# Chap 10

# 函数列与函数项级数

# Chap 10 — 1

## 一致收斂性

## 一、基本问题

对函数列$\{f_n(x)\}$, $x\in X$. 若$\{f_n(x_0)\}$收敛, 则称$x_0$为**收敛点**否则称之为**发散点**. 收敛点的全体$D$称为**收敛域**.

**定义1** 设$\{f_n(x)\}$的收敛域为$D$, 且 $\forall x\in D$:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),$$

则称$\{f_n(x)\}$在$D$上**(点态)收敛**, $f(x)$称为**极限函数**, 记为

$$f_n(x) \xrightarrow{\quad D \quad} f(x)$$

➢ **$\varepsilon$—$N$叙述**： $f_n(x) \xrightarrow{D} f(x)$ 即

$$\boxed{\forall x \in D, \forall \varepsilon > 0, \exists N = N(x,\varepsilon) \in \mathbb{N}, \forall n > N : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.}$$

**定义2** 设$\{u_n(x)\}$ 为函数列, 称

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$$

为**函数项级数**. $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$ 称为其**部分和函数**.

若 $S_n(x) \xrightarrow{D} S(x)$, 则称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在$D$上**(点态)收敛**.

$S(x)$称为**和函数**，记为 $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x)}$

➢ **问题** 极限函数 $f(x)$ (和函数$S(x)$) 能否保持$f_n(x)$ ($u_n(x)$)的“连续性、可导性、可积性”等分析性质？

**例1** 考察函数列 $f_n(x)=x^n, x\in[0,1]$ 的极限函数在 $[0,1]$上的连续性.

**例2** 设 $f_n(x)=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}, x\in[0,1]$. 考察其极限函数的导数及导数函数列的极限函数.

**例3** 设 $f_n(x)=nx(1-x^2)^n, x\in[0,1]$. 考察其极限函数的积分及其积分的极限.

## 二、一致收敛

**定义3** 设$\{f_n(x)\}$为函数列, 若存在$f(x)$使

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \forall n > N, \forall x \in D: \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

则称$\{f_n(x)\}$在$D$上一致收敛于$f(x)$, 记为

$$f_n(x) \overset{D}{\rightrightarrows} f(x)$$

- 若 $f_n(x) \overset{D}{\rightrightarrows} f(x)$, 则 $f_n(x) \xrightarrow{D} f(x)$, 反之不然.
- 若 $f_n(x) \overset{D}{\rightrightarrows} f(x)$, 则$\forall D_1 \subset D$: $f_n(x) \overset{D_1}{\rightrightarrows} f(x)$

## ➢ $f_n(x)$在$D$上不一致收敛的肯定叙述:

$$\forall f(x), \exists \varepsilon_0 > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n_N > N, \exists x_N \in D:$$

$$|f_{n_N}(x_N) - f(x_N)| \geq \varepsilon_0.$$

不一致收敛判别法:

- 或者 $\{f_n(x)\}$在$D$上不点态收敛;
- 或者 虽 $f_n(x) \xrightarrow{D} f(x)$, 但$\{f_n(x)\}$不一致收敛于$f(x)$,

即

$$\exists \varepsilon_0 > 0, \exists \{n_k\} \subset \mathbb{N}, \exists x_k \in D: \quad |f_{n_k}(x_k) - f(x_k)| \geq \varepsilon_0.$$

**例4** 说明 $f_n(x)=\dfrac{nx}{n^2+(n+1)x}$ 在$(0,+\infty)$上不一致收敛.

**例5** 判断 $f_n(x)=\dfrac{2n\sqrt{x}}{1+n^2x}$ 在$D$上的一致收敛性.

(1) $D=[1,+\infty)$; (2) $D=[0,1]$.

## 三、一致收敛的判别

**定理(Cauchy一致收敛准则)** $\{f_n(x)\}$在$D$上一致收敛

$$\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, \forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in D:$$

$$| f_{n+p}(x) - f_n(x) | < \varepsilon.$$

- **思考** $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$D$上一致收敛的**Cauchy**准则？
- **结论** 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在$D$上一致收敛，则有

$$\boxed{u_n(x) \overset{D}{\rightrightarrows} 0}$$

**定理 (确界极限)**

$$f_n(x) \xrightarrow[\longrightarrow]{D} f(x) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\sup_{x\in D}|f_n(x)-f(x)|=0$$

**例6** 讨论 $f_n(x)=x^n e^{-n^2 x}$ 在[0, +∞)上的一致收敛性.

**定理 (点列极限)**

$$f_n(x) \xrightarrow[\longrightarrow]{D} f(x) \Leftrightarrow \forall\{x_n\}\subset D: \lim_{n\to\infty}|f_n(x_n)-f(x_n)|=0$$

**注** 极限函数(和函数)难确定, 常用Cauchy准则!

极限函数(和函数)易计算, 常用定义或确界极限!

