

上海交通大学试卷

(2018 至 2019 学年 第 1 学期 2018 年 10 月 17 日)

班级号 _____ 学号 _____ 姓名 _____

课程名称 _____ 《数学分析荣誉(1)》 (致远学院测验) _____ 成绩 _____

题 号	一	二	三	四	五	六	七	总 分
满 分	20	12	10	32	8	10	8	100
得 分								

一、填空题 (每小题 4 分, 共 20 分)

1. “ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ” 的定义为:

2. “数列 $\{x_n\}$ 为基本列” 的定义为:

3. 设 $x_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2}$ ($n \in \mathbb{N}$), 则 $\sup_{n \in \mathbb{N}} \{x_n\} =$ _____, $\inf_{n \in \mathbb{N}} \{x_n\} =$ _____.

4. 设 $U(x, \delta)$ 表示以 x 为中心, $\delta (> 0)$ 为半径的邻域, 又指标集 $\Lambda = [0, 2]$, 则

$$\bigcup_{x \in \Lambda} U\left(x, \frac{1}{2}\right) = \text{_____}.$$

5. 若当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1+\tan x} \sim ax^b$, 则常数 $a =$ _____, $b =$ _____.

二、单项选择题 (每小题 3 分, 共 12 分)

6. 函数 $f(x)$ 在区间 I 上严格单调是其存在反函数 $f^{-1}(x)$ 的 【 】

(A) 充分不必要条件.

(B) 必要不充分条件.

(C) 充要条件.

(D) 既非充分又非必要条件.

7. 设函数 $f(x) = \frac{1+e^{\frac{1}{x}}}{1-e^{\frac{1}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|}$ ($x \neq 0$), 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处 【 】

(A) 左、右极限都存在且相等.

(B) 左、右极限都存在, 但不相等.

(C) 左、右极限中有且仅有一个存在.

(D) 左、右极限都不存在.

8. 设 $a_n > 0 (n \in \mathbb{N})$, 下列命题中

……【 】

I. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, 则必有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$.

II. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$, 则必有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.

(A) I 正确, II 不正确.

(B) I 不正确, II 正确.

(C) I 和 II 都正确.

(D) I 和 II 都不正确.

9. 若 $x_n > 0 (n \in \mathbb{N})$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = 0$, 下列断语中

……【 】

I. 必有 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$. II. 必有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} = 0$. III. 必有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} = 0$.

(A) I, II, III 都正确.

(B) I, II, III 都不正确.

(C) I 不正确, II 和 III 都正确.

(D) I 和 II 都正确, III 不正确.

三、证明题 (本题共 10 分)

10. 设 $x_n > 0$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A > 0$, 用“ $\varepsilon - N$ ”定义证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x_n}} = \frac{1}{\sqrt{A}}$.

四、求下列极限（每小题 8 分，共 32 分）

11. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n \cdot \arctan n}.$

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\cos x} - \cos x}{x^2}.$

13. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{3} + \sqrt{5} + \cdots + \sqrt{2n-1}}{n\sqrt{n}}.$

14. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \sin^2 x + \frac{x^2 e^x}{2} \right)^{\frac{1}{1 - \cos x}}.$

五、证明题（本题共 8 分）

15. 若 $\{x_n\}$ 为非无穷大数列，证明： $\{x_n\}$ 必含有有界子列.

六、证明题（本题共 10 分）

16. 设 $x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$ ($n \in \mathbb{N}$), 证明: 数列 $\{x_n\}$ 收敛.

七、证明题（本题共 8 分）

17. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上定义且单调递增，又 f 的值域为区间 $[f(a), f(b)]$ ，证明：对 $\forall x_0 \in [a, b]$ ，有 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ 。