d'espérance $\mu = 125$ et d'écart-type $\sigma = 4,5$.
Les résultats seront arrondis à 10^{-3} près.

1. Déterminer les probabilités suivantes :
   $P(122 \leqslant X \leqslant 128)$; $P(X \leqslant 120)$; $P(X \geqslant 130,4)$; $P(X \geqslant 118,7)$.
2. Déterminer le réel a tel que $P(X \leqslant a) = 0,871$.
3. Déterminer le réel b tel que $P(X \geqslant b) = 0,02$.
4. Déterminer un intervalle I de centre 125 tel que $P(X \in I) = 0,81$.

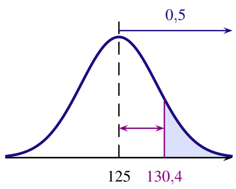
1. a) À l'aide de la calculatrice on trouve $P(122 \leqslant X \leqslant 128) \approx 0,495$.

   b)



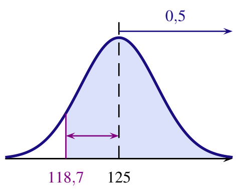
$$\begin{aligned} P(X \leqslant 120) &= P(X \leqslant 125) - P(120 < X \leqslant 125) \\ &= 0,5 - P(120 < X \leqslant 125) \\ &\approx 0,133 \end{aligned}$$

   c)



$$\begin{aligned} P(X \geqslant 130,4) &= P(X \geqslant 125) - P(125 \leqslant X < 130,4) \\ &= 0,5 - P(125 \leqslant X < 130,4) \\ &\approx 0,115 \end{aligned}$$

   d)



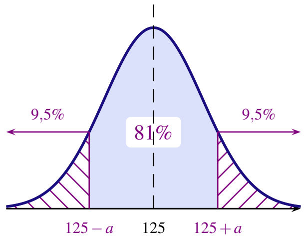
$$\begin{aligned} P(X \geqslant 118,7) &= P(118,7 \leqslant X \leqslant 125) + P(X > 125) \\ &= 0,5 + P(118,7 \leqslant X \leqslant 125) \\ &\approx 0,919 \end{aligned}$$

2. Avec la calculatrice, $P(X \leqslant a) = 0,871$ pour $a \approx 130,09$.
3. La calculatrice permet de résoudre l'équation $P(X \leqslant k) = \alpha$ avec $\alpha \in]0;1[$. Or

$$P(X \geqslant b) = 0,02 \iff 1 - P(X < b) = 0,02 \iff P(X < b) = 0,98$$

   Soit en utilisant la calculatrice $b \approx 134,242$.
4. Un intervalle I de centre 125 est de la forme $[125 - a; 125 + a]$ où a est un réel positif.
   On cherche donc le réel a tel que $P(125 - a \leqslant X \leqslant 125 + a) = 0,81$.

La courbe de la fonction de densité de la loi normale $\mathcal{N}(125;4,5)$ est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = 125$.
On en déduit que :



$$P(125-a \leqslant X \leqslant 125+a) = 0,81 \iff 1 - 2\times P(X < 125-a) = 0,81$$
$$\iff P(X < 125-a) = \frac{1-0,81}{2} = 0,095$$

Soit en utilisant la calculatrice $125 - a \approx 119,102$ d'où $a \approx 8,898$ et $125 + a \approx 130,898$.
Donc $I = [119,102;130,898]$ (ou avec les bornes de l'intervalle arrondies à 10^{-1} près, $I = [119,1;130,9]$)

VI APPLICATION À LA PRISE DE DÉCISION

1 INTERVALLE DE FLUCTUATION ASYMPTOTIQUE AU SEUIL DE 95%

On s'intéresse à un caractère de proportion p connue au sein d'une population. On prélève au hasard et avec remise un échantillon de taille n sur lequel on observe une fréquence f du caractère étudié.
La variable aléatoire X_n qui à chaque échantillon aléatoire de taille n associe le nombre d'individus ayant le caractère étudié suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n;p)$. La fréquence F_n du caractère est $F_n = \dfrac{X_n}{n}$.
Lorsque $n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$, on admet que X_n suit approximativement la loi normale d'espérance $\mu = np$ et d'écart-type $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$.
On a alors,

$$P(\mu - 1,96\sigma \leqslant X_n \leqslant \mu + 1,96\sigma) \approx 0,95 \iff P\left(p - 1,96\times\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leqslant \frac{X_n}{n} \leqslant p + 1,96\times\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) \approx 0,95$$

Si $n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$, l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% de la variable aléatoire F_n, l'intervalle :

$$I_n = \left[p - 1,96\times\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}};p + 1,96\times\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right].$$

EXEMPLE

En première partie de soirée une série a attiré près de 5,7 millions de téléspectateurs soit 28% de part d'audience. On interroge 120 personnes ayant regardé la télévision en première partie de soirée.
Avec $p = 0,28$ et $n = 120$ on a $np = 33,6$ et $n(1-p) = 86,4$, les critères d'approximation étant vérifiés, un intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % de la fréquence f des téléspectateurs qui ont regardé cette série est :

$$I_{120} = \left[0,28 - 1,96\times\sqrt{\frac{0,28\times 0,72}{120}};0,28 + 1,96\times\sqrt{\frac{0,28\times 0,72}{120}}\right]$$

Soit en arrondissant les bornes de l'intervalle à 10^{-3} près, $I_{120} \approx [0,199;0,361]$.

2 DÉCISION À PARTIR DE LA FRÉQUENCE D'UN ÉCHANTILLON

Quand les critères d'approximation sont vérifiés, l'intervalle de fluctuation asymptotique I_n permet de déterminer des seuils de décision :

— pour accepter ou rejeter l'hypothèse selon laquelle p est la proportion d'un caractère dans la population ;

— pour déterminer si un échantillon issu de la population est représentatif.

On formule l'hypothèse que la proportion d'un caractère dans la population est p.
On prélève dans la population un échantillon de taille n et on note f la fréquence observée du caractère étudié.
Lorsque $n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$ on pose :

$$I_n = \left[p - 1{,}96 \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} ; p + 1{,}96 \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right].$$

— Si la fréquence observée f n'appartient pas à l'intervalle I_n, alors on rejette l'hypothèse selon laquelle p est la proportion du caractère étudié dans la population avec un risque d'erreur de 5 %.

— Si la fréquence observée f appartient à l'intervalle I_n, alors l'hypothèse selon laquelle p est la proportion du caractère étudié dans la population est acceptée.

EXEMPLE

Dans un forum on a constaté que 42 personnes sur 120 ont regardé la série dont la part d'audience a été estimée à 28%. Ce résultat remet-il en question l'estimation de la part d'audience de la série ?
La fréquence observée de la part d'audience dans l'échantillon de taille 120 est : $f = \dfrac{42}{120} = 0{,}35$.
L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la part d'audience de la série dans les échantillons de taille 120 est $I_{120} = [0{,}199 ; 0{,}361]$.
Comme $0{,}35 \in [0{,}199 ; 0{,}361]$, l'estimation d'une part d'audience de 28 % pour la série n'est pas remise en cause.

3 INTERVALLE DE CONFIANCE

On cherche à estimer avec un certain niveau de confiance, la proportion p **inconnue** d'un caractère au sein d'une population à partir d'un échantillon de taille n.

DÉFINITION

Soit f la fréquence observée d'un caractère dans un échantillon de taille n.
Sous les conditions d'approximation $n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$, l'intervalle de confiance au niveau de confiance 95 % de la proportion inconnue p dans la population est l'intervalle

$$I = \left[f - 1{,}96 \times \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} ; f + 1{,}96 \times \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} \right].$$

REMARQUES

— En pratique, les conditions de validité de la formule peuvent être vérifiées à posteriori.

— La différence entre deux fréquences f_1 et f_2 observées sur deux échantillons est considérée comme significative quand les intervalles de confiance correspondants sont disjoints.

Dans ce cas, on considère que les deux proportions p_1 et p_2 sont différentes. Dans le cas contraire, on ne peut pas conclure.

EXEMPLE

On interroge au hasard 100 clients ayant effectué des achats à la sortie d'une grande surface. Le temps d'attente aux caisses a été jugé raisonnable par 52 personnes interrogées.
Peut-on considérer que plus de la moitié des clients de cette grande surface estiment que le temps d'attente aux caisses est raisonnable ?

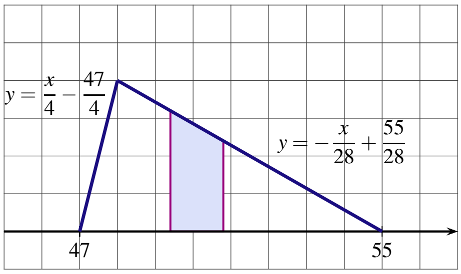
Soit $f=\dfrac{52}{100}=0{,}52$ la fréquence des clients qui estiment que le temps d'attente aux caisses est raisonnable.
L'intervalle de confiance au niveau de confiance 95% de la proportion des clients qui estiment que le temps d'attente aux caisses est raisonnable est :

$$I=\left[0{,}52-1{,}96\times\sqrt{\frac{0{,}52\times0{,}48}{100}};0{,}52+1{,}96\times\sqrt{\frac{0{,}52\times0{,}48}{100}}\right]\approx[0{,}42;0{,}62]$$

On a : $n=100$, $0{,}42\leqslant p\leqslant 0{,}62$, $100\times0{,}42\leqslant np\leqslant 0{,}62$ et $100\times(1-0{,}62)\leqslant n(1-p)\leqslant 100\times(1-0{,}42)$.
Soit $n\geqslant 30$, $42\leqslant np\leqslant 62$ et $38\leqslant n(1-p)\leqslant 58$. Les conditions d'utilisation d'un intervalle de confiance au niveau de confiance 95 % sont vérifiées.
Un intervalle de confiance au niveau de confiance 95 % de la proportion de clients qui estiment que le temps d'attente aux caisses est raisonnable est $[0{,}42;0{,}62]$.
La borne inférieure de l'intervalle de confiance est 0,42, il est donc possible que moins de 50% des clients trouvent que le temps d'attente aux caisses est raisonnable.

EXERCICE 1

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[47;55]$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{4} - \dfrac{47}{4} & \text{si } 47 \leqslant x < 48 \\ -\dfrac{x}{28} + \dfrac{55}{28} & \text{si } 48 \leqslant x \leqslant 55 \end{cases}$.



Courbe représentative de la fonction f

1. Montrer que f est une fonction de densité de probabilité sur l'intervalle $[47;55]$.
2. La fonction f est la densité de probabilité de la variable aléatoire C mesurant la capacité en ml du volume d'eau de parfum contenue dans un flacon pris au hasard dans la production d'une entreprise.
   On a $C \in [47;55]$.
   a) Calculer la probabilité de l'évènement $C \in [49{,}4;50{,}8]$.
   b) Quelle est la probabilité que le flacon contienne moins de 50 ml d'eau de parfum ?
   c) Calculer l'espérance mathématique de la variable C. Interpréter le résultat.

EXERCICE 2

1. Calculer la valeur exacte de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^2 \frac{\mathrm{e}^{0,5x}}{2}\,\mathrm{d}x$.
2. En déduire que la fonction f définie sur $[0;2]$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{0,5x}}{2\mathrm{e}-2}$ est une fonction de densité sur $[0;2]$.
3. Soit X la variable aléatoire de densité de probabilité f. La probabilité $P(X \geqslant 1{,}2)$ est-elle supérieure à 0,5 ?

EXERCICE 3

Dans un supermarché, le temps d'attente X à la caisse, exprimé en minutes, suit la loi uniforme sur l'intervalle $[1;11]$.

1. Déterminer la fonction de densité de probabilité f de la la loi de X.
2. Quelle est la probabilité que le temps d'attente soit compris entre trois et cinq minutes ?
3. Quelle est la probabilité qu'un client attende plus de huit minutes à la caisse ?
4. Préciser le temps d'attente moyen à la caisse.

EXERCICE 4

Dans la journée, un métro passe toutes les 6 minutes à la station 14.
Soit X le temps d'attente d'une personne à cette station. On suppose que X suit la loi uniforme sur $[0;6]$.
Quelle est la probabilité que cette personne attende entre 3 et 5 minutes ?

EXERCICE 5

Soit $[AB]$ un segment de longueur 8 cm. On choisit au hasard un point M sur le segment $[AB]$ et on note D la variable aléatoire donnant la distance AM en cm.

1. Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire D ?

2. Calculer la probabilité que le point M :

   a) soit le milieu I du segment $[AB]$;

   b) soit à une distance inférieure à 3 cm du point A ;

   c) soit plus près du point B que du milieu I.

EXERCICE 6

(D'après sujet bac France Métropolitaine, La Réunion septembre 2015)

Un sismologue déclare en janvier 2014 : « Le risque d'un séisme majeur le long de la faille de San Andreas, en Californie, dans les vingt prochaines années est supérieur à 70 % ».

On s'intéresse au temps, exprimé en années, écoulé entre deux séismes majeurs le long de cette faille en Californie. On admet que ce temps est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.

DOCUMENT 1

La faille de San Andreas, en Californie : séismes majeurs de magnitude supérieure ou égale à 5.

