No.

Date

函数级数

函数级数收敛与数列的关系

$\forall \{x_n\}$ $\lim_{n\to\infty} (S_n(x_n) - S(x_n)) \Rightarrow$

Weierstrass 判别 ① $|U_n(x)| \le a_n$ ② $\sum a_n$ 收敛

$\sum_{}^{\infty} U_n(x)$ 一致收敛

Abel 判别 $\{a_n(x)\}$ 对 x 关于 n 单调且一致有界 $\sum b_n(x)$ 一致收敛

Dirichlet $\{a_n(x)\}$ 对 x 关于 n 单调且一致收 0 $\sum_{n=1} b_n(x)$ 一致有界

Dini 定理 $S_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上逐点收敛于 $S(x)$

① $S_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续

② $S(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续

③ $\{S_n(x)\}$ 对 x 关于 n 单调

$\Rightarrow$ $S_n(x)$ $[a,b]$ 上一致收敛于 $S(x)$

幂级数

Abel 第二定理

(i) $\sum a_n x^n$ 在 $(-R,R)$ 上内闭一致收敛

(ii) $\sum a_n x^n$ 在 $x=R$ 收敛，则在 $(-R,R]$ 上内闭一致收敛

Weierstrass 定理

$f(x) \in C[a,b]$ 则 $f(x)$ 可被多项式逼近.

多元空间

补集 S^c $\mathbb{R}^n / \mathbb{R}^n \setminus S$

内部 S^o，边界 ∂S，导集 E'，闭包 $\bar{S} = S \cup S'$

紧集 ⇔ 有界开集 Heine-Borel 定理

~~定理 ① f(x,y) 在 (x₀,y₀) 存在二重极限 ② $\lim_{x\to x_0} f(x,y) = \varphi(y)$ 存在.~~

定理 ① $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 存在二重极限 $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$

② $\lim_{y\to y_0} f(x,y)=\varphi(x)$, $x\neq x_0$ 时

$\Rightarrow \lim_{x\to x_0}\lim_{y_0} = \lim_{x\to x_0}\varphi(x) = \lim_{(x_0,y_0)} = A$

多元向量函数

紧集 ② $\vec{f}$ 是连续映射

$\Rightarrow$ $\vec{f}(\vec{x})$ 是一致连续

紧集 $\xrightarrow{连续}$ 有界　　连通 $\xrightarrow{连续}$ 连通

~~连有~~ 连通紧集 $\longrightarrow$ 连通紧集

同胚映射　$\vec{y}=\vec{f}(\vec{x})$　$\vec{x}=\vec{f}^{-1}(\vec{y})$　$\vec{f}(\vec{x})$ $\vec{f}^{-1}(\vec{y})$ 连续，则是同胚映射

可微则偏导，且任一方向偏导存在

一存在偏导 + 其连续 $\Rightarrow$ 可微

混合偏导在 (x_0,y_0) 连续，则相等

中值定理　$f(x,y)$ 在凸区域 $D\subset R^2$ 可微　至少有一个 θ $(0<\theta<1)$

$\vec{f}(\vec{x_0}+\Delta\vec{x})-\vec{f}(\vec{x_0})=\vec{f}'(\vec{x}+\theta\Delta\vec{x})\cdot\Delta\vec{x}$

隐函数存在定理

① $F_i(\overset{m}{\vec{x_0}},\overset{n}{\vec{y_0}})=0$　② $F_i\in C$ 且 $F_i\in C'$

③ $\frac{\partial(F_1\cdots F_m)}{\partial(\cdots y_n)}\neq 0$

$\Rightarrow$ ① $\vec{y}=\vec{f}(\vec{x})$ 存在且 $\vec{f}\in C$, $\vec{f}\in C'$

曲线方程 $\begin{cases} x=x(t)\\ y=y(t)\\ z=z(t)\end{cases}$

切线方程 $\frac{x-x_0}{x'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y'(t_0)}=\frac{z-z_0}{z'(t_0)}$　法平面 $x'(t_0)(x-t_0)+\cdots=0$

曲线方程 $\begin{cases} F(x,y,z)=0\\ G(x,y,z)=0\end{cases}$

切线 $\frac{x-x_0}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}}=\frac{y-y_0}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}}=\frac{z-z_0}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}}$

法平面法向量 grand $F\times$ grand G

数值分析

章一 求解方程

二分法

不动点迭代（FPI）

线性收敛 $\lim_{i\to\infty}\frac{e_{i+1}}{e_i}=S<1$. S为收敛速度

若其在一个接近初值处收敛到r. 则称局部收敛

前向误差 $|x_a-r|$. x_a是r的近似根

后向误差 $|f(x_a)|$

重根 当 $f^{(k-1)}(r)=0$ $f^{(k)}(x_0)\neq 0$ 时 为k重根，k重根会缩减收敛效率

根搜索的敏感性问题

$$f(r+\Delta r)+\varepsilon g(r+\Delta r)=0 \Rightarrow \Delta r=-\varepsilon\frac{g(r)}{f'(r)}$$

误差放大因子 $=\frac{\Delta r/r}{\varepsilon g(r)/g(r)}=\frac{g(r)}{r\,f'(r)}$

牛顿方法

$$x=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$. 无重根时 $S=0$.

