上 海 交 通 大 学 试 卷

（ 2016 至 2017 学年 第 2 学期 2017 年 05 月 03 日 ）

班级号________________ 学号________________ 姓名____________

课程名称 《数学分析（荣誉）》（2）（致远学院期中考试） 成绩____________

解析+审核 谭 宇 叶昊宇 排版 仲 泰

一、填空题（每小题 4 分，共 16 分）

1. 曲线 $\begin{cases} z=-\dfrac{x^2}{4}+y^2 \\ y=2 \end{cases}$ 在点 $(2,2,3)$ 处的切线与 x 轴的夹角为__________.

解：

直接傻不拉几取微分：

$$\begin{cases} \mathrm{d}z=-\dfrac{x\,\mathrm{d}x}{2}+2y\,\mathrm{d}y \\ \mathrm{d}y=0 \end{cases}$$

代入 $x=2,y=2,z=3$ 得到：

$$\begin{cases} \mathrm{d}z=-\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y=0 \end{cases}$$

也即：

$$\frac{\mathrm{d}x}{1}=\frac{\mathrm{d}y}{0}=\frac{\mathrm{d}z}{-1}$$

从而得到切线的方向向量为：

$$\boldsymbol{s}=(1,0,-1)$$

其与 x 轴夹角为：

$$(\boldsymbol{s},\boldsymbol{i})=\arccos\left|\frac{\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{i}}{|\boldsymbol{s}|\cdot|\boldsymbol{i}|}\right|=\frac{\pi}{4}$$

2. 设空间曲线 L：$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x+y+z=0 \end{cases}$，则曲线积分 $\int_L x^2\mathrm{d}s=$__________.

解：

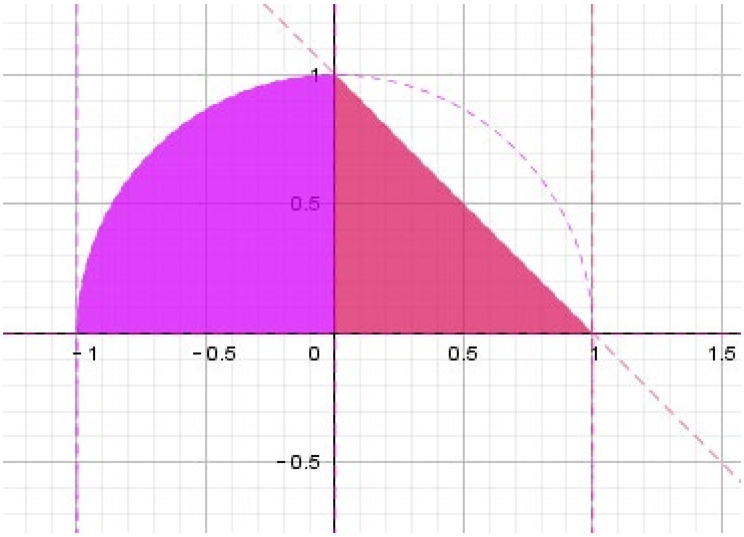
利用乱换对称性立即可得：

$$I=\frac{1}{3}\int_L (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s=\frac{1}{3}\cdot 2\pi=\frac{2\pi}{3}$$

3. 交换二次积分次序：$\int_{-1}^{0}\mathrm{d}x\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y+\int_{0}^{1}\mathrm{d}x\int_{0}^{1-x} f(x,y)\mathrm{d}y=$______________.

解：

高数课本题了，画图即可：



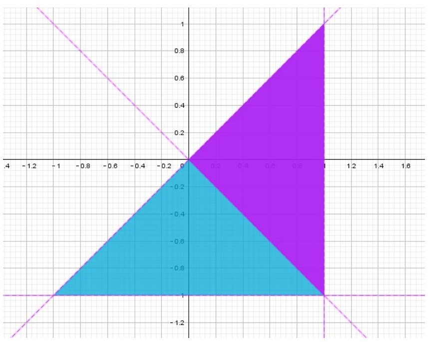
从而换序得到：

$$I=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y}f(x,y)\mathrm{d}x$$

4. 设平面域 D 由直线 $x=1, y=-1$ 与 $y=x$ 围成，则 $\iint\limits_D y[1+x\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$____________.

