上 海 交 通 大 学 试 卷

（ 2017 至 2018 学年 第 2 学期 2018 年 05 月 16 日 ）

班级号______________ 学号______________ 姓名__________

课程名称 《数学分析（荣誉）》（2）(致远学院期中考试) 成绩__________

解析+审核 谭 宇 叶昊宇 排版 仲 泰

一、填空题（每小题 4 分，共 16 分）

1. 二次积分 $\int_0^1 \mathrm{d}y \int_y^1 \mathrm{e}^{\frac{y}{x}} \mathrm{d}x =$ __________.

解：

必然要换序的：

$$I = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x \mathrm{e}^{\frac{y}{x}} \mathrm{d}y = \int_0^1 (\mathrm{e}-1) x \,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}-1}{2}$$

2. 设 $f(u,v)$ 可微，$z = z(x,y)$ 由方程 $(x+1)z - y^2 = x^2 f(x-z, y)$ 确定，则 $\mathrm{d}z\big|_{(0,1)} =$ __________.

解：

隐函数求导，无脑求就好了. 这里我们采用取微分的形式处理，先将 $(0,1)$ 代入原式得到：

$$z - 1 = 0 \Rightarrow z = 1$$

再等式两边同时取微分得到：

$$z\,\mathrm{d}x + (x+1)\,\mathrm{d}z - 2y\,\mathrm{d}y = 2xf(x-z,y)\,\mathrm{d}x + x^2[f_1 \cdot (\mathrm{d}x - \mathrm{d}z) + f_2 \mathrm{d}y]$$

代入 $x = 0, y = 1, z = 1$ 得到：

$$\mathrm{d}x + \mathrm{d}z - 2\,\mathrm{d}y = 0 \Rightarrow \mathrm{d}z\big|_{(0,1)} = -\mathrm{d}x + 2\,\mathrm{d}y$$

3. 设平面域 $D: x^2 + y^2 \le 1$，则二重积分 $\iint_D (x-2y)^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$ __________.

解：

直接利用轮换对称性，然后利用极坐标系下换元处理：

$$
\begin{aligned}
I &= \iint_D (x^2+4y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{5}{2}\iint_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{5}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\,\mathrm{d}r \\
&= \frac{5}{2}\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{4} \\
&= \frac{5\pi}{4}
\end{aligned}
$$

4. 设空间曲线 $L:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x+y+z=0 \end{cases}$，则曲线积分 $\int_L xy\,\mathrm{d}s=$____________.

解：

轮换对称一波，然后利用恒等式：

$$
(x+y+z)^2=(x^2+y^2+z^2)+2(xy+yz+zx)
$$

即可得到：

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{1}{3}\int_L (xy+yz+zx)\,\mathrm{d}s = \frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\int_L \mathrm{d}s \\
&= -\frac{1}{6}\cdot 2\pi\cdot 1 = -\frac{\pi}{3}
\end{aligned}
$$

二、单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

5. 设函数 f 定义在 $D=[0,1]\times[0,1]$ 上，$f(x,y)=\begin{cases} 1, & x\in\mathbb{Q}^c \\ 2y, & x\in\mathbb{Q} \end{cases}$，则 f 在 D 上（　　）.

A. 可积，两个二次积分存在且相等　　B. 可积，仅一个二次积分存在

C. 不可积，两个二次积分存在但不相等　　D. 不可积，仅一个二次积分存在

解：

函数处处不连续，从而不连续点构成的集合为 $[0,1]\times[0,1]$，其测度为 1，从而根据 Lebesgue 定理知，$f(x,y)$ 不可积. 对于二次积分，先固定 x，对于任意的 x，$f(x,y)$ 都是关于 y 的连续函

数，从而二次积分$\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_0^1 \mathrm{d}x=1$存在；再固定$y$，对于任意的$y\neq\frac{1}{2}$，$f(x,y)$都是关于$x$的处处不连续函数（可以类比Dirichlet 函数），从而根据Lebesgue 定理，二次积分$\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x$不存在.

综上，该题选 D.

6. 设$f(x,y)=x^4+x^2y-2y^2$，则下列结论错误的是（　　）.

