上 海 交 通 大 学 试 卷

（ 2016 至 2017 学年 第 2 学期 2017 年 05 月 03 日 ）

班级号________________ 学号__________________ 姓名 __________

课程名称 《数学分析荣誉(2)》（致远学院期中考试） 成绩 __________

题 号	一	二	三	四	五	六	总 分
满 分	**16**	**15**	**9**	**16**	**36**	**8**	**100**
得 分							

一、填空题（每小题 4 分，共 16 分）

1． 曲线 $\begin{cases} z=-\dfrac{x^2}{4}+y^2 \\ y=2 \end{cases}$ 在点 $(2,2,3)$ 处的切线与 x 轴的夹角为_________.

2． 设空间曲线 L： $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x+y+z=0 \end{cases}$，则曲线积分 $\int_L x^2 \mathrm{d}s=$__________.

3． 交换二次积分次序：

$$\int_{-1}^{0}\mathrm{d}x\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y+\int_{0}^{1}\mathrm{d}x\int_{0}^{1-x} f(x,y)\mathrm{d}y=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

4． 设平面域 D 由直线 $x=1, y=-1$ 与 $y=x$ 围成，则 $\iint\limits_D y[1+x\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$_______.

二、单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

5． $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ 在 $(0,0)$ 点沿 $\boldsymbol{l}=(1,1)$ 的方向导数为⋯ (　　)

(A) 0.　　**(B)** $\dfrac{1}{2}$.　　**(C)** 1.　　**(D)** 不存在.

6． 设 $f(x,y)=x^3+y^3-3xy+2$，则下列结论正确的是 ⋯⋯ (　　)

(A) $f(0,0)$ 为极小值.　　**(B)** $f(0,0)$ 为极大值.

(C) $f(1,1)$ 为极小值.　　**(D)** $f(1,1)$ 为极大值.

7． 设 $f(x)$ 为连续函数，$F(t)=\int_1^t \mathrm{d}y\int_y^t f(x)\mathrm{d}x$，则 $F'(2)=$ ⋯⋯ (　　)

(A) $2f(2)$.　　**(B)** $f(2)$.　　**(C)** 0.　　**(D)** $-f(2)$.

8. 设有方程 $e^{xy}-\cos y-\sin x=0$，则在 $(0,0)$ 的某邻域内 …… (　　)

(I) 上述方程能确定唯一的隐函数 $y=y(x)$ 满足 $y(0)=0$.

(II) 上述方程能确定唯一的隐函数 $x=x(y)$ 满足 $x(0)=0$.

(A) **I** 不正确，**II** 正确.　　**(B)** **I** 正确，**II** 不正确.

(C) **I** 和 **II** 都正确.　　**(D)** **I** 和 **II** 都不正确.

9. 设 $L_1:x^2+y^2=1$, $L_2:x^2+y^2=2$, $L_3:x^2+2y^2=2$, $L_4:2x^2+y^2=2$ 为四条逆时针方向的平面曲线.

$$I_i=\oint_{L_i}\left(y+\frac{y^3}{6}\right)dx+\left(2x-\frac{x^3}{3}\right)dy$$

$(i=1,2,3,4)$，则 $\max\limits_{1\le i\le 4}\{I_i\}=($　　$)$

(A) I_1.　　**(B)** I_2.　　**(C)** I_3.　　**(D)** I_4.

三、（本题共 9 分）

10. 设函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}\sin(x^2+y^2), & x^2+y^2\ne 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

(1) 证明 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续，可偏导；

(2) 判断 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处的可微性，并说明理由.

四、(每小题 8 分，共 16 分)

11．设 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，$z=f(x^2+y,xy)$，求 z_x，z_{xy}.

12．已知曲线 C：$\begin{cases} x^2+y^2-2z^2=0 \\ x+y+3z=5 \end{cases}$，求曲线 C 上距离 xOy 面最远和最近点的坐标.

五、计算下列积分（每小题 9 分，共 36 分）

13． 计算积分 $I=\iint\limits_{D}|x-y|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D: x^2+y^2\le 4, x\ge 0, y\ge 0$.

14． 设函数 $\varphi(y)$ 具有连续导数，在围绕原点的任意分段光滑闭曲线 L 上，曲线积分 $\int_{L}\dfrac{\varphi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}$ 的值恒为同一常数.

(1) 证明：对右半平面 $x>0$ 内的任意分段光滑闭曲线 C，有 $\int_{C}\dfrac{\varphi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}=0$；

(2) 求函数 $\varphi(y)$ 的表达式.

15. 计算$I=\iint\limits_{\Sigma}3xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+x^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x-z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$\Sigma: z=x^2+y^2\ (0\le z\le 4)$，取上侧.

16. 设P为椭球面S：$x^2+y^2+z^2-yz=1$上的动点，若S在点P处的切平面与xOy面垂直，求点P的轨迹C，并计算曲面积分

$$I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{(x+\sqrt{3})\,|y-2z|}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}\mathrm{d}S,$$

其中Σ是椭球面S位于曲线C上方的部分.

六、证明题（本题共 8 分）

17． 设平面域 $D=\left\{(x,y)\middle| x^2+y^2<1\right\}$，二元函数 $f(x,y)$ 在 D 内连续，$g(x,y)$ 在 D 内连续有界，且满足：

(1) $\lim\limits_{x^2+y^2\to 1} f(x,y)=+\infty$；

(2) f 和 g 在 D 内有二阶偏导数，且 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\mathrm{e}^f$，$\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}\ge \mathrm{e}^g$.

证明：$f(x,y)\ge g(x,y)$ 在 D 内处处成立.