# Chap 16－3、4

## 三重积分

# 16.3 三重积分的概念和性质

**一. 定义** 设$f(x,y,z)$在**可求积**有界闭域$\Omega \subset [a, b]\times[c, d]\times[e, h](:=V)$定义. 令$f(x,y,z) = 0, (x,y,z)\in V\setminus\Omega$. 若对$V$的$\forall$长方体分划$V_{ijk}$及$\forall(\xi_i,\eta_j,\zeta_k)\in V_{ijk}$, 总有

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_i,\eta_j,\zeta_k)\Delta V_{ijk} = I,$$

其中 $\Delta V_{ijk} = \mathrm{Vol}(V_{ijk}),\ \lambda = \max\limits_{1\le i\le l,1\le j\le m,1\le k\le n}\{\mathrm{diam}\{V_{ijk}\}\},$

则称$f(x,y,z)$在$\Omega$上**可积**, $I$称为$f$在$\Omega$上的**三重积分**,

记为 $\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\mathrm{d}V,$ $\mathrm{d}V$称为**体积元素**.

**物理意义** 设$\rho(x,y,z)$是占有空间区域$\Omega$的物体的体密度函数, 则该物体的质量

$$m=\iiint\limits_{\Omega}\rho(x,y,z)\mathrm{d}V.$$

**二. 性质** 类似二重积分, 有线性、可加性、单调性和中值定理, 还有

$$\iiint\limits_{\Omega}1\mathrm{d}V=V_{\Omega}\quad(\mathrm{Vol}(\Omega))$$

## 16.4.1 直角坐标计算三重积分

在直角坐标下, 由于$\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 因此有

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z)\mathrm{d}V = \iiint_{\Omega} f(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

**定理** 设 $f(x,y,z)$在$[a,b]\times[c,d]\times[e,h]$可积.

**(1)** 若$\forall(x,y)\in[a,b]\times[c,d]$, 存在**首次积分**

$$\mu(x, y) = \int_e^h f(x, y, z)\mathrm{d}z,$$ 则

$$\boxed{\iiint_{[a,b]\times[c,d]\times[e,h]} f(x, y, z)\mathrm{d}V = \iint_{[a,b]\times[c,d]} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_e^h f(x, y, z)\mathrm{d}z}$$

## **(2)** 若$\forall z \in [e, h]$, 存在二重积分

$$\mu(z) = \iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$ 则

$$\boxed{\iiint\limits_{[a,b]\times[c,d]\times[e,h]} f(x, y, z)\mathrm{dV} = \int_e^h \mathrm{dz} \iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}$$

## 一. 柱线法(坐标面投影法)

设Ω是以曲面$z = z_1(x,y)$为底, 曲面$z = z_2(x,y)$为顶, 而侧面是母线平行$z$轴的柱面所围成区域. 又Ω在$xy$上的投影区域为$D$, 则Ω可表示为