Ville	**Année**	**Magnitude**
Comté d'Orange	1769	6
San Diego	1800	6,5
San Francisco	1808	6
Fort Tejon	1857	8,3
Monts Santa Cruz	1865	6,5
Hayward	1868	6,9
San Francisco	1906	8,2
Santa Barbara	1925	6,3
Santa Barbara	1927	7,3
Long Beach	1933	6,3
Comté de Kern	1952	7,7
San Francisco	1957	5,3
San Fernando	1971	6,6
LomaPrieta	1989	7,1
Parkfield	2004	6,0
Los Angeles	2008	5,5
Mexicali	2010	7,2
Napa	2014	6,0

DOCUMENT 2

Rappels sur la loi exponentielle

— λ est un nombre réel strictement positif.
Une variable aléatoire suit **la loi exponentielle de paramètre** λ si sa densité de probabilité est définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x)=\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}$.

— L'espérance d'une variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre λ est $E(X)=\dfrac{1}{\lambda}$.

1. Pour illustrer la situation un élève utilise un tableur.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
1	Année	1769	1800	1808	1857	1865	1868	1906	1925	1927	1933	1952	1957	1971	1989	2004	2008	2010	2014	Total
2			31	8	49	8	3	38	19	2	6	19	5	14	18	15	4	2	4	245

   a) Proposer un titre pour la cellule A2 grisée.

   b) Quelle formule a saisi l'élève dans la cellule C2 afin de compléter ce tableau jusqu'à la colonne S par « recopie automatique vers la droite » ?

2. a) Calculer en années la moyenne m, arrondie à 10^{-2} près, du temps écoulé entre deux séismes majeurs le long de la faille de San Andreas en Californie.

   b) Justifier qu'une approximation du paramètre λ de la loi exponentielle suivie par la variable aléatoire X est 0,069 4.

3. a) Calculer $P(X \leqslant 20)$ à 10^{-2} près.

   b) L'affirmation du sismologue paraît-elle cohérente avec cette modélisation par une loi exponentielle ?

4. Le dernier séisme majeur a eu lieu en 2014 à Napa. Calculer la probabilité qu'il n'y ait pas d'autres séismes majeurs le long de la faille de San Andreas, en Californie, avant 2050. On arrondira à 10^{-2} près.

5. a) Résoudre l'équation $1-\mathrm{e}^{-0,0694t}=0,95$.

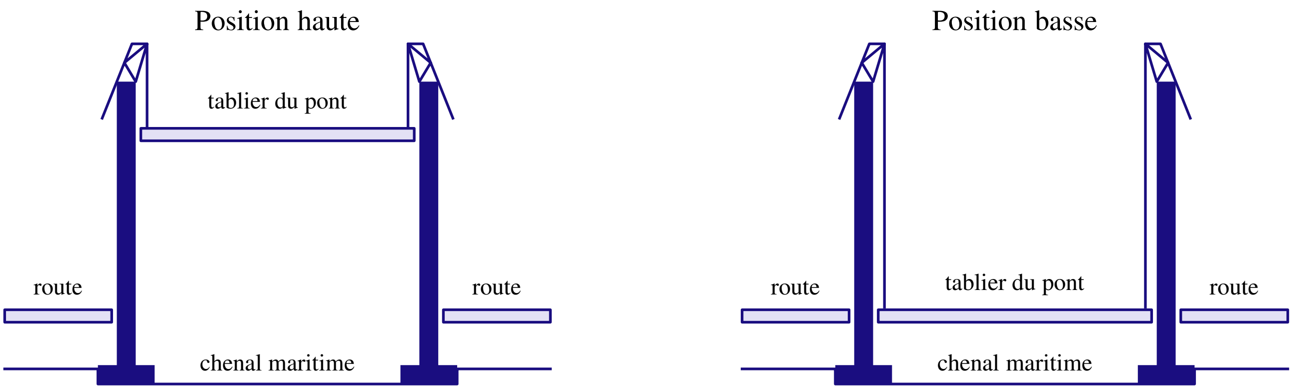
   b) Interpréter ce résultat.

EXERCICE 7

(D'après sujet bac France métropolitaine, La Réunion 2016)

Les parties A et B sont indépendantes.

Un pont levant enjambant un canal peu fréquenté est constitué d'un tablier qui, une fois relevé, permet le passage de bateaux de différentes tailles.



Hauteur du tablier en position haute : 7 mètres
Longueur du tablier : 30 mètres
Temps de montée du tablier : 2 minutes
Temps en position haute du tablier (hors incident) : 8 minutes
Temps de descente du tablier : 2 minutes

PARTIE A - Sur la route

Un automobiliste se présente devant le pont. Le tablier du pont est en position haute. On s'intéresse ici au temps d'attente D, exprimé en minutes, de l'automobiliste avant qu'il puisse franchir le canal, pont baissé (hors incident).

1. Combien de temps l'automobiliste attend-il au minimum ? au maximum ?
2. On admet que le temps d'attente, en minutes, de l'automobiliste pour franchir le pont est une variable aléatoire D qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[2;10]$.
   Déterminer l'espérance $E(D)$ de la variable aléatoire D et interpréter le résultat dans le contexte.
3. Calculer la probabilité que le temps d'attente de l'automobiliste ne dépasse pas 5 minutes.

PARTIE B - Sur l'eau

Dans cette partie les résultats demandés seront arrondis à 10^{-2} près.

Lorsqu'un bateau est passé, le tablier du pont revient en position basse. Le temps, exprimé en heures, avant que le bateau suivant se présente devant le pont est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}05$. Ce temps est appelé temps de latence.

1. Déterminer l'espérance $E(T)$ de la variable aléatoire T et interpréter le résultat dans le contexte.
2. On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = 0{,}05\mathrm{e}^{-0{,}05x}$.
   a) Montrer que la fonction F définie sur $[0;+\infty[$ par $F(x) = -\mathrm{e}^{-0{,}05x}$ est une primitive de f.
   b) On rappelle que pour tout nombre réel t de $[0;+\infty[$, $P(T \leqslant t) = \displaystyle\int_0^t f(x)\mathrm{d}x$.
   Démontrer que $P(T \leqslant t) = 1 - \mathrm{e}^{-0{,}05t}$.
3. a) Calculer la probabilité que le temps de latence soit inférieur à une demi-journée, soit 12 heures.
   b) Calculer la probabilité que le temps de latence soit supérieur à un jour.
   c) Calculer $P(12 \leqslant T \leqslant 24)$.

EXERCICE 8

(*D'après sujet bac Antilles Guyane 2014*)

Dans cet exercice, on s'intéresse à deux types A et B de téléviseurs à écran plat.
Les réponses aux questions 1. a., 1. b. et 1. c. seront arrondies au centième.

1. La durée de fonctionnement, exprimée en heures, d'un téléviseur du type A, avant que survienne la première panne, est modélisée par une variable aléatoire X suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 2 \times 10^{-5}$.
   a) Calculer la probabilité que la première panne survienne avant la 32 000^e heure de fonctionnement.
   b) On s'intéresse à un téléviseur de type A fonctionnant chaque jour pendant 4 heures. Calculer la probabilité que la première panne d'écran ne survienne pas avant 10 ans.
   On prendra 1 année = 365 jours.
   c) Calculer la probabilité que la première panne survienne après 10 000 heures et avant 40 000 heures de fonctionnement.
   d) Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X et en donner une interprétation.
2. La durée de fonctionnement avant la première panne d'un téléviseur de type B est modélisée par une variable aléatoire Y suivant la loi exponentielle de paramètre λ'.
   Une étude statistique a permis d'évaluer $P(Y \leqslant 32000) = 0{,}8$.
   Calculer la valeur arrondie à 10^{-5} de λ'.

EXERCICE 9

Dans une entreprise de vente par correspondance, une étude statistique a montré que 40 % des clients ont choisi l'option « Livraison Express ».
On prélève au hasard et de manière indépendante 600 bons de commande.
On note X la variable aléatoire qui associe le nombre de bons portant la mention « Livraison Express ».

1. Déterminer la loi probabilité de X. Quelle est son espérance mathématique ?
2. On admet que l'on peut approcher la loi de la variable aléatoire $\dfrac{X-240}{12}$ par la loi normale centrée réduite. On note Z une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.
   a) Montrer que $P(225 \leqslant X \leqslant 270) = P(-1{,}25 \leqslant Z \leqslant 2{,}5)$.
   Quelle est la probabilité, arrondie à 10^{-3} près, que le nombre de bons portant la mention « Livraison Express » soit compris entre 225 et 270 ?
   b) Déterminer la probabilité qu'au moins 276 bons portent la mention « Livraison Express ».

EXERCICE 10

Les résultats seront arrondis, si nécessaire, à 10^{-3} près

Un produit est conditionné en paquets dont la masse théorique est de 250 grammes.

PARTIE A

La machine en charge du remplissage automatique des paquets est régulièrement calibrée.
On considère que la durée T de fonctionnement, exprimée en heures, entre deux calibrages, est une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}005$.

1. Calculer l'espérance $E(T)$ de la variable aléatoire T. Interpréter ce résultat.
2. Déterminer $P(T \geqslant 200)$.

PARTIE B

On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque paquet pris au hasard, associe sa masse exprimée en grammes.
On considère que X suit la loi normale de moyenne $\mu = 250$ et d'écart type $\sigma = 2{,}7$.

1. Calculer la probabilité $P(245 \leqslant X \leqslant 260)$.
2. Le contrôle de conformité mis en place rejette tout paquet dont la masse est inférieure à 245 grammes.
   Quelle est la probabilité qu'un paquet pris au hasard ne soit pas conforme ?

EXERCICE 11

Dans cet exercice, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-3}

La compagnie aérienne Truc-Air utilise pour ses vols moyen-courriers des avions pouvant transporter 200 passagers.
Suite à une étude qui a permis d'établir que 10% des clients qui ont réservé un vol ne se présentent pas à l'embarquement, la direction commerciale a décidé de pratiquer le « surbooking ».

PARTIE A

La compagnie accepte pour un vol donné, 210 réservations.
On note X la variable aléatoire qui associe le nombre de passagers qui se présentent à l'embarquement.

1. a) Quelle est la loi de probabilité suivie par X ?
   b) Déterminer la probabilité $P(X \leqslant 200)$.

2. On choisit d'approcher la loi binomiale de X par une loi normale d'espérance $\mu = E(X)$ et d'écart-type $\sigma = \sigma(X)$. Soit Y l'approximation normale de X.
   a) Déterminer $P(Y \leqslant 200)$.
   b) Déterminer un intervalle I de centre 189 tel que $P(Y \in I) \approx 0{,}95$.
3. La compagnie prend-elle un risque important en acceptant 210 réservations pour ce vol ?

PARTIE B

La compagnie accepte pour un vol donné n réservations.
On note X_n le nombre de passagers qui se présentent à l'embarquement. La variable aléatoire X_n suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n;0{,}9)$.
On cherche à déterminer le nombre maximal de réservations pour que la probabilité de l'évènement « $X_n \leqslant 200$ » soit supérieure à 0,95.
On admet que la loi de probabilité de X_n peut être approchée par une loi normale d'espérance $\mu = E(X_n) = 0{,}9n$ et d'écart-type $\sigma = \sigma(X_n) = 0{,}3\sqrt{n}$.

1. On considère la variable aléatoire $Z_n = \dfrac{X_n - 0{,}9n}{0{,}3\sqrt{n}}$ qui suit la loi normale centrée réduite.
   a) Montrer que $X_n \leqslant 200$ équivaut à $Z_n \leqslant \dfrac{200 - 0{,}9n}{0{,}3\sqrt{n}}$.
   b) Déterminer à l'aide de la calculatrice, la valeur arrondie à 10^{-3} près, du réel k tel que $P(Z_n \leqslant k) \geqslant 0{,}95$.
   c) En déduire que n est solution de l'inéquation $0{,}9n + 0{,}4935\sqrt{n} - 200 \leqslant 0$.
2. a) On pose $x = \sqrt{n}$ avec $x \geqslant 0$. Résoudre dans $\mathbb{R}^+$, l'inéquation $0{,}9x^2 + 0{,}4935x - 200 \leqslant 0$.
   b) En acceptant le risque maximum de 5% de voir plus de 200 passagers se présenter à l'embarquement, quel est le nombre maximal de réservations que cette compagnie peut prendre pour ce vol ?

EXERCICE 12

Une entreprise fabrique en grande quantité des tubes en aluminium.
La longueur des tubes est exprimée en millimètres. Un tube est dit « conforme pour la longueur » lorsque celle-ci appartient à l'intervalle $[245 ; 255]$.

Dans cet exercice, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-3}

PARTIE A

Dans cette partie, on considère que 5 % des tubes ne sont pas conformes pour la longueur.
On prélève au hasard 50 tubes dans le stock. Le stock est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 50 tubes.

On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 50 tubes, associe le nombre de tubes qui ne sont pas conformes pour la longueur.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer la probabilité $P(X = 3)$. Interpréter le résultat.
3. Calculer la probabilité que dans un tel prélèvement deux tubes au moins ne sont pas conformes pour la longueur.

PARTIE B

On désigne par Y la variable aléatoire qui, à chaque tube pris au hasard dans la production d'une journée, associe sa longueur.
On admet que la variable aléatoire Y suit la loi normale de moyenne 250 et d'écart type 2,5.

