上 海 交 通 大 学 试 卷

（ 2015 至 2016 学年 第 2 学期 2016 年 05 月 04 日 ）

班级号____________ 学号____________ 姓名____________

课程名称 《数学分析（荣誉）》（2）(致远学院期中考试) 成绩____________

解析+审核 谭 宇 叶昊宇 排版 仲 泰

一、填空题（每小题 4 分，共 16 分）

1. 设 $z=f\left(\ln x+\dfrac{1}{y}\right)$，其中 $f(u)$ 可微，则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=$____________.

解：

算就对了.

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=xf'\left(\ln x+\frac{1}{y}\right)\cdot\frac{1}{x}+y^2f'\left(\ln x+\frac{1}{y}\right)\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right)=0$$

2. 曲面 $z=\arctan\dfrac{y}{x}$ 在点 $\left(1,1,\dfrac{\pi}{4}\right)$ 处的切平面方程为____________.

解：

取全微分：

$$\mathrm{d}z=\frac{-\frac{y}{x^2}\mathrm{d}x+\frac{1}{x}\mathrm{d}y}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=\frac{-y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$$

代入 $(x,y,z)=\left(1,1,\dfrac{\pi}{4}\right)$ 得到：

$$\mathrm{d}z=\frac{-\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{2}\Rightarrow \mathrm{d}x-\mathrm{d}y+2\,\mathrm{d}z=0$$

从而得到法向量 $\boldsymbol{n}=(1,-1,2)$，从而得到切平面方程：

$$(x-1)-(y-1)+2\left(z-\frac{\pi}{4}\right)=0\Rightarrow x-y+2z=\frac{\pi}{2}$$

3. 设空间域 $\Omega=\left\{(x,y,z)\middle| x^2+y^2+z^2\le 1\right\}$，则 $\displaystyle\iiint_{\Omega}[(x-2y)^2-4z^2]\mathrm{d}V=$____________.

解：

利用镜面对称性与轮换对称性即可：

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{\Omega}(x^2+4y^2-4z^2)\mathrm{d}V = \frac{1}{3}\int_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V \\
&= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^2\cdot r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r \\
&= \frac{1}{3}\cdot 2\pi\cdot 2\cdot\frac{1}{5} \\
&= \frac{4\pi}{15}
\end{aligned}
$$

4. 设曲面 $\Sigma=\left\{(x,y,z)\middle|x+y+z=1\,(x,y,z\geq 0)\right\}$，则曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} y^2\mathrm{d}S=$___________.

解：

直接投影后爆算就好了：

$$
\begin{aligned}
I &= \iint_D \sqrt{3}\,y^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{1-y}\sqrt{3}\,y^2\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1\sqrt{3}\,y^2(1-y)\mathrm{d}y = \sqrt{3}\,B(3,2) \\
&= \sqrt{3}\cdot\frac{\Gamma(3)\Gamma(2)}{\Gamma(5)} = \sqrt{3}\frac{2!\cdot 1!}{4!} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{12}
\end{aligned}
$$

其中利用了 B 函数与 Γ 函数，当然直接积分也是可以哒.

二、单项选择题（每小题 3 分，共 12 分）

5. 设 $f(x,y)=\begin{cases} xy\cdot\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$，则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处

①连续；　　②可偏导；　　③可微.

以上正确的结论有（　　）.

A. 0 个　　B. 1个　　C. 2 个　　D. 3 个

解：

根据极坐标形式：$f(x,y)=r^2\cos\theta\sin\theta\sin\dfrac{1}{r^2}$，可以直接看出：连续，且 $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$，可微.

从而该题选 D.

6. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 点沿 $\boldsymbol{l}=(1,2)$ 的方向导数为（　　）.

A. $\dfrac{2}{5\sqrt{5}}$.　　B. $\dfrac{4}{5\sqrt{5}}$.　　C. 0.　　D. 不存在.

解：

老老实实算就对了：

$$\lim_{r\to0^+}\frac{f(r,2r)-f(0,0)}{\sqrt{5}\,r}=\lim_{r\to0^+}\frac{4r^3}{\sqrt{5}\,r\cdot5r^2}=\frac{4}{5\sqrt{5}}$$

从而该题选 B.

7. 交换二次积分 $\int_0^1\mathrm{d}x\int_{2(1-x)}^{\sqrt{4-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y+\int_1^2\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{4-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$ 次序的结果为（　　）.

