线性代数
期末整理

王凯灵

2021-Fall

目录

1 矩阵与行列式

1.1 矩阵

1.1.1 矩阵的定义

首先, 这是一个矩阵;

$$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

这些也是矩阵:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k & & & \\ & k & & \\ & & \ddots & \\ & & & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}(\text{列向量})$$

1.1.2 矩阵的运算

- $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

- $\boldsymbol{C}=k\boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

- $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$ $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}, \boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times s}, \boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times s}$,

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj},\quad 1\leqslant i\leqslant m,\quad 1\leqslant j\leqslant s$$

矩阵乘法的理解

- A 是对 B 行向量组的**线性变换**, B 是对 A 列向量组的**线性变换**
- C 的行向量是由 A 中相应行对 B 中行向量的**线性组合**
  C 的列向量是由 B 中相应列对 A 中列向量的**线性组合**
- C 中元素是 A 中行向量与 B 中列向量的**内积**
- 考虑**坐标变换**, 矩阵乘法是一个**线性变换**的基向量在另一线性变换作用下的结果

方阵的幂

$$\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{n}} = \underbrace{\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}\cdots\boldsymbol{A}}_{n\text{个}}$$

- 三角矩阵, 可以分离主对角线, 二项式展开
- 是否有 $\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{E}$ 或 $\boldsymbol{O}$
- 矩阵是否能拆成一些特殊矩阵的积, 如正交矩阵等
- **数学归纳法**

1.1.3 矩阵的转置

$$\boldsymbol{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

- $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^T = \boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{B}^T$
- $(k\boldsymbol{A})^T = k\boldsymbol{A}^T$
- $(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_n)^T = \boldsymbol{A}_n^T\boldsymbol{A}_{n-1}^T\cdots\boldsymbol{A}_1^T$
- $\boldsymbol{A} = \frac{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^T}{2} + \frac{\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^T}{2}$

1.1.4 方阵的迹

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

- $\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{A}^T\right) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$
- $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}) + \mathrm{tr}(\boldsymbol{B})$
- $\mathrm{tr}(k\boldsymbol{A}) = k\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$
- $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})$

1.1.5 方阵的逆矩阵

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_n = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$$

- $\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{-1}=\boldsymbol{A}$
- $(k\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{1}{k}\boldsymbol{A}^{-1}$
- $\left(\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}\right)^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{T}$
- $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$
- $\left|\boldsymbol{A}^{-1}\right|=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}$

方阵**可逆**的充要条件:

- 方阵的行列式 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$
- $\boldsymbol{A}$ 可写成若干个初等矩阵乘积, 即与单位阵**相抵**
- $r(\boldsymbol{A})=n$（$\boldsymbol{A}$ **满秩**）
- $\boldsymbol{A}$ 的行（列）向量组**线性无关**
- 齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 仅有零解
- 非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 有唯一解
- $\boldsymbol{A}$ 没有 0 **特征值**

1.1.6 伴随矩阵

$$\boldsymbol{A}^{*}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{21} & \cdots & \boldsymbol{A}_{n1}\\ \boldsymbol{A}_{12} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{n2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{1n} & \boldsymbol{A}_{2n} & \cdots & \boldsymbol{A}_{nn}\end{pmatrix}$$

其中, $\boldsymbol{A}_{ij}$ 为 a_{ij} 的**代数余子式**.

- $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{*}=\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{E}$
- $|\boldsymbol{A}^{*}|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$
- $(\boldsymbol{A}^{*})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{*}=\frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|}$
- $(\boldsymbol{A}^{*})^{*}=|\boldsymbol{A}|^{n-2}\,\boldsymbol{A}$

1.1.7 矩阵分块

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \boldsymbol{A}_{13}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \boldsymbol{A}_{23}\\ \boldsymbol{A}_{31} & \boldsymbol{A}_{32} & \boldsymbol{A}_{33}\end{pmatrix}$$

仍然遵循矩阵的运算性质, 且

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_s \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1^{-1} & & & \\ & \boldsymbol{A}_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_s^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} & & & \boldsymbol{A}_1 \\ & & \boldsymbol{A}_2 & \\ & \iddots & & \\ \boldsymbol{A}_s & & & \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} & & & \boldsymbol{A}_s^{-1} \\ & & \boldsymbol{A}_{s-1}^{-1} & \\ & \iddots & & \\ \boldsymbol{A}_1^{-1} & & & \end{pmatrix}$$

