上 海 交 通 大 学 试 卷（A 卷）

（ 2020 至 2021 学年 第 2 学期 ）

班级号__________________ 学号__________________ 姓名____________

课程名称 《数学分析（荣誉）》（2）(期终考试) 成绩____________

解析+审核 谭 宇 叶昊宇 排版 仲 泰

一、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 函数列$f_n(x)=\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}$在$\mathbb{R}$上的极限函数为________，它在$\mathbb{R}$上_______收敛.

解：

对于任意固定的x，均有：

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}=\sqrt{x^2}=|x|$$

注意到：

$$|f_n(x)-f(x)|=\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}-|x|=\frac{\frac{1}{n^2}}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}+|x|}$$

$$\leqslant\frac{\frac{1}{n^2}}{\sqrt{0+\frac{1}{n^2}}+0}=\frac{1}{n}\to0(n\to\infty,\forall x\in\mathbb{R})$$

从而原函数列一致收敛.

2. 设$f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^x, & 0\le x<1,\\ 0, & 1\le x\le\pi\end{cases}$，其周期为$2\pi$的Fourier 正弦级数的和函数为$S(x)$，则$S(0)=$

________，$S(2\pi-1)=$________.

解：

直接利用Dirichlet收敛定理可得：

$$S(0)=\frac{f(0^{+})+f(0^{-})}{2}=\frac{f(0^{+})-f(0^{+})}{2}=0$$

$$S(2\pi-1)=S(-1)=-S(1)=-\frac{f(1^{+})+f(1^{-})}{2}=-\frac{\mathrm{e}}{2}$$

3. 幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n}}{2^{n}+3^{n}}$的收敛域为__________.

解：

利用Hadamard公式计算收敛半径，并代入边界点分别判断即可. 收敛半径为：

$$R=\frac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{1}{2^{n}+3^{n}}}}=3$$

代入$x=3,x=-3$，易知通项均不趋于0，从而边界点发散.

综上，原幂级数的收敛半径为$(-3,3)$.

4. 数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)!!}=$__________.

解：

整理即可得到：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)!!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n}=\sqrt{\mathrm{e}}-1$$

5. 极限$\lim_{n\to+\infty}\int_{0}^{1}\frac{\sin nx\cos x}{x}\mathrm{d}x=$__________.

解：

利用积化和差处理试试：

$$\frac{\sin nx\cos x}{x}=\frac{\sin(n+1)x+\sin(n-1)x}{2x}$$

从而利用Dirichlet积分有：

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{\sin nx\cos x}{x}\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{\sin(n+1)x}{2x}\mathrm{d}x+\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{\sin(n-1)x}{2x}\mathrm{d}x=\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$$

二、单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

6. 设函数列$\{f_n(x)\}$，$\{g_n(x)\}$在D上均一致收敛，则下列断语中（　　）.

(I) $\{f_n(x)\pm g_n(x)\}$在D上必一致收敛

(II) $\{f_n(x)g_n(x)\}$在D上必一致收敛

A. Ⅰ正确，Ⅱ不正确　　B. Ⅰ不正确，Ⅱ正确

C. Ⅰ和Ⅱ都正确　　D. Ⅰ和Ⅱ都不正确

解：

(I) 证明：

设$f_n(x)\rightrightarrows f(x),g_n(x)\rightrightarrows g(x),n\to\infty$，则对于任意的$\varepsilon>0$，存在$N\in\mathbb{N}$，使得对于任意的$n>N$，均有：

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon,|g(x)-g_n(x)|<\varepsilon$$

从而有：

$$|f_n\pm g_n(x)-(f(x)\pm g(x))|\leqslant|f_n(x)-f(x)|+|g_n(x)-g(x)|\leqslant 2\varepsilon,\forall x\in D$$

(II)

反例：在区间$[0,1]$上，考虑

$$f_n=x\left(1+\frac{1}{n}\right)\rightrightarrows x,\ g_n(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{n}, & x\in\{0\}\cup\mathbb{Q}^C\\ q+\dfrac{1}{n}, & x=\dfrac{p}{q},q>0,(p,q)=1\end{cases}\rightrightarrows\begin{cases}0, & x\in\{0\}\cup\mathbb{Q}^C\\ q, & x=\dfrac{p}{q},q>0,(p,q)=1\end{cases}$$

