# Chap 12

# Fourier级数

## 引例 1807年, Fourier研究杆状物热流问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \dfrac{\partial T}{\partial t}, & T = T(x,t), \\ T(0,t) = T(l,t) = 0, & t > 0 \quad \text{(边界条件)} \\ T(x,0) = f(x), & 0 < x < l \quad \text{(初始条件)} \end{cases}$$

其中$T = T(x, t)$表示$t$时刻杆子$x$处的温度.

**解** 设 $T(x, t) = \varphi(x)\psi(t)$, 则有

$$\varphi''(x)\psi(t) = \varphi(x)\psi'(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = \frac{\psi'(t)}{\psi(t)} = -\lambda \quad (\lambda > 0)$$

导出 $$\begin{cases} \varphi''(x)+\lambda\varphi(x)=0, & \cdots(1) \\ \varphi(0)=\varphi(l)=0, & \\ \psi'(t)+\lambda\psi(t)=0. & \cdots\ (2) \end{cases}$$

解方程(1)得 $\varphi(x)=b\sin\sqrt{\lambda}x+c\cos\sqrt{\lambda}x$

由 $\varphi(0)=0$ 得 $c=0$; 由 $\varphi(l)=0$ 得 $\sin\sqrt{\lambda}l=0$

导出 $\sqrt{\lambda}l=n\pi \quad \Rightarrow \quad \lambda_n=\left(\dfrac{n\pi}{l}\right)^2 \quad (n=0,1,2,\cdots)$

于是 $$\varphi(x)=b_n\sin\frac{n\pi}{l}x$$

解方程(2)得 $\psi(t)=Ce^{-\lambda t}$，取 $C=1$ **(为什么可以?)**

得一个解 $$T_n(x,t)=b_n\exp\left(-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

叠加得 $$T(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\exp\left(-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

令$t=0$有 $$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi}{l}x$$ 进而确定$b_n$.

问题 [0, $l$ ]上函数 $f(x)$总能表示成三角函数之和? 即

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right)$$

右端称为三角级数, 其中$a_0$, $a_n$, $b_n$ ($n$ =1,2,…)称为系数

思考 如何确定系数$a_0$, $a_n$, $b_n$?

# Chap12 — 1

## Fourier级数

# 一、三角函数系 函数集合

$$\{1, \cos x, \sin x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots\}$$

- 三角函数系的特点：正交性！

1) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \pi & m = n \neq 0 \\ 2\pi & m = n = 0 \end{cases} \quad (m, n = 1, 2, \cdots)$

2) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \pi & m = n \end{cases} \quad (m, n = 1, 2, \cdots)$

3) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx \mathrm{d}x = 0 \quad (m = 1, 2, \cdots; n = 0, 1, \cdots)$

## 二、Fourier级数

设在$[-\pi,\pi]$上函数$f(x)$可展开为三角级数, 即

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

问题 级数的系数$a_n, b_n$与$f(x)$有什么关系?

结论 利用正交性，可得

Fourier系数公式

$$\begin{cases} a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x, & n=0,1,2,\cdots, \\ b_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x, & n=1,2,\cdots. \end{cases}$$

**可积与绝对可积** 函数$f$满足下两条件之一：

- $f \in R[-\pi, \pi]$;
- 瑕积分 $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛;

**定义** 设$f(x)$以$2\pi$为周期, 且在$[-\pi, \pi]$上可积与绝对可积, 以$f$的Fourier系数$a_n$, $b_n$为系数的三角级数称为$f(x)$的**Fourier级数(F氏级数)**, 记为

$$\boxed{f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)}$$

**注意** 正确理解符号“~”的含义!

**例1** 求 $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0, \\ x, & 0 \le x < \pi \end{cases}$ 的F氏级数.

## 三、正弦和余弦级数

设$f(x)$在$[-\pi, \pi]$上可积与绝对可积, 且为奇函数, 则其Fourier系数中$a_n = 0$,

$$\boxed{b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x}$$

其Fourier级数 $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ 称为正弦级数.

