$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = r \qquad \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\theta)} = \rho^2 \sin\varphi \qquad \begin{cases} x = \rho\sin\varphi\cos\theta \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases}$$

联系：wangkailing151@gmail.com

一类曲线：

$$\int_C f(x,y)\,ds = \int_\alpha^\beta f(x(t),y(t))\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt$$
$$= \int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+y'(x)^2}\,dx$$

$$r=r(\theta),\ ds = \sqrt{r^2+r'^2}\,d\theta$$

一类曲面：

$$dS = \frac{1}{|\cos(\vec{n},\vec{z})|}\,d\sigma,\quad \vec{n} = (-z_x,-z_y,1),\quad dS = \sqrt{z_x^2+z_y^2+1}\,dxdy$$

$$S = \iint_D \sqrt{z_x^2+z_y^2+1}\,dxdy \text{（投影法）}$$

参数 $x = x(u,v)$，令 $(A,B,C) = (x_u,y_u,z_u)\times(x_v,y_v,z_v)$，$dS = \sqrt{A^2+B^2+C^2}\,dudv$

二类曲线：

规定正向：内部在左边

$$\vec{dr} = \vec{e_\tau}\,ds \qquad \int_\Gamma \vec{F}\cdot\vec{e_\tau}\,ds = \int_\Gamma P\,dx+Q\,dy = \int_\alpha^\beta P(t)x'(t)+Q(t)y'(t)\,dt$$
$$= \int_a^b \left(P(x,y(x))+Q(x,y(x))y'(x)\right)dx$$

Green公式

$$\oint_{D^+} P\,dx+Q\,dy = \iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy \quad \text{光滑} \qquad S = \frac{1}{2}\oint_{D^+} x\,dy - y\,dx$$

$$\oint_{L\in D} P\,dx+Q\,dy = 0 \Leftrightarrow \int_L P\,dx+Q\,dy \text{ 无关路径} \Leftrightarrow \exists\, d\varphi = P\,dx+Q\,dy \Leftrightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

二类曲面

一般规定上、外侧为正

$$d\Phi = \vec{v}\cdot\vec{n^\circ}\,dS \qquad \iint_S \vec{v}\,d\vec{S} = \iint_S \vec{v}\cdot\vec{n^\circ}\,dS$$
$$= \iint_S (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,dS = \iint_S P\,dydz+Q\,dzdx+R\,dxdy$$
$$= \pm\iint_D (PA+QB+RC)\,dudv = \pm\iint_D(-Pz_x-Qz_y+R)\,dxdy$$

Gauss公式

$$\oint_{\partial\Omega^+} P\,dydz+Q\,dzdx+R\,dxdy = \iiint_\Omega\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dV$$

散度：$\operatorname{div}\vec{v} \overset{def}{=} \nabla\cdot\vec{v} = \frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$

$$\oint_{\partial\Omega^+} \vec{v}\cdot d\vec{S} = \iiint_\Omega \nabla\cdot\vec{v}\,dV$$

$$\begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

Stokes公式

$$\oint_{\partial S^+} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \oint_{\partial S^+} P\,dx+Q\,dy+R\,dz = \iint_S (R_y-Q_z)\,dydz+(P_z-R_x)\,dzdx+(Q_x-P_y)\,dxdy$$

旋度：$\operatorname{rot}\vec{v} \overset{def}{=} \nabla\times\vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$

$$\oint_{\partial S} \vec{v}\cdot d\vec{r} = \iint_S \nabla\times\vec{v}\cdot d\vec{S}$$

级数的收敛判别

① 比较

② 根值 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\rho$ $[0,1)$ 敛 $(1,+\infty)$ 散

③ 比值 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\rho<1$ 敛，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\rho>1$ 散

④ 积分 单减 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)\sim\int_1^{+\infty}f(x)dx$ ⑤ Leibniz $\sum(-1)^n t_n$，t_n单减趋0

函数列

$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)\iff f_n(x)\xrightarrow{D}f(x)$ (点态)收敛

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)=S(x)$ 不能保持连续性 (x^n) 可导性 ($\frac{x^{n+1}}{n+1}$) 可积性 ($nx(1-x^2)^n$)

一致收敛 $\exists N,\forall x$ $f_n(x)\rightrightarrows f(x)$

证法

① Cauchy $|f_{n+p}(x)-f_n(x)|<\varepsilon$

(级数 $|\sum\limits_{n+1}^{n+p}u_n(x)|<\varepsilon$)

② 确界 $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in D}|f_n(x)-f(x)|=0$

(级数对应 $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in D}|\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}u_k(x)|=0$)

否定

① 定义 $\exists\varepsilon,\forall N,\exists x_N$ $|f_{nN}(x_N)-f(x_N)|\geq\varepsilon$

② (级数) $u_n(x)\not\rightrightarrows 0$

③ 点列 $\forall\{x_n\}\subset D$: $\lim\limits_{n\to\infty}|f_n(x_n)-f(x_n)|=0$

④ 连续性定理

命题: $[a,b]$连续 (a,b)一致收敛 则 $\sum u_n(a)$，$\sum u_n(b)$ 收敛 且 $[a,b]$ 一致收敛

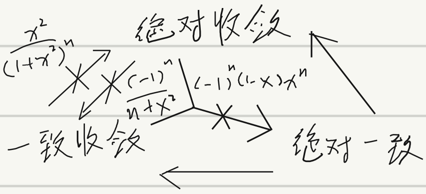
内闭一致收敛 $\overset{x^n}{\nRightarrow}$ 一致收敛

判别方法：① M判 $|u_n(x)|\leq M_n$ (绝对一致收敛)

