Chap 14 — 7

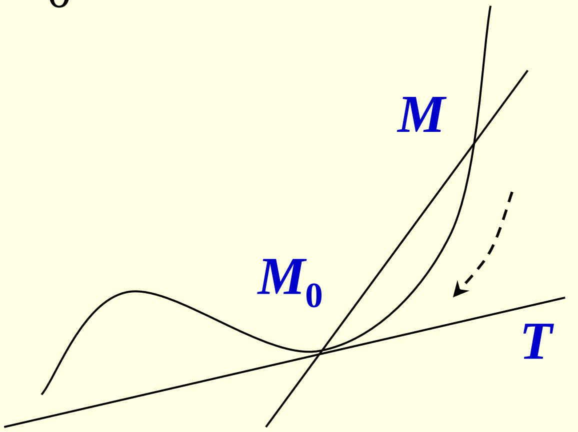
多元微分学的几何应用

14.7.1 空间曲线的切线及法平面

一. 定义

设$M_0(x_0,y_0,z_0)$, $M(x,y,z)$是空间曲线Γ上的点, 若点M沿曲线趋于M_0时, 割线M_0M有极限位置直线M_0T, 则称此直线为曲线Γ在M_0处的切线.

过点M_0且与切线垂直的平面称为曲线的法平面.



二. 方程

设空间曲线Γ的参数方程

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$$

$M_0(x_0,y_0,z_0)$, $M(x,y,z)$分别对应参数t_0, $t_0+\Delta t$, 割线

M_0M的方向向量

$$(\Delta x, \Delta y, \Delta z) // (\frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t}, \frac{\Delta z}{\Delta t})$$

取极限得

Γ的切向量

$$\boldsymbol{\tau} = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$$

故M_0处切线方程

$$\boxed{\frac{x-x_0}{x'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y'(t_0)}=\frac{z-z_0}{z'(t_0)}}$$

M_0处法平面方程

$$\boxed{x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0}$$

- 注意 由 $(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z)=(x'(t),y'(t),z'(t))\mathrm{d}t$

  $\Rightarrow$ $(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z)$ 也是曲线的切向量.

- 光滑曲线: 切向量连续变化的曲线.

例 求曲线 $x = \mathrm{e}^t \cos t,\ y = \mathrm{e}^t \sin t,\ z = 2\mathrm{e}^t$ 在对应于

$t = 0$的点处的切线和法平面方程.

例 求曲线 $\begin{cases} x^2 + z^2 = 10 \\ y^2 + z^2 = 10 \end{cases}$ 在点(1,1,3)处的切线.

14.7.2 曲面的切平面与法线

一. 定义

由曲面S上所有过点M_0的光滑曲线在M_0的切线所组成的平面称为曲面S在M_0处的**切平面**.

过M_0且与切平面垂直的直线称为曲面S在M_0处的**法线**.

设曲面S的方程$F(x, y, z) = 0$, $M_0(x_0, y_0, z_0) \in S$, 而过M_0在曲面上的曲线为

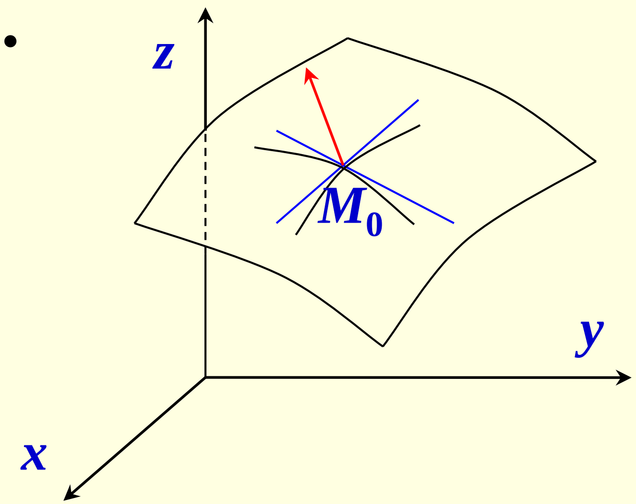
$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$$

曲线在S上, 故 $F(x(t), y(t), z(t)) \equiv 0$

$$\Rightarrow (F_x, F_y, F_z) \cdot (x'(t), y'(t), z'(t)) = 0 \xrightarrow{t=t_0} \nabla F(M_0) \cdot \boldsymbol{\tau}_0 = 0$$

即在对应 t_0的M_0点, 切向量 $\boldsymbol{\tau}_0 = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$

总与 $\nabla F(M_0) = (F_x, F_y, F_z)\big|_{M_0}$ **正交.**



- 切平面定义的合理性

- **曲面**(切平面)的**法向量**:

$$\boxed{\nabla F(M_0) = (F_x, F_y, F_z)\big|_{M_0}}$$

- **光滑曲面**: 法向量连续变化的曲面

二. 方程

曲面S: $F(x, y, z) = 0$在M_0处的切平面方程

$$F_x(M_0)(x-x_0)+F_y(M_0)(y-y_0)+F_z(M_0)(z-z_0)=0$$

法线方程 $$\frac{x-x_0}{F_x(M_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(M_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(M_0)}$$

特别地, 若S: $z = f(x, y)$, 则法向量为

$$\boxed{\boldsymbol{n}=(f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0),-1)}$$

切平面

$$f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0$$

注 全微分几何意义中近似曲面的平面正是切平面.