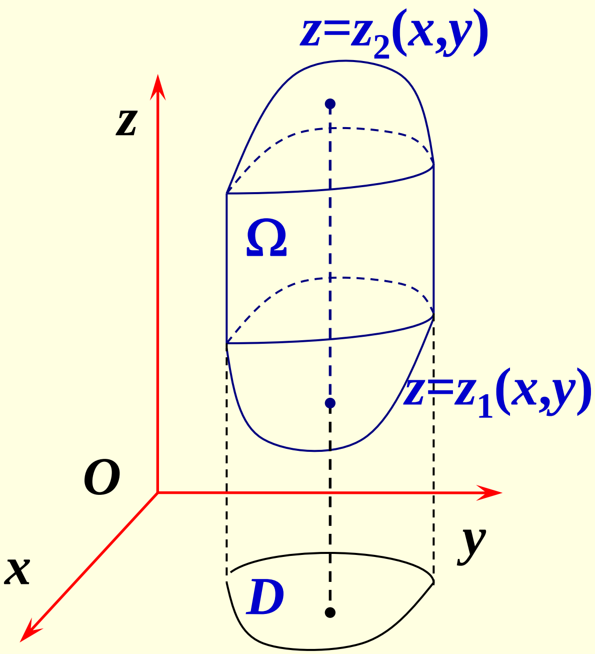
$xy$型正则区域

$$\{(x, y, z) \mid z_1(x, y) \le z \le z_2(x, y), (x, y) \in D\}$$

## 从质量角度求三重积分, 将$f(x,y,z)$视为密度函

数, 则$\forall(x,y)\in D$,

$$\mu(x,y)=\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z$$




是$\Omega$内由$z_1(x,y)$到 $z_2(x,y)$的线段上所分布的质量, 故物体总质量为

$$\iint_D \mu(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D\left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

从而(设 $D=\{(x,y)\mid a\le x\le b, y_1(x)\le y\le y_2(x)\}$)

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_{D}\left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\overset{\text{def}}{=}\iint\limits_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z$$

$$=\int_a^b\mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z$$

先$z$再$y$后$x$
三次积分

**例1** 计算积分 $\iiint\limits_{\Omega} y\cos(x+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中Ω由抛物柱面 $y=\sqrt{x}$ 及平面$y=0, z=0$ 和 $x+z=\dfrac{\pi}{2}$ 围成.

$$\boxed{\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}}$$

# 二. 截面法(坐标轴投影法)

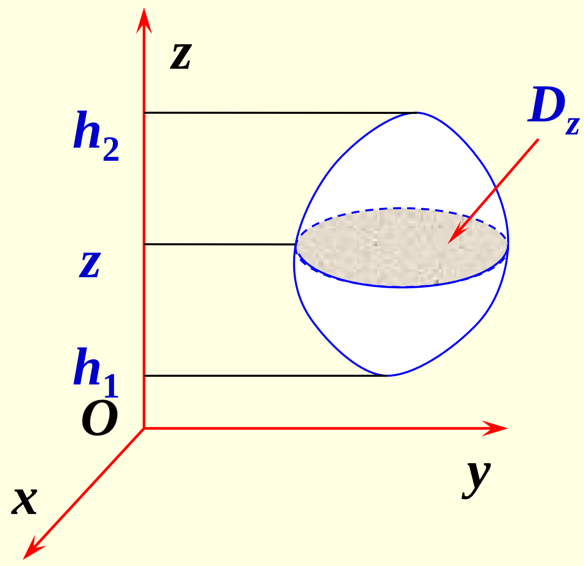
设区域$\Omega$在$z$轴上投影区间为$[h_1,h_2]$, 即$\Omega$介于平面$z=h_1$与$z=h_2$之间, 过$z$处且垂直$z$轴的平面截$\Omega$得截面区域$D_z$, 则$\Omega$可表示为 $\boxed{z\text{型空间区域}}$

$$\Omega=\{(x,y,z)\,|\,h_1\le z\le h_2,(x,y)\in D_z\}$$

从质量角度考虑, 对$z\in[h_1,h_2]$,

$$\mu(z)=\iint_{D_z} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

是物体在截面$D_z$上分布的质量,



# 所以物体总质量为

$$\int_{h_1}^{h_2} \mu(z)\mathrm{d}z = \int_{h_1}^{h_2} \left( \iint_{D_z} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}z$$

从而

$$\boxed{\begin{aligned} \iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \int_{h_1}^{h_2} \left( \iint_{D_z} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}z \\ &\overset{\text{def}}{=} \int_{h_1}^{h_2} \mathrm{d}z \iint_{D_z} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \end{aligned}}$$

**例2** 计算$I=\iiint\limits_{\Omega}(x+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中Ω由旋转抛物面

$z=x^2+y^2$ 与平面 $z=2$围成. (注意对称性) $\boxed{4\pi}$

**例3** 设物体位于 $\Omega: z\ge\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}},\ x^2+y^2+(z-2)^2\le 4,$

其密度为$|z|$, 求此物体的质量. $\boxed{21\pi}$

# 16.4.2 三重积分的变量代换

## 一. 变量代换

设变换 $T:\begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{cases}$ 有连续偏导数, 且满足