对 $\sum u_n(x)v_n(x)$ 一致收敛

② Abel $v_n(x)$单调一致有界，$\sum\limits_1^{\infty}u_n(x)$ 一致收敛

③ Dirichlet $v_n(x)$单调趋零，$\sum\limits_1 u_n(x)$ 一致有界



连续性定理 $f_n(x)$连续 $\xrightarrow{D}f(x)$ $\Rightarrow f(x)$连续

若$u_n(x)$连续且 $\sum u_n(x)$ (内闭) 一致收敛于$S(x)$，$S(x)$连续

Dini 定理 $f_n(x)$在$[a,b]$ ① 连续 ② 单调 ③ 收敛 $f(x)$ 且$f(x)$连续，则 $f_n(x)\overset{[a,b]}{\rightrightarrows}f(x)$

$u_n(x)$在$[a,b]$ ① 连续 ② $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$同号 ③ 点态收敛 $S(x)$，$S(x)$连续，则 $\sum\limits_1^{\infty}u_n(x)\overset{[a,b]}{\rightrightarrows}S(x)$

求极限 一致收敛且连续 $f_n(x)$，$\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx=\int_a^b f(x)dx$

成弱为可积 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{d}{dx}f_n(x))=f'(x)$ ($\{f_n'(x)\}$一致收敛)

逐项求导/积 $\int\sum=\sum\int$，$\frac{d\sum}{dx}=\sum\frac{d}{dx}$

幂级数

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n t^n$ $t=g(x)$ (广义)

定理 $\rho=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}$, $\begin{cases}\rho=0 \text{ 收敛于 } (-\infty,\infty) \\ \rho=+\infty \text{ 仅收敛于 } 0 \\ \text{否则 } (-\frac{1}{\rho},\frac{1}{\rho}) \text{ 绝收}, |x|>\frac{1}{\rho} \text{ 发散, 端点单独算}\end{cases}$

收敛半径 $r=\frac{1}{\rho}$

$r=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$

(缺项不可比值)

Abel定理 I. $\sum a_n x^n$, x_1收敛 $\Rightarrow$ $|x|<|x_1|$绝收; x_2发散 $\Rightarrow$ $|x|>|x_2|$发散

II. $\sum a_n x^n$, 在 $(-r,r)$ 内闭一致, 若 r 处收敛, 则 $[0,r]$ 一致收敛

III: 求导积分, r 不变 (端点未知)

Taylor 级数 $f(x)\sim\sum_{0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ "=" 成立: $\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$

常用条件: $f(x)$ 任意阶可导, 且存在常数 M: $|f^{(n)}(x)|\le M$

常用: $e^x=\sum_{n=0}\frac{x^n}{n!}$ $\quad x\in R$

$\sin x=$ 奇数, 正负, ! $\quad x\in R$

$\cos x=$ 偶数, 正负, ! $\quad x\in R$

$\ln(1-x)=\sum_{n=1}-\frac{x^n}{n}$ $\quad -1\le x<1$

$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}x^n$ $\quad -1<x<1$

$\frac{1}{\sqrt{1-x}}=1+\sum_{n=1}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n$ $\quad -1\le x<1$

Wallis 公式: $\frac{\pi}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2$

Stirling 公式: $n!=\sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta_n}{12n}}\sim\sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^n$

Fourier 级数

定义内积 $(f,g)=\int_{-\pi}^{\pi}f\cdot g\,dx$

f 满足 可积 ($f\in R(-\pi,\pi)$) 与绝对可积 ($\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$ 绝收)

则 $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx$, $b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx$

$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$

* 正弦级数 $f(x)\sim\sum b_n\sin nx$, $b_n=2\cdot\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,dx$

余弦级数 $f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum a_n\cos nx$, $a_n=2\cdot\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,dx$

收敛性: Dirichlet 积分

F级数前n项和 $S_n(f,x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+u)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}u}{2\sin\frac{u}{2}}du$

$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(f(x+u)+f(x-u)\right)\underbrace{\frac{\sin\frac{2n+1}{2}u}{2\sin\frac{u}{2}}}_{D_n(u)}du$ $\quad \int_0^{\pi}D_n(u)du=\frac{\pi}{2}$

$\lim_{n\to\infty}S_n(f,x)=S(x)\iff\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x+u)+f(x-u)-2S(x)]D_n(u)du=0$

回顾 Riemann引理: $\lim_{p\to\infty}\int_a^b f(u)\sin pu\,du=0$

局部性定理　F级数收敛与否仅与$U(x)$处f的值相关

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^\delta [f(x+u)+f(x-u)-2S(x)]\frac{\sin\frac{2n+1}{2}u}{\sin\frac{u}{2}}du=0$$

推论：上式中分母可替为u；$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$

Dini定理：f，2π，可与绝，$\exists\delta>0$

$\frac{f(x+u)+f(x-u)-2S(x)}{u}$在$[0,\delta]$上可与绝，则$\lim_{n\to\infty}S_n(f,x)=S(x)$

判别法：（引理）$g\nearrow$ 则$\lim_{p\to\infty}\int_0^h g(u)\frac{\sin pu}{u}du=\frac{\pi}{2}g(0+0)$

F级数在x处收敛于左右极限之间，若

① f在$U(x,\delta)$上分段单调或可分解为分单

② $|f(x\pm u)-f(x\pm 0)|\le Lu^\alpha$　$\alpha\in(0,1]$

性质：分段连续，可逐项积分/微分，积分后取“=”

$\sum\frac{b_n}{n}$收敛于$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_0^x f(t)dt\right)dx$

Bessel不等式　$\frac{a_0^2}{2}+\sum a_n^2+b_n^2\le\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx$，算距离$d(f,T)$易证

Parseval等式　可积与平方可积，=

2022.6.7