Chap 16

重积分

Chap 16 — 1

二重积分的概念和性质

16.1.1 曲顶柱体的体积

可求面积图形 设$D \subset \mathbf{R}^2$, 若$\forall \varepsilon > 0$, 存在网格, 使得

∂D所交网格面积总和小于ε.

曲顶柱体 设D为可求面积有界闭集.以D为底, 曲面

S: $z = f(x,y)$为顶, ∂D为准线, 母线平行于Oz轴的柱面

为侧面的立体.

问题 如何求此曲顶柱体的体积?

设$D \subset [a,b]\times[c,d]$. 令$f(x,y) = 0$, $(x, y) \in [a,b]\times[c,d] \setminus D$.

(1) **分割**: 取$[a,b]\times[c,d]$的分划T:$\{x_0, x_1, \ldots, x_n; y_0, y_1, \ldots, y_m\}$

得小矩形D_{ij}, 其面积记为$\Delta\sigma_{ij}$.

(2) **求和**: 当D_{ij}很小时, 其上的小曲顶柱体的体积用平顶柱体近似. 任取 $(\xi_i,\eta_j)\in D_{ij}$, 则有总体积

$$V\approx\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}f(\xi_i,\eta_j)\Delta\sigma_{ij}.$$

(3) **取极限**: 记$\|T\|=\max\limits_{1\le i\le n,1\le j\le m}\{\mathrm{diam}\{D_{ij}\}\}$, 则有

$$V=\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}f(\xi_i,\eta_j)\Delta\sigma_{ij}.$$

✓ 用类似思想可求面密度不为常数的平面薄板质量.

16.1.2 二重积分定义

设$f(x,y)$在可求面积有界闭集$D\subset[a,b]\times[c,d]$上定义.

令$f(x,y)=0,\ (x,y)\in[a,b]\times[c,d]\setminus D$. 若对$[a,b]\times[c,d]$的$\forall$

矩形分划D_{ij}及$\forall\ (\xi_i,\eta_j)\in D_{ij},\ (i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,m)$,

总有 $$\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}f(\xi_i,\eta_j)\Delta\sigma_{ij}=I.$$

其中$\|T\|=\max\limits_{1\le i\le n,1\le j\le m}\{\mathrm{diam}\{D_{ij}\}\}$, 则称 $f(x,y)$在D上可积, I称

为$f(x,y)$在D上的二重积分, 记为 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$, 其中

$\iint$为积分号, D为积分区域, $f(x,y)$ 为被积函数,

$d\sigma$为面积元素, $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(\xi_i,\eta_j)\Delta\sigma_{ij}$ 称为Riemann和.

一、几何、物理意义

◆ 以有界闭集D为底, 以曲面S: $z = f(x,y)$为顶的曲顶柱体体积

$$V = \iint_D f(x, y)\mathrm{d}\sigma.$$

◆ 形状为D, 面密度为$\mu(x,y)$的平面薄板质量

$$m = \iint_D \mu(x, y)\mathrm{d}\sigma.$$

二、可积的条件

必要条件 若$f\in R(D)$，则f在D上有界.

充要条件 设f在D上有界. 则$f\in R(D)\Leftrightarrow$

(I) $\overline{\iint\limits_{D}} f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{\underline{D}} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$.

(II) $\forall\varepsilon>0,\exists$分划$T:\sum\limits_{T}\omega_{ij}\Delta\sigma_{ij}<\varepsilon$，其中$\omega_{ij}$为$f$在$D_{ij}$上振幅.

(III) $\forall\varepsilon>0,\forall\sigma>0,\exists$分划$T:\sum\limits_{(i,j)\in\Lambda}\Delta\sigma_{ij}<\varepsilon,\ \Lambda=\{(i,j)\,|\,\omega_{ij}>\sigma\}$

充分条件 若$f\in C(D)$，则$f\in R(D)$.

16.1.3 二重积分的性质

设以下性质中出现的积分均存在.

