Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática **Ciclo 2025-1**

[Cod: CM4F1 Curso: Análisis y Modelamiento Numérico I]
[Tema: Método QR. Curva de Bezier.]
[Prof: L. Roca, L. La Rosa]

Práctica Dirigida 7

Método QR

1. **Escriba un programa que calcule los valores propios de una matriz simétrica tridiagonal mediante el método QR con desplazamiento. Pruebelo en las matrices**

$$a)\ A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$b)\ A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$c)\ A = \begin{bmatrix} 2.75 & -0.25 & -0.75 & 1.25 \\ -0.25 & 2.75 & 1.25 & -0.75 \\ -0.75 & 1.25 & 2.75 & -0.25 \\ 1.25 & -0.75 & -0.25 & 2.75 \end{bmatrix}$$

$$d)\ A = \begin{bmatrix} 3.6 & 4.4 & 0.8 & -1.6 & -2.8 \\ 4.4 & 2.6 & 1.2 & -0.4 & 0.8 \\ 0.8 & 1.2 & 0.8 & -4.0 & -2.8 \\ -1.6 & -0.4 & -4.0 & 1.2 & 2.0 \\ -2.8 & 0.8 & -2.8 & 2.0 & 1.8 \end{bmatrix}$$

2. **¿Cual es el polinomio característico de la matriz?**

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3. **En base al ejercicio anterior encuentre todas la raíces del polinomio**

$$p(x) = x^7 - 3x^5 + 2x^4 + x^3 - 2x + 1$$

Curva de Bezier

1. **Sea $\alpha(t)$ una curva de Bezier. Exprese $\alpha''(t)$ como una curva de Bezier en las segundas diferencias $\Delta_i^2 p = \Delta_{i+1} p - \Delta_i p = p_{i+2} - 2p_{i+1} + p_i$.**

2. **Escriba la ecuación paramétrica de la curva de Bezier con puntos de control $(1,1)$, $(2,3)$, $(4,3)$, $(3,1)$. Grafique la curva.**

3. **Construya en forma recursiva el punto $\alpha(0.5)$ considerando los puntos de control $\{(0,11),(1,1),(8,1),(10,13)\}$.**

4. Sean las curvas de Bezier, puntos de control p_i, $i = 0, \ldots, 2n$

$$\alpha(t) = \sum_{i=0}^{n} p_i B_i^n(\frac{t-a}{b-a}), t \in [a, b]$$

$$\beta(t) = \sum_{i=0}^{n} p_{n+i} B_i^n(\frac{t-b}{c-b}), t \in [b, c]$$

   a) Demuestre $\alpha(b) = \beta(b)$

   b) ¿Bajo que condiciones $\alpha'(b) = \beta'(b)$?

   c) ¿Bajo que condiciones $\alpha''(b) = \beta''(b)$?

   d) ¿Bajo que condiciones $\|\alpha(a) - \beta(b)\| = \|\alpha(b) - \beta(c)\|$?

5. Sea $\{P_0(0, 0), P_1(1, 0), P_2(0, 1)\}$ los vértices de un triangulo Δ. Construya una curva de Bezier, α, con las siguientes propiedades:

   a) α es cerrada y está completamente contenida en el interior del triangulo Δ.

   b) α está compuesta por tres curvas cúbicas de Bezier, $\alpha = \alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \alpha_1$ de tal modo que α es de clase C^2 y tiene puntos de control b_i, $i = 0, \ldots 9$, $b_1 = (2/3, 0)$.

   c) α es tangente a los lados del triángulo y además $b_0 = b_9 \in P_0P_1$, $b_3 \in P_1P_2$, $b_6 \in P_2P_0$

6. Construya un curva de Bezier que utilice 4 puntos de control y conecte $(0, 1)$ con $(1, 0)$ por medio de un arco de circunferencia.

7. Demuestre que si los puntos de control son simétricos respecto al eje Y entonces la curva de Bezier es simétrica respecto al eje Y.

Uni, 11 de junio de 2025*

*Hecho en LaTeX