Chap 14 — 4

Taylor公式与极值问题

14.4.1 二元函数的Taylor公式

凸区域 若区域D中任意两点的连线都含于D.

微分中值定理 设f在凸区域D中可微, 则$\exists\ \theta\in(0,1)$:

$$
\boxed{\begin{aligned}
&f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\\
&=f_x(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)\Delta x+f_y(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)\Delta y
\end{aligned}}
$$

➢ 若$f(x,y)$在区域D可微, 且 $f_x(x,y)=0,\ f_y(x,y)=0,$ 则

$$f(x,y)\equiv C$$

回忆 **一元函数Taylor公式:**

$$f(x_0+\Delta x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}(\Delta x)^k\frac{\mathrm{d}^k f(x_0)}{\mathrm{d}x^k}+R_n \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\left(\Delta x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^k f(x_0)+R_n$$

定理(Taylor公式) 设函数 $f(x,y)$ 在 $U(P_0(x_0,y_0))$ 有 $n+1$ 阶连续偏导数, 则 $\exists\ \theta\in(0,1)$:

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f(x_0,y_0)+R_n$$

其中Lagrange型余项

$$R_n=\frac{1}{(n+1)!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)$$

➢ k阶偏导数算子

$$\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^k=\sum_{i=0}^{k}C_k^i(\Delta x)^{k-i}(\Delta y)^i\frac{\partial^k}{\partial x^{k-i}\partial y^i}$$

- ➢ $n=0$时, 即Lagrange中值定理!
- ➢ $n=1$时, 一阶**Taylor**公式

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)=f(x_0,y_0)+\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0,y_0)$$
$$+\frac{1}{2}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)$$

14.4.2 二元函数的极值

一. 极值定义

若在点$P_0(x_0,y_0)$的某邻域内

$$f(x,y) \le f(x_0,y_0) \quad (\text{or } f(x,y) \ge f(x_0,y_0))$$

则称函数 f 在(x_0, y_0)处取极大值(or 极小值),

$P_0(x_0,y_0)$称为函数的极大值点(or极小值点).

二. 极值的必要条件

若 $f(x,y)$可偏导, 且在$P_0(x_0,y_0)$取极值, 则

$$f_x(x_0,y_0)=0=f_y(x_0,y_0)$$

- 满足上式的点称为**驻点**(**驻点未必是极值点**)

例 考察函数 $f(x,y)=xy$在(0,0)的情况.

- **极值点未必是驻点!**

例 考察函数 $f(x,y)=(x^2+y^2)^{1/2}$在(0,0)的情况.

- **可偏导的极值点必是驻点!**

三. 极值的充分条件

定理 设 $f(x, y)$ 在 $U(P_0(x_0,y_0))$ 的二阶偏导数连续, 且

$$f_x(x_0, y_0) = 0,\ f_y(x_0, y_0) = 0,$$

记Hesse矩阵 $\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}_{P_0}$

(1) 若$\boldsymbol{H}$为正定矩阵, 则 $f(x_0, y_0)$为严格极小值;

若$\boldsymbol{H}$为负定矩阵, 则 $f(x_0, y_0)$为严格极大值

(2) 若$\boldsymbol{H}$为不定矩阵, 则 $f(x_0, y_0)$非极值.

证明思路

$$\Delta f = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0)$$

$$= \left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right) f(x_0, y_0) + \frac{1}{2}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)$$

$$= \frac{1}{2}[(\Delta x)^2 f_{xx} + 2\Delta x\Delta y f_{xy} + (\Delta y)^2 f_{yy}]_{(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)}$$

是$\Delta x, \Delta y$的二次型. 利用二阶偏导数的连续性及$\boldsymbol{H}$的型确定Δf的符号.

推论 设 $f(x, y)$ 在$U(P_0(x_0,y_0))$的二阶偏导数连续, 且

$$f_x(x_0, y_0) = 0,\ f_y(x_0, y_0) = 0,$$

记 $A = f_{xx}(x_0, y_0), B = f_{xy}(x_0, y_0), C = f_{yy}(x_0, y_0)$

(1) 若**Hesse行列式** $|\boldsymbol{H}| = AC - B^2 < 0$, 则 $f(x_0, y_0)$非极值

(2) 若 $|\boldsymbol{H}| > 0$, 则 $f(x_0, y_0)$为极值, 且当$A > 0$时, $f(x_0, y_0)$为严格极小值;当$A < 0$时, $f(x_0, y_0)$为严格极大值.