想一想 余弦级数的定义?

**约定** 若$f$仅在$[0, \pi]$(或$[-\pi, 0]$)上可积与绝对可积,

对$f$作**奇延拓**后所得函数$f_1$的F氏(正弦)级数也称为$f$的**正弦级数**, 此时

$$\boxed{b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x}$$

**想一想** 仅在$[0, \pi]$上定义的函数的**余弦级数**?

**例2** 求 $f(x) = x^2\ (x \in [0, \pi])$ 的正弦和余弦级数.

# Chap12 — 2

## Fourier级数的收敛性

## 一、Dirichlet积分

设$f$ 以$2\pi$为周期, 在$[-\pi,\pi]$上可积与绝对可积, 且

$$\boxed{f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)}$$

其部分和函数

$$S_n(f,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

称为$f$ 的$n$阶**Fourier多项式**.

## 结论

Dirichlet积分

$$S_n(f,x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}u}{2\sin\frac{u}{2}}\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}[f(x+u)+f(x-u)]\frac{\sin\frac{2n+1}{2}u}{2\sin\frac{u}{2}}\mathrm{d}u$$

$$\frac{\sin\frac{2n+1}{2}u}{2\sin\frac{u}{2}} \overset{\text{def}}{=} D_n(u)$$

Dirichlet积分核

## 简单事实

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} D_n(u)\mathrm{d}u = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos ku\right)\mathrm{d}u = 1$$

**命题** 设$S(x)$是任一给定函数, 则

$$\lim_{n\to\infty} S_n(f,x) = S(x) \xleftrightarrow{\text{充分必要条件}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x+u)+f(x-u)-2S(x)]D_n(u)\mathrm{d}u = 0$$

## 二、局部性定理

**Riemann引理** 设 $f$ 在$[a, b]$上可积与绝对可积, 则

$$\boxed{\lim_{p\to+\infty}\int_a^b f(u)\sin pu\,du = 0 = \lim_{p\to+\infty}\int_a^b f(u)\cos pu\,du}$$

**定理(局部性)** 设$f(x)$以$2\pi$为周期, 在$[-\pi, \pi]$上可积与绝对可积, 则 $f$ 的**F**氏级数在$x$处的收敛性及收敛时的值仅与$f$在$U(x)$的值相关.

**推论1** 同局部性定理假设, 则$\forall\delta>0$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}\frac{f(x+u)+f(x-u)-2S(x)}{2\sin\frac{u}{2}}\cdot\sin\frac{2n+1}{2}u\mathrm{d}u$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}\frac{f(x+u)+f(x-u)-2S(x)}{u}\cdot\sin\frac{2n+1}{2}u\mathrm{d}u$$

注 假设该极限存在

**推论2**

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}}$$

**定理(Dini)** 设$f$满足局部性定理条件, 且$\exists\delta\in(0,\pi)$使

$\dfrac{f(x+u)+f(x-u)-2S(x)}{u}$在$[0,\delta]$上可积与绝对可积, 则

$$\lim_{n\to\infty}S_n(f,x)=S(x)$$

## 三、F氏级数收敛性判别法

**Dirichlet引理** 设$g$在$[0, h]$上单调, 则

$$\boxed{\lim_{p\to+\infty}\int_0^h \frac{g(u)-g(0+0)}{u}\sin pu\,\mathrm{d}u = 0 \qquad (\Delta)}$$