性质1 (**线性**) 设α, β是常数, 则

$$\iint_D [\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)]\mathrm{d}\sigma = \alpha\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma + \beta\iint_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

性质2 (**可加性**) 若D分成内部不交的子集D_1, D_2, 则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma + \iint_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

性质3 $\iint_D 1\mathrm{d}\sigma = A_D$ (D的面积)

性质4 (**单调性**) 若$f(x,y) \le g(x,y)$, 则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \le \iint_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

推论 (1) 若$f(x,y) \ge 0$, 则 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \ge 0.$

(2) (**绝对值不等式**) $\left|\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\right| \le \iint_D |f(x,y)|\mathrm{d}\sigma.$

(3) (**估值不等式**) 若$m \le f(x,y) \le M$, 则

$$mA_D \le \iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \le MA_D.$$

性质5 (**中值定理**) 设D是连通有界闭集, $f(x,y) \in C(D)$,

则$\exists(\xi, \eta) \in D$, 使得

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = f(\xi,\eta)A_D.$$

Chap16 — 2

二重积分的计算

16.2.1 二重积分与二次积分

定义 设 $f:[a,b]\times[c,d]\to\mathbf{R}$. 固定 $x\in[a,b]$, 若存在

首次积分 $\varphi(x)=\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$, 且 φ 在 $[a,b]$ 可积, 则称

$$\int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

为 f 在 $[a,b]\times[c,d]$ 上先 y 后 x 的**累次(二次)积分**, 也记为

$$\int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$$

想一想 先 x 后 y 的累次积分的定义?

➢ 二重积分存在不能导出二次积分存在

例1 考察

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{p}, & (x,y)=\left(\dfrac{n}{m},\dfrac{q}{p}\right),\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

在$[0,1]\times[0,1]$上二重积分和二次积分的存在性.

解 记$D=[0,1]\times[0,1]$. 对$\forall\varepsilon>0,\ \forall\sigma>0$, 若 $f(x,y)>\sigma$,

则 $(x,y)=\left(\dfrac{n}{m},\dfrac{q}{p}\right)$, 且$m,p$中至少一个小于 $\dfrac{2}{\sigma}$.

区间[0,1]中分母小于 $\frac{2}{\sigma}$ 的有理数至多有限个, 设为

$r_1, r_2, \ldots, r_p$. 取[0,1]的分割T_x, T_y使得$\| T_x \|, \| T_y \| < \frac{\varepsilon}{4p}$.

令$T = \{T_x\} \cup \{T_y\}$, 得D的矩形分割. 显见 f 有界, 若f 在

小矩形$D_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$上的振幅$\omega_{ij} > \sigma$, 则$D_{ij}$至少

一条边含r_k $(1 \le k \le p)$. 由于含r_k的小区间至多$2p$个, 其

长度和不超 过$2p \cdot \frac{\varepsilon}{4p} = \frac{\varepsilon}{2}$, 故横边和纵边含$r_k$的小矩形

面积和都不超 过 $\frac{\varepsilon}{2}$, 从而总面积不超过ε, 即$f \in R(D)$.

➢ 二次积分存在不能导出二重积分存在

例2 考察

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)=\left(\dfrac{n}{m},\dfrac{q}{m}\right),\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

在$[0,1]\times[0,1]$上二重积分和二次积分的存在性.

提示 对任意区间$[a, b]$和$[c, d]$, 它们必含分母相同且为素数的有理数.

16.2.2 化二重积分为二次积分

定理 设$f(x, y)$在$[a, b]\times[c, d]$可积, 且$\forall x\in[a, b]$, 存在

首次积分 $F(x)=\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$, 则

$$\boxed{\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y}$$

试一试 另一情形 $\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_c^d \mathrm{d}y\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$

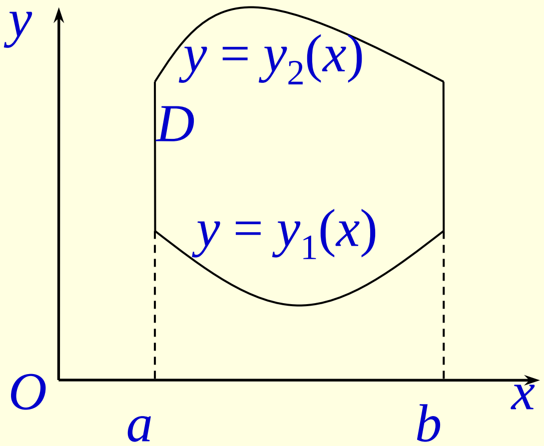
推论1 若$f(x,y)$在$[a,b]\times[c,d]$连续, 则有

$$\boxed{\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y=\int_c^d \mathrm{d}y\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x}$$