想一想 当$|\boldsymbol{H}| = 0$时, 结论如何?

例 求函数 $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ 的极值.

四. 最小二乘法

从一组测定数据 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)$ 求变量x, y之间的函数关系时, 通常由经验把函数设为含有待定常数的 $y = f(x)$ (拟合曲线), 通过求

$$Q = \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - y_i]^2$$

的最小值确定 f 中的待定常数. 此方法称为最小二乘法.

例 某种金属棒的长度随温度变化, 现测得一组数据如下表

t (°C)	20	30	40	50	60
l (mm)	1000.36	1000.53	1000.74	1000.91	1001.06

若l与t的关系估计为线性函数, 试求之.

解 设$l = a + bt$, 那么引进

$$Q(a,b) = \sum_{i=1}^{5}[l_i - (a + bt_i)]^2$$

驻点满足

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial a} = -2\sum_{i=1}^{5}[l_i - (a + bt_i)] = 0 \\ \dfrac{\partial Q}{\partial a} = -2\sum_{i=1}^{5}[l_i - (a + bt_i)]t_i = 0 \end{cases}$$

从中解出a, b的值, 从而得到函数 $l = a + bt$.

Chap14— 5

隐函数存在定理

14.5.1 一元隐函数

定理 设函数F在(x_0,y_0)邻域内有连续偏导数, 且

$$F(x_0,y_0)=0,\quad F_y(x_0,y_0)\neq 0$$

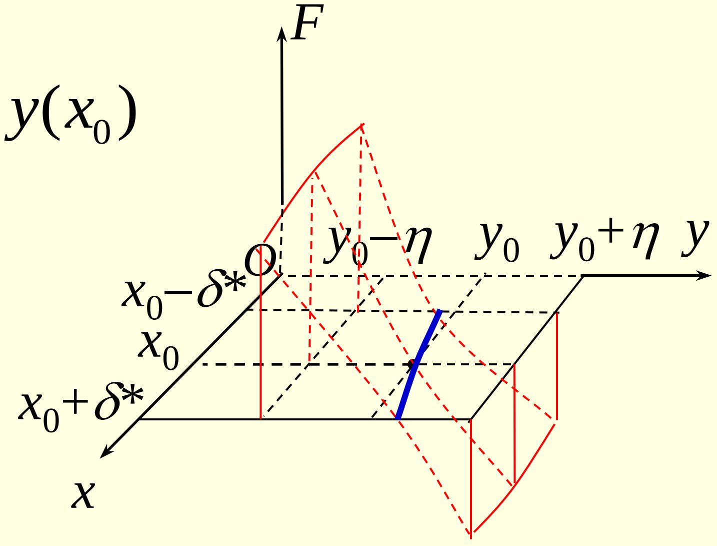
则方程$F(x,y)=0$在(x_0,y_0)某邻域内可确定**唯一连续可导**

隐函数$y=y(x)$, 满足

$$F(x,y(x))\equiv 0\ (x\in U(x_0)),\ y_0=y(x_0)$$

和

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x}{F_y}}$$



例1 设方程 $\sin(x+y)+2x+y=0$ 在$(0, 0)$附近确定

隐函数$y=y(x)$, 求$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 和 $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$

例2 讨论方程 $F(x, y)=y^3-x=0$ 在$(0, 0)$附近确定

隐函数的情况.

例3 讨论方程 $F(x, y)=x^2+y^2-1=0$ 在$(0, 1)$和$(1, 0)$

附近确定隐函数的情况.

例4 设有方程 $x^2+y+\sin xy=0.$

(1) 证明: 在(0,0)点的某邻域内, 上述方程可确定唯一的隐函数$y=y(x)$满足$y(0)=0$.

(2) 上述方程能否在(0,0)点的某邻域内, 确定隐函数$x=x(y)$?为什么.

