

选择题

1. 设 α 是 n 维非零实列向量, 矩阵 $A = E + \alpha\alpha^T, n \geq 3$, 则_____
- (A) A 至少有 $n-1$ 个特征值为 1; (B) A 只有 1 个特征值为 1;
(C) A 恰有 $n-1$ 个特征值为 1; (D) A 没有 1 个特征值为 1。
2. 设 α, β 是非齐次线性方程组 $(\lambda E - A)x = b$ 的两个不同的解, 则以下选项中一定是 A 对应特征值 λ 的特征向量为 ()
- (A) $\alpha + \beta$; (B) $\alpha - \beta$; (C) α ; (D) β 。
3. 已知 n 阶方阵 A, B 满足 $AB = BA$, α 是 A 对应特征值 λ 的一个特征向量, 且 α 与 $B\alpha$ 线性无关。则 λ 的重数 k 必定有 ()
- (A) $k = 2$; (B) $k \neq 2$; (C) $k \geq 2$; (D) $k > 2$ 。
4. 设 n 维向量 $\alpha = (1, 1, \dots, 1)$, $n \geq 2$, 矩阵 $A = E - \alpha^T \alpha$, 则 A^{-1} 为 ()
- (A) $E - (n-1)\alpha^T \alpha$; (B) $E - \frac{1}{n-1}\alpha^T \alpha$; (C) $E - n\alpha^T \alpha$; (D) $E - \frac{1}{n}\alpha^T \alpha$ 。
5. 设 A, B 为 n 阶方阵, 且 $A^2 = A, B^2 = B$ 。则 ()
- (A) $r(A) = r(B)$ 时, A, B 不相似; (B) $r(A) \neq r(B)$ 时, A, B 相似;
(C) $r(A) = r(B)$ 时, A, B 相似; (D) 以上都有可能
6. 设 A 为 n 阶反对称矩阵, 则 ()
- (A) $r(A+E) = 0$; (B) $r(A+E) = n$; (C) $0 < r(A+E) < n$; (D) 以上都有可能。
7. 已知矩阵 $A_{2 \times 2}$, 满足 $|A| < 0, 4A^2 = E$ 。则 $\lim_{n \rightarrow +\infty} A^n$ ()
- (A) $\begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$; (B) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; (C) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; (D) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 。
8. 设 A 为 $m \times n$ 实矩阵, $r(A) = n$, 则_____
- (A) $A^T A$ 必合同于 n 阶单位矩阵; (B) AA^T 必等价于 m 阶单位矩阵;
(C) $A^T A$ 必相似于 n 阶单位矩阵; (D) AA^T 是 m 阶单位矩阵。

9. 设 $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ 为非零实矩阵, $a_{ij} = A_{ij}$, A_{ij} 是行列式 $|A|$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式,

则矩阵 A 必为_____

(A). 不可逆矩阵; (B). 对称矩阵; (C). 正交矩阵; (D). 正定矩阵。

10. 设 $A_{m \times n}$ 为实矩阵, 则线性方程组 $Ax = 0$ 只有零解是矩阵 $(A^T A)$ 为正定矩阵的_____

(A) 充分条件; (B) 必要条件; (C) 充要条件; (D) 无关条件。

11. 设 A, B 是正定矩阵, 则以下矩阵中, 一定是正定矩阵的为 (其中 k_1, k_2 为任意常数)

()

(A). $A^* + B^*$; (B). $A^* - B^*$; (C). $A^* B^*$; (D). $k_1 A^* + k_2 B^*$ 。

12. 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (a+1) \sum_{i=1}^3 x_i^2 + 2 \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 x_i x_j$ 秩为 2, 则常数 $a =$ ()

(A) 1; (B) -1; (C) 5; (D) -5。

13. 设 α 是 n 维非零实的列向量, 常数 $k \neq 0$, 矩阵 $A = E - k\alpha\alpha^T$ 是正定阵, 则

(A) $k > (\alpha^T \alpha)^{-1}$; (B) $k < (\alpha^T \alpha)^{-1}$; (C) $k > \alpha^T \alpha$; (D) $k < \alpha^T \alpha$ 。

14. 设 A 为 $m \times n$ 的实矩阵, $f = x^T (A^T A)x$ 是正定二次型。则 ()

