Chap 17

第一类线面积分

Chap 17—1

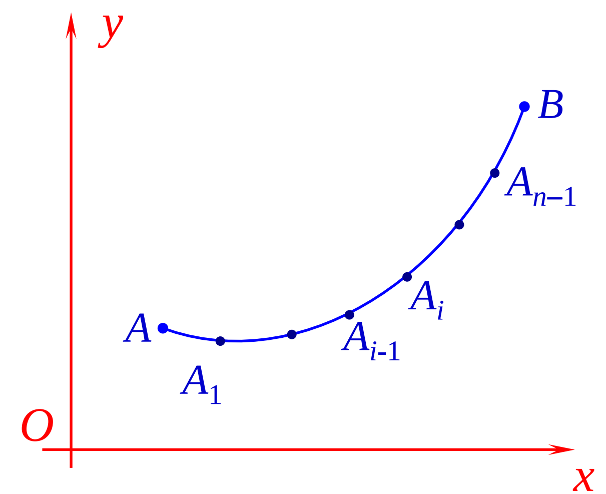
第一类曲线积分

17.1.1 第一类曲线积分

一. 概念与性质

问题：怎样求一段弧状质线的质量？

设xOy 平面的曲线弧为C, 端点A, B, 其上(x,y)处的线密度为$\mu(x,y)$.



用分点 $A_1, A_2, \cdots, A_{n-1}$, 将$C$ 分成n小段, 记 $A_0 = A, A_n = B$, 第i个小弧段$A_{i-1}A_i$的长度为 Δs_i

第i个小弧段上任取一点(ξ_i, η_i), 小弧段的质量近似为 $\mu(\xi_i, \eta_i)\Delta s_i$, 质线的质量近似为

$$\sum_{i=1}^{n}\mu(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$$

记 $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n}\Delta s_i$, 则弧状质线的质量

$$m = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\mu(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$$

试一试

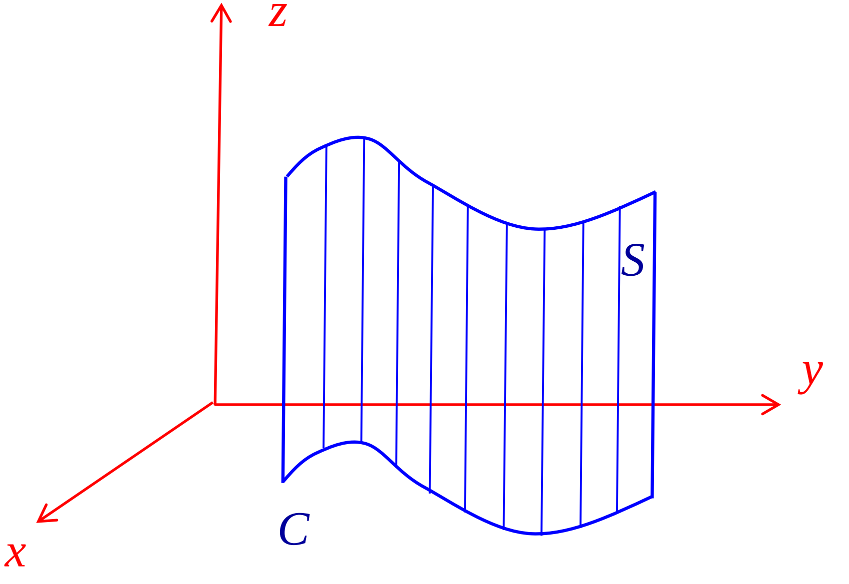
去掉物理背景，取代密度$\mu(x, y)$为定义在曲线C上的有界函数 $f(x,y)$，给出第一类曲线积分

$$\int_C f(x,y)\mathrm{d}s = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$$

的定义.

几何问题：求一块柱面的面积

设C是xOy平面上曲线，S是以C为准线，母线平行Oz轴的柱面，其高度为 $f(x,y)$，求xOy面以上部分柱面S的面积



$$\boxed{A=\int_C f(x,y)\mathrm{d}s}$$

(第一类曲线积分几何意义)

二. 性质

与曲线方向无关　若曲线C为$\overset{\frown}{AB}$, 则

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y)\mathrm{d}s = \int_{\overset{\frown}{BA}} f(x,y)\mathrm{d}s$$

线性性

$$\int_C [\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)]\mathrm{d}s = \alpha\int_C f(x,y)\mathrm{d}s + \beta\int_C g(x,y)\mathrm{d}s$$

可加性　设曲线段C_1与C_2首尾相接成曲线C

$$\int_C f(x,y)\mathrm{d}s = \int_{C_1} f(x,y)\mathrm{d}s + \int_{C_2} f(x,y)\mathrm{d}s$$

