

期中复习题

一、选择题：

1. 设 A 为 n 阶可逆矩阵，则下列结论恒成立的是_____

(A) $(2A)^{-1} = 2A^{-1}$; (B) $(2A^{-1})^T = (2A^T)^{-1}$;

(C) $((A^T)^T)^{-1} = ((A^{-1})^{-1})^T$; (D) $((A^{-1})^{-1})^T = ((A^T)^{-1})^{-1}$ 。

2. 已知 A, B 为四阶方阵, $|A| = -2, |B| = -2$, 则 $|A^* (2B)^{-1}| =$ _____

(A) $\frac{1}{4}$; (B) $-\frac{1}{4}$; (C) 2; (D) 8。

3. 设 n 阶可逆方阵 A 的伴随矩阵是 A^* , 实常数 $k \neq 0$ 。则 $(kA)^* =$ _____

(A) kA^* ; (B) $k^{n-1}A^*$;

(C) $k^n A^*$; (D) $k^{-1}A^*$ 。

4. 设 A 为 n 阶非奇异矩阵 ($n > 2$), A^* 为 A 的伴随矩阵, 则_____

(A) $(A^*)^* = |A|^{n-1} A$; (B) $(A^*)^* = |A|^{n+1} A$;

(C) $(A^*)^* = |A|^{n-2} A$; (D) $(A^*)^* = |A|^{n+2} A$ 。

5. 设三阶矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$, 已知伴随矩阵 A^* 的秩为 1, 则必有_____

(A) $a \neq b$ 且 $a + 2b \neq 0$; (B) $a \neq b$ 且 $a + 2b = 0$;

(C) $a = b$ 或 $a + 2b \neq 0$; (D) $a = b$ 或 $a + 2b = 0$ 。

6. 设 $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ 满足 $A^* = A^T$, 若 $a_{11} = a_{12} = a_{13} = a$, $a > 0$, 则 $a =$ _____

(A) $1/\sqrt{3}$; (B) $\sqrt{3}$;

(C) $1/3$; (D) 3。

7. 已知 $\beta_1, \beta_2, \alpha_1, \alpha_2$ 为 3 维列向量组, 行列式 $|A| = |\alpha_1, \alpha_2, \beta_1| = -4$,

$|B| = |\alpha_2, \alpha_1, \beta_2| = 1$, 则行列式 $|\alpha_1 + \alpha_2, -2\alpha_1 + \alpha_2, \beta_1 - 2\beta_2| =$ _____

- (A) -6 ; (B) 6 ;
(C) -18 ; (D) 18 。

8. 设 A, B 为 n 阶方阵, 且 $r(A) = r(B)$, 则 _____

- (A) $r(A - B) = 0$; (B) $r(A + B) = 2r(A)$;
(C) $r(A, B) = 2r(A)$; (D) $r(A, B) \leq r(A) + r(B)$ 。

9. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ ($s \geq 2$) 线性无关, 且可由向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性表示, 则以下结论中不能成立的是 _____

- (A) 向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性无关;
(B) 对任一个 α_j ($0 \leq j \leq s$), 向量组 $\alpha_j, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性相关;
(C) 存在一个 α_j ($0 \leq j \leq s$), 向量组 $\alpha_j, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性无关;
(D) 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 与向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 等价。

10. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$ ($t \geq 2$) 可线性表示向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$, 则 _____

- (A) 当 $t < s$ 时, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$ 必线性相关;
(B) 当 $t < s$ 时, 向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 必线性相关;
(C) 当 $t > s$ 时, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$ 必线性相关;
(D) 当 $t > s$ 时, 向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 必线性相关。

11. 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, $b \neq 0$, 且 $r(A) = n$, 则线性方程组 $Ax = b$ _____.

- (A) 有唯一解; (B) 有无穷多解; (C) 无解; (D) 可能无解。

12. 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & k \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$, $B = (b_{ij})_{3 \times 3} \neq 0$, 且 $AB = 0$, 则 _____

- (A) 当 $k = 6$ 时, 必有秩 $r(B) = 1$; (B) 当 $k = 6$ 时, 必有秩 $r(B) = 2$;
(C) 当 $k \neq 6$ 时, 必有秩 $r(B) = 1$; (D) 当 $k \neq 6$ 时, 必有秩 $r(B) = 2$ 。

13. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 为 n 维列向量组, 矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, 下列选项中正确的是 _____

- (A) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性无关;
(B) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性相关;
(C) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性无关;
(D) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性相关。

