Chap 13

多元函数的极限与连续

Chap 13 — 1

$\mathbf{R}^2$中的点集

13.1.1 $\mathbf{R}^2$中点列的极限

定义 设$\{\boldsymbol{x}_k\}\subset\mathbf{R}^2$, 其中 $\boldsymbol{x}_k=(x_k,y_k), k\in\mathbb{N}$, 又 $\boldsymbol{x}_0=(x_0,y_0)$.

若$\forall\varepsilon>0, \exists K\in\mathbf{N}, \forall k>K$:

$$d(\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{x}_0)<\varepsilon$$

则称$\{\boldsymbol{x}_k\}$收敛于$\boldsymbol{x}_0$, 记为 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{x}_0$

结论 1° 若$\{\boldsymbol{x}_k\}$收敛, 则其极限点必唯一.

2° $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{x}_0\Leftrightarrow\lim\limits_{k\to\infty}x_k=x_0$且$\lim\limits_{k\to\infty}y_k=y_0$.

13.1.2 平面点集

一、**邻域** 设$P_0 \in \mathbf{R}^2$, $\delta > 0$, 集合

$$U(P_0,\delta)=\{P(x,y) \mid d(P_0,P)<\delta\}$$

称为P_0**的δ圆邻域**(不强调半径时记为$U(P_0)$)

$$U(P_0,\delta)=\{P(x,y) \mid |x-x_0|<\delta, |y-y_0|<\delta\}$$

称为P_0**的δ方邻域.**

试一试 去心邻域的定义？

二、内点, 外点, 边界点和聚点

定义 设$P_0 \in \mathbf{R}^2$, $E \subset \mathbf{R}^2$

1° 若$\exists \delta > 0$, 使得 $U(P_0, \delta) \subset E$, 则称P_0是E的**内点**.

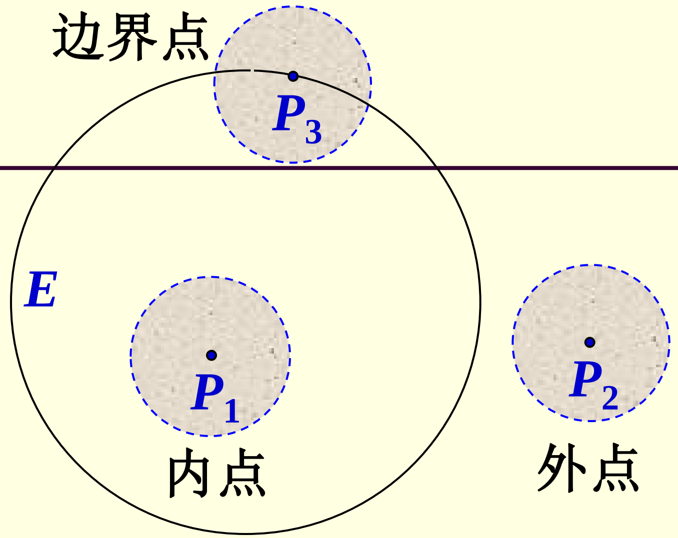
E全体内点的集合称为E的**内部(核)**, 记为E°.

2° 若$\exists \delta > 0$, 使 $U(P_0, \delta) \cap E = \varnothing$, 则称$P_0$是$E$的**外点**.

E全体外点的集合称为E的**外部**, 记为$(E^c)^\circ$.

3° 若$\forall \delta > 0$, $U(P_0, \delta) \cap E \neq \varnothing$且$U(P_0, \delta) \cap E^c \neq \varnothing$

则称P_0是E的**边界点**, 边界点的集合称为**边界**, 记为∂E.



结论 $$E^\circ \cup \partial E \cup (E^c)^\circ = \mathbb{R}^2$$

试一试 $\mathbf{R}^n$中上述名词的定义？

定义 设$P_0 \in \mathbf{R}^2$, $E \subset \mathbf{R}^2$, 若$\forall \delta > 0$, $\overset{\circ}{U}(P_0, \delta) \cap E \neq \varnothing$,

则称P_0是E的**聚点**. 聚点的集合称为**导集**, 记为E'.

命题 P_0是E的聚点 $\Leftrightarrow \exists \{P_n\} \subset E, P_n \neq P_0 : \lim\limits_{n \to \infty} P_n = P_0$

定义 设$P_0 \in \mathbf{R}^2$, $E \subset \mathbf{R}^2$, 若$\exists \delta > 0$, $U(P_0, \delta) \cap E = \{P_0\}$,

则称P_0是E的**孤立点**.

三、开集与闭集

定义 设$E \subset \mathbf{R}^2$, 若E中的点都是E的内点, 即$E = E^\circ$,

则称E为**开集**.

