P70. 21. 设 $f:[0,+\infty)\to R$，满足 $f(2x)=f(x)\cos x$ $(x\in[0,+\infty))$. 且在 $x=0$ 点连续，证明：$f(x)=f(0)\frac{\sin x}{x}$，$x\in(0,+\infty)$

Proof: 由 $f(2x)=f(x)\cdot\cos x$ 知

$$f(x)=f(\tfrac{x}{2})\cos\tfrac{x}{2}=f(\tfrac{x}{4})\cos\tfrac{x}{4}\cos\tfrac{x}{2}=f(\tfrac{x}{8})\cos\tfrac{x}{8}\cos\tfrac{x}{4}\cos\tfrac{x}{2}$$

$$=\cdots\cdots=f(\tfrac{x}{2^n})\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{x}{2^k}$$

令 $n\to\infty$，$\frac{x}{2^n}\to 0$，由 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续知

$$\lim_{n\to\infty}f(\tfrac{x}{2^n})=f(0+0)=f(0)$$

下证 $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\cos\frac{x}{2^k}=\frac{\sin x}{x}$

令 $y=\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}$

$$2y\sin\frac{x}{2^n}=\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots 2\cos\frac{x}{2^n}\sin\frac{x}{2^n}$$

$$=\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\sin\frac{x}{2^{n-1}}$$

$$2^2y\sin\frac{x}{2^n}=\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots 2\cos\frac{x}{2^{n-1}}\sin\frac{x}{2^{n-1}}$$

$$=\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^{n-2}}\sin\frac{x}{2^{n-2}}$$

$\cdots\cdots$

$$2^n y\sin\frac{x}{2^n}=\sin x$$

$$\therefore y=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{x}{2^k}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{2^n\cdot\frac{x}{2^n}}=\frac{\sin x}{x}$$

$$\therefore f(x)=\lim_{n\to\infty}f(\tfrac{x}{2^n})\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{x}{2^k}$$

$$=f(0)\cdot\frac{\sin x}{x}$$

□

设 $f \in C(R)$，且对任一开区间 I，$f(I)$ 为开区间，证明 f 为单调函数

22. 假设 f 不单调，则由于 f 连续，必 $\exists a, b \in R$，~~a≠b且f(a)~~

易知 f 不可能单调但非严格单调

$a \neq b$ 且 $f(a) = f(b)$.

考虑 $[a,b]$，则由 $f \in C(R)$ 知 $f \in C[a,b]$.

则由最值定理，f 在 $[a,b]$ 上存在最大值和最小值

① 若最大值等于最小值，则 f 在 $[a,b]$ 上为常数。

取 $I = (a,b)$ 知 $f(I)$ 为闭区间，矛盾

② 若最大值不等于最小值，则由 $f(a) = f(b)$ 知

最大值与最小值中一定有一个~~点值~~ 不在端点取得

不妨假设为最大值，则 $\exists c \in (a,b)$ $f(c) = \max f([a,b])$

则取 $a < m < c < n < b$，$I = (m,n)$，易知 $f(I)$ 不为开区间。

矛盾！

$\square$

23. 由 $f(+\infty)$ 存在，假设 $f(+\infty) = a$，即 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a$.

由定义，对 $\varepsilon_1 > 0$，$\exists X_1 > 0$，$\forall x > X_1$，$|f(x) - a| < \varepsilon_1$.

