上 海 交 通 大 学 试 卷 A卷

（ 2020 至 2021 学年 第 1 学期 2020年12月29日 ）

班级号________________ 学号____________ 姓名__________

课程名称 《数学分析(荣誉)I》 成绩__________

题 号	一	二	三	四	五	六	七	总 分
满 分	20	12	32	12	8	8	8	100
得 分								

一、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 对数螺线 $r=\mathrm{e}^{\theta}$ 从 $\theta=0$ 到 $\theta=\pi$ 一段弧长 $s=$__________.

2. 若 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，则 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=$______________.

3. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{k}{n}=$____________.

4. 设 $a_n=\begin{cases}2^k, & n=2k-1,\\ 3^k, & n=2k,\end{cases}$ 又 $x_n=\sqrt[n]{a_n}$，则 $\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n=$________，$\varlimsup\limits_{n\to\infty}x_n=$________.

5. 设 $f(x)=\int_x^{x+1010}\ln\left(1+\dfrac{2}{t}\right)^t\mathrm{d}t\ (x>0)$，那么 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=$__________.

二、单项选择题（每小题 3 分，共 12 分）

6. 下列广义积分中收敛的是 …… ( )

(A) $\int_0^{+\infty}\sin\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$. **(B)** $\int_0^{+\infty}\sin\sqrt{x}\mathrm{d}x$. **(C)** $\int_{-1}^{1}\dfrac{1}{\sin x}\mathrm{d}x$. **(D)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}x$.

7. 设函数 f 连续，且满足 $\int_0^{x^2-1}f(t)\mathrm{d}t=x^4$，那么 $f(8)=$ …… ( )

(A)8. **(B)**18. **(C)** 48. **(D)**108.

8. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则下列级数中必定收敛的是 …… ( )

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$. **(B)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\sin n$. **(C)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n a_n$. **(D)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n^2}{n}$

9．设 $f\in C[1,+\infty)$，考虑下列断语，则有 …… (　　)

① 若 $f(x)$ 非负，且 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\int_1^{+\infty} f^2(x)\mathrm{d}x$ 必收敛.

② 若 $f(x)$ 有界，且 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\int_1^{+\infty} f^2(x)\mathrm{d}x$ 必收敛.

(A) ①正确，②不正确.　　**(B)** ①不正确，②正确.

(C) ①，②都正确.　　**(D)** ①，②都不正确.

三、（每小题 8 分，共 32 分）

10．判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n^2}\cdot\dfrac{1}{3^n}$ 的敛散性，并说明理由.

11．计算定积分 $\int_0^1 x^4\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

12． 计算定积分$\int_{-1}^{1}\frac{x+1}{e^{x}+e^{-x}}dx$.

13． 设函数f有连续的一阶导数，且满足$0<f'(x)\le\frac{1}{x^{2}},(1\le x<+\infty)$. 判断数列$\{f(n)\}$的敛散性，并说明理由.

四、（本题共 12 分）

14．讨论广义积分$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x\ln x}{x^{\alpha}}\mathrm{d}x\ (\alpha>0)$的敛散性(含绝对和条件收敛性)

五、证明题（本题共 8 分）

15. 设函数 $f \in R[a,b]$，证明：$\sin f(x) \in R[a,b]$.

六、证明题（本题共 8 分）

16. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. 证明：当 $p > \frac{1}{2}$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n^p}$ 收敛.

七、（本题共 8 分）

17. 设函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上二阶可导，且满足 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$.

(1) 求 $f(0)$ 和 $f'(0)$；

(2) 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f\left(\dfrac{1}{n}\right)$ 绝对收敛.