利用分块:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{O} \\ -\boldsymbol{B} & \boldsymbol{E}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{E}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_n - \boldsymbol{B}\boldsymbol{A} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{E}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{O} \\ -\boldsymbol{B} & \boldsymbol{E}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_m - \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_n - \boldsymbol{B}\boldsymbol{A} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{E}_m - \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_n \end{vmatrix}$$

$$|\boldsymbol{E}_n - \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{E}_m - \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}|$$

另外, 利用矩阵相似, 可得 $|x\boldsymbol{E} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}| = x^{n-m}|x\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}|$:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_n & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_n & -\boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} \end{pmatrix} \text{ 与 } \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix} \text{ 相似}$$

$$\left| x\boldsymbol{E} - \begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} \end{pmatrix} \right| = \left| x\boldsymbol{E} - \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix} \right|$$

- $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$ 的特征多项式只相差 x^{n-m}, 非 0 特征值相同, 特征值 0 的代数重数相差 $n-m$
- 求行列式 $\left|x\boldsymbol{E} - \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T\right|$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 为 n 维列向量, 那么 $\left|x\boldsymbol{E} - \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T\right| = x^{n-1}\left|x\boldsymbol{E} - \boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha}\right| = x^{n-1}\left(x - \boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha}\right) = x^{n-1}(x - \operatorname{tr}(\boldsymbol{A}))$
- $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 均为方阵时, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$ 的特征多项式相同, 特征值完全相同, 行列式和迹都相等. 事实上, 当 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 不是方阵时,$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$ 有相同的非零特征值. 因为若 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$, 则 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$

1.2 行列式

1.2.1 逆序

在 n 级排列 $i_1i_2\ldots i_n$ 中, 若 $j<k$ 且 $i_j>i_k$, 则 (i_j, i_k) 构成**逆序**.

排列中逆序的总数称为**逆序数**.

1.2.2 行列式的定义

$\boldsymbol{A}$ 是方阵:

$$\boldsymbol{D}=det\left(\boldsymbol{A}\right)=|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

其中, $\tau\left(j_1j_2\cdots j_n\right)$ 是排列的**逆序数**.

转置不改变行列式:

$$|\boldsymbol{A}|=\left|\boldsymbol{A}^T\right|$$

行列式的行线性性

$$k\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+l\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ kb_1+lc_1 & kb_2+lc_2 & \cdots & kb_n+lc_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

列上同理.

1.2.3 行列式的计算

- 行列式某行乘以常数 k, 行列式也变为 k 倍
- 行列式某两行交换, 行列式取反
- 行列式某一行的非零倍加到另一行, 行列式不变
- 在方阵中选取 k 行 k 列, 交点元素构成其一个**子式** $\boldsymbol{M}$. 去除这些行列, 剩下的的元素构成一个**余子式** $\boldsymbol{M}'$, 进行**拉普拉斯展开**:

$$\text{代数余子式}\boldsymbol{A}=(-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)}\boldsymbol{M}'$$

$$\boldsymbol{D}=\sum_{i=1}^{t}\boldsymbol{M}_i\boldsymbol{A}_i=\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{M}_2\boldsymbol{A}_2+\cdots+\boldsymbol{M}_t\boldsymbol{A}_t$$

$$\begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 & d \\ y & 0 & x & 0 \\ 0 & w & 0 & z \end{pmatrix}=(-1)^{(1+3)+(1+3)}\begin{pmatrix} a & b \\ y & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ w & z \end{pmatrix}=(ax-by)(cz-dw)$$

- **范德蒙德行列式**

$$\boldsymbol{D}_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)$$

- 三角化

$$\begin{pmatrix}1+a & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1-a & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1+b & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1-b\end{pmatrix}=a^2b^2\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{a} & \frac{1}{b} & -\frac{1}{b}\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=a^2b^2$$

- 爪型行列式

$$\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n\\ c_2 & b_2 & & & \\ c_3 & & b_3 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ c_n & & & & b_n\end{pmatrix}=(a_1-\sum_{j=2}^{n}\frac{a_jc_j}{b_j})b_2b_3\dots b_n$$

