数学分析期末复习

王凯灵

2021-Fall

目录

1 可积性 **2**
1.1 必要条件 2
1.2 充要条件 2
1.3 充分条件 2

2 收敛的判别 **3**
2.1 无穷积分 3
2.2 瑕积分 3
2.3 数项级数 4

3 定积分的几何应用 **6**
3.1 平面曲线弧长 6
3.2 平面图形面积 6
3.3 旋转侧面积 7
3.4 旋转体积 7

4 定理和结论 **7**

5 备注 **8**

1 可积性

1.1 必要条件

- 不同 $[a,b]$ 的分割, 介点集和积分变量, 积分值相同

  推论: 若存在两分割或同一分割下不同介点集, 使积分和的极限不同, 则 f 在 $[a,b]$ 不可积

- 若 $f \in R[a,b]$, 则 f 在 $[a,b]$ 有界

  推论: 无界函数不可积

1.2 充要条件

- **第 I 充要条件**设 f 在 $[a,b]$ 有界, 则 $f \in R[a,b] \Leftrightarrow$

$$\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x$$

  推论设 f 在 $[a,b]$ 有界, 则 $f \in R[a,b] \Leftrightarrow$

$$\lim_{||T||\to 0}(\overline{S}(T) - \underline{S}(T)) = \lim_{||T||\to 0}\sum_{i=1}^{n}\omega_i \Delta x_i = 0$$

- **第 II 充要条件**设 f 在 $[a,b]$ 有界, 则 $f \in R[a,b] \Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \text{分割} T: \quad \overline{S}(T) - \underline{S}(T) = \sum_{i=1}^{n}\omega_i \Delta x_i < \varepsilon$$

- **第 III 充要条件**设 f 在 $[a,b]$ 有界, 则 $f \in R[a,b] \Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0, \forall \sigma > 0, \exists \text{分割} T: \sum_{i\in\Lambda}\Delta x_i < \varepsilon$$

  其中 $\Lambda = \{i \mid \omega_i \geq \sigma\}$

1.3 充分条件

- 引理 设 f 在 $[a,b]$ 有界, 则其振幅 $\omega = \sup\limits_{x,y\in[a,b]}|f(x) - f(y)|$

- 定理 若 $f \in C[a,b]$, 则 $f \in R[a,b]$

- 定理 若 f 在 $[a,b]$ 有界, 且仅有限个间断点, 则 $f \in R[a,b]$

- 定理 若 f 在 $[a,b]$ 单调, 则 $f \in R[a,b]$

- 命题 设 f 在 $[a,b]$ 有界, 其间断点全体为 $\{x_n\}$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 则 $f \in R[a,b]$

2 收敛的判别

2.1 无穷积分

1. **Cauchy 准则** $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛 $\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > a, \forall A', A'' > A : \left| \int_{A'}^{A''} f(x)\mathrm{d}x \right| < \varepsilon$$

2. **收敛原理**设 $f(x) \geq 0$, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛 $\Leftrightarrow$

$$F(A) = \int_a^A f(x)\mathrm{d}x在[a, +\infty)有上界$$

3. **比较判别法**设 $g(x) \geq f(x) \geq 0$, 则

   - $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 收敛 $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛
   - $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散 $\Rightarrow \int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 发散

   极限形式设 $f(x) \geq 0, g(x) > 0$, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l$, 则

   - 当 $0 < l < +\infty$ 时, $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 同敛散
   - 当 $l = 0$ 时, $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 收敛 $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛
   - 当 $l = +\infty$ 时, $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 发散 $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散

4. ***p*-判别法**设 $f(x) \geq 0$, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^p f(x) = l$, 则

   - 当 $0 \leq l < +\infty$, 且 $p > 1$ 时, $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛
   - 当 $0 < l \leq +\infty$, 且 $p \leq 1$ 时, $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散

5. **A-D 判别法**设 f, g 满足:

   - (Abel) $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, $g(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 单调有界
   - (Dirichlet) $F(A) = \int_a^A f(x)\mathrm{d}x$ 在 $[a, +\infty)$ 有界, $g(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 单调且 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$