即 f 在 $(X_1, +\infty)$ 有界

由 $f(-\infty)$ 存在，同理 对 $\varepsilon_2 > 0$，$\exists X_2 < 0$，$\forall x < X_2$，$|f(x) - b| < \varepsilon_2$

$(f(-\infty) = b)$，即 f 在 $(-\infty, X_2)$ 有界

对 $[X_2, X_1]$，由 $f \in C(R)$ 知 $f \in C[X_2, X_1]$

则 f 在 $[X_2, X_1]$ 有界，

综上 f 为有界函数

27. (1) 错误. 考虑 $\tan x$, $x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

(3) 正确:

$f\in U.C(I)$ 则 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$ $\forall x',x''\in I$, $|x'-x''|<\delta$

$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

则 $\big||f(x')|-|f(x'')|\big| < |f(x')-f(x'')| < \varepsilon$

则 $|f|\in U.C(I)$

(5) 错误. 考虑 $f(x)=x$ $g(x)=\sin x$

(8) 正确

$g\in U.C(I) \Rightarrow \forall\varepsilon>0$ $\exists\delta$, $\forall x',x''\in I$ 且 $|x'-x''|<\delta$,

$|g(x')-g(x'')|<\varepsilon$

$f\in U.C(J) \Rightarrow \forall\varepsilon>0$ $\exists\delta$, $\forall x',x''\in J$ 且 $|x'-x''|<\delta$.

$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$

~~$\therefore \forall\varepsilon>0$, $\exists\delta_g=\varepsilon_g$, $\forall x',x''\in I$, $\exists\delta_g'$, $\forall x',x''\in I$~~

~~且 $|x'-x''|$~~

$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta=\varepsilon_g$, $\exists\delta_g$, $\forall x',x''\in I$ 且 $|x'-x''|<\delta_g$,

$|g(x')-g(x'')|<\varepsilon_g$ 且 $g(x'),g(x'')\in J$

$|f(g(x'))-f(g(x''))|<\varepsilon$.

28. (1)

$\forall \varepsilon>0, \exists \delta=\varepsilon^3, \forall x', x'' \in [0,+\infty)$ 且 $|x'-x''|<\delta$

$|\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x'}| < \sqrt[3]{|x'-x''|} < \delta$ □

(2) $\exists$ ~~$\delta=2\pi$~~ $\varepsilon = \pi$，$x_n' = 2n\pi + \frac{1}{n}$. $x_n'' = 2n\pi$.

$|x_n' - x_n''| = \frac{1}{n} \to 0$,

$|f(x_n') - f(x_n'')| = |(2n\pi + \frac{1}{n})\sin(2n\pi + \frac{1}{n})|$

$= |(2n\pi + \frac{1}{n})\sin\frac{1}{n}|$

$= |2n\pi \sin\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}|$

当 $n\to\infty$ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sin\frac{1}{n} = 0$

$\lim\limits_{n\to\infty} 2n\pi \sin\frac{1}{n} = 2\pi$

$\therefore$ 当 n 足够大 $|2n\pi\sin\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}| > \pi$. □

29. $f\in C(R) \Rightarrow f \in C([-T,T]) \Rightarrow f \in U.C([-T,T])$

$\forall \varepsilon>0, \exists \delta, \forall x', x'' \in [-T,T]\ |x'-x''|<\delta, |f(x')-f(x'')|<\varepsilon$

则 $\forall \varepsilon>0, \exists \delta$. ~~$\forall x', x'' \in R$~~ 对 $\delta' = \min(\delta, T)$.

$\forall x', x'' \in R$. $|x'-x''| < \delta' < T$. $\exists n$. $x'+nT, x''+nT \in [-T,T]$

则 $|f(x'+nT) - f(x''+nT)| < \varepsilon$ 即 $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$

31. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x) = m$

则 $\forall \varepsilon>0, \exists X>a. \forall x>X. |f(x)-m|<\varepsilon$

$\forall \varepsilon>0. \exists \varepsilon_1=\frac{\varepsilon}{2}, \exists X>a \forall x_1>X \quad |f(x_1)-m|<\frac{\varepsilon}{2}$

$\forall x_2>X \quad |f(x_2)-m|<\frac{\varepsilon}{2}$

~~取~~ $|f(x_1)-f(x_2)| = |f(x_1)-m-(f(x_2)-m)|$

$\leqslant |f(x_1)-m|+|f(x_2)-m| < \varepsilon$

故 $\exists \delta$ ~~使~~ $\forall x_1. x_2>X$ 且 $|x_1-x_2|<\delta \quad |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$