**等价形式** $$\lim_{p\to+\infty}\int_0^h g(u)\frac{\sin pu}{u}\mathrm{d}u = \frac{\pi}{2}g(0+0).$$

**定义** 设$f:[a, b]\to\mathbf{R}$, 若可将$[a, b]$分为有限个子区间, 使$f$在每个开子区间上单调有界, 则称$f$为**分段单调函数**.

**推论** 若$g$在$[0, h]$上为分段单调 或为分段单调函数之和, 则$(\Delta)$式仍成立.

**定理** 设$f$以$2\pi$为周期, 在$[-\pi, \pi]$上可积与绝对可积,

且满足下面两条件之一, 则$f$的F氏级数在$x$处收敛于

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

- **(Dirichlet-Jordan)** $f$在$U(x,\delta]$上分段单调或为分段单调函数之和;
- **(Dini-Lipschitz)** $f$在$x$处满足指数为$\alpha\in(0, 1]$的Hölder条件, 即$|f(x\pm u)-f(x\pm 0)|\le Lu^{\alpha}$

**推论1** 设$f$以$2\pi$为周期, 在$[-\pi, \pi]$上至多有限个第一类间断点, 且仅有有限个严格极值点, 则

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$= \begin{cases} f(x), & x\text{为连续点}, \\ \dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}, & x\text{为间断点}, \\ \dfrac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}, & x = \pm\pi. \end{cases} = S(x)$$

**思考** 如何求$S(x)$在$[-\pi, \pi]$以外点处的值?

**推论2** 设$f$以$2\pi$为周期，在$[-\pi, \pi]$上可积与绝对可积，且在$x$处有左、右导数(或**拟左、右导数**)，则$f$的F氏级数在$x$处收敛于

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

**定义** $f$在$x$处的**拟左、右导数**分别定义为

$$\lim_{u\to 0^+}\frac{f(x-u)-f(x-0)}{-u} \text{ 和 } \lim_{u\to 0^+}\frac{f(x+u)-f(x+0)}{u}$$

**例1** 写出 $f(x)=x^2\ (x\in[-\pi,\pi])$ 的F氏级数的和函数在$[-\pi,\pi]$上的表达式.

$$\boxed{x^2\sim\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx=x^2\quad(-\pi\le x\le\pi)}$$

**例2** 写出 $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi<x<0,\\ x, & 0\le x\le\pi\end{cases}$ 的F氏级数的和函数在$[-\pi,\pi]$上的表达式.

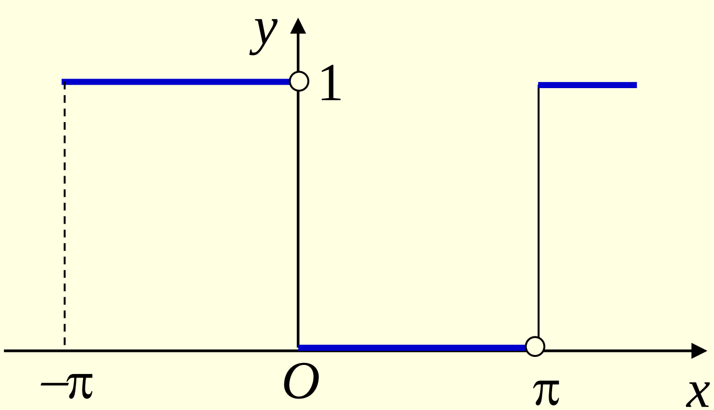
$$\boxed{f(x)\sim\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi}\cos nx+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin nx\right\}}=\begin{cases}0, & -\pi<x<0,\\ x, & 0\le x<\pi,\\ \dfrac{\pi}{2}, & x=\pm\pi.\end{cases}$$