14. 设 A, B 为 n 阶矩阵 ($n \geq 2$), 且 $AB = 0, B \neq 0$, 则必有 _____

- (A) $|A^*| = 0$; (B) $|B^*| = 0$; (C) $|B| = 0$; (D) $A = 0$ 。

15. 已知 $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, 若 $P^m AP^n = A$, 则以下选项中正确()

- (A) $m = 5, n = 4$; (B) $m = 5, n = 5$;
(C) $m = 4, n = 5$; (D) $m = 4, n = 4$ 。

16. 设线性空间 R^n 中向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 则 R^n 的下列生成子空间中, 维数为 3 的生成子空间是 _____

- (A) $L(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1)$; (B) $L(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1)$;
(C) $L(\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1)$; (D) $L(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1)$ 。

17. 已知 A 为 n 阶可逆矩阵 ($n \geq 2$), 交换 A 的第 1, 2 列得 B , 则 _____

- (A) 交换伴随矩阵 A^* 的第 1, 2 行得 B^* ;
(B) 交换伴随矩阵 A^* 的第 1, 2 行得 $(-B^*)$;
(C) 交换伴随矩阵 A^* 的第 1, 2 列得 B^* ;
(D) 交换伴随矩阵 A^* 的第 1, 2 列得 $(-B^*)$ 。

18. n 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ ($3 \leq s \leq n$) 线性无关的充要条件是 ()

(A) 存在不全为零的数 k_1, k_2, \dots, k_s , 使 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s \neq 0$;

(B) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中任意两个向量都线性无关;

(C) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中任意一个向量都不能用其余向量线性表示;

(D) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中存在一个向量, 它不能用其余向量线性表示。

19. 设矩阵 $A_{m \times n}, B_{n \times m}$, 且 $m < n$, 则以下结论一定正确的是 ()

(A) 方程组 $ABx = 0$ 有非零解;

(B) 方程组 $B Ax = 0$ 有非零解;

(C) 方程组 $ABx = 0$ 只有零解;

(D) 方程组 $B Ax = 0$ 只有零解。

20. 以下命题一定成立的是 ()

(A) 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的基础解系, 向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 则 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 也是 $Ax = 0$ 的基础解系;

(B) 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的基础解系, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 可由向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表示, 则 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 也是 $Ax = 0$ 的基础解系;

(C) 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, $m < n$ 时, 非齐次线性方程组 $Ax = b$ 一定有解;

(D) 若齐次线性方程组 $Ax = 0$ 只有零解, 则非齐次线性方程组 $Ax = b$ 必有唯一解。

21. 设 A 为 n 阶方阵, 且 $A^2 + 2E = 3A$, 则 ()

(A) $r(A - E) + r(A - 2E) = 0$;

(B) $r(A - E) + r(A - 2E) = n$

(C) $0 < r(A - E) + r(A - 2E) < n$;

(D) 以上都有可能。

22. 设矩阵 $A_{m \times n}$, 已知存在矩阵 $B_{n \times m} \neq 0$, 使 $AB = 0$, 则必有 ()

(A) $r(A) < n$;

(B) $r(A) = n$;

(C) $r(A) < m$;

(D) $r(A) = m$ 。

23. 设 α, β 是非齐次线性方程组 $(\lambda E - A)x = b$ 的两个不同的解, 则以下选项中一定是 A 对应特征值 λ 的特征向量为 ()

- (A) $\alpha + \beta$; (B) $\alpha - \beta$; (C) α ; (D) β 。

24. 设 A 为 n 阶方阵, λ_1, λ_2 是矩阵 A 的两个特征值, α_1, α_2 是矩阵 A 的对应到这两个特征值的特征向量, 下列说法正确的是 ()

- (A) 若 $\lambda_1 = \lambda_2$, 那么 α_1 和 α_2 对应分量成比例;
(B) 若 $\lambda_1 \neq \lambda_2$, 且若 $\lambda_3 = \lambda_1 + \lambda_2$ 也是矩阵 A 的特征值, 那么对应的特征向量是 $\alpha_1 + \alpha_2$;
(C) 若 $\lambda_1 \neq \lambda_2$, 那么 $\alpha_1 + \alpha_2$ 不可能是矩阵 A 的特征向量;
(D) 若 $\lambda_1 = 0$, 那么 $\alpha_1 = 0$ 。

25. 设 n 维向量 $\alpha = (1, 1, \dots, 1)$, $n \geq 2$, 矩阵 $A = E - \alpha^T \alpha$, 则 A^{-1} 为 ()

- (A) $E - (n-1)\alpha^T \alpha$; (B) $E - \frac{1}{n-1}\alpha^T \alpha$;
(C) $E - n\alpha^T \alpha$; (D) $E - \frac{1}{n}\alpha^T \alpha$ 。

