上 海 交 通 大 学 试 卷（ A 卷）

（ 2019 至 2020 学年 第 2 学期 ）

班级号____________________学号_____________________姓名 _________________

课程名称 ______________数学分析（II）________________成绩 _________________

一 **判断题**（每题 6 分，共 30 分）（正确的打√，并简要陈述理由；错误的打×，并举出反例。）

1. 设 D 为平面上的区域（连通开集），P,Q在 D 上具有连续的偏导数。若在 D 内成立$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，则第二类曲线积分与路径无关。

2. 设$F_1,F_2\subset\mathbb{R}^2$都是闭集，且$F_1\cap F_2=\emptyset$，则必存在两个开集$O_1,O_2$使得$F_i\subset O_i,i=1,2$且$O_1\cap O_2=\emptyset$。

3. 面积为 0 的集合没有内点。

4. 在 D 上内闭一致收敛的函数序列必在 D 上一致收敛。

5. 任意阶可导的函数的 Taylor 级数一定能收敛于函数本身。

二（10 分）假设Σ是下半球面：$x^2+y^2+z^2=1(z\le 0)$。请分别计算第一类曲面积分$\iint_\Sigma dS$和第二类曲面积分$\iint_\Sigma dxdy$（这里取方向朝下）。

三（10 分）考虑第二类曲线积分

$$\int_\Gamma (2x\cos(xy)-x^2y\sin(xy))dx-x^3\sin(xy)\,dy$$

（1）证明此曲线积分与路径无关；

（2）计算原函数。

四（10 分）证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^2x^2}$在$[0,1]$上不一致收敛。

五（10 分）设$f(x)$是以2π为周期的函数，且有$f(x)=\frac{\pi-x}{2}, x\in[0,2\pi)$，求其 Fourier 级数，并求该 Fourier 级数的和函数。

六（15 分）设 Σ 是光滑闭曲面，所围的区域为 Ω ，$\vec{n}$为 Σ 上的单位外法向量，(x_0,y_0,z_0)为 Ω 内固定一点，$(x,y,z)\in\Sigma$，$\vec{r}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$，证明

$$\iint_{\Sigma} cos(\vec{n},\vec{r})\,dS = 2\iiint_{\Omega}\frac{dxdydz}{|\vec{r}|}。$$

七（15 分）设$\frac{1}{1-x-x^2}$的 Maclaurin 级数为$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，则$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n a_{n+2}}$收敛。

附加题(10 分）设u,v在$\bar{\Omega}$上二阶连续可微，且在Ω的边界上$u=v$，如果u是调和函数（即$\Delta u=\nabla\cdot\nabla u=0$），证明：

$$\iiint_{\Omega}|\nabla u|^2 dxdydz \le \iiint_{\Omega}|\nabla v|^2 dxdydz$$