此外，　$\int_C 1\mathrm{d}s = s_c$ ，其中s_c为曲线段C的弧长

17.1.2 第一类曲线积分的计算

设函数 $f(x,y)$在光滑曲线C上连续，C的参数方程为

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta]$$

则

$$\boxed{\int_C f(x,y)\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta f(x(t), y(t))\underbrace{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\mathrm{d}t}_{\mathrm{d}s\text{弧微分}}}$$

注意 由于ds是弧长, 取正值, 故定积分限应 $\alpha \le \beta$

当曲线C形式为 $y = y(x),\ x \in [a,b]$

$$\boxed{\int_C f(x,y)\mathrm{d}s = \int_a^b f(x, y(x))\sqrt{1 + y'^2(x)}\mathrm{d}x}$$

例1 计算曲线积分 $\int_C x\mathrm{d}s$, 其中C是抛物线

$y=x^2$上自点$O(0,0)$到$B(1,1)$的弧段 $\boxed{\dfrac{5\sqrt{5}-1}{12}}$

例2 计算曲线积分 $\int_C x\mathrm{d}s$, 其中C是自点$O(0,0)$

至$A(1,0)$再至$B(1,1)$的折线段 $\boxed{\dfrac{3}{2}}$

例3 质线的线密度为 $\mu=\sqrt{x^2+y^2}$, 其曲线C 为

半圆周 $y=\sqrt{4x-x^2},\quad x\in[0,4]$, 求质线的质量. $\boxed{16}$

回顾 在极坐标 $r=r(\theta)$时, $\boxed{\mathrm{d}s=\sqrt{r^2+r'^2}\mathrm{d}\theta}$

思考或猜测

对于空间曲线L:

$$x=x(t), y=y(t), z=z(t), \quad t\in[\alpha,\beta]$$

第一类曲线积分 $\int_L f(x,y,z)\mathrm{d}s$ 的概念与计算式如何？

例4 计算 $\int_L (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s$, 其中曲线 L 是曲面 $x^2+y^2+z^2=4$ 与平面 $z+x=2$ 的交线.

$\boxed{8\sqrt{2}\pi}$

(将L 的方程化为参数方程)

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4 \\ z+x=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-1)^2+\dfrac{y^2}{2}=1 \\ z+x=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1+\cos t \\ y=\sqrt{2}\sin t \\ z=1-\cos t \end{cases} \quad t\in[0,2\pi]$$

Chap 17－2

第一类曲面积分

17.2.1 曲面面积

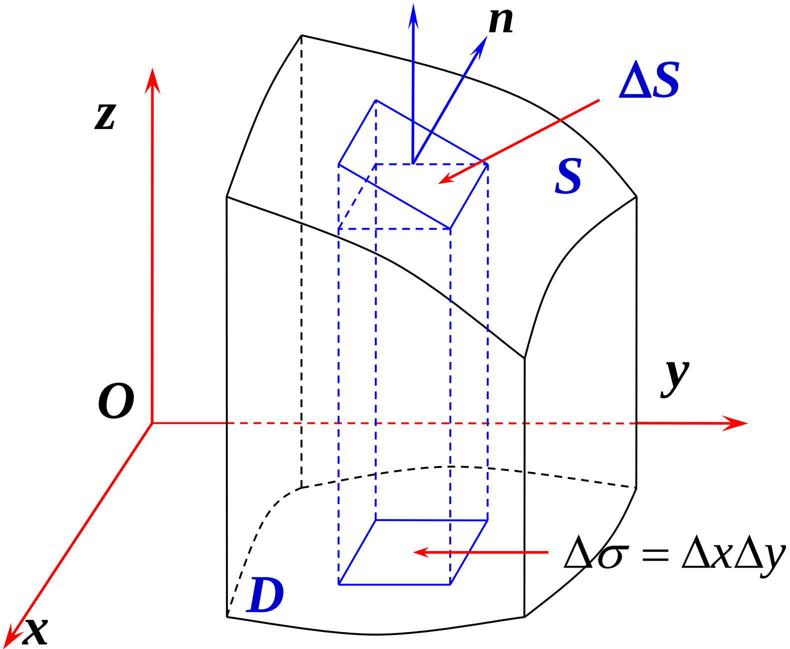
设曲面S: $z = f(x,y)$, $(x,y)\in D$. 如何定义并求S的面积?

微元法 将D分割成小区域. 设对应D上小区域面积为$\Delta\sigma = \Delta x\Delta y$的$S$上小曲面处切平面的面积为$\Delta S$.

由于 $\Delta S\,|\cos(\boldsymbol{n}, z)| = \Delta\sigma,$

其中 $(\boldsymbol{n}, z)$ 是小曲面处切平面法向量与z轴方向夹角.

