10.27

P107 1(3,4) 3(2,3)

P116 1(3,4) 3 6(7,8) 7, 10, 11 13(2)

10.29

P117 12(1,2) 15 16 19

P128 3.4(1) 6 7(2,4)

11.1

P128 8 9 10(1) 11 14 16

10.27

P107 1. (3) $dy = (-ae^{-ax}\sin bx + be^{-ax}\cos bx)dx$

(4) $dy = \dfrac{dx}{x[1+(\ln x)^2]}$

P107 3. (2) $\sqrt[7]{100} = \sqrt[7]{2^7-28} \approx 2 + \dfrac{-28}{7\times 2^6} = 1.9375$

(3) $\sqrt[10]{980} = \sqrt[10]{2^{10}-44} \approx 2 + \dfrac{-44}{10\times 2^9} \approx 1.9914$

P116 1. (3) $d^2y = \left(2\arctan x + \dfrac{2x}{1+x^2}\right)dx^2$

(4) $d^2y = \left(2\ln x + 3 + \dfrac{2}{x}\ln x + \dfrac{2}{x}\right)dx^2$

P116 3. $f'(0)$存在 $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} \Rightarrow b=1, c=0$

$f''(0)$不存在 $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x-0} \neq \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x-0} \Rightarrow a\neq \dfrac{1}{2}$

P116 6. (7) $y = \dfrac{x}{1-x} - (x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x)$

$y^{(n)} = \left(\dfrac{x}{1-x}\right)^{(n)}$

$y^{(n)} = \left(-1 + \dfrac{1}{1-x}\right)^{(n)}$

$y^{(n)} = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$

(8) $y^{(1)}=(2x-1)\ln(1+2x)+x+\dfrac{\frac{3}{2}}{2x+1}-\dfrac{3}{2}$

$y^{(2)}=2\ln(1+2x)+\dfrac{2x-1}{2x+1}+1+\dfrac{3}{2}\cdot2\cdot(-1)\cdot\dfrac{1}{(2x+1)^2}$

$y^{(3)}=\dfrac{2}{2x+1}+\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)'+(-3)\cdot\left(\dfrac{1}{(2x+1)^2}\right)'$

$y^{(n)}=\left(\dfrac{2}{2x+1}\right)^{(n-3)}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{(n-2)}+(-3)\left(\dfrac{1}{(2x+1)^2}\right)^{(n-2)}$

$=\dfrac{(-1)^{n-1}(n-3)!\cdot2^{n-2}}{(1+2x)^n}(8x^2+8x(n-1)+3n^2-5n),(n\geq3)$

P_{116} 7 证：令 $y=\dfrac{a}{c}+\dfrac{b-\frac{ad}{c}}{cx+d}$，易证

P_{116} 10 (1)

$y^{(1)}=\dfrac{1}{1+x^2}$

$(1+x^2)y^{(1)}=1$

$(1+x^2)y^{(n+1)}+2x\cdot C_n^1\cdot y^{(n)}+2\cdot C_n^2\cdot y^{(n-1)}=0$，证毕

(2) 令 $x=0$

$y^{(n)}=-(n-1)(n-2)y^{(n-2)}$

故n为偶数时： $y^{(n)}=0$

n为奇数时： $y^{(n)}=(-1)^{\frac{n-1}{2}}(n-1)!\ (0!=1)$

P_{116} 11. (1)

$y'=\dfrac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$

$y''=2\left(\dfrac{1}{1-x^2}+\dfrac{x\cdot\arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\right)$

$(1-x^2)y''=2\left(1+\dfrac{x\cdot\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\right)=2+x\cdot y'$

$(1-x^2)y''=2+x\cdot y'$

$(1-x^2)y^{(n+2)}-(2n+1)x\cdot y^{(n+1)}-n^2\cdot y^{(n)}=0$ 证毕.

(2) 令 $x=0$ ， $y^{(n)}=(n-2)^2\cdot y^{(n-2)}$

n为偶数时： $y^{(n)}=2[(n-2)!!]^2$

n为奇数时： $y^{(n)}=0$

P117 13 (2) $$\frac{y^2}{x^2+y^2}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{d\sqrt{x^2+y^2}}{d\frac{x}{y}}$$

$$\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot d\frac{x}{y}=d\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(\frac{1}{y}dx-\frac{x}{y^2}dy\right)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dx+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dy$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-2x}{x+y}+1$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{2(x^2+y^2)}{(x+y)^3}$$

10、29

P117 12 (1) $$\frac{dy}{dx}=\frac{\sin t}{1-\cos t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{a(1-\cos t)^2}$$

(2) $$\frac{d^2y}{dx^2}=-2(t-1)^{-5}(1+t^2)$$

P117 15 令 $t=\frac{1}{x}$

$$f^{(1)}(x)=\frac{dt}{dx}\cdot\frac{df(x)}{dt}=(-t^2)\cdot(-2t\cdot e^{-t^2})=2t^3\cdot e^{-t^2}=P_1(t^3)\cdot e^{-t^2}$$

$$f^{(2)}(x)=\frac{dt}{dx}\cdot\frac{df^{(1)}(x)}{dt}=(-t^2)\cdot[6t^2\cdot e^{-t^2}+2t^3\cdot(-2t\cdot e^{-t^2})]=P_2(t^6)\cdot e^{-t^2}$$

⋮ 同理

$$f^{(3)}(x)=P_3(t^9)e^{-t^2}$$

$$f^{(n)}(x)=P_n(t^{3n})e^{-t^2}$$

其中 $P_1, P_2, \cdots P_n$ 关于t的多项式，且关于t的最小次数为2，最大为3n.