常用点列极限判断不一致收敛!

**例7/10.1(1(5))** 判断函数列 $f_n(x)=\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$ 在$D$上的一致收敛性. **1)** $D$ **=(–∞,+∞);** **2)** $D$ **= [–1, 1].**

**提示:** 首先 $f_n(x)\xrightarrow{\mathbb{R}}\mathrm{e}^x$

**1) 点列极限** 取$x_n=n\in\mathbf{R}$, 则

$$\left|f_n(x_n)-\mathrm{e}^{x_n}\right|=\mathrm{e}^n-2^n\to+\infty\ \ (n\to\infty)$$

**例7/10.1(1(5))** 判断函数列 $f_n(x)=\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$ 在$D$上的一致收敛性. **1)** $D=(-\infty,+\infty)$; **2)** $D=[-1, 1]$.

**2) 确界极限** 注意到当$x\in[-1, 1]$时,

$$g_n(x)=\mathrm{e}^x-\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\ge 0,\ 且\quad g_n'(x)\begin{cases}\ge 0, & 0\le x\le 1,\\ \le 0, & -1\le x\le 0.\end{cases}$$

故 $$\left|f_n(x)-\mathrm{e}^x\right|=\mathrm{e}^x-\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

$$\le \max\left\{g_n(1), g_n(-1)\right\}\to 0\quad (n\to\infty)$$

**命题** 设$u_n(x)\in C[a, b]$, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在$(a, b)$内一致收敛,

则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(a)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(b)$ 收敛，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在$[a, b]$上

一致收敛.

**思考** 函数列的对应形式?

**例8** 证明函数项级数

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n^x}$$

在$(1, +\infty)$上收敛, 但不一致收敛.

## 四、内闭一致收敛

**定义4** 设$D$为区间, 若对$\forall$闭区间$I \subset D$, $\{f_n(x)\}$总在$I$上一致收敛, 则称$\{f_n(x)\}$在$D$上**内闭一致收敛**.

**结论** 设$\{f_n(x)\}$在$(a, b)$内闭一致收敛, 则$\{f_n(x)\}$在$(a, b)$点态收敛. 又问$\{f_n(x)\}$在$(a, b)$必定一致收敛吗?

**例9** 考察 $f_n(x) = x^n$ 在$(0, 1)$的一致收敛性和内闭一致收敛性.

# Chap10 — 2

## 一致收敛性判别法

**定理(Weierstrass *M*-判别法)** 设$\forall n\in \mathbf{N}$, $\forall x\in D$:

$|u_n(x)|\le M_n$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在$D$上一致收敛

- **优级数:** $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$
- $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ **绝对一致收敛:** $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ 一致收敛!
- **问题:** $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 绝对一致收敛与 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 绝对收敛

  且一致收敛的关系?

**例1** 判断 $\sum_{n=1}^{\infty} x^n (1-x)^2$ 在[0, 1]上的一致收敛性

## 定理(A-D判别法)

设$\{u_n(x)\}$, $\{v_n(x)\}$满足下列两组条件之一：则

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)v_n(x)$ 在$D$上一致收敛.

**(Abel)** $\forall x \in D$, $\{v_n(x)\}$单调, 且在$D$上一致有界,

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在$D$上一致收敛;

**(Dirichlet)** $\forall x \in D$, $\{v_n(x)\}$单调, 且在$D$上一致趋于0,

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的$\{S_n(x)\}$在$D$上一致有界.

**例2** 判断 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n(1+x^n)}$ 在[0, 1]上的一致收敛性

---

**例3** 判断 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin x\sin nx}{\sqrt{n+x}}$ 在[0, +∞)上的一致收敛性

# Chap10 — 3

## 一致收敛函数列、函数项级数的性质

**定理 (连续性)** 设$f_n(x)\in C(D)$, 且 $f_n(x)\overset{D}{\rightrightarrows} f(x)$, 则

$f(x)\in C(D)$.

- **等价形式** $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0}\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x)\right)}$

- **函数项级数** 若$u_n(x)\in C(D)$, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 一致收敛

(或内闭一致收敛)于$S(x)$, 则$S(x)\in C(D)$.

- **逆否命题** 若$f_n(x)\in C(D)$, 且 $f_n(x)\xrightarrow{D} f(x)$, 但

$f(x)\notin C(D)$, 则$\{f_n(x)\}$在$D$上不一致收敛.

## **例1** 讨论 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ 在**R**上的一致收敛性

- **思考** 在$f_n(x)\in C(D)$的前提下, **逆命题**成立否?