例 求曲面 $z = x^2 + \frac{y^2}{4} - 1$ 上点(−1,−2,1)处的切平面和法线方程.

思考 曲面由参数方程 $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$ 给出时, 如何求其法向量?

三. 例题

例 证明曲线 $\begin{cases} x = \mathrm{e}^t \cos t, \\ y = \mathrm{e}^t \sin t, \\ z = \mathrm{e}^t \end{cases}$ 与圆锥面 $x^2 + y^2 = z^2$

的所有母线相交成等角.

例 求曲线 $\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 + z^2 = 9 \\ z^2 = 3x^2 + y^2 \end{cases}$ 在点(1, −1,2)处的切线.

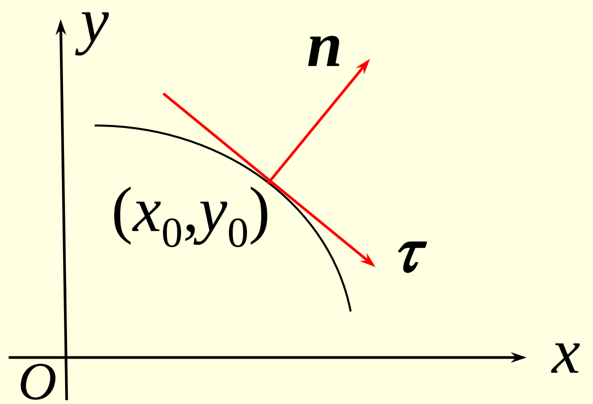
14.7.3 平面曲线的切线

设函数$F(x, y)$有连续偏导数，则曲线$F(x, y) = 0$在(x_0,y_0)处的

切线方程 $\boxed{F_x(x_0,y_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0)(y-y_0)=0}$

法向量 $\boldsymbol{n}=(F_x,F_y)\big|_{(x_0,y_0)}$

切向量 $\boldsymbol{\tau}=(F_y,-F_x)\big|_{(x_0,y_0)}$



例 求椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 在点(x_0,y_0)处的切线方程.

补充练习 求抛物线

$$y^2 = 2px \, (p > 0)$$

在点(x_0,y_0)处的切线方程.

Chap14 — 8

条件极值--Lagrange乘数法

一. 问题的提出与解法

在许多极值问题中, 函数自变量还要满足一些条件(约束条件), 这样的极值问题称为条件极值.

例如求目标函数

$$u = f(x, y, z)$$

在约束条件 $\varphi(x, y, z) = 0$ 下的极值.

◆ 相对于条件极值, 对自变量无约束条件的极值问题称为无条件极值.

二. 直接法

如果可从约束条件 $\varphi(x, y, z) = 0$ 中解出一个变量，比如 $z = z(x, y)$, 然后代入目标函数得

$$u = f(x, y, z(x, y))$$

再求此二元函数的无条件极值.

三. Lagrange乘数法

引进辅助函数(**Lagrange函数**)

$$L(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda \varphi(x, y, z)$$

从其无条件极值的必要条件

$$\begin{cases} L_x = f_x + \lambda\varphi_x = 0 \\ L_y = f_y + \lambda\varphi_y = 0 \\ L_z = f_z + \lambda\varphi_z = 0 \\ L_\lambda = \varphi(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

求出的(x_0, y_0, z_0)是可能的条件极值点.

例 在曲面 $z = x^2 + 2y^2$ 上求一点P, 使其到平面 $x - y + 2z + 6 = 0$ 的距离最短.

Ex. 在椭圆 $x^2 + 4y^2 = 4$ 上求一点P, 使其到直线 $2x + 3y - 6 = 0$ 的距离最短.

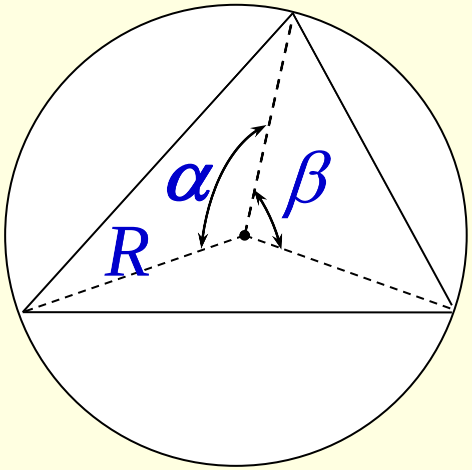
四. 最值问题

原则 有界闭区域上的可微函数的最值在内部驻点或边界点取到. 实际问题中, 若最值必在区域内部取得又驻点唯一, 则此驻点就是最值点.

例 在半径为R的圆中求面积最大的内接三角形的边长.

$$S=\frac{R^2}{2}\big(\sin\alpha+\sin\beta-\sin(\alpha+\beta)\big),$$

其中$\alpha,\beta\in(0,2\pi)$ 且$\alpha+\beta<2\pi$.



例 求函数 $f(x,y)=2x^2+6xy+y^2$ 在椭圆域 $x^2+2y^2\le 3$ 上的最大值和最小值.