Chap 18 — 3

第二类曲面积分

18.3.1 双侧曲面及其定侧

双侧曲面 设S为光滑曲面, 指定其上点P处的法向量$\boldsymbol{n}$. 当点P 沿S上任意连续闭曲线不越过S的边界回到起始位置时, 法向量$\boldsymbol{n}$始终保持原来指向.

Möbius带 非双侧曲面(**单侧曲面**).

定侧曲面 双侧曲面S的侧向由其**法向量组**确定. 选定S 的一侧为**正侧**, 记为S^+, 则另一侧为**负侧**, 记为S^-

约定 若曲面S的方程为： $z = z(x, y), \quad (x, y) \in D$

则其**单位法向量**

$$\boldsymbol{n}^{\circ} = \pm \frac{(-z_x, -z_y, 1)}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}$$

选 "+" 号时, 则$\boldsymbol{n}^{\circ} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, 其中

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}} > 0$$

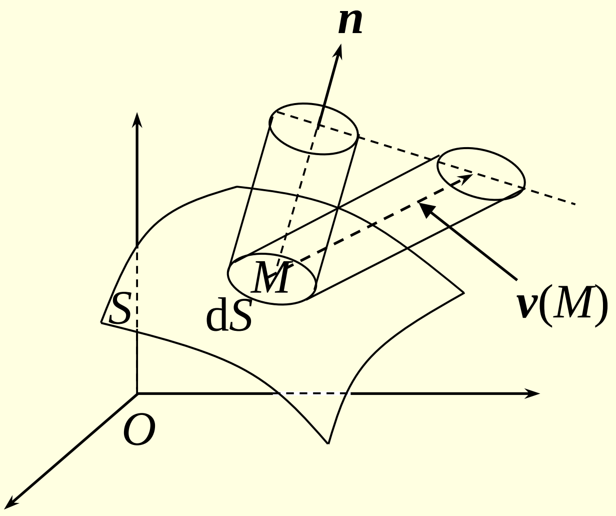
故$\boldsymbol{n}^{\circ}$与z轴正向夹角$\gamma < 90^{\circ}$, 指向**上侧**, 规定为S的**正侧**

注 封闭曲面规定其**外侧**为**正侧**

18.3.2 第二类曲面积分的定义

问题 设均匀流体的流速场$\boldsymbol{v} = (P, Q, R)$. 流体自光滑曲面$S$负侧流向正侧, 求单位时间流体通过$S$的体积流量

微元法 考察单位时间流体通过曲面微元$\mathrm{d}S$的体积流量



$$\mathrm{d}\Phi = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}^{\circ} \mathrm{d}S$$

$$\Rightarrow \Phi = \iint_S \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}^{\circ} \mathrm{d}S$$

其中$\boldsymbol{n}^{\circ}$是曲面S上指向正侧单位法向量

定义 设S为定侧曲面, 向量场$\boldsymbol{v} = (P, Q, R)$在$S$上的

第二类曲面积分

(向量形式) $\longrightarrow$ $$\iint_S \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \overset{\text{def}}{=} \iint_S (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}^\circ) \mathrm{d}S$$

由于**定侧曲面微元**

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{n}^\circ \mathrm{d}S = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)\mathrm{d}S = (\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \mathrm{d}z\mathrm{d}x, \mathrm{d}x\mathrm{d}y)$$

于是

$$\boxed{\begin{aligned}\iint_S \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} &= \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\mathrm{d}S \\ &= \iint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}}$$

(两类曲面积分关系) (坐标形式)

注 当曲面S封闭时, 积分为流体通过S的**通量**, 记为

$$\Phi = \oiint_S \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oiint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

侧向性 第二类曲面积分与曲面的侧向有关, 且

$$\iint_{S^-} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint_{S^+} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其它性质同第一类曲面积分, 如线性性和可加性.

注意 (1) 两类曲面积分的形式不同

(2) 当$P = Q = 0$时, $\iint_S R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 仍为第二类

18.3.3 第二类曲面积分的计算

定理 若定侧光滑曲面S为

$$x=x(u,v),y=y(u,v),z=z(u,v),\quad (u,v)\in D$$

则

$$\boxed{\iint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pm\iint_D (PA+QB+RC)\mathrm{d}u\mathrm{d}v}$$

注 其中 ± 号选择由 S 指定侧的法向量确定.