提示: $$y'(x)=-\frac{2x+y\cos xy}{1+x\cos xy},\quad y'(0)=0$$

$$y''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{y'(x)-y'(0)}{x}=\lim_{x\to 0}-\frac{2+\dfrac{y}{x}\cos xy}{1+x\cos xy}=-2$$

14.5.2 多元隐函数

定理 设函数F在(x_0,y_0,z_0)邻域内有连续偏导数, 且

$$F(x_0,y_0,z_0)=0,\quad F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$$

则方程$F(x,y,z)=0$在(x_0,y_0,z_0)邻域内可确定唯一

的**隐函数**$z=f(x,y)$, 满足

$$F(x,y,f(x,y))\equiv 0,\quad z_0=f(x_0,y_0)$$

且有

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}}$$

例5 设方程 $e^z-xyz=0$ 确定隐函数$z=z(x,y)$, 求z_x.

14.5.3 隐映射存在定理

若函数 $F(x,y,u,v), G(x,y,u,v)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 某一邻域内有连续的偏导数, 且 $F(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$, $G(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$, **Jacobi行列式**

$$J_0=\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}\right|_{P_0}=\left.\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v}\\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v}\end{vmatrix}\right|_{P_0}\neq 0,$$

则 $\begin{cases}F(x,y,u,v)=0\\ G(x,y,u,v)=0\end{cases}$ 可唯一确定**隐映射** $\begin{cases}u=u(x,y)\\ v=v(x,y)\end{cases}$

满足此方程组及 $\begin{cases}u_0=u(x_0,y_0)\\ v_0=v(x_0,y_0)\end{cases}$ 且有连续偏导数

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)} = -\frac{\begin{vmatrix} F_x & F_v \\ G_x & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)} = -\frac{\begin{vmatrix} F_y & F_v \\ G_y & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)} = -\frac{\begin{vmatrix} F_u & F_x \\ G_u & G_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}} \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)} = -\frac{\begin{vmatrix} F_u & F_y \\ G_u & G_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}$$

例6 设函数$\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$由方程组 $\begin{cases} x^2 + y^2 - uv = 0 \\ xy - u^2 + v^2 = 0 \end{cases}$ 确定,

求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial y}$.

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{4xv + yu}{2(u^2 + v^2)}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{4yu - xv}{2(u^2 + v^2)}}$$

■ 全微分法

由 $F(x,y(x))\equiv 0$, 两端取微分得

$$\mathrm{d}F=F_x'\mathrm{d}x+F_y'\mathrm{d}y=0$$

导出

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x'(x,y(x))}{F_y'(x,y(x))}$$

想一想 两个三元方程的方程组 $\begin{cases}F(x,y,z)=0\\ G(x,y,z)=0\end{cases}$ 情形?

及n个$m+n$元方程的方程组 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\mathbf{0}$ 情形? 其中

$\boldsymbol{F}:D\subset\mathbb{R}^{m+n}\to\mathbb{R}^n, \boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_m), \boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$

- 求隐函数所有偏导数时, **全微分法**比较简便

例7 设$z = f(x, y)$由方程 $z = x + y - xe^z$ 确定, 求z_x, z_y.

例8 函数 $y = y(x)$, $z = z(x)$由方程组

$$\begin{cases} z = x + \varphi(x+y) \\ F(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

确定, 其中φ, F均可微, $F_y + \varphi' F_z \neq 0$, 求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{F_x + (1+\varphi')F_z}{F_y + \varphi' F_z}, \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = -\frac{\varphi' F_x - (1+\varphi')F_y}{F_y + \varphi' F_z},}$$

14.5.4 逆映射存在定理

设函数 $u=u(x,y), v=v(x,y)$ 在 $U(P_0(x_0,y_0))$ 有连续偏导数, 且 $u_0=u(x_0,y_0)$, $v_0=v(x_0,y_0)$, Jacobi行列式

$$J_0=\left.\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|_{P_0}\neq 0,$$

则 $\begin{cases} u=u(x,y) \\ v=v(x,y) \end{cases}$ 在 $U(u_0, v_0)$ 存在**逆映射** $\begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \end{cases}$