解：

积分区域划分如图所示：



记蓝色区域D_1，紫色区域D_2，则$D=D_1\cup D_2$. 从而区域D_1关于y轴对称，且被积函数中$xy\,\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$是关于$x$的奇函数，从而该部分积分值为0，从而有：

$I_1=\iint_{D_1} y\left[1+x\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_{D_1} y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^{-y} y\,\mathrm{d}x=\int_0^1 -2y^2\mathrm{d}y=-\dfrac{2}{3}$类似地，区域$D_2$关于$x$轴对称，且被积函数$y\left[1+x\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\right]$是关于$y$的奇函数，从而该部分积分值为0，从而有：

$$I_2=\iint_{D_2} y\left[1+x\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0$$

从而得到：

$$I=I_1+I_2=-\frac{2}{3}$$

二、单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

5. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$在$(0,0)$点沿$\boldsymbol{l}=(1,1)$的方向导数为（　　）.

A. 0　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. 1　　D. 不存在

解：

按照定义算就可以了：

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{(0,0)}=\lim_{r\to0^+}\frac{f\left(r\cos\frac{\pi}{4},r\sin\frac{\pi}{4}\right)-f(0,0)}{r}=\lim_{r\to0^+}\frac{1}{2r}=+\infty$$

从而该题选 D

Ps: 方向导数根据课本定义为准，有些选择$r\to0^+$，有些选择$r\to0$，在此题中无论何种定义，都不影响最后地选择.

6. 设$f(x,y)=x^3+y^3-3xy+2$，则下列结论正确的是（　　）.

A. $f(0,0)$为极小值　　B. $f(0,0)$为极大值

C. $f(1,1)$ 为极小值　　　　　　　　　D. $f(1,1)$ 为极大值

解：

方法一：老老实实偏导和黑塞矩阵一个个算：

$$f_x = f_y = 0 \Rightarrow (x,y) = (0,0),(1,1)$$

计算黑塞矩阵：

$$f_{xx} = 6x, f_{xy} = -3, f_{yy} = 6y$$

从而对于点$(1,1)$，我们有：

$$\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

正定，从而$(1,1)$是个极小值点，从而$f(1,1)$是极小值，从而该题选 C.

方法二：直接利用基本不等式有：

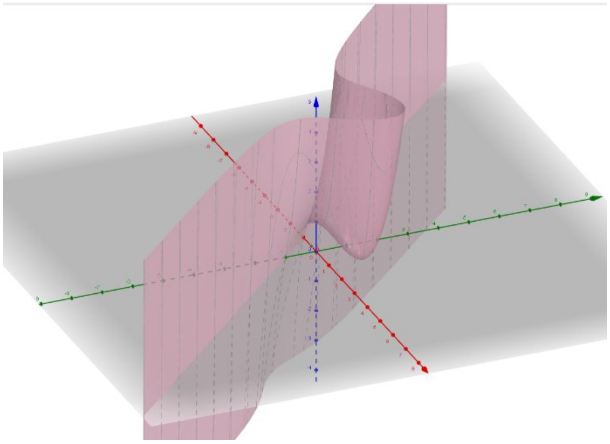
$$f(x,y) = x^3 + y^3 + 1 - 3xy + 1 \geqslant 3\sqrt[3]{x^3 y^3 \cdot 1} - 3xy + 1 = 1$$

当且仅当$x = y = 1$时取等号，从而$(1,1)$是$f(x,y)$的极小值点（也是$x > 0, y > 0$时的最小值点.），从而该题选 C

Ps: 对于$(0,0)$，代入黑塞矩阵得到：

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

该矩阵既是半正定，也是半负定（且非零矩阵），从而既存在方向使得$f(x,y)$变大，也存在方向使得$f(x,y)$减小. 函数图像如图所示：



7. 设 $f(x)$ 为连续函数，$F(t)=\int_1^t \mathrm{d}y\int_y^t f(x)\mathrm{d}x$，则 $F'(2)=$（　　）.

A. $2f(2)$　　B. $f(2)$　　C. 0　　D. $-f(2)$

解：

方法一：我们直接利用含参积分求导：

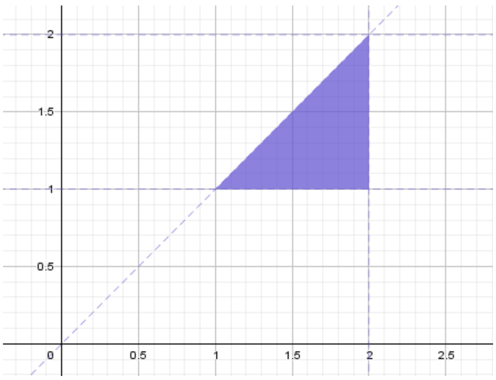
$$F'(t)=0+\int_1^t f(t)\mathrm{d}y=(t-1)f(t)$$

从而得到：

$$F'(2)=f(2)$$

从而该题选 B.