特例 1) 若曲面S的方程为 $z=z(x,y),\quad (x,y)\in D$

$$\boxed{\iint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pm\iint_D (-Pz_x-Qz_y+R)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}$$

合一投影法

2) 当$P=Q=0$, 曲面S为 $z=z(x,y)$, $(x,y)\in D$时

$$\boxed{\iint_S R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pm\iint_D R(x,y,z(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y}$$

当曲面S指定上侧时, 选 +号, 指定下侧时, 选–号.

3) 当曲面S为母线平行于z轴的柱面时

$$\boxed{\iint_S R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0}$$

例1 计算积分 $I=\iint_S xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$\boxed{1)\ 0;\quad 2)\ \frac{2}{15}}$$

其中S 是单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$的部分外侧.

1) $z\geq 0$; 2) $x\geq 0, y\geq 0$.

例2 设有流速为 $\boldsymbol{v}=(x, 2xy, -2z)$的流体. 求单位时间流体经锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2},(0\le z\le h)$ 上侧流向下侧的体积流量.

$$\boxed{\frac{5\pi h^3}{3}}$$

Chap 18 — 4

Gauss公式

18.4.1 Gauss公式

定理 设 $\mathbf{v} = (P, Q, R)$为空间有界闭域Ω上的光滑向量场, ∂Ω 是分片光滑闭曲面, 则有

$$\boxed{\oiint_{\partial\Omega^+} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V}$$

注 三重积分与其边界上第二类曲面积分的关系

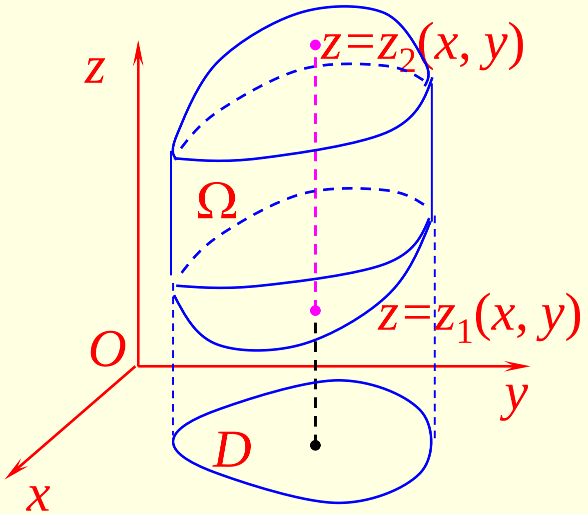
分析 先证 $\oiint_{\partial\Omega^+} R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint_{\Omega}\frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}V$

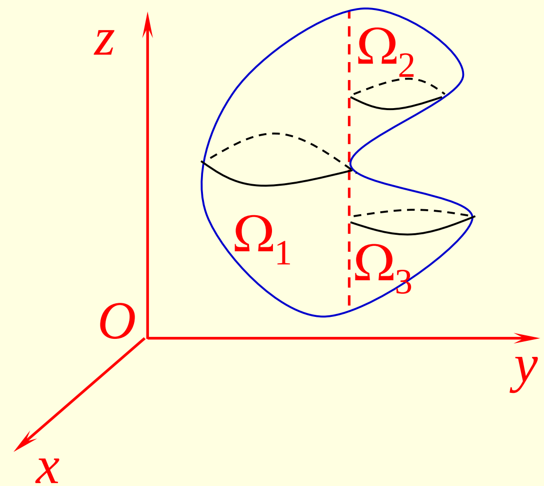
再证关于P, Q的等式, 三式相加即证.

先证 $\oiint_{\partial\Omega^+} R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}V$

证 1) 当Ω是*xy*型区域, 即

$$\Omega = \left\{(x, y, z)\middle| z_1(x, y) \le z \le z_2(x, y), (x, y) \in D\right\}$$





2) 当Ω是一般区域, 用母线平行*z*轴柱面分成若干*xy*型区域并运用1)的结论.