$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix} \neq 0,$$ 又 $f(x,y,z) \in C(\Omega)$, 则

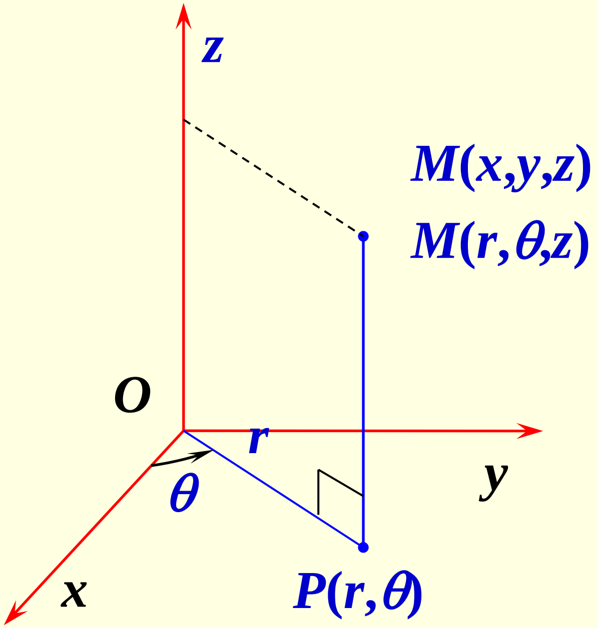
$$\boxed{\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_{\Omega'} f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))\,|J|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w.}$$

其中$T$将$\Omega'$变为$\Omega$.

# 二. 柱面坐标系

此坐标系实乃$x,y$坐标转变为极坐标, 其变换公式为

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$




由 $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r,$

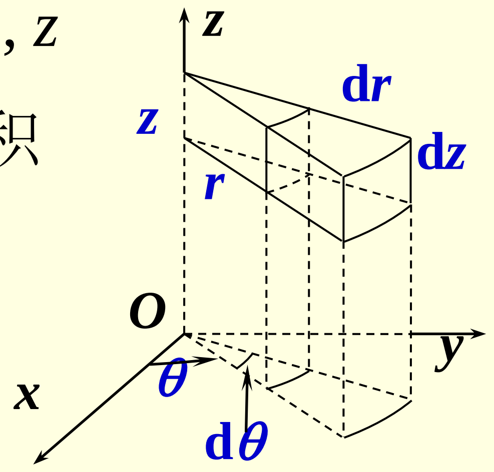
得到柱面坐标积分公式

$$\boxed{\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}V = \iiint\limits_{\Omega'} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z}$$

其中$\Omega'$是$\Omega$在柱面坐标系下的表示形式.

# 体积微元几何意义

用$r$ = 常数(圆柱面), $\theta$ = 常数(半平面), $z$ = 常数(平面)的曲面分割Ω, 小区域的体积近似等于长方体的体积, 故为$r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$




注意 在具体计算时, 通常用柱线法或截面法得到$D$(或$D_z$)的二重积分, 再转化为极坐标.

**例4** 计算 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x+z)\mathrm{d}V$, 其中$\Omega$是空间域

$$z\ge\sqrt{x^2+y^2},\quad z\le\sqrt{1-(x^2+y^2)}.$$

$\boxed{\dfrac{\pi}{8}}$

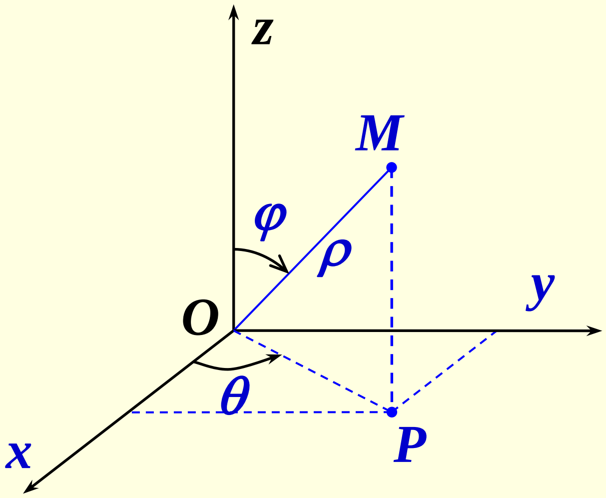
**例5** 计算$I=\iiint\limits_{\Omega}(x+y)^2\mathrm{d}V$, 其中$\Omega$是由曲线$\begin{cases}y^2=2z\\x=0\end{cases}$

