逆序、行列式的定义

已知 4 阶行列式 $|a_{ij}|_4$ 的展开式中某项为 $(-1)^k a_{32}a_{13}a_{41}a_{24}$。则 $k=$____________。

已知 $-a_{32}a_{1k}a_{41}a_{2l}$ 是 4 阶行列式 $|a_{ij}|_4$ 的展开式中的某一项。则 $k=$____________。

行列式的性质

设 4×4 矩阵 $A=(\alpha,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4)$　$B=(\beta,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4)$，其中 $\alpha,\beta,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4$ 均为 4 维列向量，已知 $|A|=4$，$|B|=1$，则行列式 $|A+B|=$______________；

行列式的按行列展开

设行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 1 & 2 \end{vmatrix}$，$A_{ij}$ 是 D 中元素 a_{ij} 的代数余子式，则

$A_{41}+A_{42}=$______________。

设行列式 $D=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$，$A_{ij}$ 是 D 中元素 a_{ij} 的代数余子式，则

$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}A_{ij}=$______________。

行列式的按行列展开

设 $D=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}$，$A_{ij}$ 是 D 中元素 a_{ij} 的代数余子式，则 $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} A_{ij}=$__________。

已 知 行 列 式 $D=|a_{ij}|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ ， A_{ij} 是 a_{ij} 的 代 数 余 子 式 ，则

$2A_{41}+4A_{42}=$__________。

行列式的计算

- 注意观察行列式特点, 如行(列)和为常数
- 计算小阶数行列式，按行列展开，寻找递回关系
- 加边法: 通常行或列有比例关系,重复出现的内容
- 有分块对角情况,就一块一块算
- 行列式的定义

行列式的计算

计算行列式$|A|,|B|,\begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix}$，其中

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n+x \\ 1 & 2 & \cdots & (n-1)+x & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 2+x & \cdots & n-1 & n \\ 1+x & 2 & \cdots & n-1 & n \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & n-1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$$

行列式的计算

设 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} a_{n-1} & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n-2} & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$，试求：

（1）试推导出行列式 D_k 与 D_{k-1}，（$k=2,3,\cdots,n$） 之间的递推关系式；

（2）试求 D_n 的值。

行列式的计算

设常数$k\neq 0$，向量$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\neq 0$，$\beta=(1,1,\cdots,1)$，矩阵$A=kE+\beta^T\alpha$。

试求：（1）行列式$|A|$；（2）矩阵A的特征值。

设实向量$\alpha=(a_1,\ a_2,\cdots,\ a_n)^T$，$n$阶矩阵$A=E+\alpha\alpha^T$，行列式$D_n=|A|$。

（1）计算D_3；　（2）证明：$D_n\geq D_{n-1}$。

行列式的计算

设矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，其中 n 维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\\vdots\\0\\0\end{pmatrix},\quad \alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\\vdots\\0\\0\end{pmatrix},\quad \cdots,\quad \alpha_{n-1}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\\1\end{pmatrix},\quad \alpha_n=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\\0\\1\end{pmatrix}。$$

（1）试求：行列式 $|A|$；（2）试讨论：向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的线性相关性。

Cramer法则

- 系数矩阵为方阵时,可以先考虑求系数矩阵的行列式

  行列式不等于0时, 可知有唯一解

  行列式等于0时,需要结合增广矩阵,判断有无穷解和无解

设 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ a_1 & a_2 & a_3\\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，其中 a_i 互不相同，$i=1,2,3$，则线性方程组 $A^T x=b$ 的

解是______________________。

Cramer法则

- 系数矩阵为方阵时,可以先考虑求系数矩阵的行列式

  行列式不等于0时, 可知有唯一解

  行列式等于0时,需要结合增广矩阵,判断有无穷解和无解

1\. 线性方程组为 $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + ax_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = b \end{cases}$，问 a，b 各取何值时，线性方程组无解，有唯一解，有无穷多解？在有无穷多解时求出其通解。

可逆矩阵

- 求可逆矩阵:伴随矩阵法、初等变换法

$$AA^* = A^*A = |A|E$$

$$A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}, A^* = |A|A^{-1}$$

$$|A^*| = |A|^{n-1}$$

对n ≥ 2, $r(A^*) = \begin{cases} r(A) & \text{如果} \quad r(A) = n \\ 1 & \text{如果} \quad r(A) = n-1 \\ 0 & \text{如果} \quad r(A) \le n-2 \end{cases}$

3. 已知 4 阶矩阵 A 的秩 $r(A)=3$，则齐次线性方程组 $A^*x=0$ 的基础解系

含____________个线性无关的解向量。

可逆矩阵

求可逆矩阵:伴随矩阵法、初等变换法

设 A,B 为 n 阶方阵，$C=\begin{pmatrix}0 & A\\ B & 0\end{pmatrix}$。则伴随矩阵 C^* 为　　　　（　　　）

（A）$(-1)^{n^2}\begin{pmatrix}0 & |A|B^*\\ |B|A^* & 0\end{pmatrix}$；　　　（B）$\begin{pmatrix}0 & |A|B^*\\ |B|A^* & 0\end{pmatrix}$；

（C）$(-1)^{n^2}\begin{pmatrix}0 & |B|A^*\\ |A|B^* & 0\end{pmatrix}$；　　　（D）$\begin{pmatrix}0 & |B|A^*\\ |A|B^* & 0\end{pmatrix}$。

可逆矩阵

- 求可逆矩阵:伴随矩阵法、初等变换法
- 初等变换法解矩阵方程

设 n 阶可逆方阵 A 的伴随矩阵是 A^*，实常数 $k \neq 0, \pm 1$。则

$(kA)^* =$ （　　）

（A）kA^*；　　（B）$k^{n-1}A^*$；

（C）$k^n A^*$；　　（D）$k^{-1}A^*$。

可逆矩阵

设A为方阵,且$f(x)=a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1}+\ldots+a_0$

若$f(A)=O$,对任意满足$f(c)\neq 0$的数c,都有

$$\left(A-cE\right)^{-1}=-\frac{g(A)}{f(c)}$$

其中,$g(x)=\dfrac{f(x)\text{-}f(c)}{x\text{-}c}$

可逆矩阵

设 A 为 n 阶非奇异矩阵 $(n>2)$， A^* 为 A 的伴随矩阵，则____________

a. $(A^*)^* = |A|^{n-1} A$；　　b. $(A^*)^* = |A|^{n+1} A$；

c. $(A^*)^* = |A|^{n-2} A$；　　d. $(A^*)^* = |A|^{n+2} A$。

设 4 阶方阵 A 和 B 的伴随矩阵为 A^* 和 B^*，且行列式 $|A|=2, |B|=-1/2$，则行列式

$\|A^*|B^*|=$________________。

可逆矩阵

已知 A 为 n 阶方阵，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 A 的列向量组，行列式 $|A|=0$，其伴随矩阵 $A^*\neq 0$，则齐次线性方程组 $A^*x=0$ 的通解为________________。