推论2 若f 在x型区域$D=\{(x,y)|a\le x\le b,\ y_1(x)\le y\le y_2(x)\}$

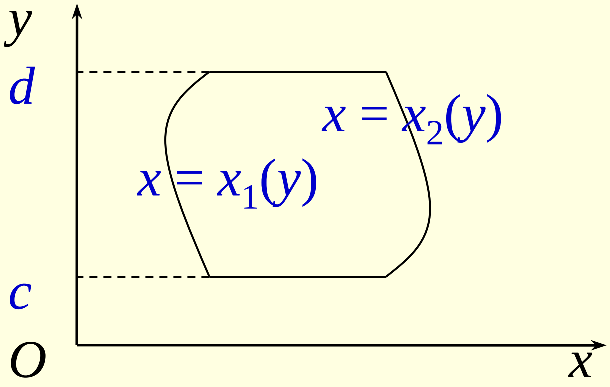
连续, 则有

$$\boxed{\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b \mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y}$$



试一试 y型区域情形!

$$\boxed{\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_c^d \mathrm{d}y\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x}$$



注 面积元素 $\mathrm{d}\sigma=\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

几何直观 过x处且垂直x轴的平面截曲顶柱体得

曲边梯形, 其面积 $A(x)=\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y$

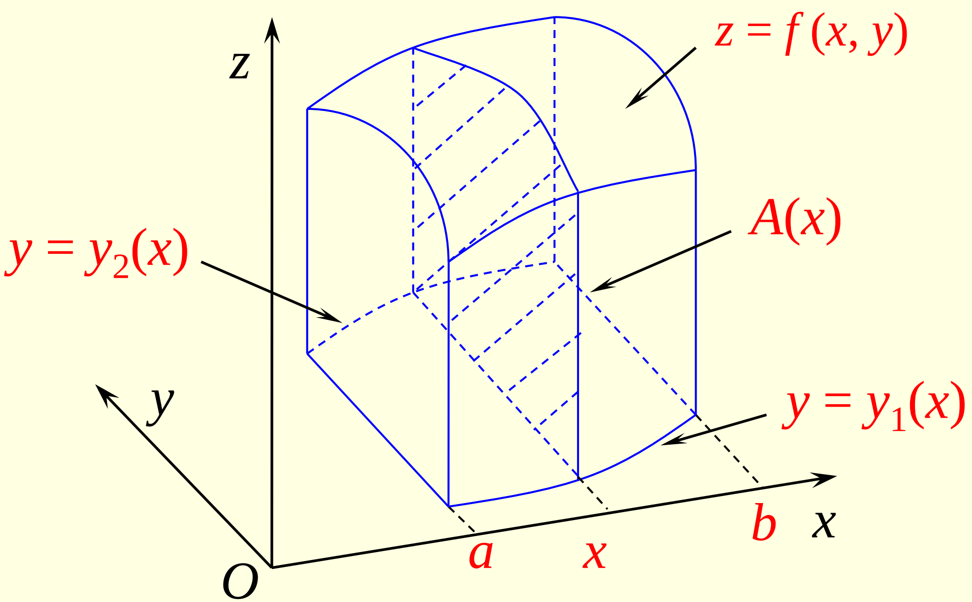
故曲顶柱体体积

$$V=\int_a^b A(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_a^b\left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

$$\overset{\text{def}}{=}\int_a^b \mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y$$



先y后x二次积分

结论 记$D=[a,b]\times[c,d]$, $f\in C[a,b]$, $g\in C[c,d]$, 则有

$$\boxed{\iint_D f(x)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_c^d g(y)\mathrm{d}y}$$

例3 计算二重积分$\iint_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$D$是由抛物线

$y^2=x$与直线 $y=x-2$ 所围区域.

◆ 直角坐标计算二重积分步骤

- 画出区域D的草图, 并确定类型;
- 按所确定的类型表示区域D;
- 化二重积分为二次积分(注意上、下限);
- 计算二次积分.

◆ 确定积分区域D类型的原则

- 对它划分的块数越少越好;
- 首次积分可以且容易算出.

例4 计算二次积分 $I=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{x}}\frac{\sin y}{y}\mathrm{d}y$

例5 交换二次积分次序

$$\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^{1-\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x+\int_1^2 \mathrm{d}y\int_0^{2-y} f(x,y)\mathrm{d}x$$

- 交换二次积分次序步骤
  - 将二次积分还原为二重积分;
  - 由积分限确定积分区域D, 并按另一类型表示它;
  - 化二重积分为另一次序的二次积分.