$x\to0$ 时 $P_n(t^{3n})$ 与 $\frac{1}{x^{3n}}$ 为同阶无穷大

易证 $\forall n\in\mathbb{N}$ 有 $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{3n}}=0$ ，即 $f^{(n)}(0)$ 存在且为0

故 $f(x)$ 在 $x=0$ 任意阶可导 且 $f^{(n)}(0)=0$ ，证毕

P117 16. $f^{(n-1)}(x)=n!(x-x_0)\varphi(x)+C_n^1\cdot\frac{n!}{2!}(x-x_0)^2\varphi'(x)+\cdots+(x-x_0)^n\varphi^{(n-1)}(x)$

$\frac{f^{(n)}(x_0+\Delta x)-f^{(n)}(x_0)}{\Delta x}=n!\varphi(x)+C_n^1\cdot\frac{n!}{2!}\cdot\varphi'(x_0)\cdot\Delta x+\cdots$

$\xrightarrow{\Delta x\to 0} n!\varphi(x_0)$

故 $f^{(n-1)}(x)$ 在 $x=x_0$ 处导数存在 且有 $f^{(n)}(x_0)=n!\varphi(x_0)$

P117 19 $\frac{d^2z}{dx^2}+z=0$

P128 3. 令 $f(x)=\frac{a_0}{n+1}x^{n+1}+\frac{a_1}{n}\cdot x^n+\cdots+a_nx$, $x\in[0,1]$

$f(0)=f(1)=0$ Rolle 中值定理 证毕.

P128 4. (1) $\because f\in D(a,b)$

$\therefore f\in C(a,b)$

将 $f(x)$ 补充定义

$$F(x)=\begin{cases} f(x) & , x\in(a,b) \\ \lim\limits_{x\to a^+} f(x) & , x=a,b \end{cases}$$

则 $F\in D(a,b)\cap C[a,b]$ 且 $F(a)=F(b)$

由Rolle 中值定理，$\exists\xi\in(a,b)$ 有 $F'(\xi)=f'(\xi)=0$

证毕.

P_{128} 6. 不妨设 $f'(a), f'(b) > 0$，$\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} > 0$，即在 $x \in \mathring{U}_+(a,\delta_1)$ 有

$f(x) > f(a) = 0$，同理有 $x \in \mathring{U}_-(b,\delta_2)$ 有 $f(x) < f(b) = 0$

$\because f \in C[a+\frac{\delta_1}{2}, b-\frac{\delta_2}{2}]$

$\therefore$ 由零值定理，$\exists \xi \in [a+\frac{\delta_1}{2}, b-\frac{\delta_2}{2}] \subset [a,b]$，$f(\xi)=0$

又在 (a,ξ) 与 (ξ,b) 分别用 Rolle 定理 $\exists a < \eta_1 < \xi < \eta_2 < b$ 有 $f'(\eta_1) = f'(\eta_2) = 0$

在 (η_1,η_2) 对 $f'(x)$ 用 Rolle 证毕.

P_{128} 7. (2) $f(x) = \ln x$ 易证

(4) $f(x) = \arctan x$ 易证

11.1

P_{128} 8. $\because f(x) \in C[a,b] \cap D(a,b)$ 且 $f(a) = f(b)$

由 Rolle 定理

$\exists \eta \in (a,b)$ 有 $f'(\eta) = 0$

$\because f'(x) \in C[a,\eta] \cap D(a,\eta)$ 由 Lagrange

$\exists \xi \in (a,\eta)$ 有 $f''(\xi) = \frac{f'(a)-f'(\eta)}{a-\eta} = \frac{f'(a)}{a-\eta} < 0$

9. $f'(x) = \frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0$ 故 $f'(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上有界

由 Lagrange，$\forall x_1, x_2 \in [1,+\infty)$ $\exists \xi \in (x_1,x_2)$ 有

$|f(x_1) - f(x_2)| = f'(\xi)|x_1 - x_2| \le |M||x_1 - x_2|$

满足 Lipschitz 条件 故 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 一致连续

10 (1) 构造 $F(x)=\frac{f(x)}{x}$ 利用Cauchy中值

11 (1) 构造 $F(x)=\frac{f(x)}{x}$ 利用Rolle中值

(2) $\lambda=0$ 结论平凡

$\lambda\neq0$，构造 $F(x)=\frac{f(x)}{e^{\lambda x}}$ 利用Rolle中值

14 Lagrange 中值定理

16 $F(x)=f(x)-\frac{x^2}{2}$