而

$$f_ng_n=\begin{cases}0, & x\in\{0\}\cup\mathbb{Q}^C\\ \dfrac{p}{q}\left(q+\dfrac{1}{n}\right)\left(1+\dfrac{1}{n}\right), & x=\dfrac{p}{q},q>0,(p,q)=1\end{cases}\to fg=\begin{cases}0, & x\in\{0\}\cup\mathbb{Q}^C\\ p, & x=\dfrac{p}{q},q>0,(p,q)=1\end{cases}$$

考虑上确界：

$$\begin{aligned}\beta_n&=\sup_{x\in[0,\delta]}|f_n(x)g_n(x)-f(x)g(x)|\\&\geqslant\left|f_n\left(\frac{n-1}{n}\right)g_n\left(\frac{n-1}{n}\right)-f\left(\frac{n-1}{n}\right)g\left(\frac{n-1}{n}\right)\right|\\&=\left|\frac{n-1}{n}\cdot\left(n+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)-(n-1)\right|\\&=1-\frac{1}{n^3}\to1(n\to\infty)\end{aligned}$$

从而f_ng_n不一致收敛.

综上，该题选 A.

Ps: 若加上f_n,g_n均有界（甚至不需要一致有界），则f_ng_n必一致收敛. 证明如下：

记$f_n(x)\rightrightarrows f(x)\ (n\to\infty)$, $g_n(x)\rightrightarrows g(x)\ (n\to\infty)$.

Step1: f,g有界.

取$\varepsilon=1$，存在$N>0$，使得对于任意的$n>N$，均有：

$$|f_n(x)-f(x)|<1\Rightarrow|f(x)|<|f_n(x)|+1\leqslant\sup|f_n(x)|+1<\infty$$

从而f有界，同理g有界；

Step2: f_n,g_n一致有界.

取$\varepsilon=1$，存在$N>0$，使得对于任意的$n>N$，均有：

$$|f_n(x)-f(x)|<1\Rightarrow|f_n(x)|<|f(x)|+1\leqslant\sup|f(x)|+1<\infty,\forall n$$

从而f_n一致有界，同理g_n一致有界；

Step3: $f_ng_n\to fg$.

记实数$M>0$，使得$|f_n|<M,\ |g_n|<M,\ |f|<M,\ |g|<M$，对于任意$\varepsilon>0$，存在$N>0$，使得对于任意的$n>N$，均有：

$$|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2M},|g_n(x)-g(x)|<\frac{\varepsilon}{2M}$$

从而有：

$$
\begin{aligned}
|f_n g_n - fg| &= |f_n g_n - f_n g + f_n g - fg| \\
&\leqslant |f_n| \cdot |g_n - g| + |g| \cdot |f_n - f| \\
&< M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon
\end{aligned}
$$

7. 若级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$条件收敛，则下列断语中错误的是（　　）.

A. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$[0,1]$上一致收敛　　B. $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$在$[0,1]$上一致收敛

C. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$在$[0,1]$上一致收敛　　D. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$的收敛半径为1

解：

A. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$一致收敛，且x^n单调递减且一致有界，从而根据AD判别法，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$在$[0,1]$上一致收敛.

B. 考虑反例$a_n = \frac{(-1)^n}{n}$，然后取$x=1$即可知道原级数在$x=1$处不收敛，就更不需要谈一致收敛了.

C. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$一致收敛，且$\frac{x^{n+1}}{n+1}$单调递减且一致有界，从而根据AD判别法，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$在$[0,1]$上一致收敛.

D. 取$x=2$，则$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$条件收敛，从而$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$收敛半径为 1；

综上，该题选 B.

8. 设$f \in C[-\pi,\pi]$，且以2π为周期的Fourier 系数为$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，下列命题中（　　）.

①数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$均必收敛于0

②级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}$均必收敛

③若$a_n(n=0,1,2,\cdots)$，$b_n(n=1,2,\cdots)$全为0，则必有$f(x)\equiv 0$

A. ①、②、③都正确. B. ①、②正确，③不正确.

C. ①、③正确，②不正确. D. ①不正确，②、③正确.

证明：

① 这是Riemann－Lebesgue 定理的直接结论.

② 利用Parseval 等式得到：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(a_n^2+\frac{1}{n^2}\right)\leqslant\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)+\frac{\pi^2}{12}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x+\frac{\pi^2}{12}<\infty$$

③ 由Parseval 等式得到：

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x=0\Rightarrow f(x)\equiv 0$$

综上，①②③ 均为真，从而该题选 A.