   则 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛

6. 若 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛

2.2 瑕积分

1. **Cauchy 准则**设 b 为瑕点, 则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛 $\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x', x'' \in (b - \delta, b) : \left| \int_{x'}^{x''} f(x)\mathrm{d}x \right| < \varepsilon$$

2. **收敛原理**设 $f(x) \geq 0$, 则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛 $\Leftrightarrow$

$$F(A) = \int_a^A f(x)\mathrm{d}x \text{ 在}[a, b) \text{ 有上界}$$

3. **比较判别法**设 $g(x) \geq f(x) \geq 0$, 则

- $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 收敛 $\Rightarrow \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛
- $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散 $\Rightarrow \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 发散

极限形式设 $f(x) \geq 0, g(x) > 0$, 且 $\lim\limits_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = l$, 则

- 当 $0 < l < +\infty$ 时, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 同敛散
- 当 $l = 0$ 时, $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 收敛 $\Rightarrow \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛
- 当 $l = +\infty$ 时, $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 发散 $\Rightarrow \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散

4. ***p*-判别法**设 $f(x) \geq 0$, 且 $\lim\limits_{x \to b^-} (b-x)^p f(x) = l$, 则

- 当 $0 \leq l < +\infty$, 且 $p < 1$ 时, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛
- 当 $0 < l \leq +\infty$, 且 $p \geq 1$ 时, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散

5. **A-D 判别法**设 f, g 满足:

- (Abel) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, g 在 $[a, b)$ 单调有界
- (Dirichlet) $F(A) = \int_a^A f(x)\mathrm{d}x$ 在 $[a, b)$ 有界, g 在 $[a, b)$ 单调且 $\lim\limits_{x \to b^-} g(x) = 0$

则 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛

6. 若 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛, 则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛

2.3 数项级数

- **必要条件**若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0$$

1. **Cauchy 收敛准则**

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 收敛} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}, \forall n > N, \forall p \in \mathbf{N}:$$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon$$

正项级数

2. **收敛原理**设 $a_n \geq 0$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 $\Leftrightarrow$ 部分和 $\{S_n\}$ 有上界

3. **比较判别法**若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 均为正项级数, 且 $a_n \leq b_n$ 则有

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ 收敛} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 收敛}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 发散} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ 发散}$$

推论一 极限形式若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 均为正项级数, 且 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$, 则有

- 当 $0 < l < +\infty$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 同敛散
- 当 $l = 0$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛
- 当 $l = +\infty$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散

推论二若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 均为正项级数, 且

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

则有

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ 收敛} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 收敛}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 发散} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ 发散}$$

4. **Cauchy 根值判别法**若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 满足 $\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho$, 则
   - 当 $0 \le \rho < 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛
   - 当 $\rho > 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散
5. **比值判别法**设 $a_n > 0$, 则
   - 当 $\varlimsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho < 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛
   - 当 $\varliminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho > 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散
6. **积分判别法**若非负函数 f 在 $[1, +\infty)$ 上单减, 则无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 与无穷积分 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 同敛散
7. **Raabe 判别法**设 $a_n > 0$, 则
   - 若 $\exists r > 1, N \in \mathbf{N}$, 使 $\forall n > N : n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \ge r$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛
   - 若 $\exists N \in \mathbf{N}$, 使 $\forall n > N : n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \le 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散

   Raabe 极限形式设 $a_n > 0$, 则
   - $\varliminf_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = r > 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛
   - $\varlimsup_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = r < 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散

任意项级数

8. **Leibniz 判别法**若<u>交错级数</u> $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ (其中 $a_n > 0$) 满足:
    - $a_{n+1} \leq a_n$
    - $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

    则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛且
    $$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n \leq a_1$$

9. **A-D 判别法**设 $\{a_n\}, \{b_n\}$, 满足:
    - (Abel) $\{a_n\}$ 单调有界, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛
    - (Dirichlet) $\{a_n\}$ 单调趋于 0, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 部分和有界

