P42/12　　9.29作业

证：$|a_{n+p}-a_n| = \frac{\sin(n+1)x}{(n+1)^2} + \frac{\sin(n+2)x}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{\sin(n+p)x}{(n+p)^2}$

$< \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2}$

$< \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)}$

$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p}$

$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}$

故 $\forall \varepsilon>0$ $\exists N=[\frac{1}{\varepsilon}]+1$, $\forall n>N$ $\forall p\in\mathbb{N}$ 有 $|a_{n+p}-a_n|<\varepsilon$

故 $\{a_n\}$ 为基本列 所以 $\{a_n\}$ 收敛

P42/13

证：$\because$ $\{|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|\}$ 收敛

$\therefore$ 由 Cauchy 收敛准则

$\forall \varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N}$, $\forall n>N$, $\forall p\in\mathbb{N}$: $||a_{n+1}|+\cdots+|a_{n+p}||<\varepsilon$

又 $|a_{n+1}+\cdots+a_{n+p}| < ||a_{n+1}|+\cdots+|a_{n+p}|| < \varepsilon$

故 $\{a_1+a_2+\cdots+a_n\}$ 也是基本列

$\therefore$ $\{a_1+a_2+\cdots+a_n\}$ 也收敛

P42/14

证：令 $\{A_n\}=\{|x_2-x_1|+\cdots+|x_{n+1}-x_n|\}$

$A_{n+1}-A_n=|x_{n+2}-x_{n+1}|\geqslant 0$，由单调有界定理，$\{A_n\}$ 收敛

由 Cauchy 收敛准则

$\forall \varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N}$, $\forall n>N$, $\forall p\in\mathbb{N}$ 有 $|A_{n+p}-A_n|<\varepsilon$

又 $|A_{n+p}-A_n| = ||x_{n+p+1}-x_p|+\cdots+|x_{n+2}-x_{n+1}|| > |x_{n+p+1}-x_p+x_p-x_{p-1}+\cdots+x_{n+2}-x_{n+1}|$

$= |x_{n+p+1} - x_{n+1}| < \varepsilon$

故由Cauchy 收敛准则 $\{x_n\}$也收敛

P77/1 因$\{x_n\}$有界

故由B-W定理 存在$\{x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots x_{n_k}, \cdots\}$为收敛数列

故 $\{y_{n_1}, y_{n_2} \cdots y_{n_k}, \cdots\}$有界

又由B-W定理，在$\{n_k\}$中可挑选出$\{m_k\}$使得$\{y_{m_k}\}$为收敛数列

故由归并性定理$\{x_{m_k}\}$也为收敛数列

P77/2 ∵$\{x_n\}$无界

∴ $\forall M>0$ $\exists N \in \mathbb{N}$ 有 $|x_N| > M$

故而一定存在一个子列有$\{x_{n_k}^{(1)}\}$单调递增到无穷大（构造过程略）

∵$\{x_n\}$不是无穷数列

∴ $\exists M>0$，$\forall N \in \mathbb{N}$ $\exists N_1 > N$：$|x_{N_1}| \le M$

故而$\{x_n\}$一定存在一子列有界，由B-W定理该子列有收敛子列$\{x_{n_k}^{(2)}\}$

（见Ex1，构造略）

P77/3

证：由B-W定理 存在 $\lim\limits_{k\to+\infty} x_{n_k}^{(1)} = \alpha$ $\alpha \in [a,b]$，a, b分别为$\{x_n\}$的下上确界

由极限定义 $\forall \varepsilon > 0$ $[\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon]$区间内包含$\{x_{n_k}^{(1)}\}$的无穷多项

即包含$\{x_n\}$的无穷多项

而$[a, \alpha-\varepsilon]$与$[\alpha+\varepsilon, b]$中至少有一区间含$\{x_n\}$中的无穷多项

否则与发散假设相悖，取一记为$[a_1, b_1]$，该区间内的项构成有界数列

由B-W定理 存在 $\lim\limits_{k\to+\infty} x_{n_k}^{(2)} = \beta$，$\beta \in [a_1, b_1]$，$\beta \ne \alpha$

Ex1. 非无穷大数列必有有界子列

证：由非无穷大定义：$\exists M>0$，$\forall N\in\mathbb{N}$ $\exists N'>N$ 有 $|x_{N'}|\le M$

$N=1$ $\exists N_1'\in\mathbb{N}$ 有 $|x_{N_1'}|\le M$

$N=2$ $\exists N_2'\in\mathbb{N}$ 有 $|x_{N_2'}|\le M$

$\vdots$

$N=k$ $\exists N_k'\in\mathbb{N}$ 有 $|x_{N_k'}|\le M$

$\vdots$

故 $\forall k\in\mathbb{N}$ 有 $|x_{N_k'}|\le M$，即 $\{x_{N_k'}\}$ 为有界数列

Ex2 设 $a_n\ne0$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=0$，证明 $\{a_n\}$ 为无穷大

证：

由极限定义：

$\forall\varepsilon>0$ $\exists N\in\mathbb{N}$ 有 $\forall n>N$ $\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|<\varepsilon$

不妨取 $\varepsilon=\frac{1}{2}$，$\forall n>N$ 有 $|a_n|>2|a_{n-1}|>2^2|a_{n-2}|>\cdots>2^{n-1}|a_1|$

故 $\forall M>0$，$\exists N=\left[\log_2\frac{M}{|a_1|}\right]+2$，$\forall n>N$，$|a_n|>M$

即 $\{a_n\}$ 为无穷大

Ex3 证明：$\{x_n\}$ 含有子列 $\{x_{n_k}\}$ 收敛于 A $\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon>0$，$(A-\varepsilon,A+\varepsilon)$ 中含 $\{x_n\}$ 中无穷项

证：

$\Rightarrow$：由极限定义

$\forall\varepsilon>0$ $\exists K\in\mathbb{N}$ $\forall k>K$，$|x_{n_k}-A|<\varepsilon$

故而 $x_{n_{(k+1)}}, x_{n_{(k+2)}}\cdots$ 都是 $(A-\varepsilon,A+\varepsilon)$ 中的项，即得证

$\Leftarrow$：取 ε_1 $\exists x_{n_1}\in(A-\varepsilon_1,A+\varepsilon_1)$

$\varepsilon_2=|A-x_{n_1}|$ $\exists x_{n_2}\in(A-\varepsilon_2,A+\varepsilon_2)$

⋮

$\varepsilon_k = |A - x_{n(k-1)}|$ $\exists x_{n_k} \in (A-\varepsilon_k, A+\varepsilon_k)$

⋮

有 $\forall k \in \mathbb{N}$ 有 $|x_{n(k-1)}| < |x_{n_k}| < A$

$|x_{n_k}|$ 单调有界 且 $\sup |x_{n_k}| = A$

故 $\lim\limits_{k\to+\infty} x_{n_k} = A$

思考题 用确界原理证明致密性定理

设 $\{x_n\}$ 为有界数列，$x_n \in (a,b)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $E = \{x \mid [a,x]$ 含 $\{x_n\}$ 有限项$\}$

则 $a \in E$, $b \notin E$ 即 b 为 E 上界，据确界原理 $\exists \xi \in (a,b)$，$\sup E = \xi$

先证 $\forall \varepsilon > 0$，$[\xi-\varepsilon, \xi+\varepsilon]$ 含 $\{x_n\}$ 中无限项

~~再~~证 $\exists \{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$ 使 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \xi$.