Ps:

1. Parseval 不等式需要f平方可积或者反常平方可积（也即反常积分情况下的平方可积）.

2. 当$f\in R[-\pi,\pi]$时，① 也是成立的，这是Riemann－Lebesgue 定理的直接结论，阐述与如下：

设f在$[a,b]$上可积且绝对可积（指狭义的绝对可积与反常绝对可积），那么

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x=0$$

其中b可以取到$+\infty$.

证明：我们只需证明$\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x=0$，对于$\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x\,\mathrm{d}x=0$同理可证. 且不妨设$f(x)$是实值函数，这是因为对于复变函数只需分离为实部虚部两部分分别证明即可.

由f可积，则存在$M>0$，使得$|f|\leqslant M$，且对于任意的$\varepsilon>0$，存在均匀分划：

$$x_i=a+\frac{i}{n}(b-a),i=0,1,\cdots,n$$

使得：

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x<\varepsilon$$

且有：

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x=0$$

注意到：

$$\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i}\cos\lambda x\,\mathrm{d}x\right|=\frac{1}{\lambda}|\sin\lambda x_i-\sin\lambda x_{i-1}|\leqslant\frac{2}{\lambda}$$

以及：

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x\right|&=\left|\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x\right|\\&\leqslant\left|\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}[f(x)-f(x_{i-1})]\cos\lambda x\,\mathrm{d}x\right|+\left|\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(x_{i-1})\cos\lambda x\,\mathrm{d}x\right|\\&\leqslant\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i+\frac{2n}{\lambda}M\end{aligned}$$

取$n=\left[\sqrt{\lambda}\right]$，从而有：

$$\left|\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i+\frac{2n}{\lambda}M\leqslant\sum_{i=1}^{[\sqrt{\lambda}]}\omega_i\Delta x_i+\frac{2}{\sqrt{\lambda}}M\to0(\lambda\to\infty)$$

当$b=\infty$时，由反常绝对可积，对于任意的$\varepsilon>0$，存在$A>0$，使得：

$$\int_A^{\infty}|f(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon$$

从而当λ足够大时：

$$\left|\int_a^{\infty}f(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\left|\int_a^{A}f(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x\right|+\int_A^{\infty}|f(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon$$

当f在$[a,b]$上反常绝对可积，不妨设b为唯一奇点，则对于任意的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使得：

$$\int_{b-\delta}^{b}|f(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon$$

从而当λ足够大时：

$$\left|\int_{a}^{b}f(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\left|\int_{a}^{b-\delta}f(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x\right|+\int_{b-\delta}^{b}|f(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon$$

综上，命题得证.

3. 当$f\in R[-\pi,\pi]$，且仅在一点θ_0连续，且傅里叶系数均为 0，则必有$f(\theta_0)=0$.

Tip: 由Lebesgue 定理知，$f(x)=0,\text{a.e.}x\in[-\pi,\pi]$. 从而两个函数的傅里叶系数相等，则这两个函数几乎处处相等.

证明：不妨设$f(x)$是实值函数，这是因为对于复变函数只需分离为实部虚部两部分分别证明即可. 不妨设$\theta_0=0$，考虑反证法，若$f(0)\neq0$，不妨设$f(0)>0$. 记$p(\theta)=\varepsilon+\cos\theta,\varepsilon>0$，以及

$$p_k(\theta)=[p(\theta)]^k$$

Idea: 证明：

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi}p_k(\theta)f(\theta)\mathrm{d}\theta\right|\to\infty,k\to\infty$$

与已知的

$$\int_{-\pi}^{\pi}p_k(\theta)f(\theta)\mathrm{d}\theta=0$$

矛盾.

Step 1: 一些准备工作. 因为f在$\theta=0$处连续，从而存在$\delta>0$，使得对于任意的$|\theta|<\delta$，均有：

$$f(\theta)>\frac{f(0)}{2}$$

取ε足够小，使得当$|\theta|>\delta$时，$|p(\theta)|<1-\frac{\varepsilon}{2}$.