- 镶边法

$$\begin{pmatrix}a+x & a+y & a+z\\ b+x & b+y & b+z\\ c+x & c+y & c+z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -x & -y & -z\\ 0 & a+x & a+y & a+z\\ 0 & b+x & b+y & b+z\\ 0 & c+x & c+y & c+z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -x & x-y & x-z\\ 1 & a & 0 & 0\\ 1 & b & 0 & 0\\ 1 & c & 0 & 0\end{pmatrix}=0$$

- 构造递推关系或数学归纳

$$\boldsymbol{D}_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ x_1^{n} & x_2^{n} & \cdots & x_n^{n}\end{vmatrix}=(x_n-x_1)(x_n-x_2)\dots(x_n-x_{n-1})\boldsymbol{D}_{n-1}=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)$$

1.2.4 Cramer 法则

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\ \cdots\cdots\cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}$$

$$x_j=\frac{\boldsymbol{D}_j}{\boldsymbol{D}},\quad 1\leqslant j\leqslant n.$$

其中 $\boldsymbol{D}=|\boldsymbol{A}|\neq 0,\boldsymbol{D}_j$ 是将 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 列用常数列

$$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

代替所得到的 n 阶行列式.

2 秩与向量

2.1 矩阵初等变换

$$\boldsymbol{E}(i,j)=\begin{pmatrix} 1 &&&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&&& \\ && 1 &&&&&&& \\ &&& 0 & \cdots & 1 &&&& \\ &&& \vdots & \ddots & \vdots &&&& \\ &&& 1 & \cdots & 0 &&&& \\ &&&&&& 1 &&& \\ &&&&&&& \ddots && \\ &&&&&&&& 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{E}(i(k))=\begin{pmatrix} 1 &&&& \\ & \ddots &&& \\ && k && \\ &&& \ddots & \\ &&&& 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{E}(i,j(k))=\begin{pmatrix} 1 &&&&&& \\ & \ddots &&&&& \\ && 1 & \cdots & k && \\ &&& \ddots & \vdots && \\ &&&& 1 && \\ &&&&& \ddots & \\ &&&&&& 1 \end{pmatrix}$$

左乘这些矩阵对应初等**行**变换, **右乘**对应**列**变换.

2.2 相抵关系

两个矩阵能通过初等变换互相转化, 那么这两个矩阵**相抵**, 写作

$$\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{B}$$

将 A 化为**相抵标准形**:

$$\boldsymbol{PAQ}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$$

将矩阵 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{E} \end{pmatrix}$ 进行行初等变换, 可得 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{A^{-1}} \end{pmatrix}$

同样, 将 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{E} \end{pmatrix}$ 进行列初等变换, 可得 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{A^{-1}} \end{pmatrix}$

- 相抵矩阵具有相同的**秩**, 秩相同的矩阵相抵

2.3 矩阵的秩

最大的**非零**子式阶数, 记作

$$\text{rank}(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{A}) = r \quad \text{记} r(\boldsymbol{O}) = 0$$

2.3.1 等价描述

- 矩阵行 (列) 向量组极大线性无关组所含向量个数, 即**行 (列) 秩**
- 非零**特征值**个数
- 相抵标准形对角线 1 的数量

2.3.2 有关秩的常见结论

- $r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{A}^T)$
- $r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T) = r(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})$
- $r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) \leqslant r(\boldsymbol{A}) + r(\boldsymbol{B})$
- $\boldsymbol{A}: n \times s, r(\boldsymbol{A}) + r(\boldsymbol{B}) - s \leqslant r(\boldsymbol{AB}) \leqslant min\{r(\boldsymbol{A}), r(\boldsymbol{B})\} \leqslant r(\boldsymbol{A}) + r(\boldsymbol{B})$
- $max\{r(\boldsymbol{A}), r(\boldsymbol{B})\} \leqslant r(\boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{B}) \leqslant r(\boldsymbol{A}) + r(\boldsymbol{B})$
- 若 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$, 则 $r(\boldsymbol{A}) + r(\boldsymbol{B}) \leqslant n$
- $r(\boldsymbol{A}^*) = \begin{cases} n, & r(\boldsymbol{A}) = n \\ 1, & r(\boldsymbol{A}) = n-1 \\ 0, & r(\boldsymbol{A}) < n-1 \end{cases}$
- $r(\boldsymbol{A}) = 1 \Leftrightarrow$ 存在非零列向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和非零行向量 $\boldsymbol{\beta^T}$ 使 $\boldsymbol{A = \alpha\beta^T}$