方法二：换序，为了方便，不妨取 $t=2$ 的情况下绘制图像：



从而换序得到：

$$F(t)=\int_1^t \mathrm{d}x\int_1^x f(x)\mathrm{d}y=\int_1^t (x-1)f(x)\mathrm{d}x$$

再利用变上限积分求导得到：

$$F'(t)=(t-1)f(t)$$

从而计算得到：

$$F'(t)=f(2)$$

从而该题选 B.

8. 设有方程 $\mathrm{e}^{xy}-\cos y-\sin x=0$，则在 $(0,0)$ 的某邻域内（　　）.

(I) 上述方程能确定唯一的隐函数 $y=y(x)$ 满足 $y(0)=0$

(II) 上述方程能确定唯一的隐函数 $x=x(y)$ 满足 $x(0)=0$

A. I 不正确，II 正确　　　　B. I 正确，II 不正确

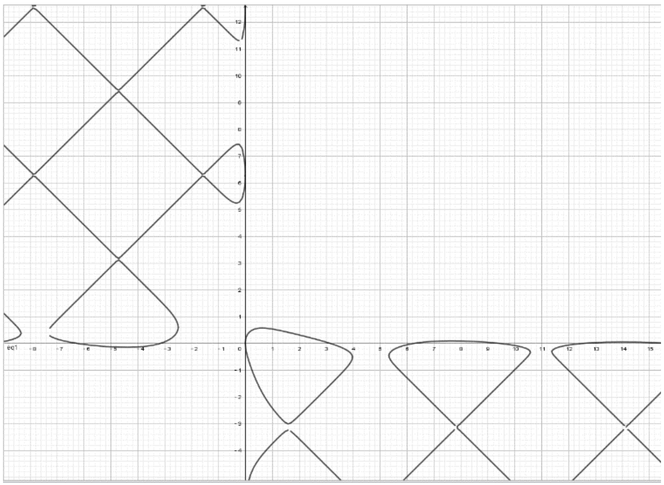
C. I 和 II 都正确　　　　D. I 和 II 都不正确

解：

考察范围内，直接利用隐函数定理，若不能通过隐函数定理判断，则判为错误. 直接构造函数 $F(x,y)=\mathrm{e}^{xy}-\cos y-\sin x$，自然地，$F(x,y)\in C^{\infty}(\mathbb{R}^2)$，且 $F(0,0)=0$，求偏导得到：$F_x(0,0)=-1, F_y(0,0)=0$，从而在 $(0,0)$ 附近存在 $x=x(y)$，而不存在 $y=y(x)$.

从而该题选 B.

Ps: 方程图像如图所示：



从而可以看出，在 $(0,0)$ 附近，对于任意 x，存在至少两个 y 与之对应.

9. 设 $L_1: x^2+y^2=1$, $L_2: x^2+y^2=2$, $L_3: x^2+2y^2=2$, $L_4: 2x^2+y^2=2$ 为四条逆时针方向的平面曲线. $I_i=\oint_{L_i}\left(y+\frac{y^3}{6}\right)\mathrm{d}x+\left(2x-\frac{x^3}{3}\right)\mathrm{d}y\ (i=1,2,3,4)$，则 $\max\limits_{1\le i\le 4}\{I_i\}=$（　　）.

A. I_1　　　B. I_2　　　C. I_3　　　D. I_4

解：

这种统一地封闭曲线，当然是考虑Green 公式辣：

$$I\xlongequal{\text{Green}}\iint_D\left[(2-x^2)-\left(1+\frac{y^2}{2}\right)\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_D\left(1-x^2-\frac{y^2}{2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

自然地，要使 I 最大，则：

$$1-x^2-\frac{y^2}{2}\geqslant 0\Rightarrow x^2+\frac{y^2}{2}\leqslant 1$$

自然 I_3 最大，从而该题选 C.

三、(本题共 9 分)

10.设函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}\sin(x^2+y^2), & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

(1) 证明 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续，可偏导；

(2) 判断 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处的可微性，并说明理由.

证明：

(1)直接计算极限即可：

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim_{r\to 0^+}\cos\theta\sin\theta\sin r^2=0=f(0,0)$$

$$f_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{0-0}{x}=0$$

$$f_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{0-0}{y}=0$$

从而命题得证；

(2)继续算极限：

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-xf_x-yf_y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{r\to 0^+}\frac{\cos\theta\sin\theta\sin r^2}{r}=0$$

从而$f(x,y)$在$(0,0)$处可微.