A. $\int_0^2\mathrm{d}y\int_{1-\frac{y}{2}}^{\sqrt{4-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$.

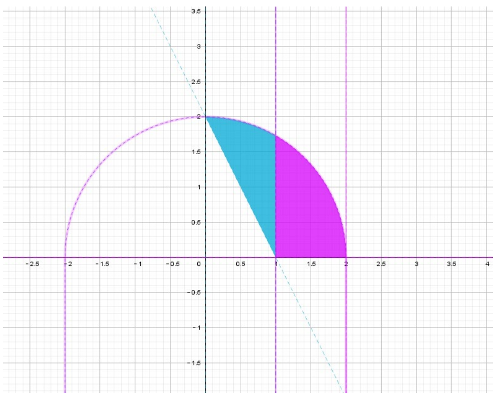
B. $\int_0^2\mathrm{d}y\int_{\frac{y}{2}-1}^{\sqrt{4-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$.

C. $\int_0^2\mathrm{d}y\int_{2(1-y)}^{\sqrt{4-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$.

D. $\int_0^2\mathrm{d}y\int_{2(y-1)}^{\sqrt{4-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$.

解：

一个图就搞定啦！



从而简单计算x下界：$y=2(1-x)\Rightarrow x-1-\dfrac{y}{2}$，该题选 A

8. 设 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 某邻域内连续，且 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1$，则（　　）.

A. $f(0,0)$ 必为极大值.

B. $f(0,0)$ 必为极小值.

C. $f(0,0)$ 必不是极值.

D. 不能判定 $f(0,0)$ 是否为极值.

解：

解法一：考虑流氓做法，直接取

$\dfrac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1\Rightarrow f(x,y)=(x^2+y^2)^2+xy=r^4+r^2\cos\theta\sin\theta=r^2(r^2+\cos\theta\sin\theta)$

从而$r\to 0$时$f(x,y)$的符号与θ有关，从而$f(0,0)$必然不是极值.

从而该题选 C.

解法二：老老实实做小量分析：

$$\frac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1+o(1),\sqrt{x^2+y^2}\to 0$$

整理得到：

$$\begin{aligned}f(x,y)&=(x^2+y^2)^2+xy+o\left[(x^2+y^2)^2\right]\\&=r^4+r^2\cos\theta\sin\theta+o(r^4)\\&=r^2(r^2+\cos\theta\sin\theta+o(r^2)),r\to 0\end{aligned}$$

从而$r\to 0$时$f(x,y)$的符号与θ有关，从而$f(0,0)$必然不是极值.

从而该题选 C.

三、(每小题 8 分，共 16 分)

9. 设 $z=z(x,y)$ 由方程 $x+y^2-ze^z=1$ 确定，又 $x=x(t)$ 由方程 $xe^x=\ln(1+t)$ 确定，$y=\cos t$，

求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 以及 $\left.\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}$.

解：

我直接反胃. 对第一个式子求微分：

$$\mathrm{d}x+2y\,\mathrm{d}y-(z+1)e^z\,\mathrm{d}z=0$$

从而得到：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\mathrm{e}^{z}(z+1)},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{\mathrm{e}^{z}(z+1)}$$

唉，后面没办法啊，对t求导的话，考虑链导法则：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}&=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\\&=\frac{1}{\mathrm{e}^{z}(z+1)}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{2y}{\mathrm{e}^{z}(z+1)}(-\sin t)\end{aligned}$$

逐项计算，$t=0$时，$x=0,y=1,z=0$，对$x\mathrm{e}^{x}=\ln(1+t)$两边取微分：

$$(x+1)\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{1+t}$$

代入$t=0$得到：

$$\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=1$$

从而得到：

$$\left.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=1$$

10.设 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，$z=f\left(x,\frac{x}{y}\right)$，求 z_x,z_y,z_{xy}.

解：

算就对了：

$$z_x=f_1+\frac{1}{y}f_2,\ z_y=-\frac{x}{y^2}f_2$$

$$z_{xy}=z_{yx}=-\frac{1}{y^2}f_2-\frac{x}{y^2}\left(f_{12}+\frac{1}{y}f_{22}\right)$$

四、(本题共 10 分)

11.求 $f(x,y)=5x^2+5y^2-8xy$ 在椭圆域 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2-xy\le 75\right\}$ 上的最值，并问该最值是否为 $f(x,y)$ 的极值?

（？？？？我一大个问号，为什么让我判断最值是不是极值？还是光滑函数？应该想问局部最值是否是全局极值。

解：

先作换元$x=\frac{u+v}{\sqrt{2}},y=\frac{u-v}{\sqrt{2}}$，从而得到：

$$f(x,y)=g(u,v)=5u^2+5v^2-8\cdot\frac{u^2-v^2}{2}=u^2+9v^2$$

区域变为：

$$D=\{(u,v):u^2+3v^2\leqslant 150\}$$

再伸缩变换一下好了：$\lambda=u,\mu=\sqrt{3}\,v$，从而得到：

$$f(x,y)=h(\lambda,\mu)=\lambda^2+3\mu^2$$

区域变为：

$$D=\{(\lambda,\mu):\lambda^2+\mu^2\leqslant 150\}$$

直接看出$f(x,y)_{\min}=h(0,0)=f(0,0)=0$，且也为全局最小值，当然也是极小值.