1. Calculer la probabilité qu'un tube prélevé au hasard dans la production d'une journée soit conforme pour la longueur.
2. Le contrôle de conformité mis en place rejette les tubes dont la longueur est inférieure à 245 millimètres.

   Quelle est la probabilité pour qu'un tube prélevé au hasard dans la production d'une journée soit rejeté par le contrôle de conformité ?

EXERCICE 13

(*D'après sujet bac Antilles Guyane 2016*)

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante. Les résultats seront arrondis, si nécessaire, à 10^{-3} *près.*
Un manufacturier de pneumatiques produit des pneus d'avions en grande quantité.
Il s'engage à livrer des produits spécifiques aux avionneurs de masse maximum garantie de 124 kg. Ces pneus doivent supporter une charge nominale de 10 tonnes, des vitesses pouvant aller jusqu'à 420 km.h^{-1} et des températures instables allant de -40 °C (en altitude) à 250 °C (au moment du décollage).

PARTIE A

On note M la variable aléatoire qui, à chaque pneu prélevé au hasard dans la production, associe sa masse en kilogramme. On admet que la variable aléatoire M suit la loi normale de moyenne $\mu = 121{,}37$ et d'écart type $\sigma = 0{,}42$.

1. Déterminer la probabilité qu'un pneu prélevé au hasard ait une masse en kg comprise entre 120,95 et 121,79.
2. Déterminer la probabilité qu'un pneu prélevé au hasard ait une masse en kg supérieure à 122,63.

PARTIE B

Un pneu trop lourd entraîne une augmentation de la consommation du kérosène.
Lorsque la masse d'un pneu reçu par une compagnie aérienne dépasse 121,9 kg cela entraîne des pénalités financières pour le manufacturier.
Sur la chaîne de fabrication, on prélève de façon aléatoire un échantillon de 36 pneus et on constate que 2 d'entre eux ont une masse qui dépasse 121,9 kg.

1. Quelle est la fréquence des pneus dans l'échantillon prélevé dont la masse dépasse 121,9 kg ?
2. Déterminer l'intervalle de confiance avec un niveau de confiance de 95 % de la proportion de pneus dont la masse dépasse 121,9 kg dans la production.

   On rappelle que lorsqu'une fréquence f est mesurée dans un échantillon de taille n, l'intervalle de confiance à 95 % de la proportion dans la population est donné par :

$$I = \left[f - 1{,}96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} ; f + 1{,}96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} \right]$$

3. Donner une interprétation du résultat précédent.

EXERCICE 14

(*D'après sujet bac France métropolitaine, La Réunion septembre 2016*)

Dans cet exercice, toutes les probabilités demandées seront arrondies à 10^{-3}.
Une usine métallurgique fabrique des boîtes de conserve pour des entreprises spécialisées dans le conditionnement industriel de légumes.
La probabilité qu'une boîte prélevée au hasard soit non conforme est 0,04.
Un lot de 200 boîtes choisies au hasard est livré à une entreprise spécialisée dans le conditionnement des légumes. Le nombre de boîtes fabriquées par cette usine métallurgique est assez important pour pouvoir assimiler un tel prélèvement à un tirage avec remise de 200 boîtes.

PARTIE A

La variable aléatoire X désigne le nombre de boîtes non conformes dans un tel lot.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Déterminer la probabilité qu'un tel lot contienne exactement quatre boîtes non conformes.

PARTIE B

On décide d'approcher la loi binomiale suivie par X par la loi normale d'espérance $\mu = 8$ et d'écart type $\sigma = 2{,}77$.

1. Justifier le choix de ces paramètres.
2. À l'aide de la loi normale ainsi définie :
   a) calculer $P(6 \leqslant X \leqslant 10)$ et interpréter le résultat trouvé ;
   b) déterminer une approximation de la probabilité qu'il y ait au maximum 4 boîtes non conformes.

PARTIE C

Dans le lot livré de 200 boîtes, on compte 11 boîtes non conformes. Le fabricant des boîtes est averti. Doit-il s'inquiéter ?
On pourra utiliser un intervalle de fluctuation.

EXERCICE 15

(*D'après sujet bac Nouvelle Calédonie 2016*)

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante. Dans l'ensemble de l'exercice, les résultats seront arrondis à 10^{-3} près.
Une usine fabrique des batteries au lithium-ion pour des vélos électriques. Le cahier des charges indique qu'une batterie mesure 15 cm de large.
Lors de la fabrication, on modélise la largeur des batteries par une variable aléatoire X qui suit une loi normale de moyenne $\mu = 15$ et d'écart-type $\sigma = 0{,}02$. L'objectif de cet exercice est d'analyser la qualité de la production dans cette usine.

PARTIE A

Une batterie est jugée conforme lorsque sa largeur, exprimée en centimètres, appartient à l'intervalle $[14{,}95; 15{,}05]$.

1. Calculer la probabilité qu'une batterie prélevée au hasard dans la production soit non conforme.

L'usine vend ses batteries au lithium-ion par lots de 2 000 aux fabricants de vélos électriques. En moyenne, chaque lot de 2 000 batteries en contient 24 non conformes.
On note p la probabilité qu'une batterie soit non conforme. On prélève au hasard 2 000 batteries dans la production. La production est assez importante pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage aléatoire avec remise.
On modélise le nombre de batteries non conformes dans un lot de 2 000 par une variable aléatoire Y.

2. Quelle loi suit la variable aléatoire Y ? Préciser ses paramètres.
3. Calculer la probabilité qu'il y ait au moins 30 batteries non conformes dans un lot de 2 000 batteries.

PARTIE B

Dans le cadre d'un fonctionnement correct des machines de la chaîne de production, on admet que la proportion p de batteries non conformes est 1,2 %.
Le responsable de l'usine affirme qu'il ne vend pas de lot de 2 000 batteries qui en contienne plus de 40 non conformes. Quelle est la fiabilité de cette affirmation ? Justifier.

EXERCICE 16

Sauf mention contraire, les résultats seront donnés sous forme décimale arrondis à 10^{-4} près.

Une usine fabrique en grande quantité des lames de parquet en chêne.

PARTIE A

On prélève au hasard 40 lames dans le stock, pour vérification. On admet que la probabilité qu'une lame prélevée au hasard dans ce stock ait un défaut est égale à 0,1.
Le stock est suffisamment important pour assimiler le lot de 40 lames à un tirage avec remise de 40 lames.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 40 lames dans ce stock, associe le nombre de lames ayant un défaut.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale.
2. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$. Interpréter le résultat.
3. Déterminer la probabilité de trouver quatre lames qui ont un défaut.
4. Déterminer la probabilité qu'au moins deux lames ont un défaut.

PARTIE B

Pour satisfaire la commande d'un client, on prélève au hasard dans le stock 400 lames.
On admet que la loi de la variable aléatoire Z qui, à tout prélèvement de 400 lames dans ce stock, associe le nombre de lames ayant un défaut peut être approchée par la loi normale de moyenne 40 et d'écart type 6.

1. Déterminer, la probabilité que dans un prélèvement de 400 lames, il y ait plus de 50 lames ayant un défaut.
2. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % de la proportion de lames ayant un défaut. En déduire le nombre de lames ayant un défaut que le client peut trouver avec une probabilité proche de 0,95.

PARTIE C

Le fabriquant souhaite évaluer la proportion inconnue p de clients satisfaits par son produit. Pour cela, il effectue un sondage auprès d'un échantillon de 200 clients. Sa clientèle est suffisamment importante pour considérer que cet échantillon résulte d'un tirage aléatoire avec remise.
Lors de ce sondage, 156 clients se sont déclarés satisfaits par son produit.

1. Donner une estimation ponctuelle f de la proportion p de clients satisfaits.
2. Déterminer un intervalle de confiance centré sur f de la proportion p avec le coefficient de confiance 95 %. Arrondir les bornes de l'intervalle à 10^{-2}.
3. Ce fabriquant peut-il être certain que plus de 70% de sa clientèle est satisfaite par son produit ?

EXERCICE 17 (*D'après sujet bac France métropolitaine, La Réunion 2015*)

Dans l'ensemble de l'exercice, les résultats seront arrondis à 10^{-4} près.

L'usine OCEFRAIS embouteille des jus de fruits. L'étiquette de la bouteille indique 1,5 litre de jus de fruits. Le volume de la bouteille est de 1,55 litre.
À l'embouteillage, le volume de jus de fruits versé dans une bouteille est une variable aléatoire X qui suit la loi normale de moyenne $\mu = 1{,}5$ et d'écart-type $\sigma = 0{,}015$.

1. a) L'une des trois figures donne la courbe représentative C_f de la densité f de cette loi normale. Indiquer sur la copie le numéro de la figure correspondante en expliquant votre choix.

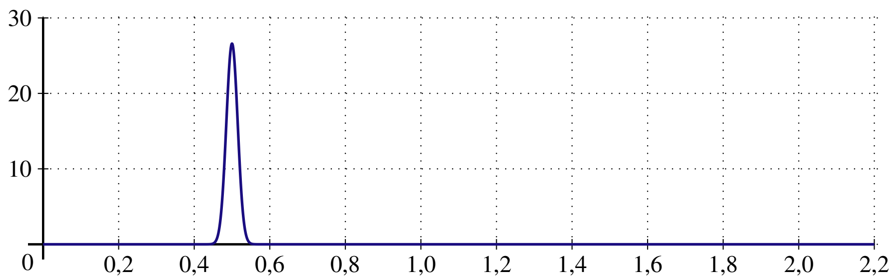


Figure 1

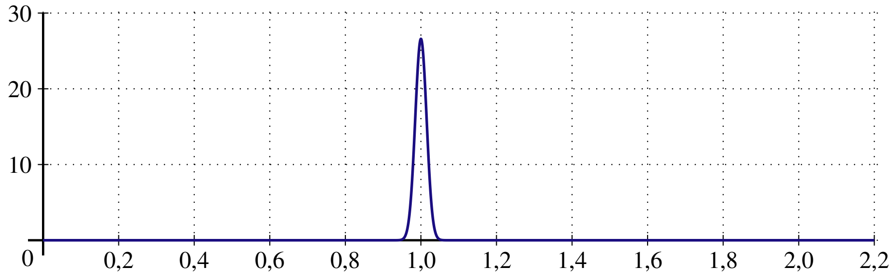


Figure 2

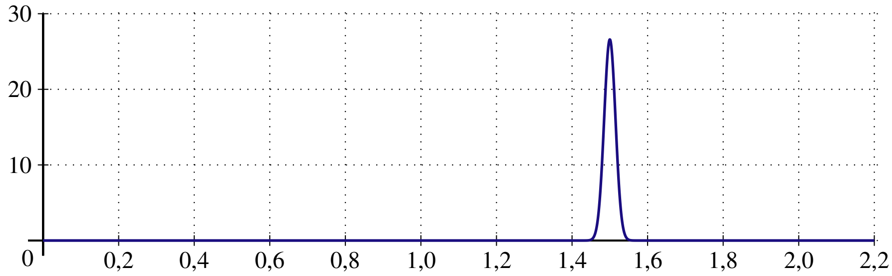


Figure 3

   b) Déterminer $P(1{,}485 \leqslant X \leqslant 1{,}515)$.

2. On choisit au hasard une bouteille de jus de fruits.
   a) Quelle est la probabilité que cette bouteille contienne exactement 1,48 litre de jus de fruits ?
   b) Calculer la probabilité que cette bouteille contienne entre 1,46 litre et 1,54 litre de jus de fruits.
   c) Quelle est la probabilité que cette bouteille déborde sur la chaîne d'embouteillage ?
   On rappelle que toutes les bouteilles utilisées ont un volume de 1,55 litre.

3. Une bouteille est dite conforme si elle contient entre 1,46 litre et 1,54 litre de jus de fruits.
   Selon l'usine OCEFRAIS, la probabilité qu'une bouteille soit non conforme est 0,0077.
   Un supermarché achète un lot de 10 000 bouteilles.
   a) Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % de la fréquence observée de bouteilles non conformes dans un tel lot.
   b) Dans le lot de 10 000 bouteilles, on a compté 90 bouteilles non conformes. Le gérant du supermarché trouve le nombre de bouteilles non conformes anormalement élevé.
   L'usine OCEFRAIS a-t-elle des raisons de s'inquiéter ?

Chapitre 11

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

EXERCICE 1

On sort un gâteau du four et on note que sa température est de 180°C. On suppose que la température ambiante de la cuisine est supposée constante à 20°C.
La température du gâteau est donnée par une fonction g du temps t, exprimé en heures, qui est solution de l'équation différentielle :

$$(E) \quad y' + 1{,}38y = 27{,}6.$$

1. Résoudre l'équation différentielle (E) et donner sa solution particulière g définie par la condition initiale $g(0) = 180$.
2. En utilisant l'expression de $g(t)$ trouvée :
   a) Quelle est la température, arrondie au degré près, du gâteau 30 minutes après l'avoir sorti du four ?
   b) Quel est le temps nécessaire pour atteindre inférieure à 25°C ?