四、(每小题 8 分，共 16 分)

11.设 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数， $z=f(x^2+y,xy)$，求 z_x，z_{xy} .

解：

算就对了：

$$\begin{aligned}
&z_x=2xf_1+yf_2\\
&z_{xy}=2x(f_{11}+xf_{12})+f_2+y(f_{21}+xf_{22})\\
&=2xf_{11}+(2x^2+y)f_{12}+xyf_{22}+f_2
\end{aligned}$$

12.已知曲线C：$\begin{cases}x^2+y^2-2z^2=0\\x+y+3z=5\end{cases}$，求曲线$C$上距离$xOy$面最远和最近点的坐标.

解：

解法一：考虑拉格朗日乘子法，构造函数：

$$\varphi(x,y,z,\lambda,\mu)=z^2+\lambda(x^2+y^2-2z^2)+\mu(x+y+3z-5)$$

从而得到：

$$\varphi_x=\varphi_y=\varphi_z=\varphi_\lambda=\varphi_\mu=0$$

好的，方程自己算吧，我偷懒惹，结果为：

$$(x,y,z)=(1,1,1),(-5,-5,5)$$

解法二：考虑不等式：

$$(x^2+y^2)(1+1)\geqslant(x+y)^2$$

代入方程得到：

$$2z^2\cdot 2\geqslant(5-3z)^2$$

解该不等式得到：

$$1 \leqslant z \leqslant 5$$

当且仅当 $x=y$ 时取等号，分别在 $x+y+3z=5$ 中代入 $\begin{cases} x=y \\ z=1 \end{cases}$，$\begin{cases} x=y \\ z=5 \end{cases}$ 即可解得

$(x,y,z)=(1,1,1),(-5,-5,5)$.

解法三：判别式，利用第二个式子消去 y 后，整理关于 x 的一元二次方程：

$$x^2+(5-3z-x)^2-2z^2=2x^2+2x(3z-5)+7z^2-30z+25=0$$

该方程必然有解，从而：

$$\Delta=4(3z-5)^2-4\cdot 2\cdot(7z^2-30z+25)\geqslant 0$$

从而解得：

$$1 \leqslant z \leqslant 5$$

代入 $z=1, z=5$ 计算得到坐标（事实上，取等号时，恰好 $\Delta=0$，从而利用韦达定理立即可得 $x=-\dfrac{3z-5}{2}$）：$(x,y,z)=(1,1,1),(-5,-5,5)$.

五、计算下列积分（每小题 9 分，共 36 分）

13.计算积分 $I=\iint\limits_D |x-y| \mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D: x^2+y^2 \le 4, x \ge 0, y \ge 0$.

解：

由对称性，直接考虑 $y \leqslant x$ 部分，直接利用极坐标换元得到：

$$I=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^2(r\cos\theta-r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r=2\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot\frac{2^3}{3}=\frac{16\left(\sqrt{2}-1\right)}{3}$$

14.设函数 $\varphi(y)$ 具有连续导数，在围绕原点的任意分段光滑闭曲线 L 上，曲线积分 $\int\limits_L \dfrac{\varphi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}$ 的值恒为同一常数.

(1) 证明：对右半平面 $x>0$ 内的任意分段光滑闭曲线 C，有 $\int\limits_C \dfrac{\varphi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}=0$；

(2) 求函数 $\varphi(y)$ 的表达式.

证明：

(1) 由已知：

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\varphi(y)}{2x^2+y^4}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{2xy}{2x^2+y^4}$$

由此与Green公式知，命题成立；

(2) 由(1)中偏微分方程解得：

$$\varphi'(y)(2x^2+y^4)-4y^3\varphi(y)=2y(2x^2+y^4)-8x^2y$$

代入$x=0$得到：

$$\varphi'(y)y^4-4y^3\varphi(y)=2y^5$$

为一阶线性微分方程，直接套公式解得：

$$\varphi(y)=Cy^4-y^2$$

代回(1)中式子即可得到$C=0$，从而$\varphi(y)=-y^2$

15.计算$I=\iint\limits_{\Sigma}3xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+x^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x-z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$\Sigma: z=x^2+y^2\ (0\le z\le 4)$，取上侧.