已知3阶矩阵 A，B 且满足方程 $AB=5B-4E$，其中 $B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$，求矩阵 A。

可逆矩阵

设矩阵 A 的伴随矩阵 $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$，且 $ABA^{-1} = BA^{-1} + 3E$。求矩阵 B。

（1） 证明：矩阵 $A-2E$ 可逆；　（2）求矩阵 A。

可逆矩阵

A是n阶方阵,下列说法等价:

(1)A是可逆矩阵 (2)|A|不等于0

(3)A行(列)向量线性无关 (4)r(A)=n

(5)A没有0作为特征值 (6)A可以写为初等矩阵的乘积

(7)A可由初等变换化为单位矩阵

(8)A伴随矩阵可逆 (9)A的标准型为E

(10)齐次线性方程组Ax=0只有0解

(11)非齐次线性方程组Ax=b有唯一解

(12)A是非奇异矩阵 (13) $r(A^T A) = r(AA^T) = n$

(14) $A^T A$(或AA^T)是正定矩阵

(15)由A的列(行)向量生成的线性空间维数是n

(16)存在f(x)是A的化零多项式, 而f(x)的常数项非0

(17)若f(x)是A的特征多项式, 则f(0)不等于0

(18)若m(x)是A的最小多项式, 则m(0)不等于0

(19)A的Jordan标准形对角线上元素全非0

秩

- A是m行n列矩阵,下列说法等价:
(1)A的秩为r
(2)A中存在r阶子式非0,全部r+1阶子式为0
(3)A经行初等变换化为阶梯形阵后,有r个非0行
(4)线性空间{Ax|x为任意n为实列向量}维数是r
(5)由A的行(列)向量生成的线性空间维数是r
(6)线性空间{x|Ax=0}的维数是n-r
(7)齐次线性方程组Ax=0基础解系中有n-r个解
(8)A列(行)向量组秩为r
(9)A可由初等变换化为标准形 $\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
(10)存在可逆矩阵Q和P，使得 $QAP = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
(12) $r(A^T A) = r(AA^T) = r$
(11)若A为方阵, 则0作为A的特征值几何重数为n-r

秩

设三阶矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$，已知伴随矩阵 A^* 的秩为 1，则必有__________

(A) $a \neq b$ 且 $a+2b \neq 0$；　　(B) $a \neq b$ 且 $a+2b=0$；

(C) $a=b$ 或 $a+2b \neq 0$；　　(D) $a=b$ 或 $a+2b=0$。

3. 设 A,B 为 n 阶方阵，且 $r(A)=r(B)$，则______________

(A) $r(A-B)=0$；　　(B) $r(A+B)=2r(A)$；

(C) $r(A,B)=2r(A)$；　　(D) $r(A,B) \leq r(A)+r(B)$。

秩

5. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&k\\3&6&9\end{pmatrix}$，$B=(b_{ij})_{3\times3}\neq 0$，且 $AB=0$，则____________

a. 当 $k=6$ 时，必有秩 $r(B)=1$；

b. 当 $k=6$ 时，必有秩 $r(B)=2$；

c. 当 $k\neq 6$ 时，必有秩 $r(B)=1$；

d. 当 $k\neq 6$ 时，必有秩 $r(B)=2$。

秩

16.已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & a & 2 \\ 2 & 2 & a \\ a & 2 & 2 \end{pmatrix}$，伴随矩阵 $A^* \neq 0$，且 $A^*x=0$ 有非零解，则 （　　）

a. $a=2$；　b. $a=2$ 或 $a=-4$；　c. $a=-4$；　d. $a \neq 2$ 且 $a \neq -4$。

秩

下列说法等价

(1) $Ax=0$ 与 $BAx=0$

(2) $r(A)=r(BA)$

(3) 线性空间 $\{x|Ax=0\}$ 与 $\{x|BAx=0\}$ 维数相等

秩

下列说法等价：

$(1) A_{m\times n}(A_{m\times n})^T x = 0$与$(A_{m\times n})^T x = 0$同解

$(2) r(A_{m\times n}(A_{m\times n})^T) = r(A_{m\times n}^T)$

下列说法等价：

$(1) (A_{m\times n})^T A_{m\times n} x = 0$与$A_{m\times n} x = 0$同解

$(2) r((A_{m\times n})^T A_{m\times n}) = r(A_{m\times n})$

$$r(A) = r(A^T) = r(A^T A) = r(AA^T) = r$$

秩

向量组$\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_k$可以由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$线性表示,

则(1)$(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_k)=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m)B_{m\times k}$

(2)若$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$线性无关,那么$r(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_k)=r(B_{m\times k})$

(3)$r(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_k)\le r(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m)$

(4)若$\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_k$与$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$等价,那么$r(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_k)=r(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m)$

$$r(AB)\le\min\{r(A),r(B)\}$$

$$r(A+B)\le r(A)+r(B)$$

$$r\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}=r(A)+r(B)$$

$$r\begin{pmatrix}A & 0\\ C & B\end{pmatrix}\ge r(A)+r(B)$$

秩

6. 设线性空间 R^n 中向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，则 R^n 的下列生成子空间中，维数为 3 的生成子空间是____________

a. $L(\alpha_1+\alpha_2, \alpha_2+\alpha_3, \alpha_3-\alpha_1)$；　　b. $L(\alpha_1+\alpha_2, \alpha_2-\alpha_3, \alpha_3+\alpha_1)$；

c. $L(\alpha_1-\alpha_2, \alpha_2+\alpha_3, \alpha_3+\alpha_1)$；　　d. $L(\alpha_1+\alpha_2, \alpha_2+\alpha_3, \alpha_3+\alpha_1)$。

25.设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，向量 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性相关但相互不成比例，且，

$$\beta_1 = k\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\ \beta_2=\alpha_1+k\alpha_2+\alpha_3,\ \beta_3=\alpha_1+\alpha_2+k\alpha_3。$$

则　　　　　　　　　　　　　　　　　　（　　　）

（A） $k=-2$ 或 $k=1$；　　（B） $k=1$；

（C） $k\neq-2$ 且 $k\neq1$；　　（D） $k=-2$。

秩

27.已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系，以下也是 $Ax=0$ 的基础解系的为

（　　　）

（A）$\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2-\alpha_3$，$\alpha_3+\alpha_1$；

（B）$\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_3-\alpha_1$；

（C）$\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_3+\alpha_1$；

（D）$\alpha_1-\alpha_2$，$\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_3+\alpha_1$。