EXERCICE 2

(D'après sujet bac Nouvelle Calédonie 2016)

Le bassin d'une piscine municipale a une capacité de 600 000 litres d'eau. Afin de respecter les normes d'hygiène et de sécurité, 30 000 litres d'eau de la piscine sont renouvelés chaque heure et le taux de chlore maximum autorisé est de 0,25 mg/L.
Un soir après la fermeture de la piscine, alors que le taux de chlore est indétectable, 1 kg de chlore est déversé par erreur dans le bassin à 20 h.
Le directeur de la piscine souhaiterait savoir quand il pourra ouvrir à nouveau la piscine au public.
On modélise la concentration massique du chlore présent dans la piscine par une fonction f. Lorsque t désigne le temps écoulé depuis l'accident, exprimé en heures, $f(t)$ représente la concentration massique du chlore présent dans la piscine en milligrammes par litre.
On admet que la fonction f est solution de l'équation différentielle (E) :

$$y' + 0{,}05y = 0 \quad \text{où } y \text{ désigne une fonction de la variable } t.$$

1. a) Résoudre l'équation différentielle (E).
   b) Que vaut $f(0)$? En déduire une expression de $f(t)$ sur $[0;+\infty[$.
2. On admet que f est définie sur $[0;+\infty[$ par $f(t) = \dfrac{5}{3} \times \mathrm{e}^{-0{,}05t}$.
   À quel moment la piscine pourra-t-elle ouvrir de nouveau au public ?

EXERCICE 3

(D'après sujet bac France Métropolitaine 2014)

Dans cet exercice, la température est exprimée en degrés Celsius (°C) et le temps t est exprimé en heures.
Une entreprise congèle des ailerons de poulet dans un tunnel de congélation avant de les conditionner en sachets.
À l'instant $t = 0$, les ailerons, à une température de 5 °C, sont placés dans le tunnel.
Pour pouvoir respecter la chaîne du froid, le cahier des charges impose que les ailerons aient une température inférieure ou égale à -24 °C.

PARTIE A

La température des ailerons dans le tunnel de congélation est modélisée en fonction du temps t par la fonction f définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par $f(t) = 35\mathrm{e}^{-1{,}6t} - 30$.

1. Déterminer la température atteinte par les ailerons au bout de 30 minutes, soit 0,5 h.
2. Étudier le sens de variation de la fonction f.
3. Si les ailerons de poulet sont laissés une heure et demie dans le tunnel de congélation, la température des ailerons sera-t-elle conforme au cahier des charges ?
4. Résoudre par le calcul l'équation $f(t) = -24$ et interpréter le résultat trouvé.

PARTIE B

Pour moderniser son matériel, l'entreprise a investi dans un nouveau tunnel de congélation.
La température des ailerons dans ce nouveau tunnel est modélisée, en fonction du temps, par une fonction g définie et dérivable sur l'intervalle $[0,+\infty[$, qui est solution de l'équation différentielle $y'+1{,}5y=-52{,}5$

1. Résoudre l'équation différentielle $y'+1{,}5y=-52{,}5$.
2. a) Justifier que $g(0)=5$.
   b) Vérifier que la fonction g est définie par $g(t)=40\mathrm{e}^{-1{,}5t}-35$.
3. Ce nouveau tunnel permet-il une congélation plus rapide ?

EXERCICE 4

(*D'après sujet bac France métropolitaine, La Réunion 2015*)

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis à 10^{-2} près.

Une fibre optique est un fil très fin, en verre ou en plastique, qui a la propriété d'être un conducteur de la lumière et sert dans la transmission d'un signal véhiculant des données.
La puissance du signal, exprimée en milliwatts (mW), s'atténue au cours de la propagation.
On note P_E et P_S les puissances respectives du signal à l'entrée et à la sortie d'une fibre.
Pour une fibre de longueur L exprimée en kilomètres (km), la relation liant P_E, P_S et L est donnée par :

$$P_S=P_E\times\mathrm{e}^{-aL}$$

où a est le coefficient d'atténuation linéaire dépendant de la fibre.
Une entreprise utilise deux types de fibre optique de coefficients d'atténuation différents.
Dans tout l'exercice :

— la puissance du signal à l'entrée de la fibre est 7 mW ;
— à la sortie, un signal est détectable si sa puissance est d'au moins 0,08 mW ;
— pour rester détectable, un signal doit être amplifié dès que sa puissance devient strictement inférieure à 0,08 mW.

PARTIE A

Le premier type de fibre de longueur 100 km utilisé par l'entreprise a un coefficient d'atténuation linéaire $a=0{,}046$.
Pour ce type de fibre, sera-t-il nécessaire de placer au moins un amplificateur sur la ligne pour que le signal soit détectable en sortie ?

PARTIE B

La puissance du signal le long du second type de fibre est modélisée par une fonction g de la variable x, où x est la distance en kilomètres parcourue par le signal depuis l'entrée de la fibre.
On admet que cette fonction g est définie et dérivable sur l'intervalle $[0;+\infty[$ et qu'elle est solution sur cet intervalle de l'équation différentielle $y'+0{,}035t=0$.

1. Résoudre l'équation différentielle $y'+0{,}035t=0$.
2. a) Sachant que $g(0)=7$, vérifier que la fonction g est définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $g(x)=7\mathrm{e}^{-0{,}035x}$.
   b) En déduire le coefficient d'atténuation de cette fibre.
3. a) Étudier le sens de variation de la fonction g.
   b) Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$.
4. a) Le signal sera-t-il encore détecté au bout de 100 km de propagation ?
   b) Déterminer la longueur maximale de la fibre permettant une détection du signal à la sortie sans amplification.

EXERCICE 5

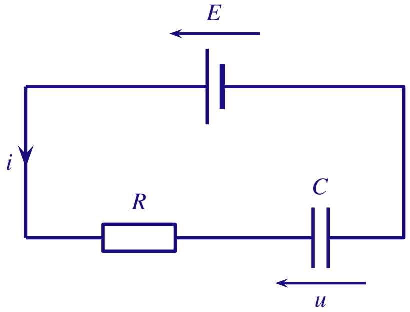
(*D'après sujet bac Antilles Guyane 2015*)

On étudie la charge d'un condensateur et l'on dispose pour cela du circuit électrique ci-contre composé de :

— une source de tension continue E de 10 V.

— une résistance R de $10^5\ \Omega$.

— un condensateur de capacité C de 10^{-6} F.



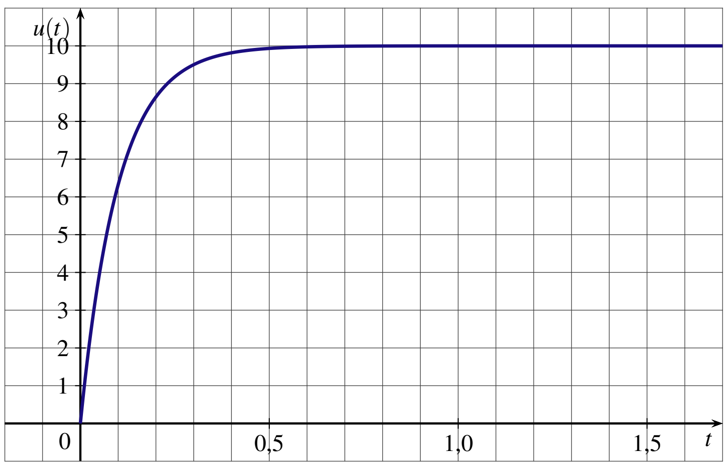
On note u la tension exprimée en volt aux bornes du condensateur. Cette tension u est une fonction du temps t exprimé en seconde.
La fonction u est définie et dérivable sur $[0;+\infty[$; elle vérifie l'équation différentielle suivante :

$$RCu' + u = E$$

où u' est la fonction dérivée de u.

1. Justifier que l'équation différentielle est équivalente à :$u' + 10u = 100$.
2. a) Déterminer la forme générale $u(t)$ des solutions de cette équation différentielle.
   b) On considère qu'à l'instant $t = 0$, le condensateur est déchargé. Parmi les solutions, déterminer l'unique fonction u tel que $u(0) = 0$.
   c) Déterminer en justifiant la réponse, la limite en $+\infty$ de la fonction u ainsi obtenue. En donner une interprétation.
3. On donne ci-dessous, la représentation graphique de la fonction u qui vient d'être obtenue à la question 2. b. avec les unités suivantes : 1 unité pour 1 seconde sur l'axe des abscisses et 1 unité pour 1 volt sur l'axe des ordonnées.

Charge du condensateur en fonction du temps



On appelle T le temps de charge en seconde pour que $u(T)$ soit égal à 95 % de E.

a) Déterminer graphiquement le temps de charge T.

b) Retrouver, par le calcul, le résultat précédent.

4. Sans modifier les valeurs respectives de E et de C, déterminer la valeur de R afin que le temps de charge T soit multiplié par 2.

EXERCICE 6

Une entreprise réalise par moulage des hélices de mini-drones dans un nouveau matériau plastique. La fabrication s'effectue en deux temps :

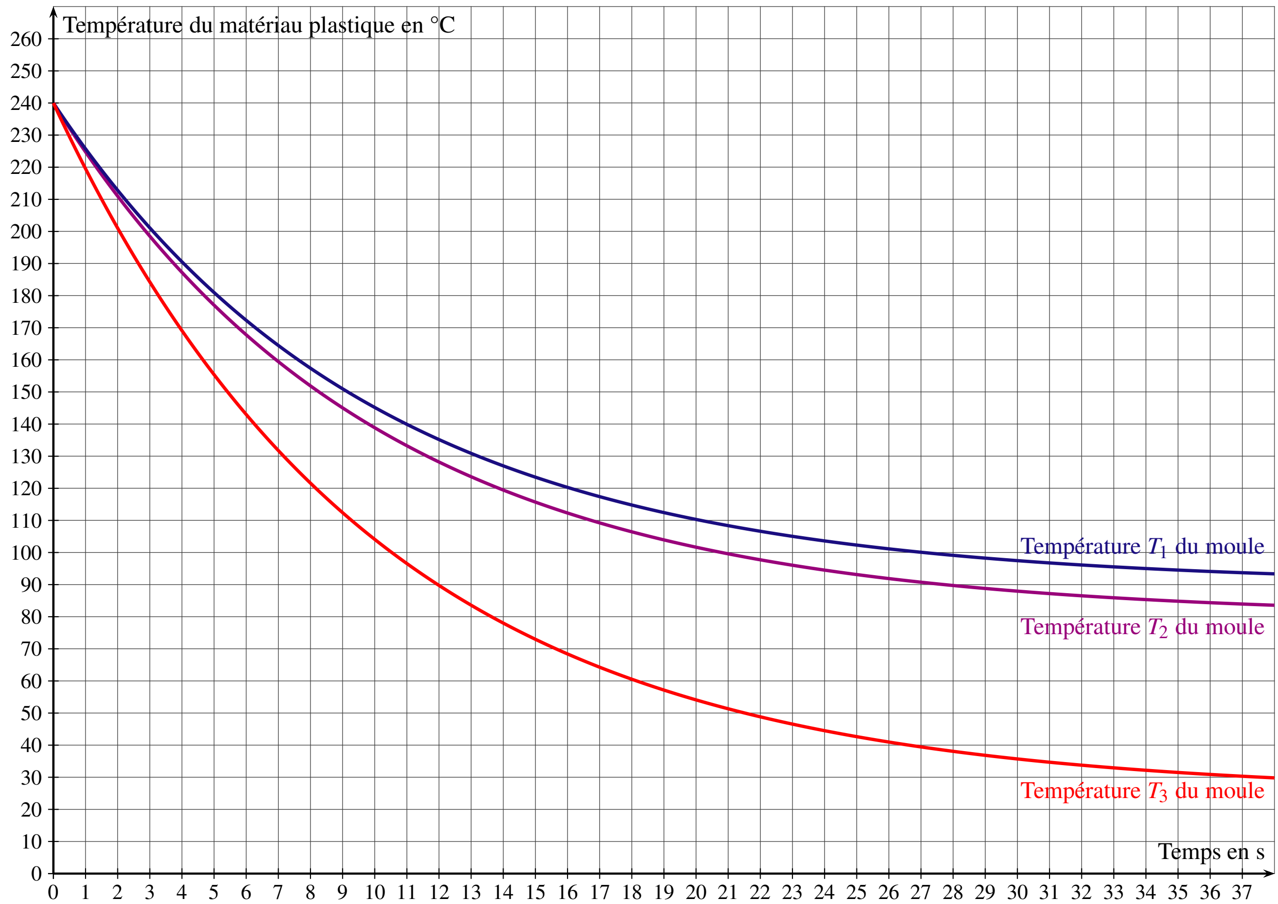
Phase 1 : injection sous pression de la matière fondue à une température initiale de 240°C et maintien sous pression de la matière pendant les 3 premières secondes du refroidissement.

Phase 2 : poursuite du refroidissement et éjection de l'hélice.

À l'issue de ces deux étapes le moule est refermé et une nouvelle hélice est introduite.
Pour être utilisable, on estime que le matériau plastique ne doit pas avoir perdu plus de 20 % de sa température initiale lors des 3 premières secondes du refroidissement.
Lors de la fabrication, afin de maîtriser le refroidissement de l'hélice, on étudie la température T à laquelle le moule doit être maintenu. En effet, pour garantir un remplissage homogène du moule, le matériau plastique ne doit pas refroidir trop vite lors de son injection dans le moule.

