上 海 交 通 大 学 试 卷（A 卷）

（ 2016 至 2017 学年 第 2 学期 ）

班级号________________ 学号________________ 姓名____________

课程名称 《数学分析（荣誉）》（2）(期终考试) 成绩____________

解析+审核 谭 宇 叶昊宇 排版 仲 泰

一、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 设 $x_n=\dfrac{n}{n+1}\sin\dfrac{n\pi}{3}$，则 $\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n=$____________， $\varlimsup\limits_{n\to\infty}x_n=$____________.

解：

直接计算得到：

$$\varliminf_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\varliminf_{n\to\infty}\sin\frac{n\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\varlimsup_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\varlimsup_{n\to\infty}\sin\frac{n\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

2. 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{2^n}(x-1)^n$ 的收敛域为__________.

解：

利用Hadamard 公式计算得到：

$$\frac{1}{R}=\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}}=\frac{1}{2}\Rightarrow R=2$$

对于边界点，$x=3$ 时，幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2$ 发散（通项不趋于 0）；$n=-1$ 时，幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot n^2$ 发散（通项不趋于 0）. 综上，原幂级数收敛域为 $(-1,3)$.

3. 极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^y\,\mathrm{d}y}{1+(1+xy)^{\frac{1}{x}}}=$ ____________.

解：

构造函数 $g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{e}^y}{1+(1+xy)^{\frac{1}{x}}}, & x\neq 0\\ \dfrac{\mathrm{e}^y}{1+\mathrm{e}^y}, & x=0\end{cases}$，则 $g(x,y)$ 关于 x,y 分别连续，从而可以交换定积分与极限顺序：

$$\lim_{x\to 0^+}\int_0^1 g(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_0^1 g(0,y)\,\mathrm{d}y=\int_0^1\frac{\mathrm{e}^y}{1+\mathrm{e}^y}\mathrm{d}y=\ln\frac{1+\mathrm{e}}{2}$$

Ps:（也不知道这个时候你们学交换顺序的条件没，这里简单证明一下）先写出定理：如果函数 f 在闭矩形 $I\ [a,b]\times[\alpha,\beta]$ 上连续，那么

$$\varphi(u)=\int_a^b f(x,u)\,\mathrm{d}x$$

是区间上 $[\alpha,\beta]$ 上的连续函数.

证明：利用康托定理，只需注意到，当 $u\to u_0$ 时：

$$|\varphi(u)-\varphi(x_0)|\leqslant\int_a^b|f(x,u)-f(x,u_0)|\,\mathrm{d}x<\int_a^b\varepsilon\,\mathrm{d}x=(b-a)\varepsilon$$

从而命题得证.

4. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x, & 0\leq x<\dfrac{\pi}{2},\\ 0, & \dfrac{\pi}{2}\leq x\leq\pi,\end{cases}$ 以 2π 为周期的Fourier 正弦级数，$f(x)\sim\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$ 的和函数为 $S(x)$，则 $b_1=$ ____________，$S\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)=$ ____________.

解：

直接算就好啦：

$$b_1=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin x\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin x\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}$$

$$S\left(\frac{3\pi}{2}\right)=S\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-S\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\frac{\pi}{2}+0}{2}=-\frac{\pi}{4}$$

5. 设$f(x)=\int_0^{x^2}\frac{\cos xy}{y}\mathrm{d}y$，则$f'(x)=$ ________.

解：

直接利用含参积分求导公式：

$$f'(x)=2x\cdot\frac{\cos x^3}{x^2}+\int_0^{x^2}-\sin xy\,\mathrm{d}y=\frac{2\cos x^3}{x}+\frac{\cos x^3-1}{x}=\frac{3x\cos x^3-1}{x}$$

Ps: 你发现了吗，无论$x\neq 0$取多少，除非$f(x)$都是不收敛的.

二、单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

6. 在下列级数中收敛的是（　　）.