二、填空题:

1. 设行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 1 & 2 \end{vmatrix}, A_{ij} \text{ 是 } D \text{ 中元素 } a_{ij} \text{ 的代数余子式, 则}$$

$$A_{41} + A_{42} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

2. 已知 $-a_{32}a_{1k}a_{41}a_{2l}$ 是 4 阶行列式 $|a_{ij}|_4$ 的展开式中的某一项。则 $k = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

3. 设 A 是 n 阶方阵, 且行列式 $|A| = 3$, 则 $|(-6^{-1}A)^{-1} + A^*| = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

4. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 其中 a_i 互不相同, $i = 1, 2, 3$, 则线性方程组 $A^T x = b$

的解是 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

5. 设行列式 $D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$, A_{ij} 是 D 中元素 a_{ij} 的代数余子式, 则

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 A_{ij} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

6. 设 A, B 为 n 阶方阵, $C = \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$, 则其伴随矩阵 $C^* = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

7. 设 n 阶方阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n+a_1 \\ 1 & 2 & \cdots & (n-1)+a_2 & n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 2+a_{n-1} & \cdots & n-1 & n \\ 1+a_n & 2 & \cdots & n-1 & n \end{pmatrix}$, 则 $|A| = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

8. 设 $a \neq b$, 设 $D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix}$, 则

(1) 行列式 D_k 与 D_{k-1} ($k=2,3,\cdots,n$) 之间的递推关系式为_____;

(2) $|D_n| =$ _____。

9. 设常数 $k \neq 0$, 向量 $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \neq 0$, $\beta = (1, 1, \cdots, 1)$, 矩阵 $A = kE + \beta^T \alpha$, 则 $|A| =$ _____。

10. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, 则逆阵 $A^{-1} =$ _____。

11. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n & 0 \end{pmatrix}$, $a_i \neq 0, i=0,1,2,\cdots,n$,

则矩阵 $A^{-1} =$ _____。

12. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $\alpha = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 已知向量 $A\alpha$ 与 α 线性相关, 则 $a =$ _____。

13. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, 已知线性方程组 $Ax = \beta$ 有解但不唯一, 则 $a =$ _____。

14. 设 A 是 4×5 矩阵, 且秩为 2。矩阵 B 是 5 阶方阵, 且 B 的列向量都是齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的解, 则矩阵 B 的秩 $r(B)$ 的最大值为_____。

15. 已知 4 阶矩阵 A 的秩 $r(A) = 3$, 则齐次线性方程组 $A^*x = 0$ 的基础解系含_____个线性无关的解向量。

16. 已知 A 为 n 阶方阵, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是 A 的列向量组, 行列式 $|A| = 0$, 其伴随矩阵

$A^* \neq 0$, 则齐次线性方程组 $A^* x = 0$ 的解空间为_____。

17. 设 n 阶向量 $\alpha = (x, 0, \dots, 0, x)^T$, $x < 0$; 矩阵 $A = E - \alpha\alpha^T$, 且 $A^{-1} = E + \frac{1}{x}\alpha\alpha^T$, 则 $x =$ _____。

18. 列向量 $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 是矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{pmatrix}$ 的对应特征值 λ 的一个特征向量.

则 $\lambda =$ _____, $a =$ _____, $b =$ _____。

19. 设 A 为 3 阶矩阵, 且行列式 $|A - 2E| = 0$, $|3A + E| = 0$, $|A + 2E| = 0$, 则行列式

$|A^2 + A| =$ _____。

20. 若三阶方阵 A 有特征值 1, 1, 2, 则行列式 $|A^{-1} + 2A^*| =$ _____。

21. 设 3 阶方阵 A 的特征值为 1, 2, 3, 且 A 相似于 B , 则行列式 $|B^2 + E| =$ _____。

22. 设 $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ 满足 $A^2 - 7A + 12E = 0$, 且迹 $tr(A) = \sum_{i=1}^3 a_{ii} = 10$ 。

则 $|A| =$ _____。

23. 列向量 $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 是矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{pmatrix}$ 的对应特征值 λ 的一个特征向量.

则 $\lambda =$ _____, $a =$ _____, $b =$ _____。

24. 设 4 阶矩阵 A 满足行列式 $|2E + A| = 0$, $AA^T = 3E$, $|A| < 0$, 则其伴随矩阵

A^* 必有一个特征值为_____。

25. 设 n 阶可逆矩阵 A 的各行元素的和都等于 k , 且 $8A^2 + A^{-1}$ 的各行元素的和都等于零, 则 $k =$ _____。