例6 计算二重积分 $I=\iint\limits_D (y+y^2\sin^3 x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$

其中D是上半圆域 $\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4, y\ge 0\}.$

◆ 用积分区域对称性和被积函数奇偶性简化积分计算

若D关于y轴对称, 记D_1为D中$x\ge 0$部分, 则

$$\boxed{\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\begin{cases}0, & f(-x,y)=-f(x,y)\\ 2\iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, & f(-x,y)=f(x,y)\end{cases}}$$

若D关于x轴对称, 有类似的结果.

例7 计算二重积分 $\iint\limits_D e^{\max\{x^2,y^2\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

其中 $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$. (考研试题)

例8 设函数 $f(x)\in C[0,1]$, 且设 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=A$, 计算

$$\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y.$$

例9 计算圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ 与 $x^2+z^2=R^2$

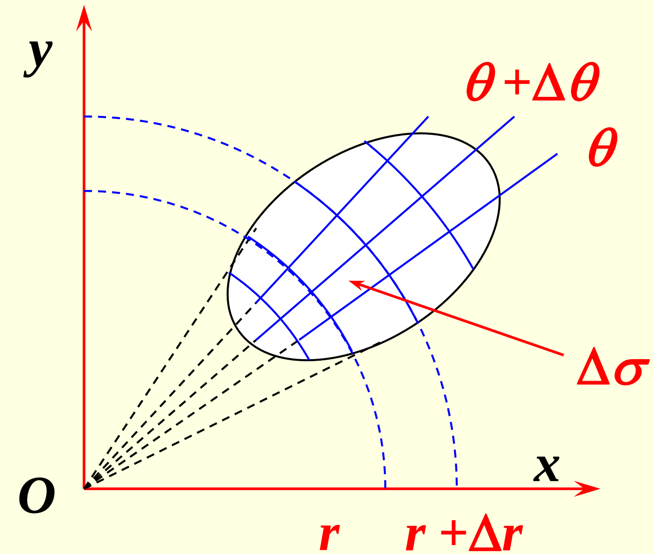
所围立体的体积.

16.2.3 极坐标计算二重积分

当积分区域边界曲线或被积函数用极坐标表示简单时，可用极坐标来计算二重积分

考虑面积元素dσ在极坐标下的形式.

用r =常数(圆周族)和θ=常数(射线族)分割区域D, 则小区域面积



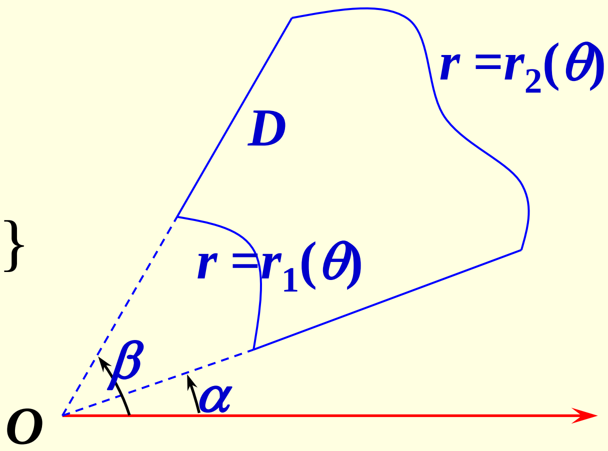
$$\Delta\sigma=\frac{1}{2}[(r+\Delta r)^2\Delta\theta-r^2\Delta\theta]=r\Delta r\Delta\theta+\frac{1}{2}(\Delta r)^2\Delta\theta$$

$$\boxed{\Rightarrow\quad \mathrm{d}\sigma=r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta}$$

从直角坐标到极坐标时的二重积分变换公式

$$\boxed{\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D'} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta}$$

其中D'是D在极坐标下的表示形式.



特别地, 若

$$D' = \{(r,\theta) \mid \alpha \le \theta \le \beta, r_1(\theta) \le r \le r_2(\theta)\}$$