- **反例** 考察 $f_n(x)=\frac{2n\sqrt{x}}{1+n^2x}$ 在[0, 1]上的情形.

- **问题** 还要增加什么条件就能得出

$$f_n(x)\overset{D}{\rightrightarrows} f(x)?$$

**定理* (Dini)** 设$\{f_n(x)\}$满足:

(1) $f_n(x)\in C[a,b]$;

(2) $\forall x\in[a,b]$, $\{f_n(x)\}$单调;

(3) $f_n(x)\xrightarrow{[a,b]} f(x)$, 且$f(x)\in C[a,b]$.

则 $f_n(x)\overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x)$.

➢ **推论** 函数项级数的Dini定理?

**例2 *** 设 $f(x) \in C[0, 1]$, $f(1) = 0$. 记 $g_n(x) = x^n f(x)$.

证明：$\{g_n(x)\}$在$[0, 1]$上一致收敛.

➢ **特例** $\{x^n(1-x)\}$在$[0, 1]$上一致收敛.

**定理 (积分号下取极限)** 设$f_n(x)\in C[a,b]$, 且$f_n(x)\xrightarrow[]{[a,b]} f(x)$, 则

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\left(\lim_{n\to\infty}f_n(x)\right)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}$$

- **注** 用到连续性定理: $f\in C[a,b]$, 从而$f\in R[a,b]$!
- **注** 条件 “$f_n(x)\in C[a,b]$”可减弱为 “$f_n(x)\in R[a,b]$”!

**推论 (逐项可积性)** 设$u_n(x)\in C[a,b]$, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在$[a,b]$上一致收敛, 则

$$\boxed{\int_a^b\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\mathrm{d}x.}$$

**定理 (微分号下取极限)** 设 $f_n(x) \xrightarrow{[a,b]} f(x)$, 又

$f_n'(x)\in C[a, b]$, 且$\{f_n'(x)\}$一致收敛, 则$f'(x)\in C[a, b]$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = f'(x).}$$

**推论 (逐项可微性)** 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 满足:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x)$; (2) $u_n'(x)\in C[a, b]$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ 在$[a, b]$上一致收敛. 则$S'(x)\in C[a, b]$

$$\boxed{S'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x).}$$

**例3** 已证 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n^x}$ 在$(1, +\infty)$上收敛, 但不一致收敛.

现记其和函数为$f(x)$, 证明: $f\in C(1, +\infty)$.

**例4** 设 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n\mathrm{e}^{-nx}$

(1) 求$f(x)$的定义域$D$;

(2) 证明 $\sum_{n=1}^{\infty} n\mathrm{e}^{-nx}$ 在$D$上不一致收敛;

(3) 证明$f(x)\in C(D)$;

(4) 证明 $\sum_{n=1}^{\infty} n\mathrm{e}^{-nx}$ 在$D$内可逐项求导,且导函数连续.

# Chap10

# 小 结

## 一、一致收敛判别法

- 定义法

$$\boxed{\forall x \in D: |f_n(x) - f(x)| \le a_n \to 0\,(n \to \infty)}$$

- **Cauchy一致收敛准则**

$$\boxed{\forall n > N, \forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in D: |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon}$$

- 确界极限

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| = 0}$$

- **命题** 设$f_n(\mathbf{x})\in C[a, b]$, 且 $f_n(x)$ 在$(a, b)$内一致收敛,

则 $f_n(x)$ 在$[a, b]$上一致收敛.

- **Weierstrass *M*–判别法(函数项级数)**

$$|u_n(x)|\le M_n, \text{且} \sum_{n=1}^{\infty} M_n \text{收敛} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \text{一致收敛}$$

- **A–D判别法(函数项级数)**

- **Dini定理** **(c.f.10.1(1(5))及P.43例2)**

## 二、不一致收敛判别法

- **结论**

$$\boxed{\text{不点态收敛} \Rightarrow \text{不一致收敛}}$$

- **Cauchy不一致收敛准则**

$$\boxed{\exists n \geq N, \exists p \in \mathbb{N}, \exists x_n \in D : | f_{n+p}(x_n) - f_n(x_n) | \geq \varepsilon_0}$$

- **点列极限**

$$\boxed{\exists x_n \in D : | f_n(x_n) - f(x_n) | \not\to 0 \ (n \to \infty)}$$

- **命题** 设$u_n(x)\in C[a, b)$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(a)$ 发散, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \text{ 在}(a, b)\text{内不一致收敛.}$$

- **一致收敛的必要条件**

$$u_n(x) \not\rightrightarrows 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \text{ 不一致收敛}$$

- **连续性定理逆否命题**

$$f_n(x)\in C(D), \text{且} f(x)\notin C(D) \Rightarrow f_n(x) \overset{D}{\not\rightrightarrows} f(x)$$