2.3.3 降秩定理

- **第一降秩定理**

  $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{D}$ 分别为 m 阶和 n 阶方阵:

$$r\left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}\right) = \begin{cases} r(\boldsymbol{A}) + r\left(\boldsymbol{D} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\right), \text{若}\boldsymbol{A} \text{ 可逆} \\ r(\boldsymbol{D}) + r\left(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}\right), \text{若}\boldsymbol{D} \text{ 可逆} \end{cases}$$

- **第二降秩定理**

  $\boldsymbol{A}$ 为 m 阶可逆矩阵, $\boldsymbol{D}$ 为 n 阶可逆矩阵:

$$r(\boldsymbol{A}) + r\left(\boldsymbol{D} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\right) = r(\boldsymbol{D}) + r\left(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}\right)$$

2.4 秩为 1 的矩阵

2.4.1 等价描述

设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 阶非零方阵:

- $r(\boldsymbol{A})=1$
- **满秩分解**: 存在 m 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$ 和 n 维列向量 $\boldsymbol{\beta}\neq\mathbf{0}$, 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T$
- 方阵 A 的行与行 (列与列) 之间只相差一个比列关系

2.4.2 秩为 1 矩阵的性质

- $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha}$
- $\boldsymbol{\alpha}$ 是方程组 $\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的解 $\Leftrightarrow\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 正交 $\Leftrightarrow\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})=0$
- $\boldsymbol{A}^m=\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})^{m-1}\boldsymbol{A}$, 特别地, $\boldsymbol{A}^2=\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}$
- $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式为 $m_{\boldsymbol{A}}(x)=x^2-\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})x$
- $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})\boldsymbol{\alpha}$
- 设 $\boldsymbol{\xi}$ 是方程组 $\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的非零解, 那么 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}=\mathbf{0}$
- 方程组 $\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 与 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 同解
- 若 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})\neq 0$, 那么 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的对应到**特征值** $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})$ 的**特征向量**, 方程组 $\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的非零解是对应到特征值 0 的特征向量. $\boldsymbol{A}$ 特征值为 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}),\underbrace{0,\cdots,0}_{n-1\text{ 个}}$, $\boldsymbol{A}$ 可以通过相似变换化为对角矩阵

$$\begin{pmatrix}\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}) & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}$$

  此时, $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式为 $m_{\boldsymbol{A}}(x)=x^2-\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})x$ 没有重根

- 若 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})=0$, 那么 $\boldsymbol{A}$ 特征值为 $\underbrace{0,\cdots,0}_{n\text{ 个}}$, 特征值 0 的代数重数为 n, 几何重数为 $n-1$, $\boldsymbol{A}$ 不可以通过相似变换化为对角矩阵, 但是 $\boldsymbol{A}$ 可以通过相似变换化为如下矩阵

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}$$

  此时 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式为 $m_{\boldsymbol{A}}(x)=x^2$ 有重根

2.5 线性方程组与矩阵

线性方程组对应矩阵:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \rightarrow \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

对增广矩阵做行变换化为**简化行阶梯形矩阵**, 就是消元法解方程组过程.

方程组的简化行阶梯形矩阵对应线性方程组的**标准阶梯形**:

$$\begin{cases} a_{1j_1}x_{j_1} + \quad \cdots \quad + a_{1j_r}x_{j_r} + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ \qquad a_{2j_2}x_{j_2} + \cdots + a_{2j_r}x_{j_r} + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad a_{rj_r}x_{j_r} + \cdots + a_{rn}x_n &= b_r \\ \qquad\qquad\qquad 0 &= b_{r+1} \\ \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad 0 &= b_m \end{cases}$$

2.5.1 线性方程组的有解性

$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{\beta}$, 其中 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵:

- $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$, 则

  $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{\beta}$ 只有零解 $\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A}) = n$, 即 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$