秩

10.设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\ (s\ge 2)$线性无关，且可由向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$线性表示，则以下结论中不能成立的是__________

(A) 向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$线性无关；

(B) 对任一个α_j，向量组$\alpha_j,\beta_2,\cdots,\beta_s$线性相关；

(C) 存在一个α_j，向量组$\alpha_j,\beta_2,\cdots,\beta_s$线性无关；

(D) 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$与向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$等价。

秩

7. 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$为$n$维列向量组，矩阵$A=(a_{ij})_{m\times n}$，下列选项中正确的是 ________

a. 若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关，则$A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$线性无关；

b. 若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关，则$A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$线性相关；

c. 若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关，则$A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$线性无关；

d. 若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关，则$A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$线性相关。

秩

$$A_{m\times n}B_{n\times k}=0,\text{则}(1)B\text{的列都是}Ax=0\text{的解}$$
$$(2)r(A)+r(B)\leq n$$

8.设 A,B 为 n 阶矩阵,且 $AB=0,B\neq 0$，则必有__________

a. $|A^*|=0$； b. $|B^*|=0$； c. $|B|=0$； d. $A=0$。

20. 设 A 是 4×5 矩阵，且秩为 2。矩阵 B 是 5 阶方阵，且 B 的列向量都是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解，则矩阵 B 的秩 $r(B)$ 的最大值为(　　　)

（A）5；（B）4；

（C）3；（D）2。

秩

$$A_{m\times n}B_{n\times k}=0,\text{则}(1)B\text{的列都是}Ax=0\text{的解}$$
$$(2)r(A)+r(B)\le n$$

24.设 $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ a & 6 & -4\\ 3 & 9 & b\end{pmatrix}$，存在 3 阶方阵 B， $r(B)>1$，使得 $AB=0$。则 （　　）

（A） $a\ne 2, b=-6$；

（B） $a=2, b\ne -6$；

（C） $a=2, b=-6$；

（D） $a\ne 2, b\ne 6$。

秩

$$r(AB)\le \min\{r(A),r(B)\}$$

$$r(A+B)\le r(A)+r(B)$$

$$r\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}=r(A)+r(B) \qquad r\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix}\ge r(A)+r(B)$$

19.设矩阵 $A_{m\times n}$，$B_{n\times m}$。E 为单位矩阵。若 $AB=E$，则 （　　）

（A）秩 $r(A)=m$，$r(B)=m$；　　（B）秩 $r(A)=m$，$r(B)=n$；

（C）秩 $r(A)=n$，$r(B)=m$；　　（D）秩 $r(A)=n$，$r(B)=n$。

列满秩

- A是m行n列矩阵,下列说法等价:
(1)A列满秩
(2)A的秩为n
(3)A中存在n阶子式非0
(4)A可只经行初等变换化为标准形
(5)线性空间{Ax|x为任意n为实列向量}维数是n
(6)由A的行(列)向量生成的线性空间维数是n
(7)线性空间{x|Ax=0}的维数是0
(8)齐次线性方程组Ax=0只有0解
(9)A列(行)向量组秩为n
(10)A列向量线性无关　(11) $A^T A$是正定矩阵(可逆)
(12)A标准形为 $\begin{pmatrix} E_n \\ 0 \end{pmatrix}$
(13)存在可逆矩阵Q和P，使得 $QAP = \begin{pmatrix} E_n \\ 0 \end{pmatrix}$

列满秩

9.设 A 为 $m\times n$ 矩阵,$b\neq 0$,且 $r(A)=n$,则线性方程组 $Ax=b$ __________.

a. 有唯一解； b. 有无穷多解； c. 无解； d. 可能无解。

初等矩阵

13.已知 $P=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$，$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$，若 $P^mAP^n=A$，则以下选项中正确（　　）

a. $m=5,n=4$；　b. $m=5,n=5$；　c. $m=4,n=5$；　d. $m=4,n=4$。

14. 已知 A 为 n 阶可逆矩阵（$n\ge 2$），交换 A 的第 1，2 列得 B，则__________

(A) 交换伴随矩阵 A^* 的第 1，2 行得 B^*；

(B) 交换伴随矩阵 A^* 的第 1，2 行得 $(-B^*)$；

(C) 交换伴随矩阵 A^* 的第 1，2 列得 B^*；

(D) 交换伴随矩阵 A^* 的第 1，2 列得 $(-B^*)$。

初等矩阵

21. 设矩阵 A，B，P_1，P_2 如下，则有 （　　）

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11}+a_{31} & a_{12}+a_{32} & a_{13}+a_{33} \end{pmatrix},\quad P_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$P_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

（A） $AP_1P_2=B$；　　（B） $AP_2P_1=B$；

（C） $P_1P_2A=B$；　　（D） $P_2P_1A=B$。

几种常用分块形式

$$A=\left(\begin{array}{c:c:c:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{array}\right)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p)$$

矩阵A的第2列

$$A=\left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ \hdashline a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \hdashline \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \hdashline a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{array}\right)=\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}$$

矩阵A的第1行

两个矩阵相乘的常用分块：C=AB

$$C = AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{p} \alpha_i b_{i1} & \sum_{i=1}^{p} \alpha_i b_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^{p} \alpha_i b_{in} \end{pmatrix}$$

C的列可以由A的列线性表示

两个矩阵相乘的常用分块：C=AB

$$AB=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pn} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}B=\begin{pmatrix} \beta_1 B \\ \beta_2 B \\ \vdots \\ \beta_m B \end{pmatrix}=C$$

两个矩阵相乘的常用分块：C=AB

$$AB=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pn} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_p \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{p} a_{1j}\theta_j \\ \sum_{j=1}^{p} a_{2j}\theta_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{p} a_{mj}\theta_j \end{pmatrix}=C$$

C的第1行

C的行可以由B的行线性表示

两个矩阵相乘的常用分块：C=AB

$$AB=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pn} \end{pmatrix}$$

$$=A\begin{pmatrix}\gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_n\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}A\gamma_1 & A\gamma_2 & \cdots & A\gamma_n\end{pmatrix}=C$$

- 两个矩阵相乘的常用分块：C=AB

$$AB=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pn} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \beta_1\gamma_1 & \beta_1\gamma_2 & \cdots & \beta_1\gamma_n \\ \beta_2\gamma_1 & \beta_2\gamma_2 & \cdots & \beta_2\gamma_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_m\gamma_1 & \beta_m\gamma_2 & \cdots & \beta_m\gamma_n \end{pmatrix}$$

齐次线性方程组Ax=0

下列说法等价：

(1) $A_{m\times n}x=0$有非0解

(2) $r(A)<n$

(3) A的列向量线性相关

(4)线性空间$\{Ax\mid x$是任意n维列向量$\}$维数小于n

(5)线性空间$\{x|Ax=0\}$维数至少是1

(6) A^TA是半正定矩阵

(7)存在非0矩阵B,使得$AB=0$

齐次线性方程组Ax=0

下列说法等价:

(1)$A_{m\times n}x=0$只有0解

(2)$r(A)=n$

(3)A的列向量线性无关

(4)线性空间$\{Ax\,|\,x$是任意n维列向量$\}$维数$=\mathrm{n}$

(5)线性空间$\{x|Ax=0\}$维数$=0$

(6)$\mathrm{A^TA}$是正定矩阵

(7)不存在非0矩阵B,使得$AB=0$

(8)A列满秩

(9)A中存在n级子式不等于0

齐次线性方程组Ax=0

11.对于 n 元齐次线性方程组 $Ax=0$，以下命题中，正确的是__________

(A) 若 A 的列向量组线性无关，则 $Ax=0$ 有非零解；

(B) 若 A 的行向量组线性无关，则 $Ax=0$ 有非零解；

(C) 若 A 的列向量组线性相关，则 $Ax=0$ 有非零解；

(D) 若 A 的行向量组线性相关，则 $Ax=0$ 有非零解。

齐次线性方程组Ax=0

18.设矩阵 $A_{m\times n}$ ，$B_{n\times m}$，且 $m<n$，则以下结论一定正确的是　　（　　）

a．方程组 $ABx=0$ 有非零解；　　b．方程组 $BAx=0$ 有非零解；

c．方程组 $ABx=0$ 只有零解；　　d．方程组 $BAx=0$ 只有零解。

22. 设向量 $\alpha_1=(1,0,2)^T$ 和 $\alpha_2=(0,1,-1)^T$ 都是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解，则 A 为

（　　）

（A）$\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 4 & -2 & -2\end{pmatrix}$；　　（B）$\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 4 & -2 & -2\end{pmatrix}$；

（C）$\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$；　　（D）$\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ 4 & -2 & 2\end{pmatrix}$。

齐次线性方程组Ax=0的解

(1)$A_{m\times n}x=0$的基础解系中含n-$r(A)$个解

(2)$A_{m\times n}x=0$的n-$r(A)$个线性无关的解构成基础解系

(3)$A_{m\times n}x=0$的n-$r(A)$个解，且其他所有解都可以由这些解线性表示，那么这些解构成基础解系

(4)α，β是$A_{m\times n}x=\mathrm{b}$的解，那么$\alpha-\beta$是$Ax=0$的解

齐次线性方程组Ax=0的解

A是n阶方阵,秩为$r(A)$. B是n阶方阵,且$AB=0$.

那么(1) $0 \le r(B) \le n-r(A)$

(2)对任意整数k, $0 \le k \le n\text{-}r(A)$,存在$n$阶方阵$B$,

使得$AB=0$,且$r(B)=k$

齐次线性方程组Ax=0

23. 以下命题一定成立的是　（　　）

（A）设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是齐次线性方程组$Ax=0$的基础解系，向量组$\beta_1,\beta_2,\beta_3$可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，则$\beta_1,\beta_2,\beta_3$也是$Ax=0$的基础解系；

（B）设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是齐次线性方程组$Ax=0$的基础解系，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$可由向量组$\beta_1,\beta_2,\beta_3$线性表示，则$\beta_1,\beta_2,\beta_3$也是$Ax=0$的基础解系；

（C）设A是$m\times n$矩阵，$m<n$时，非齐次线性方程组$Ax=b$一定有解；

（D）若齐次线性方程组$Ax=0$只有零解，则非齐次线性方程组$Ax=b$必有唯一解。

非齐次线性方程组Ax=b

下列说法等价:

(1)$A_{m\times n}x=b$无解

(2)$r(A)\neq r(A,b)(r(A)<r(A,b)$或者$r(A)+1=r(A,b))$

(3)向量b不能由A的列向量线性表示

(4)向量b不属于线性空间$\{Ax\,|\,x$是任意n维列向量$\}$

非齐次线性方程组Ax=b

下列说法等价:

(1)$A_{m\times n}x=b$有唯一解

(2)$r(A)=r(A,b)=n$

(3)向量b由A的列向量线性表示,且表示法唯一

下列说法等价:

(1)$A_{m\times n}x=b$有无穷解

(2)$r(A)=r(A,b)<n$

(3)向量b由A的列向量线性表示,且表示法不唯一

非齐次线性方程组Ax=b

下列说法等价:

(1)矩阵方程$A_{m\times n}X_{n\times k}=B_{m\times k}$有解

(2)$r(A)=r(A,B)$

非齐次线性方程组Ax=b的解

$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$是$A_{m\times n}x=b$的解,

那么(1)$l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+\ldots+l_k\alpha_k$是$A_{m\times n}x=(l_1+l_2+\ldots+l_k)b$的解

(2)如果$l_1+l_2+\ldots+l_k\neq 0$, 那么$\dfrac{l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+\ldots+l_k\alpha_k}{l_1+l_2+\ldots+l_k}$是$Ax=b$的解

$A_{m\times n}x=b$的通解$=$方程组$\mathrm{Ax}=0$的通解$+$方程组$\mathrm{Ax}=\mathrm{b}$一个特解

α,β是$A_{m\times n}x=b$的解，那么$\alpha-\beta$是$A_{m\times n}x=0$的解

非齐次线性方程组Ax=b的解

对任何列向量b,方程组$A^T Ax = A^T b$总是有解

对任何列向量b,总有$r(A^T A) = r(A^T A, A^T b)$成立

非齐次线性方程组Ax=b的解

2. 设α，β是非齐次线性方程组$(\lambda E-A)x=b$的两个不同的解，则以下选项中一定是A对应特征值λ的特征向量为 （ ）

a. $\alpha+\beta$； b. $\alpha-\beta$； c. α； d. β。

2. 设$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_1+\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$，其中$\alpha_1,\alpha_2$是非齐次线性方程组$Ax=b$的解，$A$为$2\times 3$矩阵，且$r(A)=2$，则线性方程组 $Ax=b$ 的通解为________________；

非齐次线性方程组Ax=b的解

3. 已知 4 阶矩阵 A 的秩 $r(A)=3$，则齐次线性方程组 $A^{*}x=0$ 的基础解系含__________个线性无关的解向量。

8.设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$，已知线性方程组 $Ax=\beta$ 有解但不唯一。

则常数 $a=$__________。

如果矩阵A满足$(A-\lambda_1 E)(A-\lambda_2 E)=0$,且$\lambda_1 \neq \lambda_2$,

那么(1)$r(A-\lambda_1 E)+r(A-\lambda_2 E)=n$;

(2)矩阵A可以相似对角化,对角矩阵为$B=\begin{pmatrix}\lambda_1 E_r & \\ & \lambda_2 E_s\end{pmatrix}$,