(A) $r(A) = m$; (B) $r(A) < m$; (C) $r(A) < m$; (D) $r(A) = n$ 。

15. 设 A 为 $m \times n$ 实矩阵, 矩阵 $(A^T A)$ 正定的充分必要条件为 ()

(A) $r(A) = m$; (B) $r(A) < m$; (C) $r(A) < m$; (D) $r(A) = n$ 。

16. 设 α 是单位向量, 矩阵 $A = E + k\alpha\alpha^T$, 其中 $k \neq -1$ 。则 ()

(A) A 为正交矩阵; (B) A 为正定矩阵; (C) A 为可逆矩阵; (D) A 为反对称矩阵。

17. 设二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j$ 秩为 $n-1$, 则常数 $a =$ ()

(A) 0; (B) 1; (C) $n-1$; (D) $1-n$ 。

18. 设 $\alpha \neq 0$ 是 n 维单位实列向量, 常数 $k \neq 0$, 矩阵 $A = E - k\alpha\alpha^T$ 是正交阵。则 ()

(A) $k = -2$; (B) $k = 2$; (C) $k > 0$; (D) $k < 0$ 。

19. 设 A 和 B 都是 n 阶实对称阵, 现有下述四个命题:

- (1) A 与 B 相似当且仅当 A 与 B 特征多项式相同;
- (2) 二次型 $x^T A x$ 与 $x^T B x$ 有相同规范形当且仅当 A 与 B 特征多项式相同;
- (3) 若 A 与 B 相似, 则 A 与 B 合同;
- (4) 若 A 与 B 合同, 则 A 与 B 相似.

其中正确的是: _____

- (A) (1)和(2); (B) (2)和(3); (C) (1)和(3); (D) (1)和(4).

20. 设线性空间 R^n 中向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 则 R^n 的下列生成子空间中, 维数为3的

生成子空间是_____

- (A). $L(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1)$; (B). $L(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1)$;
(C). $L(\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1)$; (D). $L(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1)$ 。

21. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 为 n 维列向量组, 矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, 下列选项中正确的是 _____

- (A). 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性无关;
- (B). 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性相关;
- (C). 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性无关;
- (D). 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性相关。

22. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是线性空间 R^3 的基, $\alpha = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3$ 。则 α 在以下 R^3 的哪个基下

的坐标为 $(1, 1, 1)^T$ ()

- (A) $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2, \beta_2 = \alpha_2 + \alpha_3, \beta_3 = \alpha_3 + \alpha_1$;
- (B) $\beta_1 = \alpha_1 - \alpha_2, \beta_2 = \alpha_2 - \alpha_3, \beta_3 = \alpha_3$;
- (C) $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \beta_2 = \alpha_2 + \alpha_3, \beta_3 = \alpha_3$;
- (D) $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3, \beta_2 = \alpha_2 + 2\alpha_3, \beta_3 = 3\alpha_3$ 。

填空题

1. 已知 A, B 为 n 阶方阵, $\lambda = \pm 1$ 不是 B 的特征值, 且 $AB - A - B = E$, 则 $A^{-1} =$ _____。

2. 若三阶方阵 A 有特征值 $1, 1, 2$, 则行列式 $|A^{-1} + 2A^*| =$ _____。

3. 设 3 阶方阵 A 的特征值为 $1, 2, 3$, 且 A 相似于 B , 则行列式 $|B^2 + E| =$ _____。

4. 设 3 阶方阵 A 有特征值 $1, -1, 3$, 则 $B = (3E + A^*)^2$ 的相似对角阵为 _____;

5. 设 4 阶矩阵 A 满足行列式 $|2E + A| = 0$, $AA^T = 3E$, $|A| < 0$, 则其伴随矩阵 A^* 必有一个特征值为 _____;

6. 已知矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & b \\ 1 & b & 1 \end{pmatrix}$ 相似于对角阵 $\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$, 则 $a =$ _____, $b =$ _____。

7. 列向量 $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 是矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{pmatrix}$ 的对应特征值 λ 的一个特征向量.

