1 秩为1的矩阵

Proposition 1.1. 设A为n阶非零方阵.
试证明下列说法等价:

(1) 存在两个非0的n维列向量α和β, 使得$A = \alpha\beta^T$;

(2) 方阵A的行与行之间只相差一个比列关系;

(3) 方阵A的列与列之间只相差一个比列关系.

Proposition 1.2. 设A为n阶非零方阵, 存在两个非0的n维列向量α和β, 使得$A = \alpha\beta^T$.
试证:

(1) $tr(A) = \beta^T\alpha$;

(2) $A^m = tr(A)^{m-1}A$, 特别地, $A^2 = tr(A)A$;

(3) $A\alpha = tr(A)\alpha$;

(4) 设ξ是方程组$\beta^T x = 0$的非零解. 那么$A\xi = 0$;

(5) 方程组$\beta^T x = 0$与$Ax = 0$同解.

2 对称矩阵AA^T和$A^T A$

Proposition 2.1. 设A为$m \times n$阶实数矩阵.

(1) 试证明: AA^T和$A^T A$都是对称矩阵.

(2) 试证明: 方程组$A^T Ax = 0$和方程组$Ax = 0$是同解方程组.

3 幂零矩阵

设A为n阶方阵. 若存在正整数m, 使得$A^m = O$, 那么称A为**幂零矩阵**.

若A为幂零矩阵, 使得$A^m = O$的正整数中, 最小的那个正整数, 称为A的**幂零指数**.

Proposition 3.1. *设A为幂零矩阵, $A \neq O$, A的幂零指数为m. 试证明:*

(1) 存在列向量α, 使得$A^{m-1}\alpha \neq 0$;

(2) 方程组$x_1\alpha + x_2A\alpha + x_3A^2\alpha + \cdots + x_mA^{m-1}\alpha = 0$只有零解.

Proposition 3.2. *设A为n阶幂零矩阵, $A \neq O$, A的幂零指数为n, 列向量α满足$A^{n-1}\alpha \neq 0$. 试证明:*

$$AP = P\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

其中$P = (A^{n-1}\alpha, A^{n-2}\alpha, \cdots, \alpha)$是可逆矩阵.

4 幂等矩阵

设A为n阶方阵. 若$A^2 = A$, 那么称A为**幂等矩阵**, (也叫投影矩阵).

Proposition 4.1. 设A为n阶幂等矩阵. 令

$$\begin{aligned} U &= \{Ax \mid x \in \mathbb{R}^n\}, \\ V &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\} \end{aligned}$$

试证明:

(1) 对任何$u \in U$, 都有$Au = u$;

(2) 对任何$v \in V$, 都有$Av = 0$;

(3) $U \cap V = \{0\}$;

(4) 对任何$\alpha \in \mathbb{R}^n$, 存在一组唯一的向量u和v, 满足$u \in U$, $v \in V$, 而$\alpha = u + v$.

5 对合矩阵

设A为n阶方阵. 若$A^2 = E$, 那么称A为**对合矩阵**.

Proposition 5.1. 设A为n阶对合矩阵. 令

$$\begin{aligned} U &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = x\}, \\ V &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = -x\} \end{aligned}$$

试证明:

(1) $U \cap V = \{0\}$;

(2) 对任何$\alpha \in \mathbb{R}^n$, 存在一组唯一的向量(u, v), 满足$u \in U$, $v \in V$, 而$\alpha = u + v$.

6 循环矩阵

设

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_3 & a_4 & a_5 & \cdots & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}, a_i \in \mathbb{R} \text{ for all } i$$

称A为n阶**循环矩阵**.

Proposition 6.1. 设A为n阶循环矩阵, 方程$z^n = 1$在复数域上的n个两两不同的根为$1, w_1, \cdots, w_{n-1}$, 特别地, $w_i = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, k = 0, 1, \cdots, n-1$. 对每一个$i$, 令

$$\alpha_i = (1, w_i, w_i^2, \cdots, w_i^{n-1})^T,$$

及多项式$f(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + \cdots + a_nx^{n-1}$

(1) 试证明*:*$A\alpha_i = f(w_i)\alpha_i$*;*

(2) 试求$\det(A)$.