PARTIE 1

Des séries de mesures ont permis de réaliser trois courbes de refroidissement. Elles représentent l'évolution de la température du matériau plastique (exprimée en degrés Celsius) en fonction du temps (exprimé en secondes), pour trois valeurs différentes de la température du moule, T_1, T_2 et T_3.



1. Les trois températures satisfont-elles aux conditions souhaitées de fabrication d'une hélice ?
   Détailler la réponse.
2. On estime de plus que le matériau a suffisamment durci et que l'hélice peut être éjectée sans risque de déformation lorsque sa température atteint les 100 degrés.
   Parmi les températures qui satisfont aux conditions de fabrication, quelle est la température du moule qui permet de fabriquer le plus d'hélices dans un temps donné ? Expliquer.

PARTIE 2

On décide de maintenir le moule à une température de 80°C. On s'intéresse à la fonction donnant la température du matériau plastique (exprimée en degrés) en fonction du temps (exprimé en secondes).
On admet que cette fonction est solution de l'équation différentielle $(E) : y' + 0{,}1y = 8$.
Dans cette équation, y désigne une fonction de la variable réelle t, définie et dérivable sur $[0;+\infty[$.

1. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
2. Déterminer la fonction f définie sur $[0;+\infty[$, solution particulière de l'équation différentielle (E) satisfaisant la condition initiale de température $f(0) = 240$.

PARTIE 3

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $f(t) = 160\text{e}^{-0,1t} + 80$.
Cette fonction f donne la température de l'hélice (en degrés) en fonction du temps t (en secondes) lorsque le moule est maintenu à une température de 80°C.

1. a) Justifier par le calcul le sens de variation de la fonction f.
   b) Calculer $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$. Interpréter ce résultat dans le contexte du problème.
2. a) Résoudre l'équation $f(t) = 100$ et donner une valeur arrondie à 10^{-1} de la ou des solutions éventuelles.
   b) Interpréter ce résultat dans le contexte du problème.
3. On souhaite de plus que la température moyenne du matériau plastique, durant la première phase de fabrication, c'est-à-dire durant les trois premières secondes, ne soit pas inférieure à 210°C.
   a) Montrer que la fonction F définie pour tout réel t de l'intervalle $[0;+\infty[$ par $F(t) = 80t - 1600\text{e}^{-0,1t}$ est une primitive de la fonction f.
   b) Calculer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0;3]$.
   On rappelle que la valeur moyenne d'une fonction f sur un intervalle $[a;b]$ est : $\dfrac{1}{b-a} \times \displaystyle\int_a^b f(t)\text{d}t$.
   c) La fonction f satisfait-elle la contrainte sur la température moyenne ?

EXERCICE 7

1. L'équation différentielle $y'' + 9y = 0$ admet pour solution la fonction f définie, pour tout réel x, par :

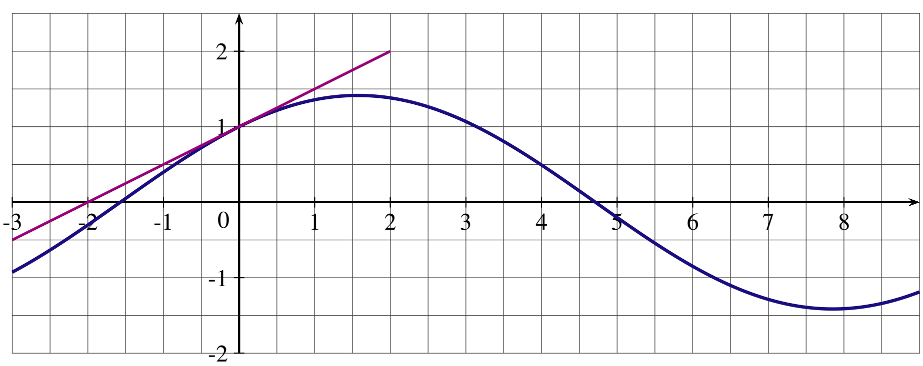
   a. $f(x) = 3\cos(x)$ **b.** $f(x) = 3\sin(x)$ **c.** $f(x) = \sin\left(3x + \dfrac{\pi}{4}\right)$
2. L'équation différentielle $y'' + 4y = 0$ admet pour solution la fonction f définie, pour tout réel x, par :

   a. $f(x) = 3\text{e}^{2x} + \text{e}^{-2x}$ **b.** $f(x) = \cos\left(\dfrac{x}{2}\right) + \sin\left(\dfrac{x}{2}\right)$ **c.** $f(x) = \cos(2x) + \sin(2x)$
3. L'équation différentielle $4y'' + 9y = 0$ admet pour solution la fonction f définie, pour tout réel x, par :

   a. $f(x) = \text{e}^{-\frac{3}{2}x}$ **b.** $f(x) = \cos\left(\dfrac{3x}{2}\right) - \sin\left(\dfrac{3x}{2}\right)$ **c.** $f(x) = \cos\left(\dfrac{2x}{3}\right) + \sin\left(\dfrac{2x}{3}\right)$

EXERCICE 8

1. Résoudre l'équation différentielle (E) : $4y'' + y = 0$, où y désigne une fonction de la variable réelle x.
2. Le but de cette question est de trouver la solution particulière de (E), appelée f dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est donnée ci-dessous. La droite T est tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.



a) Par lecture graphique, donner les valeurs de $f(0)$ et de $f'(0)$.

b) Montrer que la fonction f est définie pour tout réel x par $f(x)=\cos\left(\frac{x}{2}\right)+\cos\left(\frac{x}{2}\right)$.

EXERCICE 9

1. Déterminer la solution f de l'équation différentielle $y''+2y=0$ telle que la droite d'équation $y=2x+1$ est tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 0.
2. a) Déterminer la solution f de l'équation différentielle $9y''+16y=0$ vérifiant $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{3}$ et $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$.

   b) Vérifier que pour tout réel x, $f(x)=2\cos\left(\frac{4}{3}x-\frac{\pi}{6}\right)$.

EXERCICE 10

1. Résoudre l'équation différentielle (E) : $9y''+y=0$, où y désigne une fonction de la variable réelle x.
2. Le but de cette question est de trouver la solution particulière de (E), appelée f dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ admet pour tangente au point d'abscisse 0 la droite T d'équation $y=x$.

   a) Quelles sont les valeurs de $f(0)$ et de $f'(0)$?

   b) Déterminer une expression de la fonction f.

CONTRÔLES

EXERCICE 1 (3 *points*)

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. f est définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x}-\dfrac{2}{x}$.
2. g est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\dfrac{\sin x}{\cos x-2}$

EXERCICE 2 (4 *points*)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ par $f(x)=\dfrac{4x^2}{2x+1}$.

1. Calculer $\lim\limits_{x\to-0,5} f(x)$, interpréter graphiquement ce résultat.
2. a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

   b) Justifier que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y=2x-1$ est asymptote à la courbe représentative de la fonction f.
3. a) Résoudre dans l'intervalle $\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ l'inéquation $\dfrac{1}{2x+1}<0{,}001$.

   b) Quel calcul peut-on effectuer pour déterminer le plus simplement possible une valeur approchée au millième près de $f(750)$?

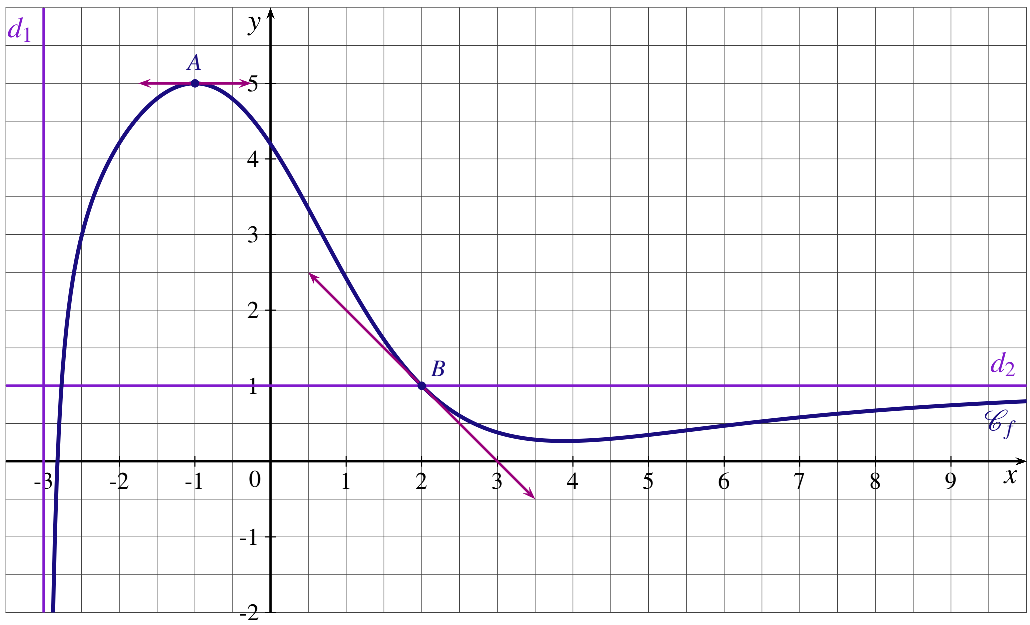
EXERCICE 3 (4 *points*)

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]-3;+\infty[$. On sait que :

— la courbe $\mathscr{C}_f$ admet pour asymptotes les droites d_1 et d_2 ;

— la tangente au point $A\,(-1;5)$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ est parallèle à l'axe des abscisses ;

— la tangente au point $B\,(2;1)$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $(3;0)$.



On note f' la dérivée de la fonction f. À partir du graphique et des renseignements fournis :

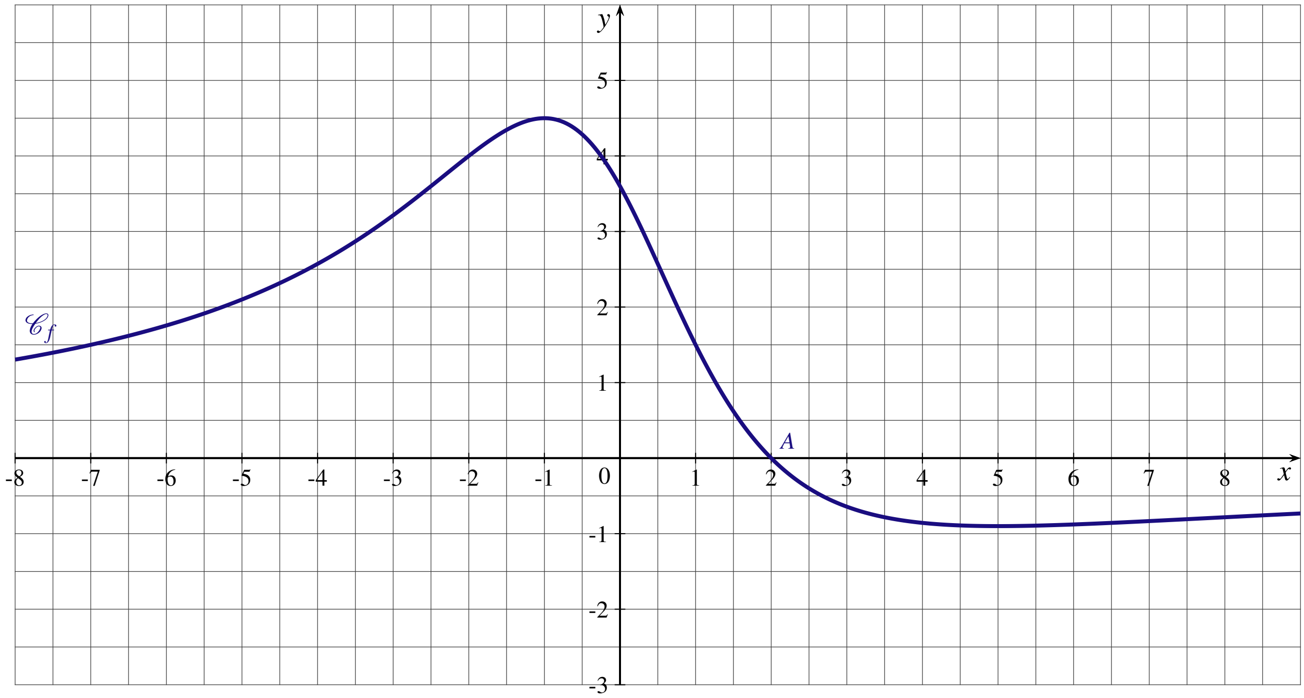
1. Déterminer $\lim\limits_{x\to-3} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
2. Déterminer $f'(-1)$ et $f'(2)$.
3. Pour chacune des affirmations ci-dessous, dire si elle est vraie ou si elle est fausse en justifiant votre choix.

   a) $f'(0)\times f'(6)\leqslant 0$.

b) $f'(-2{,}999) \times f'(-2{,}5) \leqslant 0$.

EXERCICE 4 (9 *points*)

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' la dérivée de la fonction f.



PARTIE A

1. La droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 2 - x$ est tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 2
   a) Tracer la droite $\mathscr{D}$ sur le graphique précédent.
   b) Déterminer les valeurs de $f(2)$ et de $f'(2)$.