解：

直接往xOy平面投影好了，懒得补面了，记$F=x^2+y^2-z$，则：

$$\frac{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{F_x}=\frac{\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x}{F_y}=\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{F_z}\Rightarrow\frac{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{2x}=\frac{\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x}{2y}=\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{-1}$$

从而得到：

$$\begin{aligned}I&=\iint_D[3x(x^2+y^2)(-2x)+x^3(-2y)-(x^2+y^2)^2]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\iint_D[-3(x^2+y^2)^2-(x^2+y^2)^2]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2-4r^5\mathrm{d}r\\&=2\pi\cdot-\frac{2^6}{6}\\&=-\frac{64\pi}{3}\end{aligned}$$

16.设P为椭球面S： $x^2+y^2+z^2-yz=1$上的动点，若S在点P处的切平面与xOy面垂直，求点P的轨迹C，并计算曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma}\frac{(x+\sqrt{3})\,|\,y-2z\,|}{\sqrt{4+y^{2}+z^{2}-4yz}}\,\mathrm{d}S\,,$$

其中Σ是椭球面S位于曲线C上方的部分.

解：

设$P(x,y,z)$，对$X^2+Y^2+Z^2-YZ=1$两边同时取微分得到：

$$2X\,\mathrm{d}X+2Y\,\mathrm{d}Y+2Z\,\mathrm{d}Z-Y\,\mathrm{d}Z-Z\,\mathrm{d}Y=0$$

代入$P(x,y,z)$得到：

$$2x\,\mathrm{d}X+(2y-z)\,\mathrm{d}Y+(2z-y)\,\mathrm{d}Z=0$$

从而切平面法向量为：

$$\boldsymbol{n}=(2x,2y-z,2z-y)$$

要与xOy垂直，只需：

$$\boldsymbol{n}\cdot(0,0,1)=0$$

从而得到P的轨迹：

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2-yz=1\\ y=2z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2+\dfrac{3y^2}{4}=1\\ y=2z\end{cases}$$

将Σ向xOy平面投影，由曲线C的定义知，投影没有重叠. 关于面积因子，考虑全微分得到的：

$$2x\,\mathrm{d}x+(2y-z)\,\mathrm{d}y+(2z-y)\,\mathrm{d}z=0\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{2x}{y-2z}\\[2mm] \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{2y-z}{y-2z}\end{cases}$$

从而计算得到：

$$\sqrt{z_x^2+z_y^2+1}=\frac{\sqrt{4x^2+(2y-z)^2+(y-2z)^2}}{|y-2z|}$$
$$=\frac{\sqrt{4x^2+5y^2+5z^2-8yz}}{|y-2z|}$$
$$=\frac{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}{|y-2z|}$$

从而得到：

$$I=\iint_{\left\{(x,y):x^2+\frac{3y^2}{4}\leqslant 1\right\}}\left(x+\sqrt{3}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\sqrt{3}\cdot\pi\cdot 1\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}=2\pi$$

六、证明题（本题共 8 分）

17.设平面域 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2<1\right\}$，二元函数 $f(x,y)$ 在 D 内连续，$g(x,y)$ 在 D 内连续有界，且满足：

(1) $\lim\limits_{x^2+y^2\to 1}f(x,y)=+\infty$；

(2) f 和 g 在 D 内有二阶偏导数，且 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\mathrm{e}^f$， $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}\geq \mathrm{e}^g$.

证明： $f(x,y)\geq g(x,y)$ 在 D 内处处成立.

证明：

构造函数 $\varphi(x,y)=f(x,y)-g(x,y)$，则 $\lim\limits_{x^2+y^2\to 1}\varphi(x,y)=+\infty$，这是由 $g(x,y)$ 在 D 内有界保证地. 考虑反证法，$\varphi(x,y)$ 在 D 内存在最小值，则一定在内部，不妨记为 (x_0,y_0)，若 $\varphi(x_0,y_0)<0$，则：

$$\Delta\varphi(x_0,y_0)=\Delta f(x_0,y_0)-\Delta g(x_0,y_0)\leqslant \mathrm{e}^{f(x_0,y_0)}-\mathrm{e}^{g(x_0,y_0)}=\mathrm{e}^{\xi}\cdot\varphi(x_0,y_0)<0$$

而要使得 (x_0,y_0) 为极小值点，必然有 $\varphi_{xx}(x_0,y_0)\geqslant 0$，$\varphi_{yy}(x_0,y_0)\geqslant 0$，也即：

$$\Delta\varphi(x_0,y_0)\geqslant 0$$

矛盾！综上，命题得证.