其实为二次收敛

$$M=\lim\frac{e_{i+1}}{e_i^2}<\infty$$

但当其在 x_0处有m重根时 $S=\frac{m-1}{m}$

改进 为牛顿法为 $x_{i+1}=x_i-\frac{m f(x_i)}{f'(x_i)}$

无导数的根求解

$$x_{i+1}=x_i-\frac{f(x_i)(x_i-x_{i-1})}{f(x_i)-f(x_{i-1})}$$

有 $e_{i+1}=\left|\frac{f''(r)}{2f'(r)}\right|^{\alpha-1}e_i^{\alpha}$ $\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1.62$

插值

拉格朗日、牛顿插值略. 插值误差 $f(x)-P(x)=\frac{\prod(x-x_i)}{n!}f^{(n)}(c)$ (c在 $x_1 \cdots x_n$ 之间)

切比雪夫插值位置

$$x_i=\cos\frac{\text{odd}\,\pi}{2n}, \quad 有 \left|\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)\right| \le \frac{1}{2^{n-1}}$$

三次样条插值 $\quad S_i=a_i+b_i(x-x_i)+c_i(x-x_i)^2+d_i(x-x_i)^3$

$S_i(x_i)=y_i \quad S_i(x_{i+1})=y_{i+1}$

$S_{i-1}'(x_i)=S_i'(x_i)$

$S_{i-1}''(x_i)=S_i''(x_i)$

对自然边界条件 $S_1''(x_1)=0 \quad S_{n-1}''(x_n)=0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & & & \\ \delta_1 & 2\delta_1+\delta_2 & \delta_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \delta_{n-2} & 2\delta_{n-2}+\delta_{n-1} & \delta_{n-1} \\ & & & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 3\left(\frac{\Delta_2}{\delta_2}-\frac{\Delta_1}{\delta_1}\right) \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned}\Delta_i&=y_{i+1}-y_i\\ \delta_i&=x_{i+1}-x_i\end{aligned}$$

曲率调整边界条件 $S_1''(x_1)=v_1 \quad S_{n-1}''(x_n)=v_n$

$[\,\delta\,]\,C=\begin{bmatrix} v_1/2 \\ v_n/2 \end{bmatrix}$ 其余待

钳制边界条件 $\quad S_1'(x_1)=v_1 \quad S_{n-1}'(x_n)=v_n$

$$\begin{bmatrix} 2\delta_1 & \delta_1 & & \\ \delta_1 & 2\delta_1+\delta_2 & \delta_2 & \\ & \ddots & \ddots & \delta_{n-1} \\ & & \delta_{n-1} & 2\delta_{n-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3\left(\frac{\Delta_1}{\delta_1}-v_1\right) \\ \vdots \\ 3\left(v_n-\frac{\Delta_{n-1}}{\delta_{n-1}}\right) \end{bmatrix}$$

抛物线端点条件

$d_1=d_{n-1}=0$

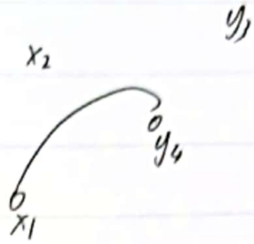
非扭结条件 $S_1'''(x_2)=S_2'''(x_2) \qquad S_{n-2}'''(x_{n-1})=S_{n-1}'''(x_{n-1})$

且对于钳制条件与曲率调整

$$\max|f(x)-S(x)| \le \frac{5}{384}\max_{a\le x\le b}|f^{(4)}(x)|\,\delta^4$$

贝塞尔曲线

曲线参数化



写出曲线 $\begin{cases} x(t) = x_1 + b_x t + c_x t^2 + d_x t^3 \\ y(t) = y_1 + b_y t + c_y t^2 + d_y t^3 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} b_x = 3(x_2 - x_1) \\ b_y = 3(y_2 - y_1) \\ \cancel{d_x = x_4 - x_1 - b_x} \\ c_x = 3(x_3 - x_2) - b_x \\ c_y = 3(y_3 - y_2) - b_y \\ d_x = x_4 - x_1 - b_x - c_x \\ d_y = x_4 - x_1 - b_y - c_y \end{cases}$$

最小二乘 $Ax = b$

对于点 (x_i, y_i) $P_{n-1}(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^n$

定义 $E = \frac{1}{m} \Sigma (y_i - P(x_i))^2$ 最小，即可得 $\bar{x} = (A^T A)^{-1} A^T b$

直接进行最小二乘法 条件数很大，可以用 QR, SVD 来改善