其中$r=r(A-\lambda_2 E), s=r(A-\lambda_1 E)$

(3)$r(A)=\begin{cases} n & 如果\lambda_1,\lambda_2 \neq 0 \\ r & 如果\lambda_1 \neq 0,\lambda_2=0 \\ s & 如果\lambda_2 \neq 0,\lambda_1=0 \end{cases}$

(4)矩阵A的特征值为λ_1或者λ_2

(5)对任何$k \neq \lambda_1$和λ_2,矩阵kE-A可逆

(6)$|A|=\lambda_1^r\lambda_2^s, tr(A)=r\lambda_1+s\lambda_2$

若$f(x)$是多项式,则$|f(A)|=f(\lambda_1)^r f(\lambda_2)^s$

(7)A的特征多项式为$(\lambda-\lambda_1)^r(\lambda-\lambda_2)^s$

特征值和特征向量

一般地, $f(x)$是一个实系数多项式, A是一个n阶矩阵.
如果$f(x)=0$没有重根, 那么矩阵A可以对角化.

特征值和特征向量

3. 设 $A_{4\times 4}$ 为实对称矩阵，且 $A^2+A=0$。若秩 $r(A)=3$，则 A 相似于（　　）

（A）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$；（B）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$；

（C）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$；（D）$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$。

特征值和特征向量

6. 设 A，B 为 n 阶方阵，且 $A^2 = A$，$B^2 = B$。则 （　　）

（A）$r(A) = r(B)$ 时，A，B 不相似；

（B）$r(A) \neq r(B)$ 时，A，B 相似；

（C）$r(A) = r(B)$ 时，A，B 相似；

（D）以上都有可能

9. 已知矩阵 $A_{2\times2}$，满足 $|A|<0$，$4A^2 = E$。则 $\lim\limits_{n\to+\infty} A^n$ （　　）

（A）$\begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$；

（B）$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$；

（C）$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$；

（D）$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$。

特征值和特征向量

$|A| =$ 特征值的乘积

$tr(A) =$ 特征值的和

如果k不是A的特征值，那么$kE - A$可逆

如果$A\alpha = \lambda\alpha, \alpha \neq 0$，那么$f(A)\alpha = f(\lambda)\alpha$，其中$f(x)$是多项式

特别地，$A^k\alpha = \lambda^k\alpha, (kA)\alpha = (k\lambda)\alpha$

若A可逆，则$A^{-1}\alpha = \lambda^{-1}\alpha, A^*\alpha = \lambda^{-1}|A|\alpha$

如果A的各行元素的和均为a，那么A有特征值a，

对应的一个特征向量为$(1,1,\ldots,1)^T$

特征值和特征向量

1. 已知 A,B 为 n 阶方阵，$\lambda=\pm 1$ 不是 B 的特征值，且 $AB-A-B=E$，则 $A^{-1}=$______________。

2. 若三阶方阵 A 有特征值 1, 1, 2，则行列式 $\left|A^{-1}+2A^{*}\right|=$__________。

3. 设 3 阶方阵 A 的特征值为 1，2，3，且 A 相似于 B，则行列式 $|B^{2}+E|=$_____。

4. 设 3 阶方阵 A 有特征值 $1,-1,3$，则 $B=(3E+A^{*})^{2}$ 的相似对角阵为 ______________；

5. 设 4 阶矩阵 A 满足行列式 $|2E+A|=0$，$AA^{T}=3E$，$|A|<0$，则其伴随矩阵 A^{*} 必有一个特征值为 ______________；

特征值和特征向量

13. 设 A 为 3 阶矩阵，且行列式 $|A-2E|=0$，$|3A+E|=0$，$|A+2E|=0$，则行列式 $|A^2+A|=$ ________________。

14. 设 $A=(a_{ij})_{3\times3}$ 满足 $A^2-7A+12E=0$，且迹 $tr(A)=\sum_{i=1}^{3}a_{ii}=10$。则 $|A|=$ ____________。

16. 设 n 阶可逆矩阵 A 的各行元素的和都等于 k，且 $8A^2+A^{-1}$ 的各行元素的和都等于零，则 $k=$ ________________。

特征值和特征向量

设 $A=(a_{ij})_{3\times3}$ 的特征值为 1，2，3，A_{ij} 是行列式 $|A|$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式，则

$|A|^{-1}(A_{11}+A_{22}+A_{33})=$ （　　）

a. $\dfrac{21}{6}$；　　b. $\dfrac{11}{6}$；　　c. $\dfrac{11}{3}$；　　d. 6。

设$\alpha=(a_1,\ldots,a_n)^T,\beta=(b_1,\ldots,b_n)^T$是非0的单位向量,$H=E-k\beta\alpha^T,k\neq 0$

(1)$tr(H)=n-k\alpha^T\beta$

(2)β是H的对应到特征值$(1-k\alpha^T\beta)$的特征向量.

(3)设$\alpha^T x=0$的基础解系为$\xi_1,\ldots,\xi_{n-1}$,

那么$\xi_1,\ldots,\xi_{n-1}$是H的对应到特征值1的线性无关的特征向量.

(4)H的n个特征值为$1-k\alpha^T\beta,\underbrace{1,\ldots,1}_{n-1\text{个}},|H|=1-k\alpha^T\beta$

(5)若要H可逆,则必须$1-k\alpha^T\beta\neq 0$

(6)若$\alpha=\beta$,则H是对称矩阵;

进一步,若要H正定,必须$1-k\alpha^T\alpha>0$;若要H正交,必须$1-k\alpha^T\alpha=\pm 1$

设$\alpha=(a_1,\ldots,a_n)^T,\beta=(b_1,\ldots,b_n)^T$是非0的单位向量,$H=E-k\beta\alpha^T,k\neq 0$

(7)若$\alpha^T\beta\neq 0$,即α和β不正交,

那么$\beta,\xi_1,\ldots,\xi_{n-1}$是$H$的$n$个线性无关的特征向量,

矩阵H能够相似对角化,$|H|=1-k\alpha^T\beta$

(8)若$\alpha^T\beta=0$,即α和β正交,

那么矩阵H的特征值1的代数重数为n，几何重数为$n-1$,

矩阵H不能够相似对角化,$|H|=1$

1. 设α是n维非零实列向量,矩阵$A=E+\alpha\alpha^T$,$n\geq 3$，则__________

(A) A至少有$n-1$个特征值为1；　(B) A只有1个特征值为1；

(C) A恰有$n-1$个特征值为1；　(D) A没有1个特征值为1。

5. 设n维向量$\alpha=(1,1,\cdots,1)$，$n\geq 2$，矩阵$A=E-\alpha^T\alpha$，则A^{-1}为　（　　）

10. 设常数$k\neq 0$，向量$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\neq 0$，$\beta=(1,1,\cdots,1)$，矩阵$A=kE+\beta^T\alpha$。