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$　　B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{\mathrm{e}}-1)$　　C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$　　D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-\sqrt{n}}{n+1}$

解：

A. 由比较审敛法知原级数与调和级数同敛散，从而发散；

B. $\sqrt[n]{\mathrm{e}}-1\sim\frac{\ln\mathrm{e}}{n}=\frac{1}{n}(n\to\infty)$，由比较审敛法知原级数与调和级数同敛散，从而发散；

C. $1-\cos\frac{1}{n}\sim\frac{1}{2n^2}(n\to\infty)$，由比较审敛法知原级数与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2}$同收敛，从而发散；

D. 因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n-\sqrt{n}}{n+1}-\frac{-\sqrt{n}}{n+1}\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$根据Leibniz 审敛法知收敛，所以原级数与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+1}$同敛散，而$\frac{\sqrt{n}}{n+1}\sim\frac{1}{\sqrt{n}}(n\to\infty)$，由比较审敛法知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+1}$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$同收敛，从而发散，从而原级数发散.

综上，该题选 C.

7. 设函数$f\in C^{(1)}[-\pi,\pi]$，且$f(-\pi)=f(\pi)$，已知$f(x)$的Fourier 系数为a_n，b_n，则$f'(x)$的Fourier 系数a_n'，$b_n'(n\geq 1)$应为（　　）.

A. $a_n'=nb_n$，$b_n'=-na_n$　　B. $a_n'=-nb_n$，$b_n'=na_n$

C. $a_n'=na_n$，$b_n'=-nb_n$　　D. $a_n'=-na_n$，$b_n'=nb_n$

解：

这个，我不太能理解这个题除了公式形式能考出啥：

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx$$

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}-na_n\sin nx+nb_n\cos nx=\sum_{n=1}^{\infty}a_n'\cos nx+b_n'\sin nx$$

从而得到：

$$a_n'=nb_n,b_n'=-na_n$$

从而该题选 A.

8. 设级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_n$条件收敛，则下列关于幂级数的结论错误的是（　　）.

A. $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径必为1　　B. $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在$[0,1]$上必一致收敛

C. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$在$[0,1]$上必一致收敛　　D. $\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$在$[0,1]$上必一致收敛

解：

A. 取$x=1$，则$\sum_{n=0}^{\infty}a_n$条件收敛，从而$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$收敛半径为 1；

B. $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$一致收敛，且x^n单调递减且一致有界，从而根据AD判别法，$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$在$[0,1]$上一致收敛；

C. $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$一致收敛，且$\frac{x^{n+1}}{n+1}$单调递减且一致有界，从而根据AD判别法，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$在

$[0,1]$上一致收敛.;

D. 考虑反例$a_n=\frac{(-1)^n}{n}$，然后取$x=1$即可知道原级数在$x=1$处不收敛，就更不需要谈一致收敛了.

综上，该题选 D.

9.下列函数项级数在指定区间上一致收敛的是（　　）.

A. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{(1+x)^n}$，$x\in[0,+\infty)$

B. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$，$x\in(0,\pi)$

C. $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\,x\mathrm{e}^{-nx^2}$，$x\in(0,+\infty)$

D. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$，$x\in(1,+\infty)$

解：

A. 取$x=\frac{1}{n}$，则通项$\frac{\frac{1}{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\sim\frac{1}{n\mathrm{e}}(n\to\infty)$，此时级数发散到正无穷，从而原级数不一致收敛.;

B. $\sum_{n=1}^{N}\sin nx$一致有界，且$\frac{1}{n^2}$单调递减趋于 0，从而根据AD判别法知，原级数一致收敛.;

C. 取$x=\frac{1}{\sqrt{n}}$，则原级数通项为$\frac{1}{\mathrm{e}}$，此时级数发散到正无穷，从而原级数不一致收敛.;

D. 取$x=\frac{1}{n}$，则原级数通项趋于$\frac{1}{\mathrm{e}}(n\to\infty)$，此时级数发散到正无穷，从而原级数不一致收敛.;

综上，该题选 B.

