

上海交通大学试卷

(2020 至 2021 学年 第 1 学期 2020 年 10 月 28 日)

班级号 _____ 学号 _____ 姓名 _____

课程名称 _____ 《数学分析 I》(荣誉)(测验) _____ 成绩 _____

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
满分	20	12	10	32	10	8	8	100
得分								

一、填空题 (每小题 4 分, 共 20 分)

1. “数列 $\{x_n\}$ 非无穷大” 的肯定叙述为:

2. “函数 $f(x)$ 在 I 上非一致连续” 的肯定叙述为:

3. 设 $f(x) = \cos 2x$, $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, 则 $f(x)$ 的反函数

$$f^{-1}(x) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

4. 设 $x_n = \frac{n-1}{n+1} \cos \frac{2n\pi}{3}$ ($n \in \mathbb{N}$), 则 $\sup_{n \in \mathbb{N}} \{x_n\} = \underline{\hspace{2cm}}$, $\inf_{n \in \mathbb{N}} \{x_n\} = \underline{\hspace{2cm}}$.

5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{n^2} = \underline{\hspace{2cm}}.$

二、单项选择题 (每小题 3 分, 共 12 分)

6. 设函数 $f(x)$ 在 $U(x_0, \delta)$ 内单调, 其中 $\delta > 0$, 则 $f(x)$ 在点 x_0 处 …… 【 】

(A) 左、右极限必存在, 且都等于 $f(x_0)$.

(B) 左、右极限必存在, 且至少一个等于 $f(x_0)$.

(C) 左、右极限必存在, 但都未必等于 $f(x_0)$.

(D) 左、右极限都未必存在.

7. 考虑下列断语, 则有 【 】

I. 若函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内无界, 则 $f(x)$ 在 (a,b) 内必不一致连续.

II. 若函数 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上连续且有界, 则 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上必一致连续.

(A) I 正确, II 不正确. (B) I 不正确, II 正确.

(C) I 和 II 都正确. (D) I 和 II 都不正确.

8. 设 $x_1 = 1$, $x_{n+1} = 1 + \frac{x_n^2}{2}$ ($n \in \mathbb{N}$). 以下关于数列 $\{x_n\}$ 叙述正确的是 【 】

(A) $\{x_n\}$ 单调增加且收敛. (B) $\{x_n\}$ 单调增加且为正无穷大.

(C) $\{x_n\}$ 不单调但收敛. (D) $\{x_n\}$ 不单调但为正无穷大.

9. 考虑下列断语, 则有 【 】

① 不存在闭区间 $[0,1]$ 上的连续函数, 使它的值域为开区间 $(0,1)$.

② 不存在 \mathbb{R} 上的连续函数, 使它的每一函数值都恰好被取到两次.

③ 不存在 \mathbb{R} 上的连续函数, 使它的每一函数值都恰好被取到三次.

(A) ①和②正确, ③不正确. (B) ①和③正确, ②不正确.

(C) ②和③正确, ①不正确. (D) ①, ②和③都正确.

三、证明题 (本题共 10 分)

10. 用“ $\varepsilon - N$ ”定义证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 2n - 1}{n^2 - 2} = 3$.

四、求下列极限（每小题 8 分，共 32 分）

11. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2\sqrt{2} + 3\sqrt[3]{3} + \cdots + n\sqrt[n]{n}}{n^2}.$

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos 2x}{x^2}.$

13. $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + 2x)^{\frac{1}{x}}.$

14. 设 $a_1 = \sin 1$, $a_{n+1} = \sin a_n$ ($n \in \mathbb{N}$). 证明数列 $\{a_n\}$ 收敛, 并求其极限值.

五、证明题 (本题共 10 分)

15. 若无限集 A 与自然数集 \mathbb{N} 之间存在一一对应, 则称集合 A 是**可列集**. 不可列的无限集称为**不可列集**. 请用闭区间套定理证明: 实数集 \mathbb{R} 是不可列集.

六、证明题（本题共 8 分）

16. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上有定义，在 $[a, +\infty)$ 的任一有限子区间有界，且

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+1) - f(x)) = l \text{ (有限数)}. \text{ 证明: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = l.$$

七、证明题（本题共 8 分）

17. 设 $f \in C(\mathbb{R})$ 且为周期函数. 令 $E = \{T \mid T > 0 \text{ 且 } T \text{ 为 } f(x) \text{ 的周期}\}$, $T_0 = \inf E$. 证明: 若 $T_0 = 0$, 则 $f(x) \equiv C$ (常数).