$\therefore f(x)\in U.C([X,+\infty))$

又 $f\in C[a,+\infty) \Rightarrow f\in C([a,X+1]) \Rightarrow f\in U.C([a,X+1])$

$\Rightarrow f(x)\in U.C([a,+\infty))$

10.22 P77. 10.* 见答案:

$\because f\in U.C[0,+\infty)$, $\therefore \forall\varepsilon>0 \ \exists\delta>0. \forall x.y\in I, |x-y|<\delta$:

$|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2}$.

k等分 $[0,1]$. $x_0=0<x_1<x_2<\cdots<x_n=1$. 使 $|x_i-x_{i-1}|<\delta$

$\therefore \forall x\in[0,1] \ \exists x_i; |x-x_i|<\delta$.

$\forall x\in[0,+\infty)$ $\exists n$. 使 $0\leq x-n<1$, $\therefore \exists x_i, |(x-n)-x_i|<\delta$

$\Rightarrow |x-(x_i+n)|<\delta$. $\therefore |f(x)-f(x_i+n)|<\frac{\varepsilon}{2}$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_i+n) = 0$

P91. 1.13) $e^{\frac{f'(x_0)}{f(x_0)}}$ (4) $f(x_0)-x_0f'(x_0)$

2. (1) 在 $x=0$ 的某邻域内 $|f(x)| \le |g(x)|$ 不妨为 δ_1 邻域

易知 $|f(0)| \le |g(0)| = 0$ ∴ $f(0)=0$

$$g'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(\Delta x)-g(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(\Delta x)}{\Delta x}=0$$

则 $\forall \varepsilon>0$ $\exists \delta_2$, $\forall \Delta x\in \mathring{U}(0,\delta_2)$ $\left|\frac{g(\Delta x)}{\Delta x}\right|<\varepsilon$

则 $\forall \varepsilon>0$ $\exists \delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ $\forall \Delta x\in \mathring{U}(0,\delta)$.

$$\left|\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}\right| \le \left|\frac{g(\Delta x)}{\Delta x}\right| < \varepsilon$$

则 $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}=0=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$

即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, $f'(0)=0$

(2) 当 $x\neq 0$ $|f(x)|=|g(x)\sin\frac{1}{x}| \le |g(x)|$ $\square$ $f'(0)=0$

4. $f'_+(a)f'_-(b)>0$. 不妨 $f'_+(a)>0$, $f'_-(b)>0$

$$f'_+(a)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(a+\Delta x)}{\Delta x}>0$$

即在 Δx 的某右邻域内 $\frac{f(a+\Delta x)}{\Delta x}>0$. 不妨 $0<\Delta x<\delta_1$,

$\frac{f(a+\Delta x)}{\Delta x}>0$ 取 $\Delta x=\frac{\delta_1}{2}$ 则 $f(a+\frac{\delta_1}{2})>0$

同理可得 $f(b-\frac{\delta_2}{2})<0$ 则 $f(a+\frac{\delta_1}{2})\cdot f(b-\frac{\delta_2}{2})<0$

又 f 在 $[a,b]$ 连续 ∴由零点存在性定理

$\exists \xi\in(a,b)$ $f(\xi)=0$

5. 由 $f(x)$ 在 x_0 处可导，则 $f(x)$ 在 x_0 处连续

由局部保号性，不妨 $f(x_0)>0$

则 $\Delta x\to 0$ $|f(x_0+\Delta x)| = f(x_0+\Delta x)$，$|f(x_0)| = f(x_0)$

由 $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$

则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{|f(x_0+\Delta x)|-|f(x_0)|}{\Delta x}$ 存在.

