2020 级《数学分析》I（荣誉）测验卷参考解答

2020-10-28

一、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1. “数列$\{x_n\}$非无穷大”的肯定叙述为：

$$\underline{\exists M>0, \forall N\in\mathbb{N}, \exists n_N>N: |x_{n_N}|\le M}$$

2. “函数 $f(x)$ 在 I 上非一致连续”的肯定叙述为：

$$\underline{\exists \varepsilon_0>0 \text{ 及 } \{x_n'\},\{x_n''\}\subset I \text{ 使得 } \lim_{n\to\infty}(x_n'-x_n'')=0, \text{但} |f(x_n')-f(x_n'')|\ge \varepsilon_0}$$

3. 设 $f(x)=\cos 2x, x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$，则 $f(x)$ 的反函数

$$f^{-1}(x)=\underline{\pi-\frac{1}{2}\arccos x}.$$

4. 设 $x_n=\frac{n-1}{n+1}\cos\frac{2n\pi}{3}$ （$n\in\mathbb{N}$），则 $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\{x_n\}=\underline{1}$，$\inf\limits_{n\in\mathbb{N}}\{x_n\}=\underline{-\frac{1}{2}}$.

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n^2}=\underline{\frac{\pi}{2}}$.

二、单项选择题（每小题 3 分，共 12 分）

6. 设函数 $f(x)$ 在 $U(x_0,\delta)$ 内单调，其中 $\delta>0$，则 $f(x)$ 在点 x_0 处 ……【 **C** 】

(A) 左、右极限必存在，且都等于 $f(x_0)$.

(B) 左、右极限必存在，且至少一个等于 $f(x_0)$.

(C) 左、右极限必存在，但都未必等于 $f(x_0)$.

(D) 左、右极限都未必存在.

7. 考虑下列断语，则有 ……【 **A** 】

I. 若函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内无界，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内必不一致连续.

II. 若函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续且有界，则 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上必一致连续.

(A) **I** 正确，**II** 不正确. **(B)** **I** 不正确，**II** 正确.

(C) **I** 和 **II** 都正确. **(D)** **I** 和 **II** 都不正确.

8. 设 $x_1=1$， $x_{n+1}=1+\frac{x_n^2}{2}\,(n\in\mathbb{N})$. 以下关于数列$\{x_n\}$叙述正确的是 ……【 **B** 】

(A) $\{x_n\}$单调增加且收敛. **(B)** $\{x_n\}$单调增加且为正无穷大.

(C) $\{x_n\}$不单调但收敛. **(D)** $\{x_n\}$不单调但为正无穷大.

9. 考虑下列断语，则有 ……【 **A** 】

① 不存在闭区间$[0,1]$上的连续函数，使它的值域为开区间$(0,1)$.

② 不存在$\mathbb{R}$上的连续函数，使它的每一函数值都恰好被取到两次.

③ 不存在$\mathbb{R}$上的连续函数，使它的每一函数值都恰好被取到三次.

(A) ①和②正确，③不正确. **(B)** ①和③正确，②不正确.

(C) ②和③正确，①不正确. **(D)** ①，②和③都正确.

三、证明题（本题共 10 分）

10. 用“$\varepsilon-\mathbb{N}$”定义证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+2n-1}{n^2-2}=3$.

【证】 $\forall\varepsilon>0$，取 $N=\max\left\{\left[\frac{6}{\varepsilon}\right],5\right\}$，则当$n>N$时，有

$$\left|\frac{3n^2+2n-1}{n^2-2}-3\right|=\frac{2n+5}{n^2-2}<\frac{3n}{\frac{1}{2}n^2}=\frac{6}{n}<\varepsilon.$$

四、求下列极限（每小题 8 分，共 32 分）

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2\sqrt{2}+3\sqrt[3]{3}+\cdots+n\sqrt[n]{n}}{n^2}$.

【解】 令 $x_n=1+2\sqrt{2}+3\sqrt[3]{3}+\cdots+n\sqrt[n]{n}$，$y_n=n^2$，则$\{y_n\}$严格增加且$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=+\infty$，又

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt[n]{n}}{n^2-(n-1)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1}\cdot\sqrt[n]{n}=\frac{1}{2}$$

据 Stolz 定理有：原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{1}{2}$.

12． $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cos 2x}{x^2}$.

【解】原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)+(\cos x-\cos x\cos 2x)}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\cos x(1-\cos 2x)}{x^2}$$

$$=\frac{1}{2}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$$

13． $\lim\limits_{x\to 0}\left(\mathrm{e}^x+2x\right)^{\frac{1}{x}}$.

【解】原式$\overset{1^\infty}{=}\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1+2x}{x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}+2\right)}=\mathrm{e}^3$

14． 设 $a_1=\sin 1$， $a_{n+1}=\sin a_n\ (n\in\mathbb{N})$. 证明数列$\{a_n\}$收敛，并求其极限值.

【解】由 $a_1=\sin 1\in(0,1)$ 知 $a_n\in(0,1)$，故有 $a_{n+1}=\sin a_n<a_n$，即$\{a_n\}$单调减少有下界 0, 据单调有界定理知$\{a_n\}$收敛.

记$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，由 $a_{n+1}=\sin a_n$ 令 $n\to\infty$ 得 $a=\sin a$，导出 $a=0$.