绕$z$轴旋转得到的曲面与平面$z=2$, $z=8$所围成的区域.

$\boxed{336\pi}$

## 三. 球面坐标系

设$M(x,y,z)$是空间一点, 引进球面坐标$(\rho,\varphi,\theta)$




$$\rho = \|\overrightarrow{OM}\| \in [0,+\infty)$$

$$\varphi = (\overrightarrow{OM}, Oz) \in [0,\pi]$$

$\theta$: $Ox$轴正向转到 $\overrightarrow{OP}$ 的角度$\in[0,2\pi]$ (或 $[-\pi,\pi]$)

坐标变换关系式

$$\begin{cases} x = \rho\sin\varphi\cos\theta \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases}$$

由于Jacobi行列式

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,\theta)}=\begin{vmatrix}\sin\varphi\cos\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0\end{vmatrix}=\rho^2\sin\varphi$$

导出

$$\boxed{\begin{aligned}&\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}V\\ =&\iiint\limits_{\Omega'} f(\rho\sin\varphi\cos\theta,\rho\sin\varphi\sin\theta,\rho\cos\varphi)\rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta\end{aligned}}$$

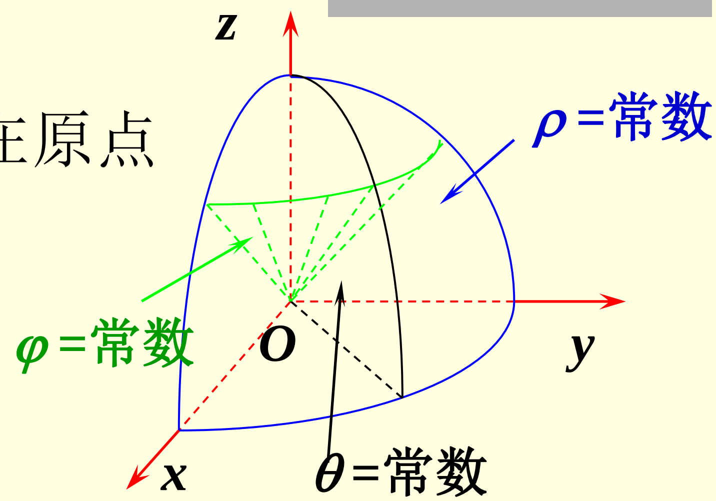
其中$\Omega'$是$\Omega$在球面坐标系下的表示形式.