$f(x_0)<0$ 同理，故 $|f(x)|$ 在 x_0 处可导

$f(x_0)=0$ 不一定：$f(x)=x$. $x=0$ 处 $|f(x)|$ 不可导

7. (2) $\begin{cases} a+b=0 \\ -\frac{1}{2}a=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=2 \end{cases}$

12* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(2x)-f(x)}{x} = A$ $\therefore f(2x)-f(x) = Ax+o(x)$

$\therefore \begin{cases} f(x)-f(\frac{x}{2}) = A\cdot\frac{x}{2}+o(x) \\ f(\frac{x}{2})-f(\frac{x}{4}) = A\cdot\frac{x}{4}+o(x) \\ \cdots\cdots \\ f(\frac{x}{2^n})-f(\frac{x}{2^{n+1}}) = A\cdot\frac{x}{2^{n+1}}+o(x) \end{cases}$

sum: $f(x)-f(\frac{x}{2^{n+1}}) = Ax\cdot\frac{\frac{1}{2}[1-(\frac{1}{2})^{n+1}]}{1-\frac{1}{2}}+o(x)$

$f(x)$ 在 0 处连续 当 $n\to\infty$ $f(x)-f(0) = Ax+o(x)$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = A.$ □

14* $f'(0)$ 存在: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$

$\Rightarrow f(x)=xf'(0)+o(x).\ (x\to 0)$

$\therefore f(\frac{k}{n^2})=\frac{k}{n^2}f'(0)+o(\frac{k}{n^2})$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}f'(0)(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2})$

$=\lim\limits_{n\to\infty}f'(0)\frac{n+1}{2n}$

$=\frac{1}{2}f'(0)$

15* 由14题 令 $f(x)=\ln(1+x)$ $f(0)=0.$ $f'(0)=1$ 存在

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}[\ln(1+\frac{1}{n^2})+\ln(1+\frac{2}{n^2})+\cdots+\ln(1+\frac{n}{n^2})]$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\ln(1+\frac{1}{n^2})(1+\frac{2}{n^2})\cdots(1+\frac{n}{n^2})=\frac{1}{2}$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n^2})(1+\frac{2}{n^2})\cdots(1+\frac{n}{n^2})=e^{\frac{1}{2}}$

10.25 P102. 1.18). $y'=\frac{(\ln x+1-2^x\ln 2)(2x+2\sqrt{x})-(x\ln x-2^x)}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}$

(11) $y'=\frac{(1+\sec x\tan x)(x-\csc x)-(1+\cot x\csc x)(x+\sec x)}{(x-\csc x)^2}$

(12) $y'=\frac{(1+e^x(\sin x+\cos x))(1+x^2)\arctan x-(x+e^x\sin x)}{(1+x^2)(\arctan x)^2}$

2. $y'=\frac{1}{2\sqrt{x-1}}$ $\begin{cases}y-y_0=\frac{1}{2\sqrt{x_0-1}}(x-x_0)\\ y_0=\sqrt{x-1}\end{cases}$ $\Rightarrow P(2,1)$

4. (12) $y' = \dfrac{\sqrt{x^2+1} + 2x\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{x^2+1}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x^2+1}\right)}$

(13) $y' = -\dfrac{1}{\sin x}$

(17) $y' = \sqrt{a^2+x^2}$

(20) $y' = a^a x^{a^a-1} + a^{x^a+1}\ln a \cdot x^{a-1} + a^{a^x+x}\ln^2 a$

(21) $y' = (\sin x)^{\cos x-1}(\cos^2 x - \sin^2 x\ln(\sin x)) - (\cos x)^{\sin x-1}\cdot$
$(\sin^2 x - \cos^2 x\ln(\cos x))$

5. (4) $y' = -f'\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)\cdot\dfrac{1}{f^2(x)}f'(x)$

8. (3) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2xy^2-e^y}{2x^2y+1-xe^y}$

(5) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y-y^2(x+1)e^{xy}}{(x+1)(xye^{xy}+1)}$

11. (3) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{t}{2}$

(4) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^y\cos t}{2(t-1)(2-y)}$