推论 设空间有界闭域Ω 的边界分片光滑, 则其体积

$$\boxed{V(\Omega)=\frac{1}{3}\oiint_{\partial\Omega^{+}} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}$$

例1 计算积分

$$I=\oiint_{S} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中S为椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 的外侧.

$\boxed{4\pi abc}$

例2 计算积分

$$I=\iint_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2xy\mathrm{d}z\mathrm{d}x-2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中S为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2},(0\le z\le h)$ 的下侧.

$$\boxed{\frac{5\pi h^3}{3}}$$

例3 计算积分

$$I=\iint\limits_S \frac{xz^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(x^2y-z^3)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(2xy+y^2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

其中S是上半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2},(R>0)$ 的上侧.

$$\boxed{\frac{2\pi R^4}{5}}$$

例4 计算积分

$$I=\iint_S \frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{\|\boldsymbol{r}\|^2}\mathrm{d}S$$

其中S是包围原点的封闭光滑曲面，$\boldsymbol{n}$是S上点(x, y, z)处的外法向量，$\boldsymbol{r}=(x, y, z)$.

$\boxed{4\pi}$

18.4.2 散度

定义 向量场 $\boldsymbol{v} = (P, Q, R)$ 的**散度**定义为

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} \overset{\text{def}}{=} \nabla \cdot \boldsymbol{v} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

例5 求向量场 $\boldsymbol{v} = (x^2y, y^2z, z^2x)$ 的散度 $\operatorname{div} \boldsymbol{v}\big|_{(2,1,-2)}$

$\boxed{-8}$

■ Gauss公式的向量形式

由于 $$\oiint_{\partial\Omega^+} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oiint_{\partial\Omega^+} \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V = \iiint_{\Omega}\nabla\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}V$$

故有

$$\boxed{\oiint_{\partial\Omega^+} \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iiint_{\Omega}\nabla\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}V = \iiint_{\Omega}\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}V}$$

散度物理意义 $$\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}(M) = \lim_{\Omega\to M}\frac{1}{\mathrm{Vol}(\Omega)}\oiint_{\partial\Omega^+}\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

Chap 18 — 5

Stokes公式

18.5.1 Stokes公式

定理 设 $\boldsymbol{v} = (P, Q, R)$为空间光滑曲面$S$上的光滑向量场, ∂S 是分段光滑闭曲线，则有

$$\boxed{\begin{aligned}&\oint_{\partial S} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z \\ &= \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}}$$

其中∂S的方向与S的侧向按右手法则联系.

注 第二类曲面积分与其边界上第二类曲线积分关系

■ 借助行列式, Stokes公式可记为

$$\oint_{\partial S} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \iint_S \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$= \iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \mathrm{d}S$$

其中∂S定向与$(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$按右手法则联系

例1 计算积分

$$I = \oint_C z\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}z$$

其中C是平面$2x+3y+z=6$被三个坐标平面所截的三角形S的边界，其方向与S上侧满足右手法则.

例2 计算积分

$$I=\oint_C (y-z)\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z$$

其中曲线C为 $\begin{cases} x^2+y^2=R^2 \\ x+z=R \end{cases}$，积分方向从$Ox$轴正向看沿逆时针.

$\boxed{-4\pi R^2}$

18.5.2 旋度

定义 向量场 $\boldsymbol{v} = (P, Q, R)$的旋度定义为

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{v} \stackrel{\text{def}}{=} \nabla \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

例3 求向量场 $\boldsymbol{v} = (xy, yz, -y^2)$的旋度 $\operatorname{rot} \boldsymbol{v}\big|_{(1,-1,3)}$

$\boxed{(3, 0, -1)}$

■ Stokes公式的向量形式

记$\boldsymbol{r} = (x, y, z)$, 则$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)$, Stokes公式可写成

$$\boxed{\begin{aligned}\oint_{\partial S} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} &= \iint_S \operatorname{rot} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \\ &= \iint_S \operatorname{rot} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}^\circ \mathrm{d}S\end{aligned}}$$

其中∂S的定向与S的定侧($\boldsymbol{n}^\circ$)满足右手法则

旋度物理意义 $\operatorname{rot} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}^\circ \Big|_M = \lim\limits_{S \to M} \dfrac{1}{\operatorname{Area}(S)} \oint_{\partial S} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$