PARTIE B

La fonction f est définie pour tout réel x par $f(x) = \dfrac{18-9x}{x^2+5}$.

1. a) Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.
   b) Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}_f$?
2. Montrer que pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{9\left(x^2-4x-5\right)}{\left(x^2+5\right)^2}$.
3. a) Étudier le signe de $f'(x)$.
   b) Donner le tableau de variations de la fonction f.
4. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point B d'abscisse (-2).

EXERCICE 1

La température de refroidissement d'une pâtisserie à la sortie du four dépend du type de pâtisserie et de la température ambiante supposée constante de la pièce dans laquelle elle est entreposée.
La température d'une tarte à la sortie du four est de 180°C.
L'évolution de la température de la tarte en fonction du temps est modélisée par la suite (T_n) définie par $T_0 = 180$ et, pour tout entier naturel n, $T_{n+1} = 0{,}84 \times T_n + 3{,}2$.
Pour tout entier naturel n, le terme T_n de la suite (T_n) est égal à la température en degrés Celsius de la tarte n minutes après la sortie du four.

PARTIE A

La tarte peut être sortie de son moule dès que sa température est inférieure à 80°C
Pour déterminer au bout de combien de minutes la tarte peut être démoulée, on utilise un algorithme.

1. Recopier et compléter cet algorithme afin qu'il affiche la réponse.

VARIABLES :	N est un entier naturel
	T est un nombre réel
INITIALISATION :	Affecter à N la valeur 0
	Affecter à T la valeur 180
TRAITEMENT :	Tant que $T \geqslant 80$
	Affecter à T la valeur ...
	Affecter à N la valeur ....
	Fin Tant que
SORTIE :	Afficher N

2. Recopier et compléter autant que nécessaire les colonnes du tableau suivant en arrondissant les résultats à l'unité.

Valeur de N	0	1	...	
Valeur de T	180		...	
Condition $T \geqslant 80$	Vraie		...	

3. Donner la valeur affichée en sortie par cet algorithme et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

PARTIE B

1. Pour tout nombre entier naturel n, on définit la suite (V_n) par : $V_n = T_n - 20$.
   a) Montrer que la suite (V_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   b) Exprimer V_n en fonction de n.
   c) En déduire que, pour tout nombre entier naturel n, on a : $T_n = 160 \times 0{,}84^n + 20$.
2. Étudier la monotonie de la suite (T_n).
3. Calculer la limite de la suite (T_n) et interpréter ce résultat.

EXERCICE 2

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x) = x^2 - 7x - \dfrac{9}{x} + 15$.
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative se la fonction f dans le plan.

1. Calculer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. La courbe $\mathscr{C}_f$ admet-elle des asymptotes ?
2. On note f' la dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$ et, vérifier que pour tout réel x strictement positif,

$$f'(x) = \frac{(x-3)\left(2x^2 - x - 3\right)}{x^2}$$

3. a) Étudier le signe du polynôme $g(x) = 2x^2 - x - 3$.
   b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
4. Donner le tableau de variations de la fonction f.
5. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 1.

Dans chacun des cas suivants, les primitives F de la fonction f.

1. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{3}{2}x^2 - 2x + 1$.

2. f est définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = 2x^3 + 5x - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{2}{3}$

3. f est définie sur$]0; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x^3 - 3x^2 + 1}{x^2}$.

Dans chacun des cas suivants, calculer la primitive F de la fonction f qui vérifie la condition donnée.

1. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 2x^2 + 3x - 4$ et $F(-1) = 6$.

2. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{4x}{9} + \dfrac{1}{2}$ et $F(-2) = -2$.

3. f est définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^3}{2} - \dfrac{3}{x^2}$ et $F(1) = -1$.

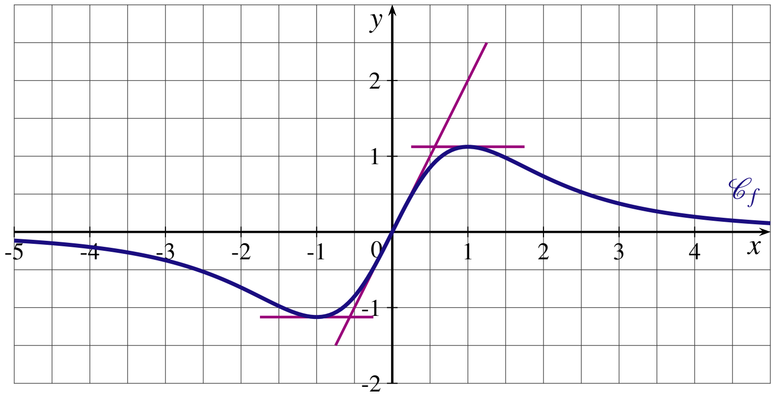
EXERCICE 1

1. Déterminer la primitive F de la fonction f définie pour tout réel x strictement positif par $f(x) = x^2 + 2x - \dfrac{3}{x^2}$ telle que $F(1) = -1$.
2. Déterminer la primitive G de la fonction g définie pour tout réel t de l'intervalle $]-\pi;\pi]$ par $g(t) = 3\cos(2t)$ telle que $G\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$.

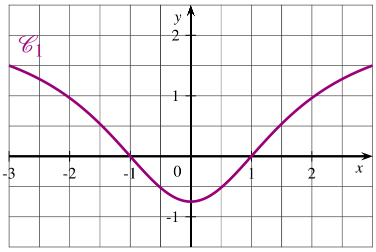
EXERCICE 2

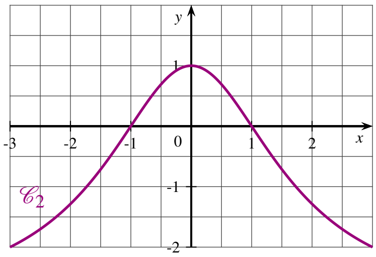
PARTIE A

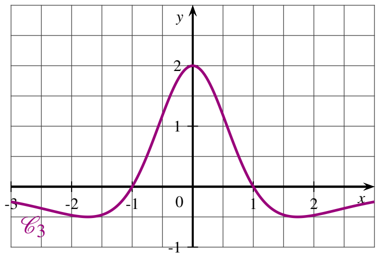
On a tracé ci-dessous, la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.



1. On note f' la dérivée de la fonction f.
   Par lecture graphique, déterminer $f'(-1)$ et $f'(0)$.
2. Une des trois courbes ci-dessous est la représentation graphique de la dérivée f' de la fonction f et une autre d'une primitive F de la fonction f.
   Déterminer la courbe associée à la fonction f' et celle qui est associée à la fonction F. Justifier la réponse.







PARTIE B

La fonction f est définie pour tout réel x par $f(x) = \dfrac{18x}{(x^2+3)^2}$.

1. Soit F la primitive de la fonction f telle que $F(1) = 0$
   a) Montrer que la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = -\dfrac{9}{x^2+3}$ est une primitive de la fonction f.
   b) En déduire une expression de $F(x)$.
2. Déterminer la limite de F en $-\infty$ et en $+\infty$. Interpréter graphiquement ces résultats.
3. Étudier les variations de la fonction F.
4. Déterminer une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_F$ représentative de la fonction F au point d'abscisse 1.

EXERCICE 1 (5 *points*)

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.
Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

PROPOSITION 1 : $\ln 10000 - \ln 0{,}1 + \ln 0{,}01 = 3\ln 10$.

PROPOSITION 2 : La solution de l'équation $2\ln x = 1$ est $\dfrac{\mathrm{e}}{2}$.

PROPOSITION 3 : L'équation $2\ln x = \ln(4x-3)$ admet une seule solution $x = 1$.

PROPOSITION 4 : L'ensemble des solutions de l'inéquation $\ln\dfrac{1}{x} - \ln x \geqslant 0$ est l'intervalle $]0;1]$.

PROPOSITION 5 : La fonction F définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $F(x) = \ln\left(x^3\right) - 2$ est une primitive de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{3}{x}$.

EXERCICE 2 (6 *points*)

Un groupe industriel s'engage à réduire ses émissions de polluants de 4% par an.
En 2015, la masse de polluants émise dans l'atmosphère était de 50 000 tonnes.
Pour tout entier naturel n, on note u_n la masse, exprimée en tonnes, de polluants émise dans l'atmosphère pour l'année $(2015+n)$. On a donc $u_0 = 50000$.

1. a) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. En déduire la nature de la suite (u_n).
   b) Pour tout entier naturel n, exprimer u_n en fonction de n.
2. a) En 2020, la masse de polluants émise dans l'atmosphère par ce groupe industriel aura-t-elle diminué de 20 % ?
   b) On considère l'algorithme ci-dessous :

```
VARIABLES
    N un entier naturel
    Q et U deux nombres réels

INITIALISATION
    N prend la valeur 0
    Q prend la valeur 0,96
    U prend la valeur 50 000

TRAITEMENT
    Tant que ........................
        N prend la valeur .............
        U prend la valeur .............
    Fin Tant que

SORTIE
    Afficher .........................
```

Recopier et compléter les lignes en pointillé afin que l'algorithme renvoie l'année à partir de laquelle la masse de polluants émise dans l'atmosphère par ce groupe industriel aura diminué d'au moins 20 %.

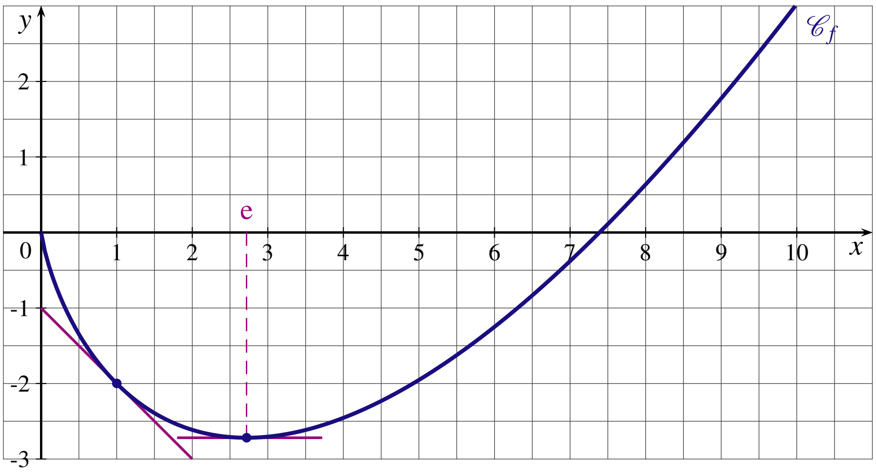
3. a) Déterminer le plus petit entier n solution de l'inéquation $50000 \times 0{,}96^n \leqslant 30000$.
   b) À partir de quelle année, la masse de polluants émise dans l'atmosphère par ce groupe industriel aura diminué d'au moins 40 % ?

EXERCICE 3

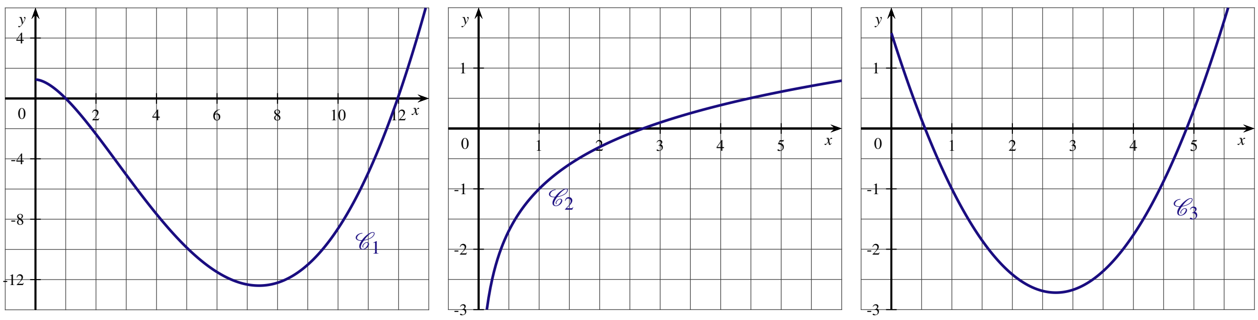
(9 *points*)

PARTIE A

On a tracé ci-dessous, la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative d'une fonction f définie et dérivable sur $]0;+\infty[$.



1. On note f' la dérivée de la fonction f.
   Par lecture graphique, déterminer $f'(1)$ et $f'(\mathrm{e})$.
2. Une des trois courbes ci-dessous est la représentation graphique de la dérivée f' de la fonction f et une autre d'une primitive F de la fonction f.
   Déterminer la courbe associée à la fonction f' et celle qui est associée à la fonction F. Justifier la réponse.



PARTIE B

La fonction f est définie pour tout réel x strictement positif par $f(x) = x(\ln(x) - 2)$.