试求：（1）行列式$|A|$；（2）矩阵A的特征值。

8. 设n阶向量$\alpha=(x,0,\cdots,0,x)^T$，$x<0$；矩阵　$A=E-\alpha\alpha^T$，

且　$A^{-1}=E+\frac{1}{x}\alpha\alpha^T$，则$x=$____________。

10. 设常数 $k \neq 0$，向量 $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \neq 0$，$\beta = (1,1,\cdots,1)$，矩阵 $A = kE + \beta^T \alpha$ 。

试求：（1）行列式 $|A|$；（2）矩阵 A 的特征值。

特征值和特征向量

实对称矩阵的特征值都是实数

反实对称矩阵的特征值都是0或者纯虚数

正交矩阵的特征值的模为1

7. 设 A 为 n 阶反对称矩阵，则（　　）

（A）$r(A+E)=0$；

（B）$r(A+E)=n$；

（C）$0<r(A+E)<n$；

（D）以上都有可能。

特征值和特征向量

矩阵的特征值λ的代数重数:作为特征方程根的重数

矩阵的特征值λ的几何重数:

方程组$(\lambda E - A)x = 0$的基础解系中解的个数

属于λ的线性无关的特征向量的最多个数

特征子空间V_λ的维数

特征值和特征向量

1. 设α是n维非零实列向量,矩阵$A=E+\alpha\alpha^T$,$n\geq 3$，则__________

(A) A至少有$n-1$个特征值为1；
(B) A只有1个特征值为1；
(C) A恰有$n-1$个特征值为1；
(D) A没有1个特征值为1。

4. 已知n阶方阵A、B满足 $AB=BA$，α是A对应特征值λ的一个特征向量，且α与$B\alpha$线性无关。则λ的重数k必定有（　　）

（A）$k=2$；
（B）$k\neq 2$；
（C）$k\geq 2$；
（D）$k>2$。

矩阵对角化

下列说法等价：

(1) A相似于一个对角矩阵B

(2) 存在可逆矩阵P,是的$P^{-1}AP=B$

(3) A有n个线性无关的特征向量

(4) A的任何一个特征值的代数重数等于几何重数

(5) A的最小多项式没有重根

矩阵对角化

$$P^{-1}AP = B, P\text{可逆}$$

$$\Leftrightarrow AP = PB, P\text{可逆}$$

$$\Leftrightarrow A(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)B$$

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\text{线性无关}$$

矩阵对角化

6. 已知矩阵$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & b \\ 1 & b & 1 \end{pmatrix}$相似于对角阵$\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$，则$a=$______，$b=$______。

7. 列向量$\alpha=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$是矩阵$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{pmatrix}$的对应特征值$\lambda$的一个特征向量.

则$\lambda=$________，$a=$________，$b=$________。

矩阵对角化

9. 设 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 1 & 2\\ 3 & 0 & 4\end{pmatrix}$，$\alpha=\begin{pmatrix}a\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$，已知向量 $A\alpha$ 与 α 线性相关，则 $a=$__________。

12. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 4 & x\\ -3 & -3 & 5\end{pmatrix}$ 有特征值 6，2，2，且 A 能相似于对角阵，则 $x=$__________。

15. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 2 & x & 2\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}$ 与矩阵 $B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & y\end{pmatrix}$ 相似，则 $x=$________，

$y=$______；

矩阵对角化

13. 设 A 为 3 阶实对称矩阵，行列式 $|A|=0$，且 $A\begin{pmatrix}0&1\\1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\\0&-1\end{pmatrix}$。又设 B 为对角阵，

P 为可逆阵， $P^{-1}AP=B$。试求：（1）矩阵 B 和 P；（2）矩阵 A。

12. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&y&1\\0&0&1&2\end{pmatrix}$ 有 1 个特征值为3。（1）试求：常数 y， 以及矩阵 (A^TA)

的特征值；

（2）试求：可逆矩阵 P， 使得矩阵 $(AP)^T(AP)$ 为对角阵，并求出此对角阵。

矩阵Jordan标准形

(1)矩阵A的Jordan标准形J_A

(2)哈密顿-凯莱定理

(3)零化多项式与最小多项式

(4)最小多项式与Jordan标准形

(5)秩为1的矩阵的Jordan标准形

(4)一些应用

矩阵的n次方

(1)求秩为1的矩阵的n次方, $(\alpha^T\beta)^n$

(2)求形如 $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ 矩阵的n次方

(3)求可对角化矩阵的n次方, $A^n = PB^nP^{-1}$, B为对角矩阵

矩阵的n次方

1. 已知 A 为三阶实对称矩阵，秩 $r(A)=2$, $\alpha_1=(0,1,0)^T$, $\alpha_2=(-1,0,1)^T$,是 A 对应特征值 $\lambda_1=\lambda_2=3$ 的特征向量，试求：

（1） A 的另一个特征值 λ_3 及其特征向量 α_3 ；（2） 矩阵 A ，矩阵 A^n 。

2. 已知 3 阶方阵 A 的特征值 1，2，3 对应的特征向量分别为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 。

(1) 将向量 β 用 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示；(2)求 $A^n\beta$ ， n 为自然数。

其中： $\alpha_1=(1,1,1)^T$ ， $\alpha_2=(1,2,4)^T$ ， $\alpha_3=(1,3,9)^T$ ， $\beta=(1,1,3)^T$ 。

矩阵的n次方

8. 设 A 为三阶实对称矩阵，且满足 $A^2+A-2E=0$ 已知 A 对应特征值 $\lambda=1$ 的特征向量有 $\alpha_1=(0,1,0)^T$，$\alpha_2=(1,0,1)^T$。试求：矩阵 A，A^n。其中 n 为自然数。

正交矩阵的性质

(1)若A为正交阵，则$|A|=\pm1$;

(2)实矩阵A为正交阵当且仅当$A^T=A^{-1}$;

(3)实矩阵A为正交阵当且仅当A的行(列)向量组是两两正交的单位向量组;

(4)若A为正交阵,则A的实特征值只能为±1(A的特征值模为1);

