上 海 交 通 大 学 试 卷 A卷

（ 2019 至 2020 学年 第 1 学期 2019 年 12 月 31 日 ）

班级号________________ 学号__________ 姓名 ________

课程名称 《数学分析(荣誉)I》 成绩 ________

题 号	一	二	三	四	五	六	七	总 分
满 分	20	12	16	24	8	12	8	100
得 分								

一、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1． 双纽线 $\left(x^2+y^2\right)^2=x^2-y^2$ 所围成图形的面积__________.

2． 若广义积分 $\int_0^{+\infty} x^p \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$ 收敛，则实数 p 的取值范围是________________.

3． 设 $x_n=\dfrac{n}{n+1}\sin\dfrac{2n\pi}{3}$ ，则 $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n=$_______， $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n=$_________.

4． 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+2}+\dfrac{1}{n+4}+\cdots+\dfrac{1}{n+2n}\right)=$____________.

5． 设 $f(x)=\int_0^x \dfrac{\mathrm{e}^t}{1-t}\mathrm{d}t$ ，则 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=$__________.

二、单项选择题（每小题 3 分，共 12 分）

6． 下列广义积分中收敛的是 ……（ ）

(A) $\int_0^{+\infty}\left(1-\cos\dfrac{2}{x}\right)\mathrm{d}x$. **(B)** $\int_1^{+\infty}\dfrac{\cos^2 x\mathrm{d}x}{x}$. **(C)** $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\mathrm{d}x}{\sin x}$. **(D)** $\int_0^1\dfrac{\mathrm{d}x}{\ln x}$.

7． 考虑下列断语，则有 ……（ ）

① 若无穷积分 $\int_1^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 也收敛.

② 若 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 非负有界，且 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\int_1^{+\infty} f^2(x)\mathrm{d}x$ 必收敛.

(A) ①正确，②不正确. **(B)** ①不正确，②正确.

(C) ①，②都正确. **(D)** ①，②都不正确.

8. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，记 I_1, I_2, I_3 如下，则结论是 …… (　　)

$$I_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}, \qquad I_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n^2}, \qquad I_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+n^2 a_n}.$$

(**A**) I_1、I_2 和 I_3 必都发散.　　(**B**) I_1 必发散，I_2 和 I_3 都收敛.

(**C**) I_1 和 I_2 必都发散，I_3 收敛.　　(**D**) 以上结论都不正确.

9. 设 $f(t) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{t}, & t \neq 0, \\ 0, & t = 0. \end{cases}$，令 $F(x) = \int_x^{2x} f(t)\mathrm{d}t$，则 $F(x)$ 在 $x=0$ 处 ⋯ (　　)

(**A**) 不连续.　　(**B**) 连续，但不可导.

(**C**) 可导，但 $F'(0) \neq 0$.　　(**D**) 可导，且 $F'(0) = 0$.

三、（每小题 8 分，共 16 分）

10. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2} \cdot 2^n$ 的敛散性，并说明理由.

11. 设 $x_n > 0$，且 $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} > 1 - \dfrac{1}{n} (n=1,2,\cdots)$，判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 的敛散性，并说明理由.

四、解答题（每小题 8 分，共 24 分）

12. 计算定积分 $\int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \sin^2 x \mathrm{d}x$.

13. 计算定积分 $\int_0^2 (x+2)\sqrt{2x-x^2}\mathrm{d}x$.

14. 设函数 $f \in C^{(1)}(\mathbb{R})$，且 $f(0)=0$. 令 $F(x)=\begin{cases} \dfrac{\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$

(1) 求 $F'(x)$；**(2)** 判断 F' 的连续性，并说明理由.

五、证明题（本题共 8 分）

15. 设函数 $f \in R[a,b]$，证明：$\mathrm{e}^{f(x)} \in R[a,b]$.

六、（本题共 12 分）

16. 讨论广义积分$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{\alpha}\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x$的敛散性(含绝对和条件收敛性)

七、证明题（本题共 8 分）

17. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{(n+1)(n+2)}$ 的敛散性，若收敛，求其和.