**例3** 求 $f(x)=\begin{cases}1, & -\pi \le x < 0,\\ 0, & 0 \le x < \pi\end{cases}$ 的F氏级数, 并写出和函数.

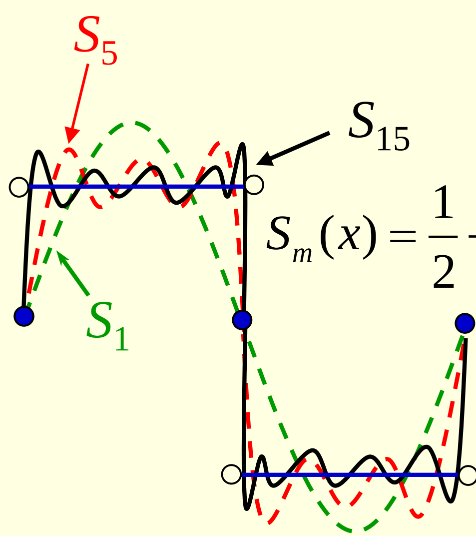
$$f(x) \sim \frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{n}\sin nx$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi}\left(\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\cdots\right)$$

$$S(x)=\begin{cases}1, & -\pi < x < 0,\\ \frac{1}{2}, & x=0,\pm\pi,\\ 0, & 0 < x < \pi.\end{cases}$$

