2019 级第一学期《数学分析》（荣誉）I 测验卷参考解答

一、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1． “$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$存在”用 Cauchy 收敛准则叙述为：

$$\underline{\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x',x''\in(x_0,x_0+\delta):|f(x')-f(x'')|<\varepsilon}$$

2． 设 $f(x)=\sin x,\ x\in\left[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right]$，则 $f(x)$ 的反函数 $f^{-1}(x)=\underline{\pi-\arcsin x,\ x\in[-1,1]}$.

3． 若当 $x\to0$ 时，$\sqrt{1+x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}\sim ax^b$，则常数 $a=\underline{3/4}$，$b=\underline{2}$.

4． 设函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上定义，且 f 有且仅有两个连续点，则 $f(x)$ 的表达式可以是：

$$\underline{f(x)=\begin{cases}x^2-1, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\in\mathbb{Q}^c\end{cases}}$$

5． 设 $x_n=\sqrt[n]{n+1}\,(n\in\mathbb{N})$，则 $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\{x_n\}=\underline{\quad 2\quad}$，$\inf\limits_{n\in\mathbb{N}}\{x_n\}=\underline{\quad 1\quad}$.

二、单项选择题（每小题 3 分，共 12 分）

6． 数列$\left\{\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)\right\}$ ……【 **B** 】

(A) 单调且收敛于 0. **(B)** 单调且收敛于 1.

(C) 非单调. **(D)** 发散.

7． 设函数 f 在区间 I 上连续，则 f 在 I 上严格单调是 f 存在反函数的…【 **C** 】

(A) 充分不必要条件. **(B)** 必要不充分条件.

(C) 充要条件. **(D)** 既非充分又非必要条件.

8． 函数 $\sin(x^2)$，$x\sin\dfrac{1}{x}$，$\sin^2 x$，$\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ 中，在 $(0,+\infty)$ 内一致连续的有【 **C** 】

(A) 1 个. **(B)** 2 个. **(C)** 3 个. **(D)** 4 个.

9． 设 $f(x)=\begin{cases}1, & x=0,1\\ q, & x=\dfrac{p}{q},(p,q\in\mathbb{N},\text{且互质})\\ 0, & x\in\mathbb{Q}^c\end{cases}$，$x\in[0,1]$，则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 中…【 **B** 】

(A)处处存在极限，且极限值为 0. **(B)**处处无极限，不连续.

(C)有理点处连续. **(D)**无理点处连续.

三、证明题（本题共 10 分）

10. 用“$\varepsilon-\mathbb{N}$”定义证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+2n+3}{3n^2-2n+1}=\dfrac{2}{3}$.

【证】 $\forall\varepsilon>0$，取 $N=\left[\dfrac{3}{\varepsilon}\right]+1$，当 $n>N$ 时，有

$$\left|\frac{2n^2+2n+3}{3n^2-2n+1}-\frac{2}{3}\right|=\frac{10n+7}{3(3n^2-2n+1)}=\frac{10n+7}{3(2n^2+(n-1)^2)}$$

$$<\frac{17n}{6n^2}<\frac{3}{n}<\varepsilon$$

四、求下列极限（每小题 8 分，共 32 分）

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}}{\ln(n+1)}$.

【解】 令 $x_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}, y_n=\ln(n+1)$，则 $\{y_n\}$ 严格递增且 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=+\infty$，又

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\ln(n+1)-\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}=1$$

据 Stolz 定理知：原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=1$.

12. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2^2}\cos\dfrac{x}{2^3}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}\right),\quad (x\neq 0)$.

【解】 当 $x\neq 0$ 时，

$$\lim_{n\to\infty}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}\cdots\cos\frac{x}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}=\frac{\sin x}{x}$$

13. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x^2\ln\left(\cos\dfrac{\pi}{x}\right)\right]$.

【解】 原式$=\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(\cos\dfrac{\pi}{x}-1\right)=\lim\limits_{x\to\infty}x^2\cdot\left(-\dfrac{\pi^2}{2x^2}\right)=-\dfrac{\pi^2}{2}$

14. $\lim\limits_{x\to 1^-}(2-x)^{\tan\frac{\pi x}{2}}$.

【解】 因为

$$\lim_{x\to1^-}(1-x)\tan\frac{\pi x}{2}=\lim_{x\to1^-}\frac{1-x}{\cos\frac{\pi x}{2}}=\lim_{x\to1^-}\frac{1-x}{\sin\frac{\pi(1-x)}{2}}=\frac{2}{\pi}$$

所以 $\lim\limits_{x\to1^-}(2-x)^{\tan\frac{\pi x}{2}}=\mathrm{e}^{\frac{2}{\pi}}$.