A. $(0,0)$是$f(x,y)$的极小值点　　B. $x=0$是$f(x,0)$的极小值点

C. $y=0$是$f(0,y)$的极大值点　　D. $x=0$是$f(x,kx)(k\neq 0)$的极大值点

解：

为了齐次好看，先作$y=kx^2$，从而得到：

$$f(x,kx^2)=x^4+kx^4-2k^2x^4=(1-k)x^4$$

从而可以看出，$x=0$是否是$f(x,kx^2)$的极小值点，还需要看k的脸色，从而 A 错误.

从而该题选 A.

7. 函数$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$在$(0,0)$沿$\vec{l}=(1,2)$的方向导数为（　　）.

A. 0　　B. $\dfrac{2}{5\sqrt{5}}$　　C. $\dfrac{4}{5\sqrt{5}}$　　D. 不存在

解：

又不一定可微，我才不冒这个险，老老实实按照定义做就好了. 为了方便，取单位方向向量，且利用极坐标形式：$\boldsymbol{l}^0=\dfrac{\boldsymbol{l}}{\|\boldsymbol{l}\|}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}},\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)\overset{\text{def}}{=\!=}(\cos\theta,\sin\theta)$，从而方向导数为：

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}=\lim_{r\to 0^+}\frac{r^3\cos\theta\sin^2\theta}{r^2}=0$$

从而该题选 A.

Ps: ① 关于方向导数的定义，请以实际采用的课本为准，不同课本或者考纲可能存在差异；

② 事实上，这里注意到分子是 3 次，分母是 2 次（且极坐标下与θ无关），即可判断方向导数必然为 0. 利用极坐标是非常容易看出来的.

8. 设有方程$x^2+y+\sin xy=0$，则在$(0,0)$的某邻域内（　　　）.

（I）上述方程能确定唯一的隐函数$y=y(x)$满足$y(0)=0$.

（II）上述方程能确定唯一的隐函数$x=x(y)$满足$x(0)=0$

A. I不正确，II正确　　　　B. I正确，II不正确

C. I和II都正确　　　　D. I和II都不正确

解：

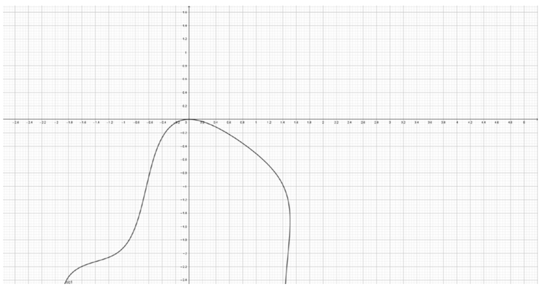
首先判断，方程$x^2+y+\sin xy=0$必然经过$(0,0)$，利用隐函数定理进行判断是否存在隐函数，只需判断对应偏导是否为 0. 只需分别求出$\dfrac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial x},\dfrac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial y}$（若不存在，则不存在对应的隐函数）即可. 直接求偏导咯，记$F(x,y)=x^2+y+\sin xy$，从而求得：

$$F_x(0,0)=0,F_y(0,0)=1$$

从而可以确定唯一的隐函数$y=y(x)$满足$y(0)=0$. 但是隐函数定理是个充分不必要条件，我们不能因此否定 II. 但是就课程考察的角度而言，我们总是默认，如果不满足隐函数定理，则不存在对应的隐函数（口嗨），

从而该题选 B.

Ps: 方程的图像如图所示：



由图像可以看出，不能确定唯一的隐函数$x=x(y)$，这是因为对于任意的靠近0的y，均存在两个x_1,x_2，使得$(x_1,y),(x_2,y)$满足方程$x^2+y+\sin xy=0$.

9. 设曲线积分$I=\oint_C \frac{x\sim\mathrm{d}x+y\sim\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$，其中$C$是平面上任意一条不经过原点的正向光滑闭曲线，则（ ）.

A. $I=0$

B. $I=2\pi$

C. 若C环绕原点，则$I=2\pi$，若C没有环绕原点，则$I=0$

D. 以上结论均不正确

解：

这就很坑的，看起来这是一个全微分形式，但是这不一定是闭区域（Green 公式需要的条件）

Case1: 闭合曲线内部不包含原点，则其内部是单连通区域，从而$I=0$.

Case2: 闭合曲线内部包含原点，则其内部是复联通且非闭区域. 于原点处挖去一个半径为$\varepsilon\to 0^+$的圆，从而对圆外与闭合曲线内的区域，利用Green 公式，积分为零. 对于圆上曲线积分：

$$I=\oint_{x^2+y^2=\varepsilon^2}\frac{x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\frac{1}{\varepsilon^2}\oint_{x^2+y^2=\varepsilon^2}x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y=0$$

综上，$I=0$.