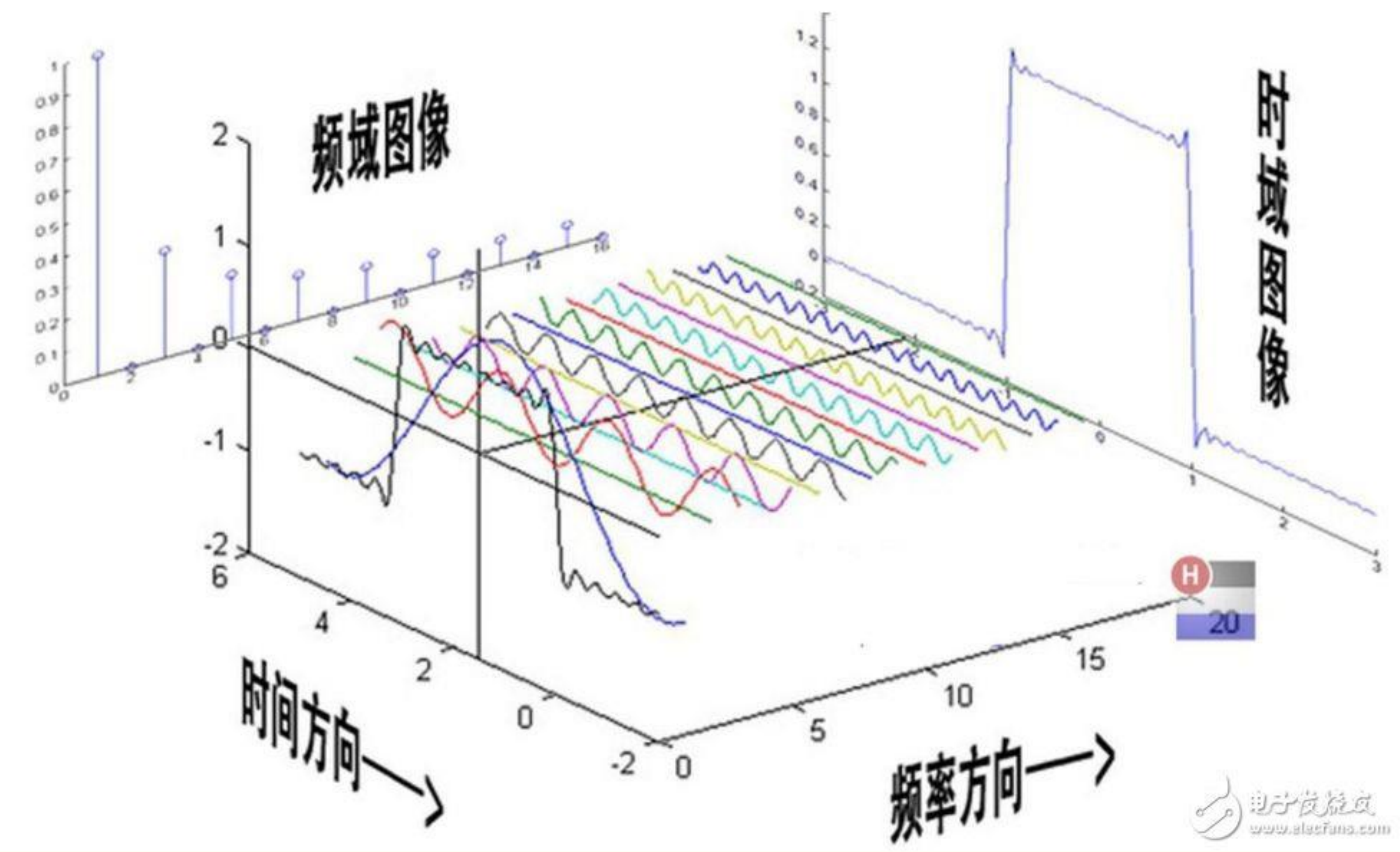



电工学方波




$$S_m(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{m}\frac{(-1)^n-1}{n}\sin nx$$

正弦波叠加


频域图像
时域图像
时间方向—→
频率方向—→
www.elecfans.com

# Chap12 — 3

## Fourier级数的性质

## 一、F氏级数的分析性质

分段连续函数 $f$ 在$[a, b]$上仅有限个第一类间断点.

**定理(逐项积分)** 设$f$ 在$[-\pi,\pi]$上分段连续，又

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

则$\forall x \in [-\pi, \pi]$有

$$\boxed{\begin{aligned}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t &= \frac{a_0}{2}x + \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x (a_n \cos nt + b_n \sin nt)\mathrm{d}t \\ &= \frac{a_0}{2}x + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}\sin nx - \frac{b_n}{n}\cos nx + \frac{b_n}{n}\right)\end{aligned}}$$

**说明** 定理对$[-\pi, \pi]$上可积与绝对可积函数$f$也成立!

**推论(必要条件)** 设$f$在$[-\pi,\pi]$上可积与绝对可积, 又

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

则 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}$ 收敛, 且

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \int_0^x f(t)\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x.}$$

**结论** 若 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}$ 发散, 则三角级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

必不是F氏级数.

**例1** 证明三角级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx}{\ln n}$ 点态收敛. 记

$$S(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx}{\ln n},$$

说明三角级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx}{\ln n}$ 不是其和函数$S(x)$的F氏级数.

**定理(逐项微分)** 设 $f \in D[-\pi,\pi]$, 且 $f(-\pi) = f(\pi)$, 若

$f'(x)$可积与绝对可积, 则

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (nb_n \cos nx - na_n \sin nx)$$

## 二、F氏级数的逼近和Bessel不等式

记$n$阶三角多项式集合为

$$T=\left\{T_n(x)\middle|T_n(x)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx)\right\}$$

又记 $X=\left\{f(x)\middle|\ f\text{在}[-\pi,\pi]\text{上可积与平方可积}\right\}$

问题 $\forall f(x)\in X$, 是否存在$T_n(x)\in T$使得$T_n(x)$是$f(x)$的最佳逼近?

思考 如何刻划两个函数的逼近(接近)程度?

**定义** 函数$f$和$g$的(平方平均偏差)距离为

$$d(f,g)=\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-g(x)]^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

**定理** 设 $f\in X$, 则对$\forall T_n\in T$有

$$d\big(f,S_n(f,x)\big)\le d\big(f,T_n(x)\big)$$

**推论(Bessel不等式)** 设 $f\in X$, 则$f$ 的Fourier系数满足

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\le\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x$$

**推论** 设 $f\in X$, 则级数 $\dfrac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$ 收敛, 从而

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0=\lim_{n\to\infty}b_n,$$

其中$a_n$, $b_n$是$f$ 的Fourier系数.

**定理(Parseval等式)** 设$f\in X$, 则$f$ 的Fourier系数满足

$$\boxed{\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x}$$

**例2** 已知 $x^2=\dfrac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$, 求 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^4}$