则 $\lambda =$ _____, $a =$ _____, $b =$ _____。

8. 设 n 阶向量 $\alpha = (x, 0, \dots, 0, x)^T$, $x < 0$; 矩阵 $A = E - \alpha\alpha^T$,

且 $A^{-1} = E + \frac{1}{x}\alpha\alpha^T$, 则 $x =$ _____。

9. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $\alpha = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 已知向量 $A\alpha$ 与 α 线性相关, 则 $a =$ _____。

10. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & x \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ 有特征值 $6, 2, 2$, 且 A 能相似于对角阵, 则 $x =$ _____。

11. 设 A 为 3 阶矩阵, 且行列式 $|A - 2E| = 0$, $|3A + E| = 0$, $|A + 2E| = 0$, 则行列式

$|A^2 + A| =$ _____。

12. 设 $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ 满足 $A^2 - 7A + 12E = 0$, 且迹 $tr(A) = \sum_{i=1}^3 a_{ii} = 10$ 。则

$|A| =$ _____。

13. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & x & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 与矩阵 $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}$ 相似, 则 $x = \underline{\hspace{2cm}}$, $y = \underline{\hspace{2cm}}$;

14. 设 n 阶可逆矩阵 A 的各行元素的和都等于 k , 且 $8A^2 + A^{-1}$ 的各行元素的和都等于零, 则 $k = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

15. 已知实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 + 2ax_1x_2 + 2x_2x_3$ 正定, 则常数 a 的取值范围为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

16. 设 A 为 n 阶实矩阵, 且 $A^T = A^{-1}$, $|A| < 0$, 则行列式 $|A + E| = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

17. 已知 3 阶实对称矩阵 A 的秩 $r(A) = 2$, 且 $A^2 + 2A = O$, 若矩阵 $B = A + aE$ 是正定矩阵, 则常数 a 的取值范围为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

18. 设实对称矩阵 $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ 满足 $A^3 + E = O$, 则二次型 $f = x^T Ax$ 经正交变换 $x = Qy$ 可化为标准形 $f = \underline{\hspace{2cm}}$;

19. 设 $A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} \\ a & b & \frac{-4}{\sqrt{18}} \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} \end{pmatrix}$, 若 A 为正交阵, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$, $b = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

20. 若实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2\lambda x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2^2 + 4x_2x_3 + 4x_3^2$ 为正定二次型, 则 λ 的取值范围为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

21. 设 A 是实对称可逆矩阵, 则将 $f = X^T AX$ 化为 $f = Y^T A^{-1}Y$ 的线性变换为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

22. 已知 $\alpha \neq 0$ 是 n 维实列向量, 矩阵 $A = E - k\alpha\alpha^T$, k 为非零常数, 则 A 为正交矩阵的充分必要条件为 $k = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

23. 若实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2\lambda x_1x_2 + 2x_2^2 + 4x_3^2$ 为正定二次型, 则 λ 的取值范围为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

24. 已知 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & k \\ 0 & 3 & 0 \\ k & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 为正定矩阵, 则常数 k 的取值为_____。

25. 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = t(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ 是正定的, 则常数 t 的取值范围_____。

26. 已知实二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = (1+\lambda)x_1^2 + (1+\lambda)x_2^2 + (1+\lambda)x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 2\lambda x_1x_3 + 2\lambda x_2x_3$$

是正定二次型, 则常数 λ 的取值为_____。

27. 设 A 是实对称可逆矩阵, 则线性变换 $y = Ax$ 将二次型 $f = x^T Ax$ 化为

二次型_____。

28. 已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$ 为正定矩阵, 则实常数 a 的取值范围为_____。

29. 设 A 是秩为 1, 迹为 0 的 3 阶方阵, 则 A 的 Jordan 标准形为_____。

30. 二次型 $f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2$ 的规范形为_____。

31. 设 $A = \begin{pmatrix} B & -\frac{1}{2}B \\ 0 & \frac{1}{2}B \end{pmatrix}$, 其中方阵 B 有最小多项式 $(x-2)(x-4)$, 则矩阵 A 最小多项式为_____。

32. 设 V 为线性空间, $\alpha_i \in V, i=1,2,3,4$, V 的子空间 $W_1 = L(\alpha_1, \alpha_2)$,

$W_2 = L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $W_3 = L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)$, 的维数分别为 2, 2, 和

3。则 V 的子空间 $W_4 = L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ 的维数为_____。

33. 设向量组 $\alpha_1 = (1, 2, -1, 0)^T$, $\alpha_2 = (1, 1, 0, 2)^T$, $\alpha_3 = (2, 1, 1, k)^T$ 。

已知由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 生成的子空间的维数为 2, 则常数 $k =$ _____。