导出 $\mathrm{d}S = \dfrac{1}{|\cos(\boldsymbol{n}, z)|}\mathrm{d}\sigma$



由于$\boldsymbol{n}=\{-z_x,-z_y,1\}$, z轴方向为 $\{0,0,1\}$

从而得到曲面面积公式

曲面面积元素

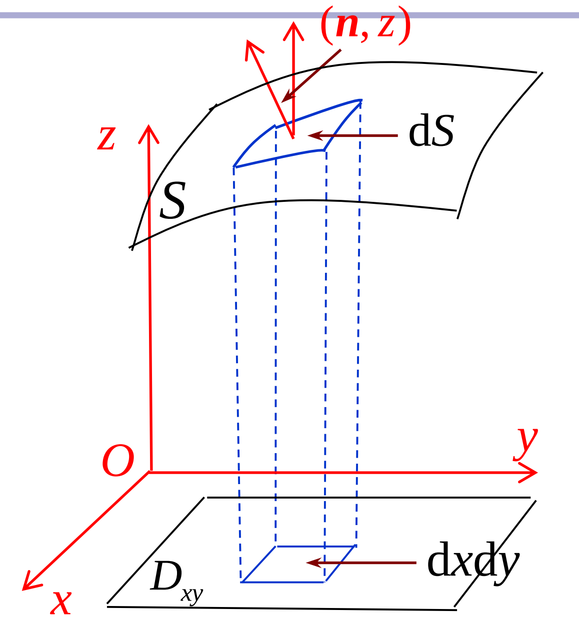
$$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{d}S &= \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ S &= \iint_D \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \end{aligned}}$$

若S为双参数方程
$$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \quad (u,v)\in D \\ z = z(u,v), \end{cases}$$

则 $\boldsymbol{n} = (x_u, y_u, z_u) \times (x_v, y_v, z_v)$

$$= \left(\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \right)$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} (A, B, C)$$

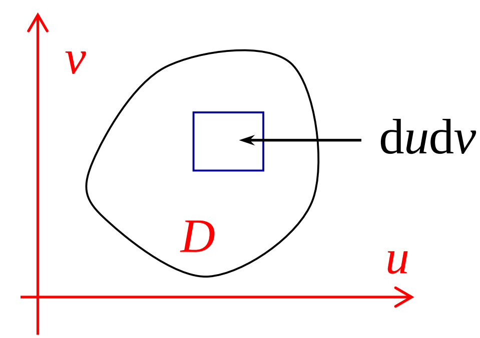


于是 $\mathrm{d}S = \dfrac{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}{|C|} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$

回顾 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y = |C|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$，得到

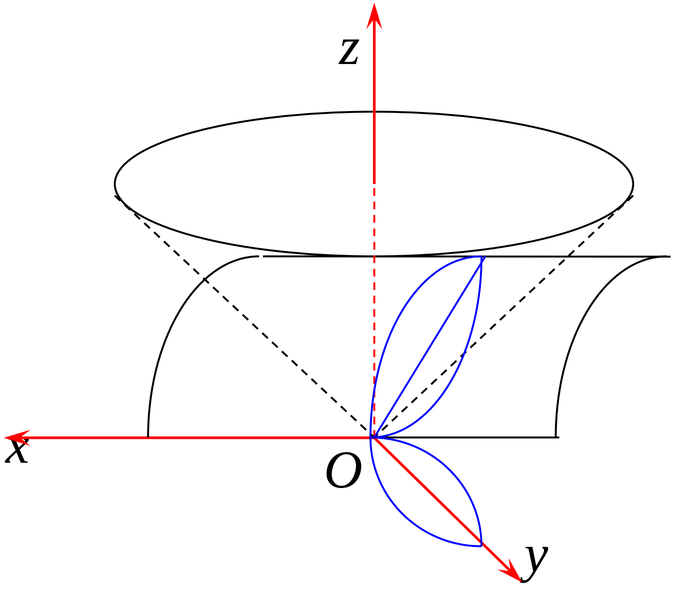
$$\mathrm{d}S = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$S = \iint_D \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$



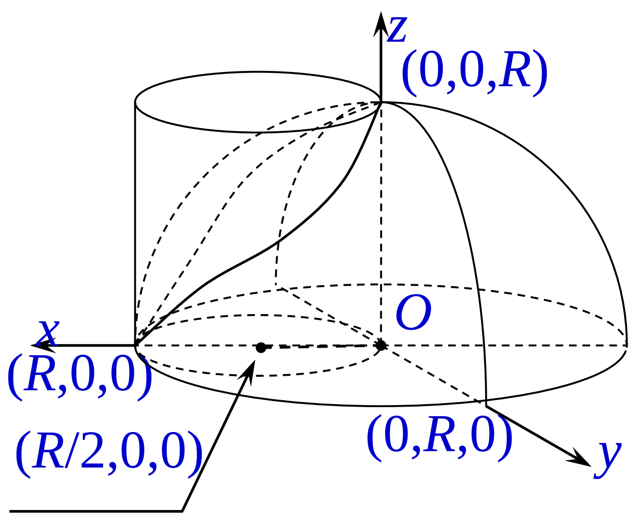
例1 计算锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $z^2=2y$ 所截部分的面积.