五、证明题（本题共 10 分）

15． 用闭区间套定理证明致密性定理.

【证】 设 $a<x_n<b, (\forall n\in\mathbb{N})$. 将 $[a,b]$ 二等份，则至少一个半区间含 $\{x_n\}$ 中无穷多项，取之(若两个半区间都含 $\{x_n\}$ 中无穷多项，则任取其一)记为 $[a_1,b_1]$；再将 $[a_1,b_1]$ 二等份，则又至少一个半区间含 $\{x_n\}$ 中无穷多项，记之为 $[a_2,b_2]$；重复上述过程得 $\{[a_n,b_n]\}$ 满足：(1) $\forall n\in\mathbb{N}, [a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n]$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b-a}{2^n}=0$；(3) $\forall k\in\mathbb{N}, [a_k,b_k]$ 中含 $\{x_n\}$ 中无穷多项.

据闭区间套定理，存在唯一 $\xi\in[a_k,b_k], (\forall k\in\mathbb{N})$，且

$$\lim_{k\to\infty}a_k=\xi=\lim_{k\to\infty}b_k \qquad \cdots\cdots(*)$$

根据(3)可取 $x_{n_1}\in[a_1,b_1]$，再由(3)存在 $n_2>n_1$ 使得 $x_{n_2}\in[a_2,b_2]$，一般地，存在 $n_k>n_{k-1}$ 使得 $x_{n_k}\in[a_k,b_k]$，由此得 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}$ 满足 $a_k\le x_{n_k}\le b_k$. 据(*)式和夹逼性有 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=\xi$.

六、证明题（本题共 8 分）

16． 设函数 $f(x),g(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上定义，满足条件 $g(x)\in C[a,b]$，$f(x)+g(x)$ 在 $[a,b]$ 上递增，且 $f(a)>0, f(b)<0$. 证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=0$.

【证】 将 $[a,b]$ 二等份. 若 $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)=0$，取 $\xi=\dfrac{a+b}{2}$ 即可；若 $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)<0$，记 $\left[a,\dfrac{a+b}{2}\right]$ 为 $[a_1,b_1]$；若 $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)>0$，记 $\left[\dfrac{a+b}{2},b\right]$ 为 $[a_1,b_1]$；再将 $[a_1,b_1]$ 二等份，重复上述讨论. 若某次二分点恰为 f 的零点，记之为 ξ 即可，否则得 $\{[a_n,b_n]\}$：

(1) $\forall n\in\mathbb{N}, [a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n]$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b-a}{2^n}=0$；

(3) $f(a_n)>0, f(b_n)<0 \ (\forall n\in\mathbb{N})$.

据闭区间套定理，存在唯一 $\xi\in[a_n,b_n],(\forall n\in\mathbb{N})$，且

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\xi=\lim_{n\to\infty}b_n \qquad \cdots\cdots(*)$$

由 $g(x)\in C[a,b]$ 及(*)式有

$$\lim_{n\to\infty}g(a_n)=g(\xi)=\lim_{n\to\infty}g(b_n).$$

又由 $f(x)+g(x)$ 单增和(3)有

$$g(a_n)<f(a_n)+g(a_n)\le f(\xi)+g(\xi)\le f(b_n)+g(b_n)<g(b_n)$$

上式中令 $n\to\infty$ 得 $g(\xi)\le f(\xi)+g(\xi)\le g(\xi)$，导出 $f(\xi)=0$.

七、证明题（本题共 8 分）

17． 设函数 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上一致连续，证明：$\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $[1,+\infty)$ 有界.

【证】 由条件 $f\in U.C[1,+\infty)$，取 $\varepsilon_0=1$，则 $\exists\delta>0$，对 $\forall x',x''\in[1,+\infty)$ 且 $|x'-x''|<\delta$，有 $|f(x')-f(x'')|<1$.

对 $\forall x\ge1$，存在非负整数 n 使得 $x=1+n\delta+r$，其中 $0\le r<\delta$. 记 $x_k=1+k\cdot\dfrac{n\delta+r}{n+1}(k=1,\cdots,n+1)$，则 $|x_k-x_{k-1}|=\dfrac{n\delta+r}{n+1}<\delta$，故

$$\begin{aligned}|f(x)|&\le|f(1)|+|f(x_1)-f(1)|+|f(x_2)-f(x_1)|+\cdots+|f(x_{n+1})-f(x_n)|\\&<|f(1)|+n+1\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\frac{|f(x)|}{x}&<\frac{|f(1)|+n+1}{1+n\delta+r}=\frac{|f(1)|+1}{1+n\delta+r}+\frac{n}{1+n\delta+r}\\&\le|f(1)|+1+\frac{1}{\delta}.\end{aligned}$$