上 海 交 通 大 学 试 卷

（ 2019 至 2020 学年 第 1 学期 2019 年 10 月 23 日 ）

班级号______________ 学号________________ 姓名 _________

课程名称 《数学分析荣誉(1)》 (测验) 成绩 _________

题 号	一	二	三	四	五	六	七	总 分
满 分	**20**	**12**	**10**	**32**	**10**	**8**	**8**	**100**
得 分								

一、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1． “$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 存在”用 Cauchy 收敛准则叙述为：

____

2． 设 $f(x)=\sin x,\ x\in\left[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right]$，则 $f(x)$ 的反函数 $f^{-1}(x)=$____________________.

3． 若当 $x\to 0$ 时，$\sqrt{1+x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}\sim ax^b$，则常数 $a=$______，$b=$______.

4． 设函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上定义，且 f 有且仅有两个连续点，则 $f(x)$ 的表达式可以是：

____

5． 设 $x_n=\sqrt[n]{n+1}\ (n\in\mathbb{N})$，则 $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\{x_n\}=$_______，$\inf\limits_{n\in\mathbb{N}}\{x_n\}=$_______.

二、单项选择题（每小题 3 分，共 12 分）

6． 数列 $\left\{\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)\right\}$ ……【 】

(A) 单调且收敛于 0.　　**(B)** 单调且收敛于 1.

(C) 非单调.　　**(D)** 发散.

7． 设函数 f 在区间 I 上连续，则 f 在 I 上严格单调是 f 存在反函数的…【 】

(A) 充分不必要条件.　　**(B)** 必要不充分条件.

(C) 充要条件.　　**(D)** 既非充分又非必要条件.

8．函数 $\sin(x^2)$，$x\sin\dfrac{1}{x}$，$\sin^2 x$，$\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ 中，在 $(0,+\infty)$ 内一致连续的有【　　】

(**A**) 1 个.　　(**B**) 2 个.　　(**C**) 3 个.　　(**D**) 4 个.

9．设 $f(x)=\begin{cases}1, & x=0,1\\ q, & x=\dfrac{p}{q},(p,q\in\mathbb{N},\text{且互质})\\ 0, & x\in\mathbb{Q}^c\end{cases}$，$x\in[0,1]$，则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 中⋯【　　】

(**A**)处处存在极限, 且极限值为 0.　　(**B**)处处无极限，不连续.

(**C**)有理点处连续.　　(**D**)无理点处连续.

三、证明题（本题共 10 分）

10．用“$\varepsilon-\mathbb{N}$”定义证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+2n+3}{3n^2-2n+1}=\dfrac{2}{3}$.

四、求下列极限（每小题 8 分，共 32 分）

11． $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln(n+1)}$.

12． $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2^2}\cos\dfrac{x}{2^3}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}\right),\quad (x\neq 0)$.

13． $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x^2\ln\left(\cos\dfrac{\pi}{x}\right)\right]$.

14. $\lim\limits_{x \to 1^-}(2-x)^{\tan\frac{\pi x}{2}}$.

五、证明题（本题共 10 分）

15. 用闭区间套定理证明致密性定理.

六、证明题（本题共 8 分）

16．设函数 $f(x), g(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上定义，满足条件 $g(x) \in C[a,b]$， $f(x)+g(x)$ 在 $[a,b]$ 上递增，且 $f(a)>0, f(b)<0$. 证明：存在 $\xi \in (a,b)$，使得 $f(\xi)=0$.

七、证明题（本题共 8 分）

17. 设函数 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上一致连续，证明：$\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $[1,+\infty)$ 有界.