对于最大值，利用极坐标换元$\lambda=r\cos\theta,\mu=r\sin\theta,0\leqslant r\leqslant\sqrt{150},\theta\in[0,2\pi]$，从而得到：

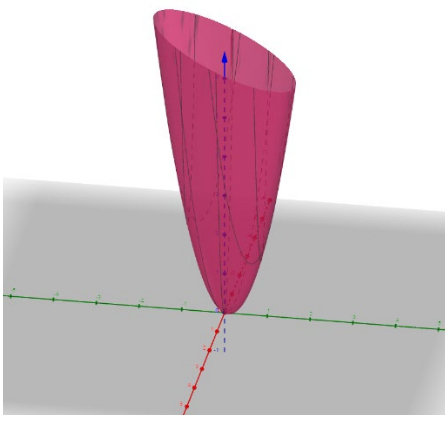
$$f(x,y)=\varphi(r,\theta)=r^2+2r^2\sin^2\theta\leqslant r^2+2r^2\leqslant 3\times 150=450$$

当且仅当$\sin^2\theta=1,r=\sqrt{150}$时取等号，从而$f(x,y)$在$D$上最大值为

$$f(x,y)=\varphi\left(\sqrt{150},\frac{\pi}{2}\right)=\varphi\left(\sqrt{150},\frac{3\pi}{2}\right)=f(5,-5)=f(-5,5)=450.$$

当$\theta\in\left\{\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right\}$时，$\varphi\left(r,\frac{\pi}{2}\right)$随$r$增加而增加，由仿射变换的性质知，$f(5,-5),f(-5,5)$不是$f(x,y)$在$\mathbb{R}^2$上的极值.

Ps: 最后还是画一下函数图像吧：



五、计算下列积分（每小题 10 分，共 30 分）

12.计算二重积分 $\iint\limits_D \left(\sqrt{x^2+y^2}+y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D： $x^2+y^2\le 4$, $(x-1)^2+y^2\ge 1$.

解：

记 $D_1=\{(x,y):x^2+y^2\leqslant 4\}$， $D_2=\{(x,y):(x-1)^2+y^2\leqslant 1\}$，从而有：

$$\begin{aligned}
I&=\iint_{D_1}\left(\sqrt{x^2+y^2}+y\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-\iint_{D_2}\left(\sqrt{x^2+y^2}+y\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r^2\mathrm{d}r-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}r^2\mathrm{d}r\\
&=2\pi\cdot\frac{2^3}{3}-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2^3\cos^3\theta}{3}\mathrm{d}\theta\\
&=\frac{16\pi}{3}-\frac{16}{3}\cdot\frac{2}{3}\\
&=\frac{16}{3}\left(\pi-\frac{2}{3}\right)
\end{aligned}$$

13.计算 $\int\limits_C \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$，其中 C 是起点 $A(-1,0)$ 到终点 $B(1,0)$ 的抛物线段 $y=x^2-1$.

解：

注意到 $\frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\mathrm{d}\arctan\frac{y}{x}$，从而积分与路径无关，从而直接选择单位圆：

$$\begin{cases}x=\cos\theta\\ y=\sin\theta\end{cases},\theta:-\pi\to 0$$

从而计算得：

$$I=\int_{-\pi}^{0}\mathrm{d}\theta=\pi$$

14.计算 $\iint\limits_\Sigma \frac{ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ $(a>0)$，其中 Σ： $z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ ，取上侧.

解：

记 $\Sigma^-:z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ ，取上侧， $\Sigma_1^+=\{(x,y,z):z=0,x^2+y^2\leqslant a^2\}$，取上侧，

$D=\{(x,y):x^2+y^2\leqslant a^2\}$，$V=\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2\leqslant 1,z\leqslant 0\}$,利用高斯定理得到：

$$I=\frac{1}{a}\int_{\Sigma^+\cup\Sigma_1^+}(-ax)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-(z+a)^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-\frac{1}{a}\int_{\Sigma_1^+}(-ax)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-(z+a)^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$\xlongequal{\text{Gauss}}\frac{1}{a}\int_V(-a-2z-2a)\mathrm{d}V+\frac{1}{a}\iint_D a^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{a}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^a(-2r\cos\varphi-3a)\cdot r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r+a\cdot\pi a^2$$

$$=-\frac{\pi a^3}{2}$$

六、(本题共 8 分)

15.设 $f\in C(\mathbb{R})$，$\varphi(x,y)$ 具有一阶连续偏导数.