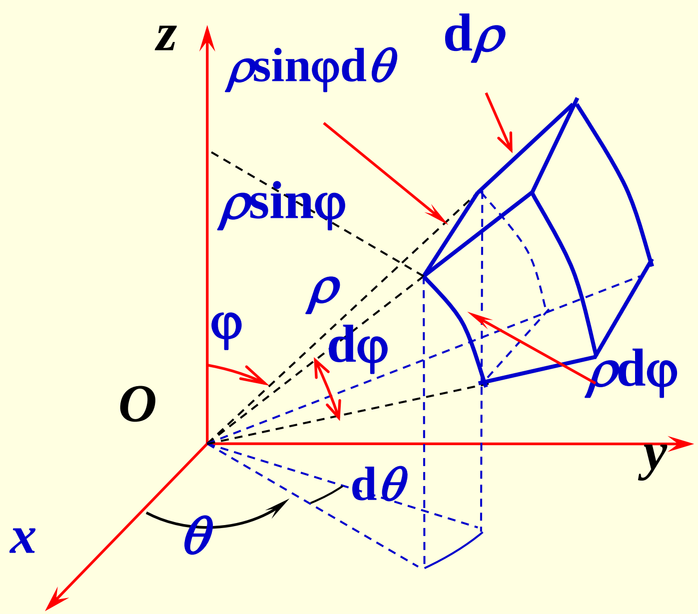
## ◆ 使用球面坐标时

$\rho$ = 常数(球面)　　　球心

$\varphi$ = 常数(半圆锥面)顶点　　在原点

$\theta$ = 常数(半平面) ——过$z$轴



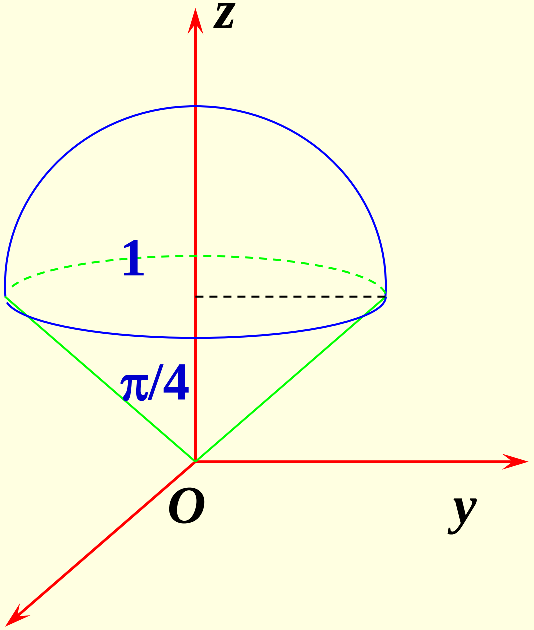

### ◆ 体积微元几何意义

用上面三类曲面分割Ω, 所得小区域近似视为长方体, 故体积

$$\boxed{\mathrm{d}V = \rho^2 \sin\varphi \,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta}$$

● 积分区域边界曲面方程或被积函数含$x^2+y^2+z^2$,

可考虑用球面坐标




**例6** 计算$I=\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}V$, 其中$\Omega$

是由球面 $x^2+y^2+z^2=2z$ 与锥面

$z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围成含$z$轴部分区域.

$$\boxed{\frac{(8-\sqrt{2})\pi}{5}}$$

**例7** 函数 $f(u)$在$U(0)$可导, 且 $f(0)=0$, 求极限

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t^4}\iiint\limits_{\Omega_t} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中$\Omega_t$是 $x^2+y^2+z^2\le t^2$.

$\boxed{\pi f'(0)}$

**例8** 计算位于$\Omega$: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\le 1$, 而密度函数为

$\mu=1+z^2$ 的物体的质量.

$$\boxed{\frac{4\pi abc}{3}+\frac{4\pi abc^3}{15}}$$

## 16.4.3 多重积分

**定理** 设$f$在$\Omega=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times\cdots\times[a_n,b_n]$上连续，则

$$\int_{\Omega} f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$

$$=\int_{a_1}^{b_1}\mathrm{d}x_1\int_{[a_2,b_2]\times\cdots\times[a_n,b_n]} f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$

$$=\int_{[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_{n-1},b_{n-1}]}\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_{n-1}\int_{a_n}^{b_n} f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_n$$

## 例9 求$\mathbf{R}^n$中的几何体

$$T_n=\left\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\middle|x_1+x_2+\cdots+x_n\le h,x_i\ge 0\,(i=1,2,\cdots,n)\right\}$$

的体积$V_n$.

**练习** 设$\Omega=[0,1]\times[0,1]\times\cdots\times[0,1]\subset\mathbf{R}^n$，求

$$(1)\int_{\Omega}(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$

$$(2)\int_{\Omega}(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$

**例10** 求4维球体

$$B_4=\left\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\middle|x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2\le R^2\right\}$$

的体积$V_4$.

**思考题** 求$n$维球体

$$B_n=\left\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\middle|x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\le R^2\right\}$$

的体积$V_n$.