(5)若A,B为n阶正交阵,则AB也是正交矩阵。

正交矩阵的性质

若$A=(a_{ij})_{3\times3}$是正交矩阵,$|A|=1$,则$A^T=A^{-1}=A^*$,

即$a_{ij}=A_{ij}$,这里A_{ij}是a_{ij}的代数余子式。

若$A=(a_{ij})_{3\times3}$是正交矩阵,$|A|=-1$,则$A^T=A^{-1}=-A^*$,

即$a_{ij}=-A_{ij}$,这里A_{ij}是a_{ij}的代数余子式。

反之,若$A=(a_{ij})_{3\times3}$是非零的实矩阵,且$a_{ij}=A_{ij}(a_{ij}=-A_{ij})$,

$i,j=1,2,\cdots,n$,则A是正交矩阵,且$|A|=1(|A|=-1)$。

正交矩阵的性质

$A=(a_{ij})_{n\times n}$是实正交矩阵 $\Leftrightarrow$ 对任何$x\in R^n$,都有$|x|=|Ax|$

正交矩阵的性质

设 $A=(a_{ij})_{3\times3}$ 满足 $A^*=A^T$，若 $a_{11}=a_{12}=a_{13}=a$， $a>0$，则 $a=$______

(A) $1/\sqrt{3}$；　　(B) $\sqrt{3}$；

(C) $1/3$；　　(D) 3。

设 $A=(a_{ij})_{3\times3}$ 为非零实矩阵， $a_{ij}=A_{ij}$， A_{ij} 是行列式 $|A|$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式，

则行列式 $|A|=$____________

a. 0；　b. 1；　c. 2；　d. 3。

正交矩阵的性质

设 $A=(a_{ij})_{3\times3}$，A_{ij} 是 $|A|$ 中 a_{ij} 的代数余子式，$a_{ij}=A_{ij}$，$a_{11}=2a_{12}=3a_{13}$。已知

$a_{11}<0$，则 $a_{11}=$________________。

2. 设 $A=(a_{ij})_{3\times3}$ 为非零实矩阵，$a_{ij}=A_{ij}$，A_{ij} 是行列式 $|A|$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式，则矩阵 A 必为____________

a. 不可逆矩阵；

b. 对称矩阵；

c. 正交矩阵；

d. 正定矩阵。

正交矩阵的性质

5. 设 $A=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} \\ a & b & \frac{-4}{\sqrt{18}} \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} \end{pmatrix}$，若 A 为正交阵，则 $a=$________，$b=$________。

实对称矩阵正交对角化

实对称矩阵和二次型

5. 设实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (1-\lambda)x_1^2 + (1-\lambda)x_2^2 + 2(1+\lambda)x_1x_2 + 2x_3^2$ ，

已知秩 $r(f) = 2$,求:（1）常数 λ ；（2）正交变换 $x = Qy$，将 f 化为标准型。

9. 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + ax_2^2 + x_3^2 + 2bx_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ 通过正交变换

$x = Qy$ 化为标准形 $f = y_2^2 + 4y_3^2$。试求:（1）常数 a , b 的值;（2）正交矩阵 Q。

12. 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x^T Ax$ 经正交变换 $x = Qy$ 化为标准型

$y_1^2 + y_2^2 - 2y_3^2$，且正交矩阵 Q 的第三列为 $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})^T$。

（1）试求:正交矩阵 Q 和实对称矩阵 A；（2）证明:矩阵 $B = A + 3E$ 为正定矩阵。

实对称矩阵和二次型

12. 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3)=x^T Ax$ 经正交变换 $x=Qy$ 化为标准型 $y_1^2+y_2^2-2y_3^2$，且正交矩阵 Q 的第三列为 $(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})^T$。

（1）试求：正交矩阵 Q 和实对称矩阵 A；（2）证明：矩阵 $B=A+3E$ 为正定矩阵。

实对称矩阵和二次型

化二次型为标准型

(1)正交替换法

(2)配方法

(3)初等变换法

实对称矩阵和二次型

7. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(a-1)\sum_{i=1}^{3}x_i^2+2\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}x_ix_j$ 的秩为 2，则常数 $a=$（　　）

（A）1；　　（B）−1；　　（C）5；　　（D）−5。

4. 设实对称矩阵 $A=(a_{ij})_{3\times3}$ 满足 $A^3+E=0$，则二次型 $f=x^TAx$ 经正交变换 $x=Qy$ 可化为标准形 $f=$________________；

实对称矩阵和二次型

一般二次型的问题,根据已知条件思考合适的标准型

二次型与对称矩阵之间相互转化

任何实二次型$f = x^T Ax = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$

必存在非退化线性代换$x = Py$,化二次型为标准型(不唯一),

$z_1^2 + \cdots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - \cdots - z_r^2$(规范型,唯一,惯性定理).

任何实对称矩阵A,存在可逆阵P,使得

$$P^T AP = \begin{pmatrix} E_p & & \\ & -E_{r-p} & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

任何实对称矩阵A均合同于一个形如$\begin{pmatrix} E_p & & \\ & -E_{r-p} & \\ & & 0 \end{pmatrix}$的矩阵

任何实二次型$f = x^T Ax = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$

必存在非退化线性代换$x = Qy, Q$为正交阵,化二次型为标准型，

$\lambda_1 z_1^2 + \cdots + \lambda_p z_p^2 - \lambda_{p+1} z_{p+1}^2 - \cdots - \lambda_r z_r^2,$

其中$\lambda_1,\ldots,\lambda_p$是矩阵$A$的大于0的特征值

$-\lambda_{p+1},\ldots,-\lambda_r$是矩阵$A$的小于0的特征值

$\lambda_{r+1} = \cdots = \lambda_n = 0$是矩阵$A$的全部0特征值

任何实对称矩阵A, 存在正交阵Q, 使得

$$Q^{-1}AQ=Q^{T}AQ=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \lambda_p & & & & & & \\ & & & -\lambda_{p+1} & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -\lambda_r & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

其中$\lambda_1,\dots,\lambda_p$是矩阵$A$的大于0的特征值,$-\lambda_{p+1},\dots,-\lambda_r$是矩阵$A$的小于0的特征值

$\lambda_{r+1}=\cdots=\lambda_n=0$是矩阵$A$的全部0特征值

任何实对称矩阵A均合同且相似于矩阵

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \lambda_p & & & & & & \\ & & & -\lambda_{p+1} & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -\lambda_r & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

其中$\lambda_1,\dots,\lambda_p$是矩阵$A$的大于0的特征值,$-\lambda_{p+1},\dots,-\lambda_r$是矩阵$A$的小于0的特征值

$\lambda_{r+1}=\cdots=\lambda_n=0$是矩阵$A$的全部0特征值

实对称矩阵和二次型

下列说法等价：

(1) A是正定矩阵

(2) 二次型$x^T Ax$正定

(3) 对任何$x \neq 0$, 都有$x^T Ax > 0$

(4) A的特征值全大于0

(5) A合同于单位矩阵E

(6) 存在可逆矩阵P, 使得$A = P^T P$

(7) 顺序主子式全大于0

(8) 存在正定矩阵B, 使得$A = B^2$

实对称矩阵和二次型

5. 设 A，B 是正定矩阵，则以下矩阵中，一定是正定矩阵为（其中 k_1，k_2 为任意常数）

（　　）

a. A^*+B^*；　　b. A^*-B^*；　　c. A^*B^*；　　d. $k_1A^*+k_2B^*$。

1. 已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+2x_3^2+2ax_1x_2+2x_2x_3$ 正定,则常数 a 的取值范围为________________。

3. 已知 3 阶实对称矩阵 A 的秩 $r(A)=2$，且 $A^2+2A=O$，若矩阵 $B=A+aE$ 是正定矩阵，则常数 a 的取值范围为________________。

实对称矩阵和二次型

二次型$x^T A^T Ax=(Ax, Ax)\geq 0$,即这个二次型始终半正定.