(1) 令 $u(x,y)=\int_0^{\varphi(x,y)}f(t)\mathrm{d}t$，证明：$u(x,y)$ 可微，并求 $\mathrm{d}u$；

(2) 设 l 为 $\mathbb{R}^2$ 上的光滑简单闭曲线，证明：

$$\oint_l f(\varphi(x,y))\varphi_x(x,y)\mathrm{d}x+f(\varphi(x,y))\varphi_y(x,y)\mathrm{d}y=0.$$

（你说这个不是送分题，我都不信.

证明：

(1) 证法一：硬分析.$u_x=f(\varphi(x,y))\varphi_x(x,y)$, $u_y=f(\varphi(x,y))\varphi_y(x,y)$，目标：

$$\lim_{r\to 0^+}\frac{u(x+r\cos\theta,y+r\sin\theta)-u(x,y)-r\cos\theta u_x(x,y)-r\sin\theta u_y(x,y)}{r}=0$$

也即：

$$\frac{1}{r}\left[\int_{\varphi(x,y)}^{\varphi(x+r\cos\theta,y+r\sin\theta)}f(t)\mathrm{d}t-r\cos\theta f(\varphi(x,y))\varphi_x(x,y)-r\sin\theta f(\varphi(x,y))\varphi_y(x,y)\right]\to 0(r\to 0^+)$$

对第一项利用积分中值定理：

$$\int_{\varphi(x,y)}^{\varphi(x+r\cos\theta,y+r\sin\theta)}f(t)\mathrm{d}t=f(\xi)\left[\varphi(x+r\cos\theta,r\sin\theta)-\varphi(x,y)\right],\xi\to\varphi(x,y),r\to 0^+$$

再将$\varphi(x+r\cos\theta,y+r\sin\theta)$作泰勒展开：

$$\varphi(x+r\cos\theta,r\sin\theta)-\varphi(x,y)=\varphi_x(\eta,\zeta)\cos\theta+\varphi_y(\eta,\zeta)\sin\theta,(\eta,\zeta)\to(x,y),r\to 0$$

从而原极限整理得到：

$$L=\lim_{r\to 0^+}\cos\theta[f(\xi)\varphi_x(\eta,\zeta)-f(\varphi(x,y))\varphi_x(x,y)]+\lim_{r\to 0^+}\sin\theta[f(\xi)\varphi_y(\eta,\zeta)-f(\varphi(x,y))\varphi_y(x,y)]$$
$$=0$$

最后一个等号是由f,φ_x,φ_y的连续性保证的. 从而有：

$$\mathrm{d}u=f(\varphi(x,y))\varphi_x(x,y)\mathrm{d}x+f(\varphi(x,y))\varphi_y(x,y)\mathrm{d}y$$

证法二：嘿嘿，结论真香. .$u_x=f(\varphi(x,y))\varphi_x(x,y)$，$u_y=f(\varphi(x,y))\varphi_y(x,y)$，一阶偏导连续，

从而u可微.

(2) 由第一问与Green公式立即可得目标结论.

七、证明题（本题共 8 分）

16.设平面域$D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le a^2\right\}$，二元函数$f(x,y)$在$D$上不恒为零且有连续的偏导数，

又对$\forall(x,y)\in\partial D: x^2+y^2=a^2$恒有$f(x,y)=0$. 证明：

(1) $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\dfrac{1}{2}\iint\limits_D\left(x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$；

(2) $\iint\limits_D f^2(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\le a^2\iint\limits_D\left[\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

证明：

(1) 考虑Green公式，想象一个力(f,f)在$x^2+y^2=a^2$上逆时针做功一圈，则其方向向量为$(-x,y)$，从而其做功为：

$$0=\int_\Gamma -xf(x,y)\mathrm{d}x+yf(x,y)\mathrm{d}y\xlongequal{\text{Green}}\iint_D\left(f+y\frac{\partial f}{\partial y}+f+x\frac{\partial f}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

整理即可得到：

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-\frac{1}{2}\iint_D\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

(2) 在(1)中用f^2替换掉f，利用柯西不等式得到：

$$
\begin{aligned}
\iint_D f^2(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= -\iint_D f\left[x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&\leqslant \sqrt{\iint_D f^2(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \iint_D \left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y} \\
&\leqslant \sqrt{\iint_D f^2(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \iint_D (x^2+y^2)\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y} \\
&\leqslant \sqrt{\iint_D f^2(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \iint_D a^2\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}
\end{aligned}
$$

两边同时平方即，且注意到$\iint_D f^2(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \neq 0$，即可得到：

$$
\iint_D f^2(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leqslant a^2\iint_D\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y
$$