取足够小的$0<\eta<\delta$，使得对于任意的$|\theta|<\eta$，均有：

$$|p(\theta)|>1+\frac{\varepsilon}{2}.$$

我们不难总结得到：

(1) $|\theta|<\eta$: $f(\theta)>\frac{f(0)}{2}, p(\theta)>1+\frac{\varepsilon}{2}$；

(2) $\eta<|\theta|<\delta$: $p(\theta)>0, f(\theta)>0$；

(3) $\delta<|\theta|<\pi$: $|p(\theta)|<1-\frac{\varepsilon}{2}, |f|\leqslant M=\max\limits_{x\in[-\pi,\pi]} f(x)<\infty$

Step 2: 分段估计. 从而估计得到：

$$\int_{|\theta|<\eta} p_k(\theta)f(\theta)\mathrm{d}\theta \geqslant \int_{|\theta|<\eta} \frac{f(0)}{2}\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)^k \mathrm{d}\theta=\eta f(0)\cdot\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)^k \to\infty, k\to\infty$$
$$\int_{\eta<|\theta|<\delta} p_k(\theta)f(\theta)\mathrm{d}\theta>0$$
$$\left|\int_{\delta<|\theta|<\pi} p_k(\theta)f(\theta)\mathrm{d}\theta\right|\leqslant\int_{\delta<|\theta|<\pi}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)^k M\mathrm{d}\theta=2(\pi-\delta)M\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)^k\to 0, k\to\infty$$

从而得到：

$$\int_{-\pi}^{\pi} p_k(\theta)f(\theta)\mathrm{d}\theta\geqslant\eta f(0)\cdot\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)^k+0-2(\pi-\delta)M\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)^k\to\infty, k\to\infty$$

从而矛盾！

综上，命题得证.

Corollary: 若连续函数f的傅里叶系数恒为 0，则$f\equiv 0$.

这恰好是本题的命题③.

9. 下列函数项级数在指定区间上一致收敛的是（　　）.

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$，$x\in(0,\pi)$.　　B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x}{(1+x)^n}$，$x\in[0,+\infty)$.

C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\,\mathrm{e}^{-nx}$，$x\in(0,+\infty)$.　　　　D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+x}}$，$x\in[0,+\infty)$.

解：

A. 取$x=\dfrac{1}{n}$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin 1}{n}$发散；

B. 取$x=\dfrac{1}{n}$，则通项$\dfrac{n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\sim\dfrac{n}{\mathrm{e}}\,(n\to\infty)$，从而根据比较审敛法，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$发散，从而原级数不一致收敛；

C. 取$x=\dfrac{1}{n}$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{\mathrm{e}}$发散；

D. $\sum\limits_{n=1}^{N}(-1)^n$一致有界，且$\dfrac{1}{\sqrt{n+x}}$对于任意固定的$x$，单调递减趋于 0. 由AD 判别法知，原级数一致收敛.

综上，该题选 D.

10.设$a_n>0$，$S_n=\sum\limits_{k=0}^{n}a_k$，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$和$\sum\limits_{n=0}^{\infty}S_nx^n$的收敛半径分别为$r$和$R$，则（　　）.

A. 若$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$收敛，则有$r=1$.　　　　B. 若$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$发散，则有$r=1$.

C. 若$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$收敛，则有$R=1$.　　　　D. 若$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$发散，则有$R=1$.

解：

A. 取$a_n=\dfrac{1}{2^n}$，则$r=2$；

B. 取$a_n=n^n$，则$r=0$；

C. $R=\dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{S_n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{S_{n+1}}=1$；

D. 取$a_n=\begin{cases} n^n-(n-1)^{n-1}, & n\geqslant 2 \\ 1, & n=1 \end{cases}$，则$R=0$.

综上，该题选 C.

三、(本题共 9 分)

11.设$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n^2}$，$x\in[-1,1]$，证明：$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^3}\,(x\in[-1,1])$.

证明：

由优级数判别法知：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{x^{n-1}}{n^2}\right|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}<\infty$$

原幂级数一致收敛，从而逐项可积成立，从而命题成立.

四、计算题(每小题 9 分，共 36 分)

12.求幂级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n-1}$的和函数，并求数项级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)2^n}$的和.

解：

易知收敛域为$[-1,1)$，从而：

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n-1}=x\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n-1}=x\sum_{n=2}^{\infty}\int_0^x t^{n-2}\mathrm{d}t=x\int_0^x\left(\sum_{n=2}^{\infty}t^{n-2}\right)\mathrm{d}t=x\cdot\int_0^x\frac{1}{1-t}\mathrm{d}t=-x\ln(1-x)$$

取$x=\frac{1}{2}$即可得到：

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)2^n}=\frac{\ln 2}{2}$$

13.（1）将函数$f(x)=\dfrac{1}{1-x^3}$在$x_0=0$处展开成幂级数；

（2）设$g(x)=\dfrac{x}{1+x+x^2}$，求$g^{(n)}(0)$，$(n=0,1,2,\cdots)$.

