上 海 交 通 大 学 试 卷

（ 2019 至 2020 学年 第 1 学期 2019 年 11 月 27 日 ）

班级号__________ 学号__________ 姓名 __________

课程名称 《数学分析》(荣誉)I (期中考试) 成绩 __________

题 号	一	二	三	四	五	六	七	总 分
满 分	**20**	**12**	**10**	**32**	**10**	**8**	**8**	**100**
得 分								

一、填空题 (每小题 4 分，共 20 分)

1. 若直线 $y=2x+b$ 是抛物线 $y=x^2$ 在某点处的法线，则 $b=$__________.

2. 设 $f(x)=\ln\dfrac{1+2x}{1-x}$，则 $f^{(2019)}(0)=$__________.

3. 设 $\dfrac{\sin x}{x}$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int xf'(x)\mathrm{d}x=$__________.

4. 记 $M(n)=\max\limits_{0\le x\le 1}\left\{x^2(1-x)^n\right\}$ $(n\in\mathbb{N})$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^2M(n)\right)=$__________.

5. 设函数 $y=2x+\ln x$ 的反函数为 $x=x(y)$，则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}\right|_{y=2}=$__________.

二、单项选择题 (每小题 3 分，共 12 分)

6. 若函数 $f(x)$ 的导函数是 $\sin x$，则 $f(x)$ 的一个原函数是 …… (   )

(A) $1-\cos x$. **(B)** $1+\cos x$. **(C)** $1-\sin x$. **(D)** $1+\sin x$.

7. 设函数 $f(x)$ 在 $U(0)$ 可导，且 $f(0)=0$，$f'(0)>0$，则 $\exists\delta>0$，使得… (   )

(A) 对 $\forall x\in(0,\delta)$ 有 $f'(x)>0$. **(B)** 对 $\forall x\in(0,\delta)$ 有 $f(x)>0$.

(C) 对 $\forall x\in(-\delta,0)$ 有 $f'(x)>0$. **(D)** 对 $\forall x\in(-\delta,0)$ 有 $f(x)>0$.

8. 设函数 f 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内二阶可导，且存在 $c\in(a,b)$，使得 $f(c)>\max\{f(a),f(b)\}$，则 …… (   )

(A) 对任意 $x\in(a,b)$，有 $f''(x)\le 0$. **(B)** 必存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)<0$.

(C) 对任意 $x\in(a,b)$，有 $f''(x)\ge 0$. **(D)** 必存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)>0$.

9. 设 $F'(x)=f(x)$ $(x\in\mathbb{R})$. 下列命题中正确的有 …… (   )

① 若 $f(x)$ 为周期函数，则 $F(x)$ 也必为周期函数.

② 若 $f(x)$ 为奇函数，则 $F(x)$ 必为偶函数.

③ 若 $f(x)$ 为偶函数，则 $F(x)$ 必为奇函数.

(**A**) 0 个.　　(**B**) 1 个.　　(**C**) 2 个.　　(**D**) 3 个.

三、作图题 (本题共 10 分)

10. 全面讨论 $f(x)=\dfrac{(x-1)^2}{4(x+1)}$ 的性态，并作出函数图像.

四、计算题（每小题 8 分，共 32 分）

11. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$ 求 $f'(x)$.

12. 计算不定积分 $\int\dfrac{1}{1+\cos^2 x}dx$.

13. 计算不定积分 $\int \ln(1+\sqrt{x})\mathrm{d}x$.

14. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin x)-x}{x^3}$.

五、 (本题共 10 分)

15. 设 $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}, x\in[3,+\infty)$.

(1) 证明：对任意正整数 $n\geq 3$，方程 $f(x)=n$ 存在唯一实根 $x_n\in(3,+\infty)$；

(2) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{n\ln n}$.

六、证明题 (本题共 8 分)

16. 设函数 f 在 $[0,1]$ 上可导，且 f 的每个零点都是**简单零点**，即若 $f(x_0)=0$，则 $f'(x_0)\neq 0$. 证明： f 在 $[0,1]$ 上至多有限个零点.

七、证明题（本题共 8 分）

17. 设 f 为 (a,b) 内的凸函数．证明：f 满足**内闭 Lipschitz 条件**，即对 $\forall[\alpha,\beta]\subset(a,b)$，$\exists L>0$ 使得对 $\forall x_1,x_2\in[\alpha,\beta]$，有

$$|f(x_1)-f(x_2)|\le L|x_1-x_2|$$