    则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛

3 定积分的几何应用

3.1 平面曲线弧长

弧微分公式

$$\mathrm{d}s = \sqrt{1 + f'^2(x)}\mathrm{d}x$$

1. **直角坐标** $l : y = f(x) \in C^{(1)}[a, b]$
$$s(l) = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\mathrm{d}x$$

2. **参数方程** $l : x = x(t), y = y(t) \in C^{(1)}[\alpha, \beta]$
$$s(l) = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\mathrm{d}t$$

3. **极坐标方程** $l : r = r(\theta) \in \mathrm{C}^{(1)}[\alpha, \beta]$
$$s(l) = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta \quad (\alpha < \beta)$$

3.2 平面图形面积

1. 直角方程 $A = \int_a^b (f(x) - g(x))\mathrm{d}x$
2. 参数方程 $A = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \xlongequal{x=x(t)} \int_\alpha^\beta y(t)x'(t)\mathrm{d}t$
3. 极坐标方程 $A = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta)\mathrm{d}\theta$

3.3 旋转侧面积

旋转曲面侧面积 (绕 x 轴)

$$S=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\mathrm{d}x$$

3.4 旋转体积

1. **薄片法**曲线 $y=f(x)$ 与 $x=a,x=b$ 及 x 轴所围图形绕 x 轴旋转

$$V_x=\pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$$

2. **薄壳法**曲线 $y=f(x)$ 与 $x=a,x=b$ 及 x 轴所围图形绕 y 轴旋转所得旋转体体积

$$V_y=2\pi\int_a^b xy\ \mathrm{d}x=2\pi\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x$$

4 定理和结论

1. **Cauchy-Schwarz 不等式**设 $f,g\in R[a,b]$, 则

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2\le\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x$$

2. **积分第一中值定理**设 $f\in C[a,b],g\in R[a,b]$ 且不变号, 则 $\exists\xi\in[a,b]$ 使

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

推论设 $f\in C[a,b]$, 则 $\exists\xi\in[a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a)$$

3. **Wallis 公式**

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\ \mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\ \mathrm{d}x=\begin{cases}\frac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\frac{\pi}{2}, & n\text{ 为偶数}\\ \frac{(n-1)!!}{n!!}, & n\text{ 为奇数}\end{cases}\ (n\in\mathbb{N})$$

推论

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2$$

4. **Abel 变换**设有 $\{a_n\},\{b_n\}$, 记 $B_k=b_1+b_2+\ldots+b_k$, 则 $\forall n\in\mathbf{N}$

$$\sum_{k=1}^n a_kb_k=a_nB_n+\sum_{k=1}^{n-1}B_k\left(a_k-a_{k+1}\right)$$

Abel 引理设 $\{a_n\}$ 单调, 且 $|B_k|\le M$, 则

$$\left|\sum_{k=1}^n a_kb_k\right|\le M\left(|a_1|+2\left|a_n\right|\right)$$

5. **积分第二中值定理**设 $f\in R[a,b]$, 则有

Bonnet 型

- 若 g 在 $[a,b]$ 单减且非负, 则 $\exists\xi\in[a,b]$ 使
$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(a)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x$$
- 若 g 在 $[a,b]$ 单增且非负, 则 $\exists\xi\in[a,b]$ 使
$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(b)\int_\xi^b f(x)\mathrm{d}x$$

Weierstrass 型

- 若 g 在 $[a,b]$ 单调, 则 $\exists\xi\in[a,b]$ 使
$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(a)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x + g(b)\int_\xi^b f(x)\mathrm{d}x$$

6. **Riemann 引理**设 $f\in R[a,b]$, 则有
$$\lim_{p\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin px\ \mathrm{d}x = \lim_{p\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos px\ \mathrm{d}x = 0$$

广义形式设 $f\in R[a,b], g$ 可积且以 T 为周期, 则
$$\lim_{p\to+\infty}\int_a^b f(x)g(px)\mathrm{d}x = \frac{1}{T}\int_0^T g(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

5 备注

自己复习时, 随意为之. 如有打错和其他错误, 可告知我:链接