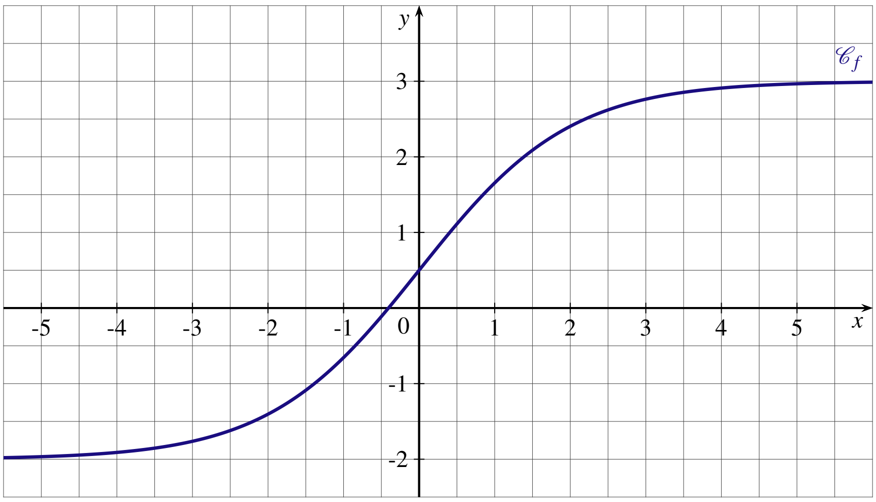
1. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
2. a) Calculer la limite de la fonction f en 0. (*Rappel :* $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$)
   b) Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.
3. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$ on a $f'(x) = \ln(x) - 1$.
4. a) Étudier le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs du réel x.
   b) Donner le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
5. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse e^2.

EXERCICE 1

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $e^x \times e^{-4} = (e^x)^4$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $(e^x + 1) \times \left(e^{2x} - 2\right) \geqslant 0$.

EXERCICE 2

On a tracé ci-dessous, la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = \dfrac{3e^x - 2}{e^x + 1}$.



PARTIE A

1. Calculer $f(-\ln 4)$ et $f(\ln 4)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x) = 0$.

PARTIE B

1. Calculer la limite de la fonction f en $-\infty$.
2. a) Montrer que pour tout réel x, $f(x) = 3 - \dfrac{5}{e^x + 1}$.

   b) Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.
3. La courbe C_f représentative de la fonction f admet-elle des asymptotes ?
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $3 - f(x) \leqslant 0{,}001$.
   En déduire une valeur approchée au millième près de $f(9)$.

PARTIE C

1. On note f' la dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$.
2. Donner le tableau des variations de la fonction f.
3. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

EXERCICE 1 (5 points)

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.
Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

PROPOSITION 1 : La fonction f définie pour tout réel x strictement positif par $f(x) = x\ln(x) - x$ est croissante.

PROPOSITION 2 : La forme algébrique du nombre complexe $z = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$ est $z = -1 + \mathrm{i}$.

PROPOSITION 3 : Le conjugué du nombre complexe $z = \sqrt{3} - \mathrm{i}$ est $\overline{z} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.

PROPOSITION 4 : Le cube du nombre complexe $z = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ est égal à 8.

PROPOSITION 5 : La solution de l'équation $(2 - \mathrm{i})z = 4 + 3\mathrm{i}$ est $z = 2 - 3\mathrm{i}$.

EXERCICE 2 (5 points)

L'évolution de la température du lubrifiant d'un moteur en fonction du temps est modélisée par la suite (T_n) définie par $T_0 = 20$ et, pour tout entier naturel n, $T_{n+1} = 0{,}9 \times T_n + 3$.
Pour tout entier naturel n, le terme T_n de la suite (T_n) est égal à la température en degrés Celsius du lubrifiant après n minutes de fonctionnement du moteur.

PARTIE A

1. a) Quelle est la température du lubrifiant lorsque le moteur ne fonctionne pas ?
   b) Quelle est la température du lubrifiant après deux minutes de fonctionnement du moteur ?
2. Pour déterminer au bout de combien de minutes la température du lubrifiant sera supérieure à 28°C, on a commencé par élaborer l'algorithme suivant :

VARIABLES :	N est un entier naturel
	T est un nombre réel
INITIALISATION :	Affecter à N la valeur 0
	Affecter à T la valeur 20
TRAITEMENT :	Tant que ...
	Affecter à T la valeur ...
	Affecter à N la valeur ...
	Fin Tant que
SORTIE :	Afficher N

   Recopier et compléter cet algorithme afin qu'il affiche la réponse.

PARTIE B

Pour tout nombre entier naturel n, on définit la suite (V_n) par : $V_n = 30 - T_n$.

1. a) Calculer V_0, V_1 et V_2.
   b) Vérifier que V_0, V_1 et V_2 semblent être les termes d'une suite géométrique.
2. On admet que pour tout entier naturel n, on a $V_{n+1} = 0{,}9V_n$.
   a) Exprimer V_n en fonction de n.
   b) En déduire que pour tout entier naturel n, on a $T_n = 30 - 10 \times 0{,}9^n$.
3. Déterminer la limite de la suite (T_n). Interpréter le résultat trouvé.

4. a) Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation $30 - 10 \times 0{,}9^n > 28$.
   b) En déduire la valeur N affichée par l'algorithme de la partie A.

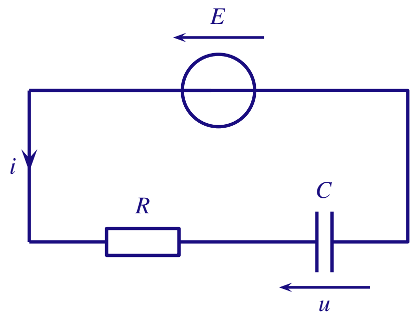
EXERCICE 3 (4 *points*)

On étudie la charge d'un condensateur et l'on dispose pour cela du circuit électrique ci-contre composé de :

— une source de tension continue E de 10 V ;

— une résistance R de $4000\,\Omega$;

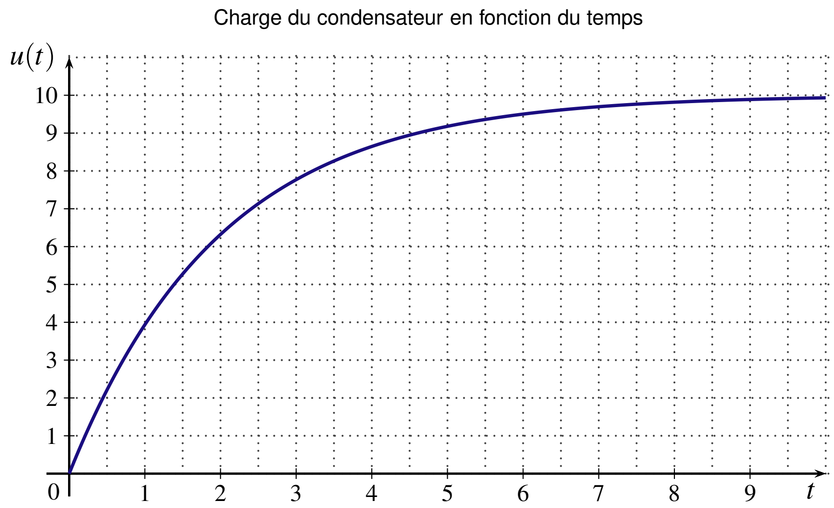
— un condensateur de capacité C de 500×10^{-6} F.



La tension $u(t)$ exprimée en volt aux bornes du condensateur est une fonction du temps t exprimé en seconde. La fonction u est définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$u(t) = 10 \times \left(1 - e^{-0{,}5t}\right)$$

On donne ci-dessous, la représentation graphique de la fonction u.



1. Pour caractériser le temps de charge d'un condensateur, on utilise grandeur appelée constante de temps, notée τ, exprimée en seconde . On a
$$\tau = R \times C$$
   Vérifier que $u(\tau) \approx 0{,}63 \times E$.
2. Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction u. En donner une interprétation graphique.
3. On note u' la dérivée de la fonction u.
   a) Montrer que $u'(t) = 5e^{-0{,}5t}$.
   b) Étudier le signe de $u'(t)$. En déduire le sens de variation de la fonction u.
4. Déterminer une équation de la tangente D à la courbe représentative de la fonction u au point d'abscisse 0.
5. Pratiquement, un condensateur est considéré comme totalement chargé au bout d'une durée T telle que $u(T) = 0{,}99 \times E$.
   Déterminer le temps de charge T arrondi au dixième de seconde près.

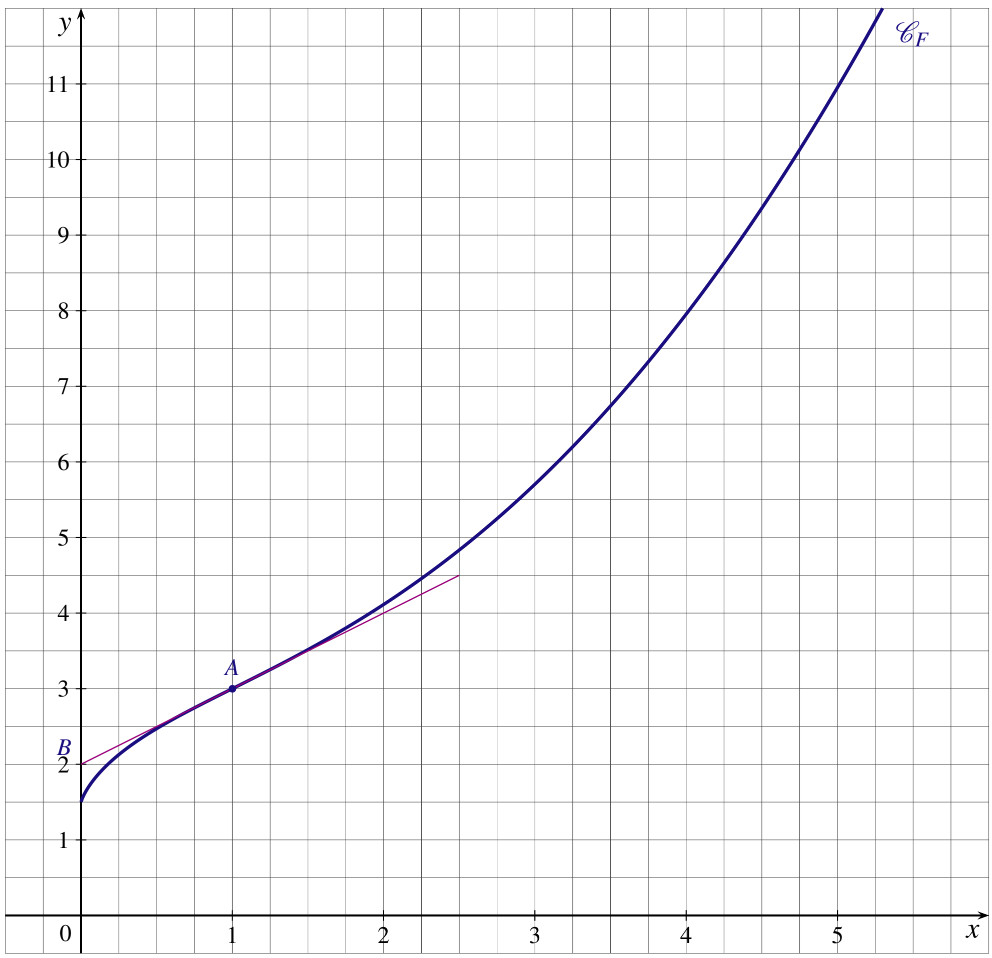
EXERCICE 4 (6 *points*)

Dans le plan muni d'un repère orthogonal, on a tracé en annexe ci-dessous, la courbe $\mathscr{C}_F$ représentative d'une primitive F d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty]$.
La tangente à la courbe $\mathscr{C}_F$ au point A d'abscisse 1 coupe l'axe des ordonnées au point B de coordonnées $(0;2)$.

1. Par lecture graphique, déterminer $F(1)$ et $f(1)$.
2. La fonction f est définie pour tout réel x strictement positif par $f(x) = x - \ln(x)$.
   a) Calculer la limite de la fonction f en 0. En donner une interprétation graphique.
   b) Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$. (*Rappel :* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$)
3. Calculer $f'(x)$, où f' est la dérivée de la fonction f.
4. a) Étudier le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs du réel x.
   b) Donner le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
5. En déduire que la fonction F est strictement croissante.
6. a) Montrer que la fonction G définie pour tout réel x strictement positif par $G(x) = x(\ln(x) - 1)$ est une primitive de la fonction logarithme népérien.
   b) En déduire l'expression de $F(x)$.
7. Déterminer une équation de la tangente $\mathscr{D}$ à la courbe $\mathscr{C}_F$ au point d'abscisse 3.
   Tracer la droite $\mathscr{D}$ sur le graphique donné en annexe.