解：

（1）$f(x)=\dfrac{1}{1-x^3}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{3n}$；

（2）$g(x)=\dfrac{x(1-x)}{1-x^3}=x(1-x)\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{3n}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(x^{3n+1}-x^{3n+2})=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{g^{(n)}(0)}{n!}x^n$，对比系数得到：

$$g^{(n)}(0)=\begin{cases}0, & n=3k\\ n!, & n=3k+1\\ -n!, & n=3k+2\end{cases},k\in\mathbb{N}$$

14.将函数$f(x)=3\ln x$按$\dfrac{x-1}{x+1}$展开成幂级数.

解：

记$t=\dfrac{x-1}{x+1}\Rightarrow x=\dfrac{1+t}{1-t}$，从而有：

$$\begin{aligned}f(x)&=3\ln x=3\ln\frac{1+t}{1-t}=3\ln(1+t)-3\ln(1-t)\\&=3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}t^n}{n}+3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n}=3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}+1}{n}t^n=3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{2n-1}t^{2n-1}\\&=3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{2n-1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n-1}\end{aligned}$$

15.设$f(x)=x$，$x\in[0,\pi]$.

（1）求$f(x)$周期为2π的余弦级数，并求其和函数在$[0,\pi]$上的表达式；

（2）求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}$及$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^4}$的和

解：

（1）做偶延拓得到$\tilde{f}(x)=|x|,x\in[-\pi,\pi]$，设$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$

从而有：

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\tilde{f}(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\,\mathrm{d}x=\begin{cases}\pi, & n=0\\ \frac{2}{\pi}\cdot\frac{(-1)^n-1}{n^2}, & n\geqslant 1\end{cases}$$

从而得到：

$$f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos[(2n-1)x]$$

(2)直接取$x=0$得到：

$$\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=0\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

由Parseval等式有：

$$\frac{\pi^2}{2}+\frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\tilde{f}(x)\right]^2\mathrm{d}x=\frac{2\pi^2}{3}$$

整理得到：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^4}{96}$$

五、(本题共 12 分)

16.设$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln(1+n)}{n^x}$.

（1）求$f(x)$的定义域D；

（2）证明：$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln(1+n)}{n^x}$在$D$内不一致收敛；

（3）证明$f(x)$在D内连续.

解：

（1）$x>0$时，由Leibniz判别法知级数收敛；$x\leqslant 0$时，通项不趋于 0，从而发散.

综上，$D=(0,\infty)$.

（2）取$x=\dfrac{1}{n}$，通项不趋于 0，从而级数发散，从而不一致收敛；

（3）对于任意的固定点$x_0\in D$，必然存在闭区间$[a,b]\subset(0,\infty)$，使得$x_0\in(a,b)$.

考虑闭区间$[a,b]$上$f(x)$的连续性. 只需注意到此时$\sum\limits_{n=1}^{N}(-1)^n$一致有界，且$\dfrac{\ln(1+n)}{n^x}$单调递减趋于 0，从而根据AD判别法知，$f(x)$一致收敛，且通项函数也是收敛的，从而$f(x)$在$x=x_0$处连续，又因为$x_0$是任取的，从而$f(x)\in C(0,\infty)$.

17.设$\{u_n(x)\}$是定义在$[0,1]$上的函数列，且$u_n(x)=\begin{cases}\dfrac{100}{n}, & x=\dfrac{1}{n}\\ 0, & x\neq\dfrac{1}{n},\end{cases}$ $(n=1,2,\cdots)$.

（1）判断函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$[0,1]$上的一致收敛性，并说明理由；

（2）是否存在收敛的数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}M_n$满足$|u_n(x)|\leq M_n\,(x\in[0,1],n=1,2,\cdots)$

解：

（1）一致收敛，考虑柯西收敛即可得到：

$$\left|\sum_{n=n+1}^{n+p}u_n(x)\right|\leqslant\frac{100}{n+1}\to 0(n\to\infty)$$

（2）不可能，假设存在，则取$x=\dfrac{1}{n}$，从而得到：

$$M_n\geqslant\frac{100}{n}$$

进而有$\sum\limits_{n=1}^{\infty}M_n=+\infty$，矛盾！