10.设正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$发散，记I_1，I_2，I_3如下，则结论是（　　）.

$$I_1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n},\ I_2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n^2},\ I_3=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+n^2a_n}.$$

A. I_1、I_2和I_3必都发散　　B. I_1必发散，I_2和I_3都收敛

C. I_1和I_2必都发散，I_3收敛　　D. 以上结论都不正确

解：

先考虑简单的p级数初步判断敛散性，取$a_n=\dfrac{1}{n^p}(p\leqslant 1)$，先简单取$p=0$，也即$a_n=1$，易知$I_1$发散，$I_2$发散，$I_3$收敛；再取$p=-20220211$，易知$I_1$发散，$I_2$收敛，$I_3$收敛，从而猜想：$I_1$发散，$I_2$可能发散也可能收敛，$I_3$收敛. 其实此时已经可以选出答案D.

Ps: 补充证明如下：

(1)I_1发散. 若I_1收敛，记$b_n=\dfrac{a_n}{1+a_n}\Rightarrow a_n=\dfrac{b_n}{1-b_n}\sim b_n(n\to\infty)$，根据比较审敛法$\sum\limits_{n=1}^{\infty}$ 收敛，与已知矛盾！

(2)I_2可能发散也可能收敛. 分别取$a_n=1$与$a_n=n^{20220211}$即可判断；

(3)I_3收敛. 只需注意到$\dfrac{a_n}{1+n^2a_n}<\dfrac{a_n}{n^2a_n}=\dfrac{1}{n^2}$，根据比较审敛法，直接可以得出$I_3$收敛.

三、(第11小题6分，第12小题10分，共16分)

11.判断级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n^2}\cdot 2^n$的敛散性，并说明理由.

解：

直接根值审敛法：

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}\cdot 2^n}=\frac{2}{\mathrm{e}}<1$$

从而原级数收敛.

12.判断级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin n\cdot\sin\dfrac{1}{n}$的敛散性（含条件收敛和绝对收敛）.

解：

$\sum\limits_{n=1}^{N}\sin n$有界，且$\sin\dfrac{1}{n}$单调递减趋于0，从而原级数收敛. 又注意到：

$$\left|\sin n\cdot\sin\frac{1}{n}\right|\geqslant\sin^2 n\cdot\sin\frac{1}{n}=\frac{1}{2n}-\frac{\cos 2n}{2}\cdot\frac{1}{n}\to\infty$$

从而原级数不绝对收敛. 综上，原级数条件收敛.

四、(每小题 9 分，共 18 分)

13.将$f(x)=\arctan\dfrac{2-x}{2+x}$在$x=0$处展开成幂级数.

解：

邻域最大范围：$x\in(-2,2]$. $f'(x)=-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1+\frac{x^2}{4}}=-\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{4^n}x^{2n},R=2$，从而有：

$$f(x)=f(0)+\int_0^x f'(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^n(2n+1)}x^{2n+1},R=2$$

$x=2$时，由Leibniz审敛法知级数收敛，从而得到收敛范围为：

$x\in(-2,2]$

14.求幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n+1}{n!}x^{2n}$的收敛域及和函数.

解：

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}x^{2n}=x^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}x^{2n-2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n=x^2\mathrm{e}^{x^2}+\mathrm{e}^{x^2}=(x+1)\mathrm{e}^{x^2}$$

五、(本题共 11 分)

15.计算广义积分：$\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\frac{\cos ax-\cos bx}{x}\mathrm{d}x$，其中$0<a<b$.

说明：①已知$\dfrac{\cos ax-\cos bx}{x}=\displaystyle\int_a^b\sin xy\,\mathrm{d}y$；②需说明运算的合理性.

解：

唉，提示太多了，直接换序来吧：

$$I=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x}\int_a^b\sin xy\,\mathrm{d}y=\int_a^b\mathrm{d}y\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x}\sin xy\,\mathrm{d}x=\int_a^b\frac{y}{1+y^2}\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\ln\frac{1+b^2}{1+a^2}$$

只需说明换序的合理性.

解答一：(1)$e^{-x}\sin xy$ 在 $D \overset{\text{def}}{=\!=} [0,\infty)\times[a,b]$ 上连续；

(2)因为 $|e^{-x}\sin xy|\leqslant e^{-x}, \int_0^{\infty} e^{-x}\,dx = 1 < \infty$，由Weierstrass 判别法知 $\int_0^{\infty} f(x,y)\,dx$ 关于 y 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

由上述两个条件即可保证积分次序可交换.

