Chap 11

幂级数

Chap11 — 1

幂级数的性质

一、Cauchy-Hadamard定理

定义 形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$$

的函数项级数称为**幂级数**, 其中$x_0 \in \mathbf{R}$, a_i称为**系数**.

- 令$t = x - x_0$, 变为 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$

定理 (Cauchy-Hadamard) 设 $\rho = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$，则

(1) 当$0 < \rho < +\infty$时，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$\left(-\frac{1}{\rho}, \frac{1}{\rho}\right)$内绝对收敛，

在 $|x| > \frac{1}{\rho}$ 发散；

(2) 当$\rho = 0$时，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在 $(-\infty, \infty)$ 内绝对收敛；

(3) 当$\rho = +\infty$时，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 仅在$x = 0$处收敛.

- **收敛半径:** $r = \frac{1}{\rho}$　**收敛区间:** $(-r, r)$

➢ 公式 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ 存在广义极限, 则 $r=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$

➢ 收敛域求法 先用比值法或根值法求收敛半径,

再考察端点处的敛散性.

例1 求下列幂级数的收敛域

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n};\qquad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2^n(2n-1)}$$

➢ 缺项幂级数 不能用比值法求收敛半径!

二、广义幂级数

形式 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n [g(x)]^n$

令 $t = g(x)$, 变为 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$. 若其收敛区间为 $(-r, r)$, 则原级数的收敛域包含 $\{x \mid |g(x)| < r\}$

例2 求 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2} \cdot \mathrm{e}^{-nx}$ 的收敛域.

三、Abel定理

Abel第I定理 设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x_1\ (\neq 0)$ 收敛, 则 $|x| < |x_1|$ 时绝对收敛; 若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 x_2 发散, 则 $|x| > |x_2|$ 时发散.

例3 设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$ 在 $x = -1$ 处条件收敛, 求其收敛区间.

Abel第II定理 设$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$收敛半径为$r(>0)$, 则它在

$(-r, r)$内闭一致收敛; 若$x=r$时收敛, 则它在$[0, r]$

一致收敛, 从而在$(-r, r]$内闭一致收敛.

- **思考** 后一情形能否用M-判别法?
- **试一试** $x=-r$ 的情形
- **内闭一致收敛性**是幂级数的特性. 一般函数项

  级数未必具有. 考察例子 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx}{1+n^4x^4}$

四、分析性质

定理 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 与其**导数级数** $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ 和 **积分级数** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ 的收敛半径相等.

- **注意** 三个级数在端点的收敛性未必相同！如

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n} \text{ —— } D=[-1,1)$$

导数级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)x^{n-2}}{n}$ —— $D'=(-1,1)$

积分级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ —— $D_1=[-1,1]$

定理 设 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n \quad x\in(-r,r)$, 则

(1) $f(x)\in C(-r,r)$;

(2) $f(x)\in D(-r,r)$, 且可逐项求导, 即 $\forall x\in(-r,r)$:

$$f'(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n x^n\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}n a_n x^{n-1}$$

(3) 可逐项积分, 即 $\forall x\in(-r,r)$:

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n t^n\right)\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_n t^n\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$$

Abel第III定理 设 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \quad x\in(-r,r]$,

则 $f(x)$在$x=r$处左连续，即

$$\lim_{x\to r^-}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nr^n.$$

- **问题** 若 $\lim_{x\to r^-}f(x)=\lim_{x\to r^-}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=S$, 能否得出 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nr^n$

收敛？考察例子

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n,\ \ x\in(-1,1)$$

例4 求下列幂级数的和函数

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$;

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}$;

(3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$

Chap11 — 2

函数的幂级数展开

一、Taylor级数

定义 设$f(x)$在x_0无穷次可导, 则称

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

为$f(x)$在x_0处的**Taylor级数**.

$x_0 = 0$ 时称为**Maclaurin级数.**

- **注意** 记号“~”的含义？能否换为“=”？

例1 求下列函数的Maclaurin级数, 并考察其和函数

$S(x)$与$f(x)$的关系.

(1) $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0 \end{cases}$

c.f. § 4.4(15)

(2) $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2^n x)}{n!}$

➢ **问题** $f(x)$满足何条件时, 其Taylor级数收敛于$f(x)$?

回顾Taylor公式

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x)$$

定理1 设 $f\in C^{(\infty)}(I)$, 其中$I=(x_0-r,\ x_0+r)$, 则在I

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \xleftrightarrow{\text{充分必要条件}} \lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$$

- **注** 由于计算 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)$ 困难, 为此介绍下面的

定理2 设 $f \in C^{(\infty)}(I)$, 且 $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in I$: $|f^{(n)}(x)| \le M$, 则

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \quad (\forall x \in I)$$

问题 若 $f(x)$ 在 I 上是某幂级数的和函数, 则该幂级数与其Taylor级数有何关系?

定理3 (唯一性) 若

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n,\quad x\in(x_0-r,x_0+r)$$

(此时称$f(x)$在x_0处可展开为幂级数), 则必有

$$a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

- 定理表明该幂级数就是$f(x)$在x_0处的**Taylor**级数

二、常用初等函数的幂级数

1) $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + \cdots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$ $\quad (x \in \mathbf{R})$

2) $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1} \dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots$ $\quad (x \in \mathbf{R})$

3) $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$ $\quad (x \in \mathbf{R})$

4) $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \cdots$ $\quad (-1 < x \le 1)$

$$5)\ (1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots$$

$$(-1<x<1)$$

问题 **端点情形如何？特别地, 有**

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n \qquad (-1<x<1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n \qquad (-1\le x<1)$$

c.f. § 11.1(例5)

例2 **将下列函数在$x_0=0$展成幂级数**

1) $\arctan x$ 2) $\arcsin x$

三、函数的幂级数展开方法

直接法 先求$f^{(n)}(x_0)$, 再利用**Taylor**公式**;**

间接法 利用已知的幂级数展开式, 再结合变量代换、逐项可导、逐项可积性.

例3 将下列函数在x_0处展成幂级数

1) $\dfrac{x}{x^2-2x-3}$, $x_0=2$ 2) $\dfrac{1}{x^2}$, $x_0=1$

例4 设函数 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}(x-1)^n,$

求级数 $\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(1)$ 的和.

Ex. 设 $f(x)=xe^{x^2}$, 求 $f^{(n)}(0)\ (n=0,1,2\cdots)$

例5 设 $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 适合 $y(0)=0, y'(0)=1$ 和

$$y''-2xy'-4y=0$$

1) 证明 $a_{n+2}=\frac{2}{n+1}a_n, n\in\mathbb{N},$

2) 求$y(x)$的表达式 (考研试题)

四、Stirling公式

引理(Wallis) 已证

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2$$

定理4(Stirling公式) 证明

$$n!=\sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \mathrm{e}^{\frac{\theta_n}{12n}} \quad (0<\theta_n<1)$$

例6 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$

Ex. 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!\mathrm{e}^n}{n^{n+p}}$ $(p\in\mathbb{R})$ 的敛散性.

利用幂级数可导出Euler公式

$$\boxed{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}=\cos x+\mathrm{i}\sin x}$$

取 $x=\pi$,

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}=-1\Rightarrow\boxed{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}+1=0}$$

(数学中“最美”等式)