满足 $\begin{cases} x_0=x(u_0,v_0) \\ y_0=y(u_0,v_0) \end{cases}$ 且有连续偏导数

$$\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial v}{\partial y},\qquad \frac{\partial x}{\partial v}=-\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\frac{\partial y}{\partial u}=-\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial v}{\partial x},\qquad \frac{\partial y}{\partial v}=\frac{1}{J}\frac{\partial u}{\partial x}$$

推论 同前定理条件, 则有

$$\boxed{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\cdot\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=1}$$

证 记

$$\boldsymbol{f}=\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u(x,y)\\v(x,y)\end{pmatrix},\text{ 逆映射 }\boldsymbol{f}^{-1}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x(u,v)\\y(u,v)\end{pmatrix}$$

则复合映射

$$\boldsymbol{f}^{-1}\circ\boldsymbol{f}:\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$ 即恒等映射 $\boldsymbol{I}:\begin{cases}x=x\\y=y\end{cases}$

由 $\boldsymbol{f}^{-1}\circ\boldsymbol{f}=\boldsymbol{I}$, 两端求Jacobi矩阵, 得 $\left(\boldsymbol{f}^{-1}\right)'\cdot\boldsymbol{f}'=\boldsymbol{E}$

取行列式得 $$\left|\left(\boldsymbol{f}^{-1}\right)'\cdot\boldsymbol{f}'\right|=\left|\left(\boldsymbol{f}^{-1}\right)'\right|\cdot\left|\boldsymbol{f}'\right|=\left|\boldsymbol{E}\right|=1$$

即 $$\boxed{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\cdot\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=1}$$

例9 求极坐标变换 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ 的逆变换偏导数

Chap14 — 6

方向导数与梯度

14.6.1 方向导数

一. 定义

设 $\boldsymbol{l}^0=(\cos\alpha,\cos\beta)$, 函数$z=f(x,y)$在$(x_0,y_0)$处沿 $\boldsymbol{l}$ 的**方向导数**定义为

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{(x_0,y_0)}=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta)-f(x_0,y_0)}{t}$$

- 偏导数是方向导数的特例,

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}=\left.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{(x_0,y_0)},\quad \boldsymbol{l}=(1,0)$$

二. 充分条件和计算公式

定理 $z = f(x, y)$在$P_0(x_0,y_0)$可微, $\quad \boldsymbol{l}^0 = (\cos\alpha, \cos\beta)$

则f在P_0点存在方向导数, 且

$$\boxed{\left.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{(x_0,y_0)} = f_x(x_0, y_0)\cos\alpha + f_y(x_0, y_0)\cos\beta}$$

极限存在

- 可微 $\Rightarrow$ 方向导数存在 $\Rightarrow$ 可偏导

连　续

- **推广形式**: $u = f(x, y, z)$, $\boldsymbol{l}^0 = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$

例1 求函数 $u = x^2y + y^2z + z^2x$ 在(1,1,1)处沿方向

$\boldsymbol{l} = (1,-2,1)$的方向导数.

例2 函数

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

在(0,0)点沿$l = (1, 2)$的方向导数为(　　　　).

(A) 0.　　**(B)** $\dfrac{2}{5}$.　　**(C)** $\dfrac{2}{5\sqrt{5}}$.　　**(D)**不存在.

例3 求$f(x,y) = \begin{cases} 1, & 0 < y < x^2, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$在(0,0)点沿$l$的方向导数

14.6.2 梯度

函数 $f(x, y)$在点$P_0(x_0,y_0)$的**梯度**定义为

$$\nabla f\big|_{(x_0,y_0)} = \mathrm{grad} f\big|_{(x_0,y_0)} = (f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0))$$

简记为 $\nabla f = (f_x, f_y)$ (可推广三维形式)

利用梯度符号, 得到

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{P_0} = \nabla f\big|_{P_0} \cdot \boldsymbol{l}^0 = \|\nabla f\|_{P_0} \cos(\nabla f, \boldsymbol{l})$$

$\Rightarrow$ $(\nabla f, \boldsymbol{l}) = 0$ 时, 方向导数 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{P_0}$ 取最大值 $\|\nabla f\|_{P_0}$

结论 **梯度的方向是方向导数取最大值时的方向，其模就是方向导数的最大值.**

例4 求函数 $u = x^2 + y^2 - 2xz + 2y - 3$ 在(1,–1,2)处方向导数的最大值. (历年试题)