$\boxed{\sqrt{2}\pi}$



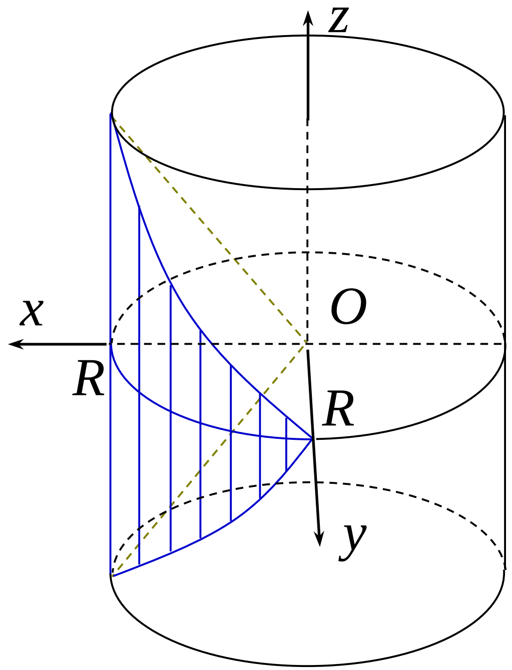
例2 计算球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 被圆柱面 $x^2+y^2=\pm Rx$ 所割下部分的曲面面积(Viviani曲面).

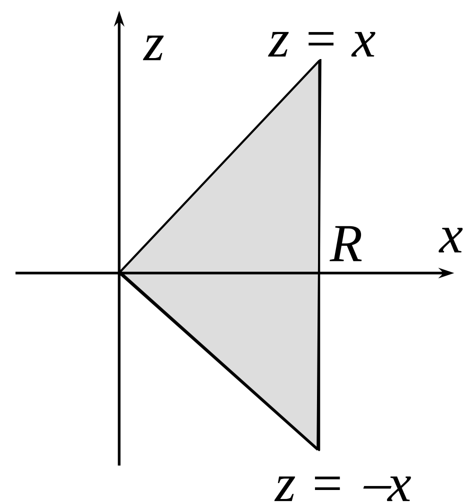
$$\boxed{4\pi R^2-8R^2}$$



例3 计算柱面 $x^2+y^2=R^2$ 被两平面 $x\pm z=0\ (x>0,y>0)$ 所截下部分曲面的面积.

$\boxed{2R^2}$





17.2.2 第一类曲面积分

一. 概念与性质

问题：怎样求一块曲面的质量？

设函数 $f(x,y,z)$定义在分片光滑的曲面S上，试将 $f(x,y,z)$ 视为面密度，采用分割、求和、取极限来求这曲面质量，从而导出第一类曲面积分的定义.

其记号为

$$\iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}S \quad .$$

第一类曲面积分有类似于第一类曲线积分的性质如线性和可加性

二. 计算法

1 曲面S为显式方程

$$z = z(x, y), \quad (x, y) \in D$$

则有

$$\mathrm{d}S = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

从而

$$\boxed{\iint_S f(x, y, z)\mathrm{d}S = \iint_D f(x, y, z(x, y))\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}$$

2 曲面S为双参数方程

$$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \qquad (u,v) \in D \\ z = z(u,v), \end{cases}$$

$$\boxed{\iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}S = \iint_D f[x(u,v),y(u,v),z(u,v)]\sqrt{A^2+B^2+C^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v}$$

其中

$$A = \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \quad B = \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, \quad C = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$$

例 4　计算曲面积分

$$I=\iint_S (x+y+z)\mathrm{d}S$$

其中 S 为上半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$

（注意区域的对称性）

$$\boxed{\pi R^3}$$

例 5　计算曲面积分

$$I=\iint_S (x^2+y^2)\mathrm{d}S$$

其中 S 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=1$ 所围锥体的整个边界.

$$\boxed{\frac{(1+\sqrt{2})\pi}{2}}$$

例 6 计算曲面积分

$$I=\iint_S z\,\mathrm{d}S$$

其中S是螺旋面的一部分：

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta, \\ y=\rho\sin\theta, \\ z=\theta \end{cases} \quad 0\le\rho\le a,\ 0\le\theta\le 2\pi$$

$$\boxed{\pi^2(a\sqrt{1+a^2}+\ln(a+\sqrt{1+a^2}))}$$