# §2.8 拉普拉斯(Laplace)定理.行列式的乘法规则

定义 9 在一个$n$级行列式$D$中任意选定$k$行$k$列$(k \le n)$，位于这些行和列的交叉点上的$k^2$个元素按照原来的次序组成一个$k$级行列式$M$，称为行列式$D$的一个$k$级子式；在$D$中划去这$k$行$k$列后余下的元素按照原来的次序组成一个$n-k$级行列式$M'$，称为$k$级子式$M$的余子式。

注：$M$与$M'$互为余子式。

例 1 在四级行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

中选定第一、三行，第二、四列得到一个二级子式$M$

$$M=\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$M$的余子式

$$M'=\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}。$$

例 2 在五级行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{25} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{51} & a_{52} & \cdots & a_{55} \end{vmatrix}$$

中$M=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{15} \\ a_{22} & a_{23} & a_{25} \\ a_{42} & a_{43} & a_{45} \end{vmatrix}$与$M'=\begin{vmatrix} a_{31} & a_{34} \\ a_{51} & a_{54} \end{vmatrix}$互为余子式。

定义 10 设$D$的$k$级子式$M$在$D$中所在的行、列指标分别为$i_1$、$i_2$、$\cdots$、$i_k$与$j_1$、$j_2$、$\cdots$、$j_k$，则$M$的余子式$M'$前面加上符号$(-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)}$后称为$M$的代数余子式。

引理 行列式$D$的任一个子式$M$与它的代数余子式$A$的乘积中的每一项都是行列式$D$的展开式中的一项，而且符号也一致。

证明：先证明$M$位于行列式$D$的左上方的情形：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & M & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & a_{k,k+1} & \cdots & a_{kn} \\ a_{k+1,1} & \cdots & a_{k+1,k} & a_{k+1,k+1} & \cdots & a_{k+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & M' & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

此时，$M$ 的代数余子式 $A$ 为

$$A=(-1)^{(1+2+\cdots+k)+(1+2+\cdots+k)}M'=M'$$

$M$ 的每一项可写作 $a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\cdots a_{k\alpha_k}$，其中 $\alpha_1$、$\alpha_2$、…、$\alpha_k$ 为 1、2、…、$k$ 的一个排列，其前面所带符号为 $(-1)^{\tau(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k)}$；

$M'$ 的每一项可写 作 $a_{k+1,\beta_{k+1}}a_{k+2,\beta_{k+2}}\cdots a_{n\beta_n}$，其中 $\beta_{k+1}$、$\beta_{k+2}$、…、$\beta_n$ 为 $k+1$、$k+2$、…、$n$ 的一个排列，其前面所带符号为 $(-1)^{\tau((\beta_{k+1}-k)(\beta_{k+2}-k)\cdots(\beta_n-k))}$，这两项的乘积为

$$a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\cdots a_{k\alpha_k}a_{k+1,\beta_{k+1}}a_{k+2,\beta_{k+2}}\cdots a_{n\beta_n}$$

其前面所带符号为 $(-1)^{\tau(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k)+\tau((\beta_{k+1}-k)(\beta_{k+2}-k)\cdots(\beta_n-k))}=(-1)^{\tau(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k\beta_{k+1}\beta_{k+2}\cdots\beta_n)}$，于是，这个乘积项是行列式 $D$ 的展开式中的一项，而且符号也一致。

下证一般情形：

设子式 $M$ 位于 $D$ 的第 $i_1$、$i_2$、…、$i_k$ 行，第 $j_1$、$j_2$、…、$j_k$ 列，其中 $i_1<i_2<\cdots<i_k$；$j_1<j_2<\cdots<j_k$。

变动 $D$ 中行列的次序使 $M$ 位于 $D$ 的左上角。为此，先把第 $i_1$ 行依次与第 $i_1-1$、$i_1-2$、…、1 行对换，这样经过 $i_1-1$ 次行变换将第 $i_1$ 行换到第 1 行；如此继续下去，一共经过 $(i_1-1)+(i_2-2)+\cdots+(i_k-k)=(i_1+i_2+\cdots+i_k)-(1+2+\cdots+k)$ 次行变换把第 $i_1$、$i_2$、…、$i_k$ 行依次换到第 1、2、…、$k$ 行。