从而该题选 A.

Ps: 若将分子改为$y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y$，则该题选 C.

三、（本题共 9 分）

10.设函数$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

（1）证明：$f(x,y)$在$(0,0)$处连续，可偏导；

（2）判断$f(x,y)$在$(0,0)$处的可微性，并说明理由.

解：

（1）证明：这个这个，极坐标直接换元冲，干就完了.

连续性：

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{r\to 0^+}(r\cos\theta-r\sin\theta+r\cos^2\theta\sin\theta)=0$$

偏导性：

$$f_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1$$

$$f_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{-y}{y}=-1$$

（2）算就完事，考察极限：

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-xf_x(0,0)-yf_y(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{r\to 0^+}\cos^2\theta\sin\theta$$

该极限不关于r一致收敛，从而原二重极限不存在，从而$f(x,y)$在$(0,0)$处不可微.

四、（每小题 8 分，共 16 分）

11.设$f(u,v)$具有连续二阶偏导数，$z=f(x^2y,x+2y)$，求z_x，z_{xy}

解：

算就完了：

$$z_x=2xyf_1+f_2, z_y=x^2f_1+2f_2$$

12.将长为$2\,\mathrm{m}$分成三段，分别围成圆、正方形与正三角形，问三个图形的面积之和是否存在最小值？若存在，求出最小值.

解：

你说是高中题我都信. 记铁丝三段分别长为a,b,c，则$a+b+c=3$，而面积可以写出为：

$$S=\frac{a^2}{4\pi}+\frac{b^2}{16}+\frac{\sqrt{3}c^2}{36}$$

利用柯西不等式即可得到：

$$\left(\frac{a^2}{4\pi}+\frac{b^2}{16}+\frac{\sqrt{3}\,c^2}{36}\right)\left(4\pi+16+\frac{36}{\sqrt{3}}\right)\geqslant(a+b+c)^2=4$$

等号是显然可以取到的. 从而解得：

$$S_{\min}=\frac{1}{4+3\sqrt{3}+\pi}$$

五、计算下列积分（每小题 9 分，共 36 分）

13.设平面闭域D由闭曲线$(x+y+1)^2+(x-y-2)^2=1$围成，计算二重积分

$I=\iint_D[(x+y+1)^2+(x-y-2)^2]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

解：

先作换元$u=x+y+1,v=x-y-2$，再极坐标换元后计算即可. 计算一下Jacobi 行列式：

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}=\frac{1}{\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}}=-2$$

从而有：

$$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 2r^3\,\mathrm{d}r=2\pi\cdot 2\cdot\frac{1}{4}=\pi$$

14.计算曲线积分$I=\int_L\frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{2x^2+y^2}$，其中$L$是起点为$(1,0)$经抛物线$y=1-x^2$至终点$(-1,0)$的曲线弧.

解：

注意到：$\dfrac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{2x^2+y^2}=\dfrac{\mathrm{d}\left(\frac{y}{x}\right)}{2+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{d}\arctan\left(\dfrac{y}{\sqrt{2}\,x}\right)$

从而该积分与路径无关. 需要注意的是，选择路径时，先选择好区域，在闭区域内选择折线路径（关键是不要经过原点）. 从而选择路径：$(1,0)\to(1,1)\to(-1,1)\to(-1,0)$，从而计算积分：

$$I=\int_0^1\frac{\mathrm{d}y}{2+y^2}+\int_1^{-1}\frac{-\mathrm{d}x}{2x^2+1}+\int_1^0\frac{-\mathrm{d}y}{2+y^2}=\frac{\sqrt{2}\,\pi}{2}$$

Ps: 当然，也可以选择椭圆路径$2x^2+y^2=2 \Rightarrow x^2+\frac{y^2}{2}=1$，再利用极坐标换元计算得到：

$$I=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos\theta\,\mathrm{d}\left(\sqrt{2}\sin\theta\right)-\sqrt{2}\sin\theta\,\mathrm{d}(\cos\theta)=\frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta=\frac{\sqrt{2}\pi}{2}$$

15.设Σ是一光滑封闭曲面，方向朝外，给定曲面积分：

$$I=\iint_{\Sigma}(x^3-x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(2y^3-y)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(3z^3-z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

试确定曲面Σ，使得积分I的值最小，并求该最小值.