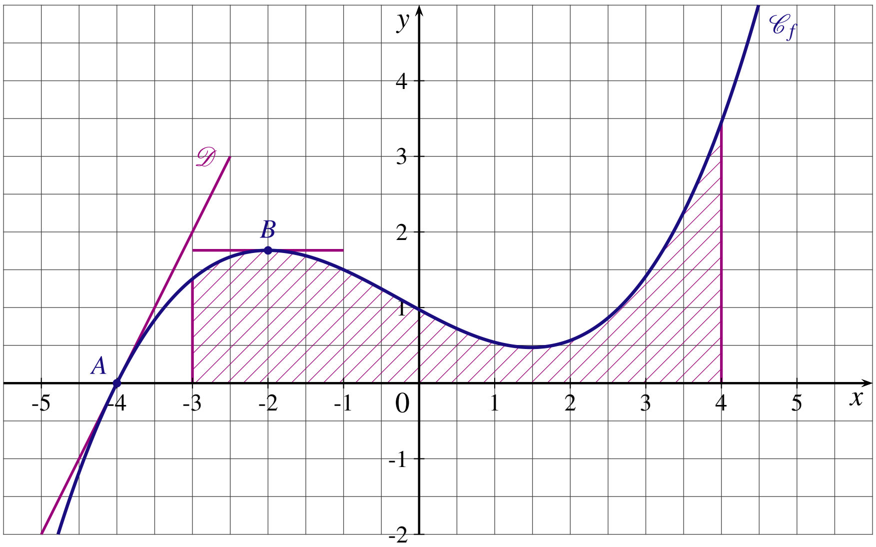
ANNEXE

À rendre avec votre copie



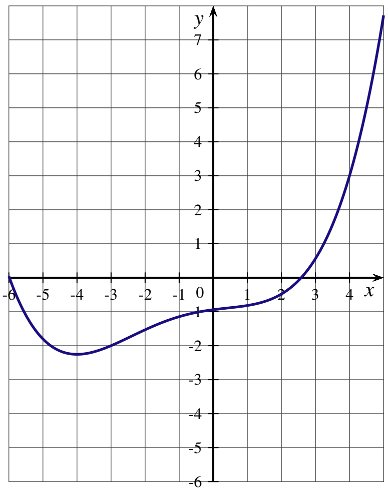
EXERCICE 1

La courbe $\mathscr{C}_f$ tracée ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

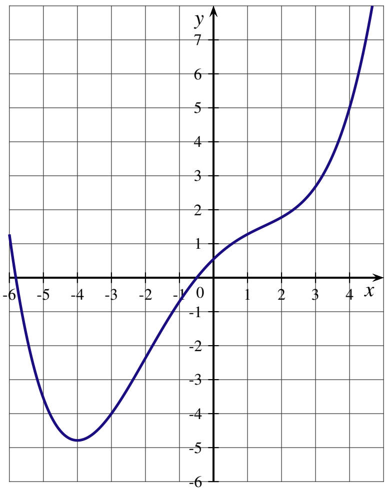


Les points A et B sont deux points de la courbe $\mathscr{C}_f$.
La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point B d'abscisse (-2) est horizontale.

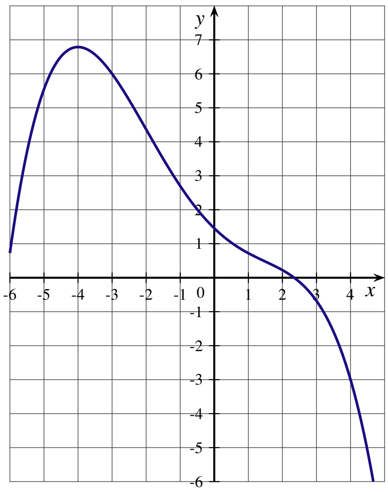
1. Résoudre graphiquement sur l'intervalle $[-5;1]$ l'inéquation $f'(x) \leqslant 0$.
2. a) Donner l'équation de la tangente $\mathscr{D}$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A de coordonnées $(-4;0)$ en sachant que cette tangente passe par le point de coordonnées $(-3;2)$.
   b) En déduire le nombre dérivé $f'(-4)$.
3. Soit F une primitive de la fonction fonction f.
   a) Donner le tableau de variation de la fonction F.
   b) Une des trois courbes ci-dessous est la représentation graphique de la fonction F.
   En justifiant votre réponse, déterminer la courbe associée à la fonction F.
   En déduire une valeur approchée, à l'unité d'aire près, de l'aire du domaine hachuré.



Courbe C_1



Courbe C_2



Courbe C_3

EXERCICE 2

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(\mathrm{O};\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 2 cm.

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation : $\mathrm{i}z = -\sqrt{3} + \mathrm{i}$, exprimer la solution sous la forme algébrique.

2. Soient A, B et C les points dont les affixes respectives sont $z_A = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$, $z_B = -z_A$ et $z_C = {z_A}^2$.

   a) Déterminer une écriture exponentielle de z_B et z_C.

   b) Donner l'écriture algébrique de z_A, z_B et z_C.

   c) Placer les points A, B et C dans le plan complexe.

   d) Montrer que le triangle ABC est un triangle rectangle.

3. Soit D le point d'affixe $z_D = \dfrac{8}{z_A}$.

   Montrer que $z_D = -z_C$. En déduire la nature du quadrilatère $ACBD$.

EXERCICE 3

PARTIE A : Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par la relation $f(x) = \mathrm{e}^{-0,5x} + x$.

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

2. a) Calculer $f'(x)$ et étudier son signe sur $\mathbb{R}$.

   b) En déduire le tableau des variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

3. Déterminer à partir du tableau des variations le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 2$.

   Donner une valeur arrondie à 10^{-2} près de chaque solution.

4. Donner une équation de la tangente T à la courbe C_f représentative de la fonction f au point A d'abscisse 0.

PARTIE B : Calcul d'aire

La courbe C_f est représentée en annexe avec la droite T. On admet que la courbe C_f se situe « au-dessus » de la droite T.

L'objectif de cette partie est de déterminer par un calcul l'aire $\mathscr{A}$ comprise entre la courbe C_f, la droite T et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 4$.

1. Hachurer sur le dessin, en annexe, l'aire $\mathscr{A}$ que l'on veut déterminer.

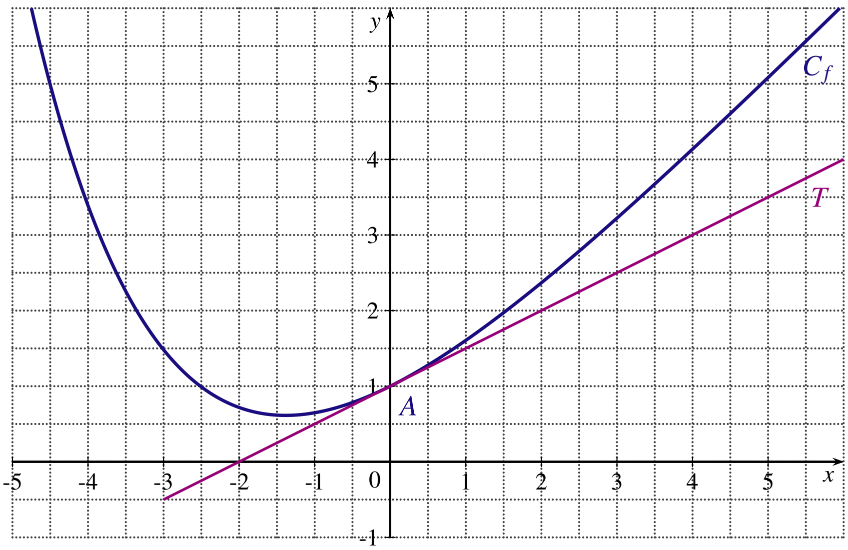
2. a) Déterminer une primitive de la fonction g définie pour tout réel x, par $g(x) = \mathrm{e}^{-0,5x} + \dfrac{x}{2} - 1$.

   b) Justifier que l'aire $\mathscr{A}$ recherchée vaut, en unité d'aire : $\mathscr{A} = \displaystyle\int_0^4 g(x)\mathrm{d}x$.

   c) En déduire la valeur exacte puis l'arrondi à 10^{-2} de $\mathscr{A}$.

ANNEXE

à rendre avec la copie



Les résultats seront arrondis, si nécessaire, à 10^{-3} près

EXERCICE 1

On considère que la durée de vie T d'un appareil, exprimée en années, est une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}125$.

1. Calculer l'espérance $E(T)$ de la variable aléatoire T. Interpréter ce résultat.
2. Calculer la probabilité que cet appareil ait une durée de vie inférieure à 8 ans
3. Calculer la probabilité que cet appareil ait une durée de vie supérieure à 10 ans
4. Calculer la probabilité que cet appareil ait une durée de vie comprise entre 6 ans et 10 ans

EXERCICE 2

Une machine permet le conditionnement d'un jus de fruit dans des bouteilles. La quantité de jus injecté dans une bouteille par la machine, exprimée en ml (millilitre), est modélisée avec une variable aléatoire réelle X. On admet que celle-ci suit une loi normale de moyenne $\mu = 500$ et d'écart-type $\sigma = 2$.

PARTIE A

On prélève une bouteille au hasard en fin de chaîne de remplissage.

1. Déterminer $P(X \leqslant 496)$.
2. Déterminer la probabilité que la bouteille ait un contenu compris entre 497 et 500 millilitres.
3. Comment choisir la valeur de α afin que $P(500 - \alpha \leqslant X \leqslant 500 + \alpha)$ soit approximativement égale à 0,95 à 10^{-2} près.

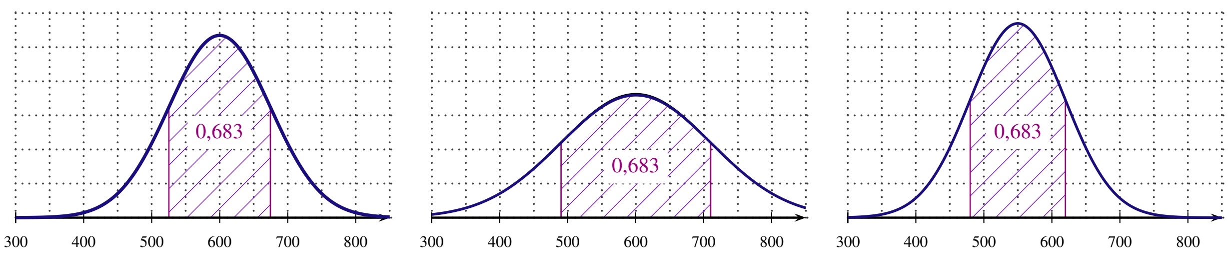
EXERCICE 3

Une entreprise fabrique, en grande quantité, des batteries Lithium-ion pour smartphone.

PARTIE A

Le nombre de cycles de charge d'une batterie est appelé durée de vie de la batterie.
La durée de vie des batteries Lithium-ion mises en vente par cette entreprise est modélisée par la variable aléatoire X suivant la loi normale de moyenne $\mu = 600$ et d'écart-type $\sigma = 74{,}6$.

1. La fonction densité associée à X est représentée sur un seul de trois graphiques ci-dessous.
   Quel est ce graphique ? Expliquer le choix.



Graphique 1 — Graphique 2 — Graphique 3

2. a) Déterminer $P(550 \leqslant X \leqslant 1000)$.
   b) Quelle est la probabilité que la durée de vie d'une batterie soit inférieure à 500 cycles de charge ?

PARTIE B

Le service commercial affirme que 91% des batteries proposées à la vente ont une durée de vie supérieure à 500 cycles de charge.
Pour vérifier cette affirmation, un laboratoire indépendant a reconstitué la vie de 100 batteries en simulant des cycles de charge et de décharge pour déterminer leur durée de vie en fonction de différents facteurs.
Sur ce lot, on a constaté que 13 batteries ont eu une durée de vie inférieure à 500 cycles de charge.

Le résultat de ce test remet-il en question l'affirmation du service commercial ?

EXERCICE 1

Une entreprise fabrique par moulage des paraboles pour réception satellitaire en matériau composite. Ce matériau est disposé dans un moule à une température de 140° C (degrés Celsius), puis pressé.
On pose $t = 0$ à l'instant où la parabole est retirée du moule. Elle a alors une température de 140 ° C.
On la dépose à l'air libre à la température ambiante de 20° C afin qu'elle refroidisse.
On note $f(t)$ la température de la parabole, en degrés Celsius à l'instant t, exprimée en secondes.

D'après la loi de refroidissement de Newton, la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ d'expression $f(t)$ est solution de l'équation différentielle

$$(E): \quad y' + 0{,}004y = 0{,}08$$

où l'inconnue y est une fonction de la variable t, définie et dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$.

PARTIE A : Résolution d'une équation différentielle

1. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
2. On rappelle que $f(0) = 140$. En déduire l'expression de $f(t)$ pour $t \in [0\,;\,+\infty[$.

PARTIE B : Étude d'une fonction

Dans cette partie, on admet que $f(t) = 120\mathrm{e}^{-0{,}004t} + 20$ pour $t \in [0\,;\,+\infty[$.

1. a) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
   b) Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
2. a) Déterminer la dérivée f' de la fonction f.
   b) En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $[0\,;\,+\infty[$.
3. Au cours du refroidissement, il arrive que la parabole doive subir des rectifications et des contrôles. Ceux-ci ne peuvent être effectués que lorsque la température de la parabole est inférieure à 30 ° C.
   Quel est le temps nécessaire pour atteindre une température inférieure à 30 ° C ?

EXERCICE 2

1. Résoudre l'équation différentielle $(E) : y'' + 4y = 0$, où y désigne une fonction de la variable réelle x.
2. Déterminer la solution particulière f de (E) telle que $f(0) = \sqrt{3}$ et $f'(0) = 2$.
3. Montrer que la fonction f est définie pour tout réel x par $f(x) = 2\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right)$.
4. Résoudre sur l'intervalle $[0;2\pi]$ l'équation $f(x) = 1$.