五、证明题（本题共 10 分）

15． 若无限集 A 与自然数集$\mathbb{N}$之间存在一一对应，则称集合 A 是**可列集**. 不可列的无限集称为**不可列集**. 请用闭区间套定理证明：实数集$\mathbb{R}$是不可列集.

【证】(反证) 若$\mathbb{R}$是可列集，设$\mathbb{R}=\left\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\right\}$.

取闭区间$[a_1,b_1]$使得 $x_1\notin[a_1,b_1]$. 将$[a_1,b_1]$三等份，则至少其一不含 x_2，取之并记为$[a_2,b_2]$，则 $x_1,x_2\notin[a_2,b_2]$；再将$[a_2,b_2]$三等份重复上述步骤，得$\left\{[a_n,b_n]\right\}$满足：

(1) $[a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n]\ (\forall n\in\mathbb{N})$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_1-a_1}{3^{n-1}}=0$；

(3) 对 $\forall n\in\mathbb{N}, x_1,x_2,\cdots,x_n\notin[a_n,b_n]$.

据闭区间套定理，存在唯一$\xi\in[a_n,b_n]\ (\forall n\in\mathbb{N})$. 由于$\mathbb{R}=\left\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\right\}$，设$\xi=x_N$，则由(3)知$\xi=x_N\notin[a_N,b_N]$，导出矛盾.

六、证明题（本题共 8 分）

16． 设函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有定义，在 $[a,+\infty)$ 的任一有限子区间有界，且

$\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x+1)-f(x)\big)=l$ (有限数). 证明： $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=l$.

【证】 由 $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x+1)-f(x)\big)=l$ 知：对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists X_0>\max\{0,a\}$，当 $x\ge X_0$ 时有

$$\left|f(x+1)-f(x)-l\right|<\frac{1}{2}\varepsilon \ \Rightarrow\ l-\frac{1}{2}\varepsilon<f(x+1)-f(x)<l+\frac{1}{2}\varepsilon$$

令 $n=\left[x-X_0\right]$，则当 $x\ge X_0+1$ 时，有

$$l-\frac{1}{2}\varepsilon<f(x)-f(x-1)<l+\frac{1}{2}\varepsilon$$

$$l-\frac{1}{2}\varepsilon<f(x-1)-f(x-2)<l+\frac{1}{2}\varepsilon$$

$$\cdots$$

$$l-\frac{1}{2}\varepsilon<f(x-n+1)-f(x-n)<l+\frac{1}{2}\varepsilon$$

相加得
$$n\left(l-\frac{1}{2}\varepsilon\right)<f(x)-f(x-n)<n\left(l+\frac{1}{2}\varepsilon\right)$$

故有
$$n\left(l-\frac{1}{2}\varepsilon\right)+f(x-n)<f(x)<f(x-n)+n\left(l+\frac{1}{2}\varepsilon\right)$$

导出
$$-\frac{n}{x}\cdot\frac{1}{2}\varepsilon+\frac{f(x-n)-(x-n)l}{x}<\frac{f(x)}{x}-l<\frac{f(x-n)-(x-n)l}{x}+\frac{n}{x}\cdot\frac{1}{2}\varepsilon$$

注意到 $n=\left[x-X_0\right]$，故 $x-n\in[X_0,X_0+1)$．由于 f 在 $[X_0,X_0+1)$ 有界，故存在 $M>0$，使得

$$|f(x-n)-(x-n)l|\le M$$

由 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{M}{x}=0$ 知：对上述 $\varepsilon>0$，$\exists X_1>a$，当 $x>X_1$ 时，有

$$\frac{M}{x}<\frac{1}{2}\varepsilon \quad \text{导出} \quad -\frac{1}{2}\varepsilon<\frac{f(x-n)-(x-n)l}{x}<\frac{1}{2}\varepsilon$$

令 $X=\max\{X_0+1,X_1\}$，当 $x>X$ 时，有

$$-\varepsilon=-\frac{1}{2}\varepsilon-\frac{1}{2}\varepsilon<\frac{f(x)}{x}-l<\frac{1}{2}\varepsilon+\frac{1}{2}\varepsilon=\varepsilon$$

即 $\left|\dfrac{f(x)}{x}-l\right|<\varepsilon$.

七、证明题（本题共 8 分）

17. 设 $f\in C(\mathbb{R})$ 且为周期函数. 令 $E=\left\{T \middle| T>0\text{且}T\text{为}f(x)\text{的周期}\right\}$，$T_0=\inf E$. 证明：若 $T_0=0$，则 $f(x)\equiv C$(常数).

【证】(反证) 若 $f(x)$ 不恒为常数，则存在 $x_0\neq 0$ 使得 $f(x_0)\neq f(0)$.

由于 $f(x)$ 在 x_0 连续，据不等式性知：存在 $\delta>0$，当 $x\in U(x_0,\delta)$ 时，有

$$f(x)\neq f(0). \qquad \cdots\cdots(*)$$

因为 $T_0=\inf E=0$，所以存在 $T\in E$，使得 $T<2\delta$，于是存在 $n\in\mathbb{Z}$，使得 $nT\in U(x_0,\delta)$. 由 T 是 f 的周期知 $f(nT)=f(0)$，这与(*)矛盾.