解答二：因为 $\int_D |e^{-x}\sin xy|\,dx\,dy \leqslant \int_D e^{-x}\,dx\,dy = b-a < \infty$，由Fubini 定理即可保证积分次序可交换.

六、(本题共 12 分)

16.设 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^x}$.

（1）求 $f(x)$ 的定义域 D；

（2）证明：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^x}$ 在 D 内不一致收敛；

（3）证明：$f(x)$ 在 D 内连续.

解：

（1）$x>0$ 时，由Leibniz 判别法知级数收敛；$x\leqslant 0$ 时，通项不趋于 0，从而发散.

综上，$D=(0,\infty)$.

（2）取 $x=\frac{1}{n}$，通项不趋于 0，从而级数发散，从而不一致收敛；

（3）对于任意的固定点 $x_0\in D$，必然存在闭区间 $[a,b]\subset(0,\infty)$，使得 $x_0\in(a,b)$.

考虑闭区间 $[a,b]$ 上 $f(x)$ 的连续性. 只需注意到此时 $\sum_{n=1}^{N}(-1)^n$ 一致有界，且 $\frac{1}{n^x}$ 单调递减趋于 0，从而根据AD 判别法知，$f(x)$ 一致收敛，且通项函数也是收敛的，从而 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续，又因为 x_0 是任取的，从而 $f(x)\in C(0,\infty)$.

七、证明题（本题共 8 分）

17.设连续函数$f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$满足：存在常数$M>0$，使得对$\forall x$，$y\in\mathbb{R}$，有

$|f(x+y)-f(x)-f(y)|\le M$.证明：

（1）对$\forall x\in\mathbb{R}$，$\forall n\in\mathbb{N}$，有$\left|f(x)-\dfrac{f(nx)}{n}\right|\le M$；

（2）函数列$\left\{\dfrac{f(nx)}{n}\right\}$在$\mathbb{R}$上一致收敛；

（3）存在常数a使得$|f(x)-ax|\le M$.

证明：

（1）取$y=kx,k=1,2,\cdots,n$则有：

$$|f((k+1)x)-f(kx)-f(x)|\leqslant M,k=1,2,\cdots,n$$

从而有：

$$\left|f(x)-\frac{f(nx)}{n}\right|=\frac{|nf(x)-f(nx)|}{n}\leqslant\frac{\sum_{k=1}^{n-1}|f((k+1)x)-f(kx)-f(x)|}{n}\leqslant\frac{n-1}{n}M<M$$

（2）考虑柯西收敛准则，对于任意的$m<n$，均有：

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(mx)}{m}-\frac{f(nx)}{n}\right|&\leqslant\left|\frac{f(mx)}{m}-\frac{f(mnx)}{mn}\right|+\left|\frac{f(mnx)}{mn}-\frac{f(nx)}{n}\right|\\&=\frac{1}{m}\left|f(mx)-\frac{f(mnx)}{n}\right|+\frac{1}{n}\left|\frac{f(mnx)}{m}-f(nx)\right|\\&\leqslant\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)M\to\infty(m\to\infty)\end{aligned}$$

从而命题成立；

（3）盲猜一波柯西方程. 一致收敛可以干嘛呢？保证收敛的函数也是连续的！（毕竟题干就给了一个连续的条件），从而记$\dfrac{f(nx)}{n}\rightrightarrows g(x),n\to\infty$，利用题干所给式子强凑呗：

$$\left|\frac{f(n(x+y))}{n}-\frac{f(nx)}{n}-\frac{f(ny)}{n}\right|<\frac{M}{n}$$

两边同时取$n\to\infty$得到：

$$g(x+y)=g(x)+g(y)$$

由连续性即可保证其只有唯一解$g(x)=g(1)x$. 从而于第(1)小问结论中，两边同时取$n\to\infty$即可得到：

$$|f(x)-g(x)|\leqslant M\Rightarrow|f(x)-g(1)x|\leqslant M\xRightarrow{a\overset{\text{def}}{=\!=}g(1)}|f(x)-ax|\leqslant M$$

综上，命题得证.

Ps: 该题改编于 2011 年第二届全国大学生数学竞赛决赛（数学专业）试卷第五题.