定义 设$E\subset\mathbf{R}^2$, 若E包含E的所有聚点, 即$E'\subset E$, 则称

E为**闭集**. E与其导集E'的并集称E的**闭包**, 记为$\overline{E}$

定理 下面4条等价

1° $\boldsymbol{E}$ 为闭集

2° $E=\overline{E}$

3° $\forall\{P_n\}\subset E$, 若 $\lim\limits_{n\to\infty}P_n=P_0$, 则有$P_0\in E$

4° $\boldsymbol{E}^c$ 为开集, 即若$P\notin E$, 则$\exists\delta>0$, 使$U(P,\delta)\cap E=\varnothing$

注意 $\varnothing$和$\mathbf{R}^2$既是开集, 又是闭集!

命题 对$E\subset\mathbf{R}^2$, E°必为开集; $\overline{E}$ 必为闭集. 且

$$E^{\circ}\subset E\subset\overline{E}$$

定义 设$E\subset\mathbf{R}^2$, 若$\forall P_1, P_2\in E$, 都存在包含于E中的连续曲线连接P_1, P_2, 则称E是(道路)连通集.

连通开集称为区域, 区域的闭包称为闭区域.

定义 设$E\subset\mathbf{R}^2$, 若$\exists M>0$, 使$E\subset U(\mathbf{O}, M)$, 则称$E$有界集, 否则称为无界集.

13.1.3 基本定理

定理(Cauchy准则) 设$\{P_n\}\subset\mathbf{R}^2$, 则$\{P_n\}$收敛

$\Leftrightarrow \{P_n\}$为Cauchy列, 即

$$\boxed{\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N},\forall n>N,\forall p\in\mathbb{N}: d(P_{n+p},P_n)<\varepsilon}$$

利用

$$\boxed{\begin{aligned}&|x_{n+p}-x_n|,|y_{n+p}-y_n|\le d(P_{n+p},P_n)\\&\qquad\le|x_{n+p}-x_n|+|y_{n+p}-y_n|\end{aligned}}$$

定理(闭集套) 设非空闭集列$\{E_n\}\subset\mathbf{R}^2$, 满足

1° $E_{n+1}\subset E_n \quad (\forall n\in\mathbb{N})$;

2° $\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{diam}(E_n)=0$

则存在唯一的$P\in E_n\,(\forall n\in\mathbf{N})$. 这里

$$\mathrm{diam}(E)=\sup_{P',P''\in E}\{d(P',P'')\}$$

称为E的直径.

注意 当E_n为闭矩形时可得闭矩形套定理!

定理(Bolzana-Weierstrass) $\mathbf{R}^2$中的有界点列$\{P_n\}$

必有收敛子列.

定理(聚点) $\mathbf{R}^2$中的有界无限点集至少有一个聚点.

想一想 $\mathbf{R}^n$中上述各条定理形式?

定义 设$E\subset \mathbf{R}^n$. 若存在开集族$\{G_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$, 使得

$$E\subset\bigcup_{\lambda\in\Lambda}G_\lambda$$

则称$\{G_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$为$E$的一个**开覆盖**.

例 验证 $\Gamma=\left\{\left(0,\frac{2}{3}\right),\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right),\cdots,\left(\frac{n-1}{n},\frac{n+1}{n+2}\right),\cdots\right\}$

是开区间$E=(0,1)$的一个开覆盖.

定义 若E的任意开覆盖$\{G_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}$均存在**有限子覆盖**,

即存在有限个开集 G_{λ_i} $(i=1,2,\cdots,p)$ 使得 $E\subset\bigcup_{i=1}^{p}G_{\lambda_i}$

则称E为**紧集**.

有限覆盖定理(Borel) 闭区间$[a,b]$为紧集.

紧性定理(Heine-Borel) $\mathbf{R}^n$中的点集E为紧集

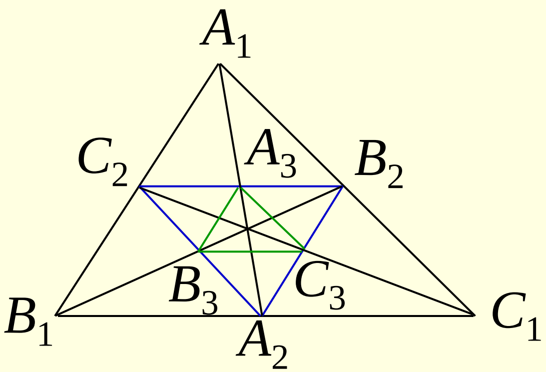
$\Leftrightarrow E$ 为有界闭集.

例(习题13.1/8) 利用闭集套定理证明平面三角形三条中线交于一点.

