证　明

1. 设n阶方阵A满足$A^2-A-2E=0$，证明：

(1)　矩阵A可逆；　　　　(2)　矩阵$A-2E$与$A+E$不同时可逆。

2. 设A为$m\times n$矩阵，证明：存在$n\times s$非零矩阵B，使$AB=O$的充分必要条件为秩$r(A)<n$。

3. 设n阶方阵$A=E-\alpha\alpha^T$,其中$\alpha\neq 0$是n维列向量,证明：

（1）$A^2=A$的充要条件为$\alpha^T\alpha=1$；　　（2）当$\alpha^T\alpha=1$时，矩阵A不可逆。

4. 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，且可由向量组$\beta_1,\beta_2,\beta_3$线性表示。证明：

(1) 向量组β_1,β_2,β_3线性无关；(2) 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$与$\beta_1,\beta_2,\beta_3$等价；

(3) 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$中存在某个向量$\alpha_j$，使得向量组$\alpha_j,\beta_2,\beta_3$线性无关。

5. 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，且可由向量组$\beta_1,\beta_2,\beta_3$线性表示。证明：

(1) 向量组β_1,β_2,β_3线性无关；(2) 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$与$\beta_1,\beta_2,\beta_3$等价；

(3) 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$中存在某个向量$\alpha_j$，使得向量组$\alpha_j,\beta_2,\beta_3$线性无关。

6. 已知矩阵$A=(a_{jl})_{m\times n}$，（1）证明：若秩$r(A)=m$，则非齐次线性方程组$Ax=b$有解；（2）若$r(A)=n$，问$Ax=b$是否一定有解？若是，请证明。若否，请举出一个无解的例题。

7. 设A为n阶矩阵，已知秩$r(A)=r(A^2)$。试证：

(1) 线性方程组$Ax=0$，$A^2x=0$同解；　　　(2) $r(A)=r(A^3)$。

8. 试叙述向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关的定义；用定义证明：向量组$\alpha_1,\alpha_2$线性相关的充要条件为$\alpha_1=k\alpha_2$。其中$\alpha_2\neq 0$，$k$为常数。

9. 设$A=(a_{ij})_{n\times n}$为实矩阵，A^T为A的转置矩阵，A迹为$tr(A)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$。证明：

（1）若AA^T的迹$tr(AA^T)=0$，则$A=0$；（2）若$A^2=AA^T$，则A为实对称阵。

10. 设$n<m$，A是$n\times m$矩阵，B是$m\times n$矩阵。已知$AB=E$。证明：B的列向量组线性无关。

11. 设A，B为n阶方阵，证明：齐次方程组$(AB)x=0$与$Bx=0$为同解方程的充分必要条件是秩$r(AB)=r(B)$。

12. 试叙述：1）向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的极大线性无关组的定义；2）向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的秩 $r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$ 的定义。（2）证明：若向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表示，则$r(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)\le r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$。

13. 设A=（a_{ij}）$_{n\times n}$，A_{ij}是$|A|$中元素a_{ij}的代数余子式。已知$a_{11}A_{11}\neq 0$，线性方程组$Ax=0$有非零解。记列向量$\alpha=\left(A_{11},A_{12},\cdots,A_{1n}\right)^T$，$\beta=\left(a_{11},a_{21},\cdots,a_{n1}\right)^T$，$\varepsilon_1=\left(1,0,\cdots,0\right)^T$。证明：（1）$\alpha$是方程$Ax=0$的解：（2）$x=\varepsilon_1+k\alpha$是方程$Ax=\beta$的通解，其中$k$为任意常数。

14. 设A,B是n阶实矩阵,A的特征值互异。证明:矩阵$AB=BA$的充分必要条件为A的特征向量都是B的特征向量。

15. 设A,B是n阶矩阵,$f(\lambda)=|\lambda E-B|$是B的特征多项式。证明：矩阵$f(A)$可逆的充分必要条件为B的特征值都不是A的特征值

16. 设A为n阶矩阵,且 $A^2-8A+15E=0$。(1) 证明秩$r(A-3E)+r(A-5E)=n$；

(2) 证明A可相似于对角阵； (3) 求行列式$|A+4E|$。