$A^T Ax=0$与$Ax=0$同解.

下列说法等价:

(1)二次型$x^T A^T Ax$正定

(2)$A^T A$是正定矩阵

(3)$Ax=0$只有0解

(4)A是列满秩

实对称矩阵和二次型

1. 设 A 为 $m\times n$ 实矩阵，$r(A)=n$，则______

(A) A^TA 必合同于 n 阶单位矩阵；　(B) AA^T 必等价于 m 阶单位矩阵；

(C) A^TA 必相似于 n 阶单位矩阵；　(D) AA^T 是 m 阶单位矩阵。

4. 设 $A_{m\times n}$ 为实矩阵,则线性方程组 $Ax=0$ 只有零解是矩阵 (A^TA) 为正定矩阵的________

(A) 充分条件；　(B) 必要条件；　(C) 充要条件；　(D) 无关条件。

实对称矩阵和二次型

9. 设 A 为 $m \times n$ 的实矩阵，$f = x^T(A^T A)x$ 是正定二次型。则　　（　　）

（A）$r(A) = m$；　　（B）$r(A) < m$；

（C）$r(A) < m$；　　（D）$r(A) = n$。

二次型$g = x^T Ax$是半正定二次型

$\Leftrightarrow$ g的标准型中n个平方项的系数全≥ 0

$\Leftrightarrow$ g的规范标准型中正惯性指数等于秩r

$\Leftrightarrow$ A的特征值全≥ 0

$\Leftrightarrow$ 存在半正定矩阵B,使得$A = B^2$

$\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵P,使得$A = P^T \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P$

$\Leftrightarrow$ 存在n阶方阵M,使得$A = M^T M$

$\Leftrightarrow$ 存在秩为r的$r \times n$矩阵M,使得$A = M^T M$

$\Leftrightarrow$ A的所有主子式都≥ 0

$\Leftrightarrow$ 存在半正定矩阵B，使得$\mathrm{A} = B^2$

二次型$f=x^TAx$为半负定二次型

$\Leftrightarrow$ 二次型$g=x^T(-A)x$是半正定二次型

二次型$f=x^TAx$为负定二次型

$\Leftrightarrow$ 二次型$g=x^T(-A)x$是正定二次型

二次型$f=x^TAx$为不定二次型

$\Leftrightarrow$ 存在x_1和x_2，使得$x_1^TAx_1>0, x_2^TAx_2<0$

线性空间的基变换和坐标变换

判断是否构成线性子空间：
第一步：找到一个大的线性空间覆盖住这个空间
第二步：检查加法和数乘是否封闭

线性空间的基变换和坐标变换

$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$和$\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n$是线性空间V的两组基

$$(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)=(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)C$$

$$\xi=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)x$$

$$\xi=(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)y$$

例：R^n为n维线性空间,$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$是它的一组基。

例：$R^{m\times n}$为mn维线性空间,$E_{ij}, i=1,\dots,m, j=1,\dots,n$为它的一组基。

例：$R[x]_{n+1}$为$n+1$维线性空间,$1,x,x^2,\cdots,x^n$为它的一组基。

例：$R[x]$表示全体实系数多项式,那么$\dim(R[x])=\infty$。

例：n元实系数方程组$Ax=0$的所有的解构成的线性空间,
维数为$n-r(A)$, 一组基为基础解系

例：$\{Ax | x\in R^n\}$构成线性空间，

$\boxed{\text{一组基为矩阵}A\text{的列向量组的极大线性无关组}}$

$\boxed{\text{维数为}r(A)}$

若将矩阵A分块，即$A=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$

则$\{Ax|x\in R^n\}=L(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$

线性空间的基变换和坐标变换

1. 设 R^3 的两个基 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$；$\beta_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\beta_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\beta_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

（1） 求由基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵 P；

（2） 已知向量 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，求向量 α 在基 β_1,β_2,β_3 下的坐标；

(3) 求在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 和 β_1,β_2,β_3 下有相同坐标的所有向量。

线性空间的基变换和坐标变换

2. 已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 3 维线性空间 V 的一个基，且

$$\beta_1 = \alpha_1, \qquad \beta_2 = -2\alpha_2 + \alpha_3, \qquad \beta_3 = \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 。$$

（1）求由基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的过渡矩阵 P；

（2）设向量 $\alpha = 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3$，求 α 在基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下的坐标

线性空间的基变换和坐标变换

5. 设 $A=\begin{pmatrix}1&3&2\\3&a&2\\2&1&0\end{pmatrix}$，已知存在 3×2 实矩阵 $B\neq 0$，使 $AB=0$。（1）求常数 a；（2）问满足 $AB=0$ 的所有实矩阵是否构成 $R^{3\times 2}$ 的子空间？若是，写出它的一个基。若不是，请说明理由。

线性变换定义、概念

能够求出线性变换的矩阵

能够求出线性变换在不同基下的矩阵

能够确定线性变换的值域与核，及他们的维数

$U, \dim(U) = n \xrightarrow{\text{线性变换} f} V, \dim(V) = m$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 为U的一组基

$f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m) A_{m\times n}$

$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ 为V的一组基

过渡矩阵P

过渡矩阵Q

$$AP = QB$$

或者即, $B = Q^{-1} AP$

$\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_n$ 为U的一组基

$f(\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_n) = (\beta'_1, \beta'_2, \ldots, \beta'_m) B_{m\times n}$

$\beta'_1, \beta'_2, \ldots, \beta'_m$ 为V的一组基

$V, \dim(V)=n$ $\xrightarrow{\text{线性变换} f}$ $V, \dim(V)=n$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 为V的一组基

$f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) A_{n\times n}$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 为V的一组基

过渡矩阵P

$$AP = PB$$

或者即, $B = P^{-1}AP$

过渡矩阵P

$\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_n$ 为V的一组基

$f(\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_n) = (\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_n) B_{n\times n}$

$\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_n$ 为V的一组基

欧氏空间

1.内积的性质和计算
2.正交
3.施密特正交化方法,
求标准正交向量组和标准正交基
4.度量矩阵和内积
给出度量矩阵, 那么可以确定一个内积
给出一个内积, 可以确定出度量矩阵