证 记$\Delta A_1B_1C_1$的闭包为E_1, 它是闭集, 其中位$\Delta A_2B_2C_2$的闭包记为E_2, 依次下去得闭集列E_n, 满足:

$$1^\circ\ E_{n+1} \subset E_n \quad (\forall n \in \mathbb{N});$$

$$2^\circ\ \lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(E_n) = 0$$

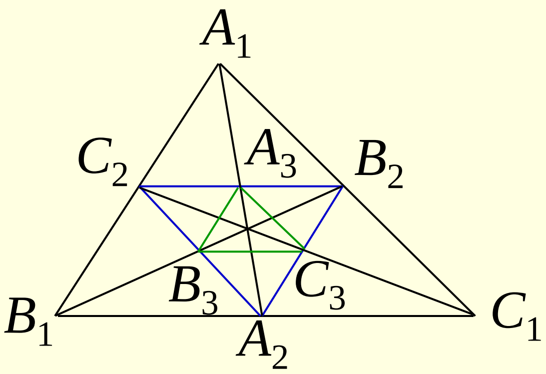


由闭集套定理知存在唯一的点

$$O \in E_n \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

例(习题13.1/8) 利用闭集套定理证明平面三角形三条中线交于一点.

由于E_1三中线两两交点含于E_2中, 且中线A_1A_2上有一段A_2A_3成为E_2的中线, 故E_1三中线两两交点也即E_2三中线两两交点, 从而它们又含于E_3, 依次下去知它们含于E_n



$(n\in\mathbf{N})$, 故E_1三中线两两交点为O, 即三中线交于一点.

Chap13 — 2

多元函数的极限

13.2.1 多元函数

定义 设$D\subset \mathbf{R}^n$, 映射

$$f: D \to \mathbb{R},$$
$$\boldsymbol{x} \mapsto f(\boldsymbol{x})$$

称为n元函数, 记为 $u = f(\boldsymbol{x})$, 其中D称为定义域.

值域 $f(D)=\{u \mid u = f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x}\in D\}$

例1 考察函数 $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$

13.2.2 二重极限

定义 设$D\subset \mathbf{R}^2$, f 在D上有定义, P_0为D的聚点.

若$\exists A\in\mathbf{R}$ 使得 $\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0, \forall P\in \mathring{U}(P_0,\delta)\cap D$:

$$|f(P)-A|<\varepsilon$$

则称在D上$P\to P_0$时 $f(P)$的二重极限为A, 记为

$$\boxed{\lim_{\substack{P\to P_0\\ P\in D}} f(P)=A}$$

- $P\in D$可以省略

➢ 坐标形式

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A \quad 或 \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$$

注意

$$P\in \mathring{U}(P_0,\delta)$$

$$\Leftrightarrow \quad 0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$$

$$\Leftrightarrow \quad |x-x_0|,|y-y_0|<\delta_1,(x,y)\neq(x_0,y_0)$$

问题 $\xleftrightarrow{?} \quad 0<|x-x_0|,|y-y_0|<\delta_1$

➢ 与一元函数相似点

1. 当$(x,y)\to(x_0,y_0)$时, $f(x,y)$ 变化的定量趋势.

2. 有类似的性质和运算法则.

➢ 与一元函数区别

平面上$P\to P_0$有无穷多方向, 且采取的路径也是任意的, 既可取直线, 也可取曲线. 无论沿何种方向或何种路径, 只要$d(P,P_0)$充分小, 就有

$$|f(P)-A|<\varepsilon.$$

例2 证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}=0.$

例3 判断 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 的存在性.

例4 判断

$$f(x,y)=\begin{cases} 1, & 0<y<x^2, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

在(0,0)点极限的存在性.

例5 计算

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2}\ln(x^2+y^2)$

(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{\ln(1+xy)}{xy}$

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ y\to 0^+}} \left(x^2+\dfrac{1}{y^2}\right)\mathrm{e}^{-\sqrt{x+\frac{1}{y}}}$

思考 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ y\to 0^+}} f(x,y)=A$ 的定义?

13.2.3 累次极限

定义 设 $I\times J\subset\mathbf{R}^2$, x_0, y_0分别为I, J的聚点. 固定$x\in I$ $(x\neq x_0)$. 若存在**首次极限** $\varphi(x)=\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$, 且

$$\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=A$$

则称$f(x,y)$在(x_0,y_0)处先y后x的**累次(二次)极限**为A,记为

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)=A}$$

试一试 先x后y的累次极限的定义?

例6 考察

$$f(x,y)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x}, & xy\neq 0, \\ 0, & xy=0 \end{cases}$$

在(0,0)处二重极限和累次极限的存在性.