解：

高斯定理一步到位：

$$I\xlongequal{\text{Gauss}}\int_V(3x^2-1+6y^2-1+9z^2-1)\,\mathrm{d}V=3\int_V(x^2+2y^2+3z^2-1)\,\mathrm{d}V$$

要使得积分最小，只需要：

$$x^2+2y^2+3z^2\leqslant 1$$

从而取$V\!:x^2+2y^2+3z^2\leqslant 1$，进而计算得到最小值，作换元$u=x,v=\sqrt{2}\,y,w=\sqrt{3}\,z$，并作球坐标代换：

$$I=\frac{3}{\sqrt{6}}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1(r^2-1)\cdot r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r=\frac{3}{\sqrt{6}}\cdot 2\pi\cdot 2\cdot\left(-\frac{2}{15}\right)=-\frac{4\sqrt{6}}{15}\pi$$

16.设S是曲线$\begin{cases}x^2+3y^2=1\\ z=0\end{cases}$绕$y$轴旋转所成的椭球面的上半部分$(z\geq 0)$，$\Pi$为$S$在$P(x,y,z)$点处的切平面，$\rho(x,y,z)$是原点到切平面$\Pi$的距离，计算曲面积分$I=\iint_S z\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}S$.

解：

旋转所得椭球面方程为：$x^2+3y^2+z^2=1$

在$P(x,y,z)$处切平面为：$Xx+3Yy+3Zz=1$

从而计算得原点到平面的距离为：$\rho(x,y,z)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+9y^2+z^2}}$

从而计算曲面积分：

$$
\begin{aligned}
I &= \int_S \frac{z}{\sqrt{x^2+9y^2+z^2}}\mathrm{d}S \\
&= \iint_D \frac{z}{\sqrt{x^2+9y^2+z^2}} \cdot \sqrt{z_x^2+z_y^2+1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, z=\sqrt{1-x^2-3y^2} \\
&= \iint_D \frac{\sqrt{1-x^2-3y^2}}{\sqrt{1+6y^2}} \cdot \frac{\sqrt{1+6y^2}}{\sqrt{1-x^2-3y^2}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \pi \cdot 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{3}}
\end{aligned}
$$

六、(本题共 8 分)

17. 设二元可微的函数 F 在直角坐标系下可写成 $F(x,y)=f(x)g(y)$，在极坐标系下可写成 $F(r\cos\theta, r\sin\theta)=h(r)$，并且 $F(x,y)$ 无零点，求 $F(x,y)$ 的表达式.

证明：

分如下几步证明：

Step 0: f,g,h 可导. 由 $F(x,y)$ 可微，立即可证.

Step 1: $g=kf, k\in\mathbb{R}-\{0\}$

由已知：$F(x,y)=f(x)g(y)=f(r\cos\theta)g(r\sin\theta)=h(r)$，从而取 $\theta=0,\dfrac{\pi}{2},\pi,\dfrac{3\pi}{2}$ 得到：

$$f(r)g(0)=f(0)g(r)=f(-r)g(0)=f(0)g(-r)$$

因为 $F(x,y)\neq 0, \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$，从而有 $f(x)\neq 0, g(x)\neq 0, \forall x\in\mathbb{R}$，从而整理上式得到：

$$
\begin{aligned}
f(r)=f(-r), g(r)=g(-r) \\
g(r)=\frac{g(0)}{f(0)}f(r) \overset{\text{def}}{=\!=} k\cdot f(r)
\end{aligned}
$$

从而我们知：f 是偶函数，且 $g=k\cdot f(r)$.

Step 2: $f(x)=\mathrm{e}^{Cx^2}$

由Step 1 知，$F(x,y)=kf(x)\cdot f(y)=h(r)=h\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$，对$x,y$分别求导得到：

$$kf'(x)f(y)=h'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$kf(x)f'(y)=h'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

两式作比后分离变量得到：

$$\frac{f'(x)}{xf(x)}=\frac{f'(y)}{yf(y)}=2C$$

其中$2C$既与y无关，也与x无关，故而为常数. 从而解得：

$$f(x)=\mathrm{e}^{Cx^2}$$

从而得到：

$$F(x,y)=k\cdot\mathrm{e}^{C\left(x^2+y^2\right)}(k\neq 0)$$