利用类似的列变换，一共经过

$$(j_1-1)+(j_2-2)+\cdots+(j_k-k)=(j_1+j_2+\cdots+j_k)-(1+2+\cdots+k)$$

次列变换把第 $j_1$、$j_2$、…、$j_k$ 列依次换到第 1、2、…、$k$ 列。

用 $D_1$ 表示变换后所得的新行列式，则

$$D_1=(-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)-(1+2+\cdots+k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)-(1+2+\cdots+k)}D=(-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)}D$$

于是，$D_1$ 和 $D$ 的展开式中出现的项是一样的，只是每一项都差符号 $(-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)}$。

现在 $M$ 位于 $D_1$ 的左上角，因而 $MM'$ 中每一项都是行列式 $D_1$ 的展开式中的一项，而且符号也一致；又因

$$MA=(-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)}MM'$$

所以$MA$中每一项都是行列式$D$的展开式中的一项，而且符号也一致。

定理 6(拉普拉斯定理) 设在行列式$D$中任意取定了$k$ $(1\le k\le n-1)$行，由这$k$行元素所组成的一切$k$级子式与它们的代数余子式的乘积之和等于行列式$D$。

证明：设$D$中取定$k$行后得到的子式为$M_1$、$M_2$、$\cdots$、$M_t$，它们的代数余子式分别为$A_1$、$A_2$、$\cdots$、$A_t$。

由引理得$M_iA_i$中每一项都是行列式$D$的展开式中的一项，且符号相同，而$\sum_{i=1}^{t}M_iA_i$中有

$C_n^k k!(n-k)!=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}k!(n-k)!=n!$项，

又因$M_iA_i$和$M_jA_j$ $(i\ne j)$无公共项，所以

$$D=\sum_{i=1}^{t}M_iA_i\text{。}$$

例 3 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&2&1&4\\0&-1&2&1\\1&0&1&3\\0&1&3&1\end{vmatrix}$$

解：在$D$中取定第一、二行，得到六个子式：

$$M_1=\begin{vmatrix}1&2\\0&-1\end{vmatrix}，\ M_2=\begin{vmatrix}1&1\\0&2\end{vmatrix}，\ M_3=\begin{vmatrix}1&4\\0&1\end{vmatrix}，\ M_4=\begin{vmatrix}2&1\\-1&2\end{vmatrix}，\ M_5=\begin{vmatrix}2&4\\-1&1\end{vmatrix}，\ M_6=\begin{vmatrix}1&4\\2&1\end{vmatrix}，$$

它们对应的代数余子式为

$$A_1=(-1)^{(1+2)+(1+2)}\begin{vmatrix}1&3\\3&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&3\\3&1\end{vmatrix}，\ A_2=(-1)^{(1+2)+(1+3)}\begin{vmatrix}0&3\\1&1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}0&3\\1&1\end{vmatrix}，$$

$$A_3=(-1)^{(1+2)+(1+4)}\begin{vmatrix}0&1\\1&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&1\\1&3\end{vmatrix}，\ A_4=(-1)^{(1+2)+(2+3)}\begin{vmatrix}1&3\\0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&3\\0&1\end{vmatrix}，$$

$$A_5=(-1)^{(1+2)+(2+4)}\begin{vmatrix}1&1\\0&3\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&1\\0&3\end{vmatrix}，\ A_6=(-1)^{(1+2)+(3+4)}\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}$$

所以$D=\sum_{i=1}^{6}M_iA_i=(-1)\times(-8)-2\times(-3)+1\times(-1)+5\times1-6\times3+(-7)\times1=-7$。

定理 7 两个$n$级行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{与} D_2=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

的乘积等于一个$n$级行列式

$$C=\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix}$$

其中$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$。

证明：构造一个$2n$级行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

将$D$按前$n$行展开，由拉普拉斯定理得：

$$D=D_1D_2$$

现证$D=C$，对$D$作初等行变换，将第$n+1$行的$a_{11}$倍；第$n+2$行的$a_{12}$倍；$\cdots$；第$2n$行的$a_{1n}$倍加到第一行，得：

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

再将第$n+1$行的$a_{k1}$倍；第$n+2$行的$a_{k2}$倍；$\cdots$；第$2n$行的$a_{kn}$倍$(k=2,3,\cdots,n)$加到第$k$行，得：

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

将$D$按前$n$行展开，由拉普拉斯定理得：

$$D=\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix}(-1)^{(1+2+\cdots+n)+(n+1+n+2+\cdots+2n)}\begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix}=C$$

所以$C=D_1D_2$。