思考 若

$$f(x,y)=\begin{cases} y\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

结论如何?

例7 考察

$$(1)\ f(x,y)=\frac{x-y+x^2+y^2}{x+y}$$

$$(2)\ f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

在(0,0)处二重极限和累次极限的存在性.

问题 二重极限与累次极限的关系?

定理 设 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$ ，且存在首次极限

$\varphi(x)=\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)=A$

想一想 另一次序累次极限的情形？

推论1 若两累次极限和二重极限均存在，则三者相等.

推论2 若累次极限存在但不相等，则二重极限不存在.

Chap13 — 3

多元函数的连续

13.3.1 二元函数连续的概念

定义 设 $D \subset \mathbf{R}^2, P_0 \in D, f: D \to \mathbf{R}$. 若

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall P \in U(P_0, \delta) \cap D: \ | f(P) - f(P_0) | < \varepsilon$$

则称 $f(P)$ 在 P_0 连续.

- D 上的连续函数类 $C(D)$ 的定义?
- D 的孤立点必为函数的连续点!
- 若 P_0 为 D 的聚点, 则

$$\boxed{f(P) \text{在} P_0 \text{连续} \Leftrightarrow \lim_{\substack{P \to P_0 \\ P \in D}} f(P) = f(P_0)}$$

例1 证明 (1) $f(x,y)=\sin\sqrt{x^2+y^2}$ 在$\mathbf{R}^2$上连续;

(2) $f(x,y)=\begin{cases} y, & x\in\mathbb{Q}, \\ 0, & x\in\mathbb{Q}^c \end{cases}$ 在$D = \{(x, 0)|x\in\mathbf{R}\}$上连续,

但在$\mathbf{R}^2\setminus D$ 上不连续.

问题 若 $f(x, y)$满足: $f(x, y_0)$在$x = x_0$处连续, $f(x_0, y)$在$y = y_0$处连续, 是否有 $f(x, y)$在(x_0,y_0)连续?

例2 考察 $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ 在(0, 0)处情况.

定理 设$f(x,y)$在$D\subset\mathbf{R}^2$上对x连续, 对y满足

Lipschitz条件, 即$\exists L>0$使得$\forall(x,y'),(x,y'')\in D$:

$$|f(x,y')-f(x,y'')|\le L|y'-y''|$$

则$f\in C(D)$.

13.3.2 二元连续函数的性质

➢ 与一元连续函数类似, 有局部有界性, 局部保号性, 四则运算, 复合运算等等.

➢ 连通有界闭集上的二元连续函数还有:

定理 设$D\subset \mathbf{R}^2$为连通有界闭集, $f\in C(D)$, 则f在D上有

- 有界性
- 最值性
- 介值性
- 零值性 (思考：额外条件?)

例3 设$f\in C(\mathbf{R}^2)$, 且

$$\lim_{x^2+y^2\to+\infty} f(x,y)=+\infty$$

证明: f在$\mathbf{R}^2$上必有最小值.

13.3.3 二元函数的一致连续性

定义 设 $D \subset \mathbf{R}^2, f: D \to \mathbf{R}$. 若

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall P', P'' \in D, d(P', P'') < \delta:$$

$$|f(P') - f(P'')| < \varepsilon$$

则称 f 在 D 上一致连续, 记为 $f \in U.C.(D)$

结论 f 在 D 上不一致连续的肯定叙述:

$$\boxed{\begin{gathered}\exists \varepsilon_0 > 0, \exists P_n', P_n'' \in D: \lim_{n\to\infty} d(P_n', P_n'') = 0 \\ |f(P_n') - f(P_n'')| \geq \varepsilon_0\end{gathered}}$$

例4 说明$f(x,y)=\sin xy$在$\mathbf{R}^2$不一致连续.

定理(一致连续性) 设$D\subset\mathbf{R}^2$为有界闭集, 且

$$f\in C(D),\text{ 则 }f\in U.C.(D)$$

例5(13.2/3(4)修改) 设二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x+y}, & x+y\neq 0,\\ 0, & x+y=0.\end{cases}$$

判断$f(x,y)$在$(0,0)$处二重极限的存在性以及连续性.

例6 (历年试题) 设二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+xy)}{x}, & x\neq 0,\\ y, & x=0.\end{cases}$$

判断$f(x,y)$在$(0,0)$处二重极限的存在性以及连续性.

分析 当$x=0$时, $|f(x,y)-0|=|f(0,y)|=|y|$

当$x\neq 0$时, $|f(x,y)-0|=\left|\dfrac{\ln(1+xy)}{x}\right|\overset{??}{\leq}\dfrac{|xy|}{|x|}=|y|$