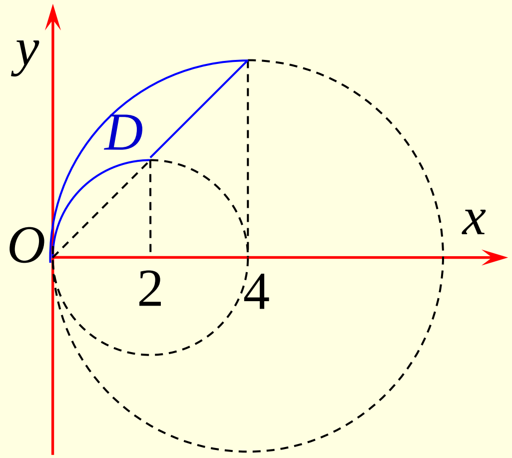
则有

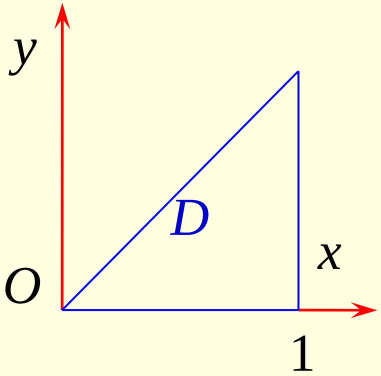
$$\boxed{\begin{aligned}&\iint_{D'} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\ &= \int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\mathrm{d}r\end{aligned}}$$

例10 将 $I=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 化为极坐标下的累次积分, 其中D为

(1) 由$y=x$, 上半圆周 $x^2+y^2=4x$ 及 $x^2+y^2=8x$ 围成.

(2) 由直线$y=x$, $y=0$和$x=1$围成.

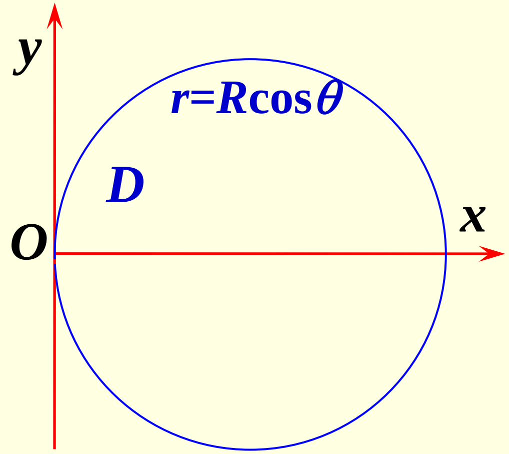


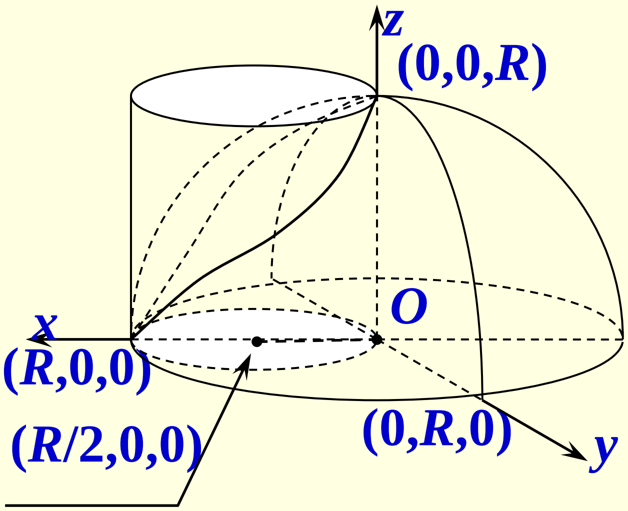


◆ 用极坐标表示积分区域

- ➢ 关键: 化积分区域边界为极坐标方程.
- ➢ 方法: 将$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$代入边界的直角坐标方程.

例11 求球体 $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$ 被圆柱面 $x^2 + y^2 = \pm Rx$ 所割下部分的体积V.





◆ 积分区域边界曲线方程或被积函数含x^2+y^2，

可考虑用极坐标

例12 (1)计算$I_R=\iint\limits_{D_R} e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $D_R: x^2+y^2\le R^2, x\ge 0, y\ge 0$

(2) 计算Poisson积分 $I=\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x.$

16.2.4 二重积分的变量代换

设变换 $T:\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$ 有连续偏导数, 且满足

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \neq 0,$$ 又 $f(x,y) \in C(D)$, 则

$$\boxed{\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D'} f(x(u,v),y(u,v))\,|J|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v.}$$

其中T将D'变为D.

例13 计算二重积分$\iint\limits_{D}(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中区域$D$为

$x^2+y^2\le x+y+1.$

思考 若D改为 $\dfrac{(x-2)^2}{a^2}+\dfrac{(y+1)^2}{b^2}\le 1$ 如何?

例14 计算积分$\iint\limits_{D}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$D$为由曲线$xy=1$,

$xy=2$, $y=x$和$y=4x$在第一象限所围区域.

例15 计算积分$I=\iint\limits_{D}|x|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$D$为$2x^2-2xy+y^2\le 1$.