  $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{\beta}$ 有非零解 (无穷多解)$\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A}) < n$, 即 $|\boldsymbol{A}| = 0$

- $\boldsymbol{\beta} \neq \mathbf{0}$, 则

  $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{\beta}$ 有解 $\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A}) = r(\tilde{\boldsymbol{A}})$

  有唯一解:$r(\boldsymbol{A}) = r(\tilde{\boldsymbol{A}}) = n$

  有无数解:$r(\boldsymbol{A}) = r(\tilde{\boldsymbol{A}}) < n$

  $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{\beta}$ 无解 $\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A}) < r(\tilde{\boldsymbol{A}})$

- $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{\beta}$ 有解 $\Leftrightarrow \boldsymbol{\beta}$ 可以由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性表示

2.6 向量空间

设 $\mathbf{K}$ 为数域, 由 $\mathbf{K}$ 中元素组成的 n 元有序数组称为 $\mathbf{K}$ 上的一个 n 维向量. $\mathbf{K}$ 上全体 n 维向量的集合记作 $\mathbf{K}^n$. 通常用小写希腊字母 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ 等表示向量.

$\mathbf{K}$ 上的 n 维向量可表成 $\mathbf{K}$ 上的 $1\times n$ 矩阵

$$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$$

也可将 n 维向量表成 $n\times 1$ 矩阵

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$$

2.6.1 基本性质

关于向量的加法和纯量乘法这两种运算具有以下基本性质

- 加法交换律: $\forall\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in\mathbf{K}^n$, $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$
- 加法结合律: $\forall\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in\mathbf{K}^n$, $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$
- 零元存在: 以 $\mathbf{0}$ 表 n 维零向量, $\forall\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{K}^n$, $\mathbf{0}+\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{0}=\boldsymbol{\alpha}$
- 负向量存在: $\forall\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{K}^n$,$\exists\boldsymbol{\beta}\in\mathbf{K}^n$ 使 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$
  $\boldsymbol{\beta}$ 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的负向量, 记作 $-\boldsymbol{\alpha}$
- $\forall\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{K}^n$, $1\cdot\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$
- $\forall k,l\in\mathbf{K}$, $\forall\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{K}^n$, $(k\cdot l)\boldsymbol{\alpha}=k(l\boldsymbol{\alpha})$
- $\forall k\in\mathbf{K}$, $\forall\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in\mathbf{K}^n$, $k(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta}$
- $\forall k,l\in\mathbf{K}$, $\forall\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{K}^n$, $(k+l)\cdot\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\alpha}$

2.6.2 线性子空间

$\boldsymbol{W}\subseteq\mathbf{K}$:

- $\forall\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in\boldsymbol{W}$, $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\in\boldsymbol{W}$
- $\forall\boldsymbol{\alpha}\in\boldsymbol{W}$ 和 $k\in\mathbf{K}$, $k\boldsymbol{\alpha}\in\boldsymbol{W}$

则称 $\boldsymbol{W}$ 是 $\mathbf{K}^n$ 的一个**子空间**.

$\mathbf{K}^n$ 中单独一个零向量构成 $\mathbf{K}^n$ 的一个子空间, 叫做**零子空间**, 记作 $\{\mathbf{0}\}$. $\mathbf{K}^n$ 也是 $\mathbf{K}^n$ 的子空间.

$\mathbf{K}^n$ 和零子空间叫做 $\mathbf{K}^n$ 的**平凡子空间**, 其余子空间都叫做**非平凡子空间**.

线性子空间的例子

$$\boldsymbol{W}=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\in\mathbf{K}^3\mid x_1-x_2+x_3=0\right\}=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_1+x_3\\x_3\end{pmatrix}\mid x_1,x_3\in\mathbf{K}\right\}\text{是}\mathbf{K}_3\text{的一个子空间.}$$

一般地,

$$\boldsymbol{W}=\{\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{K}^n\mid\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}\}\text{ 是齐次方程组全部解向量构成的}\textbf{解空间}.$$

2.6.3 构造子空间的一个常用方法

$\mathbf{\Sigma}$ 为由 $\mathbf{K}^n$ 中向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 组成的向量组.

$$\boldsymbol{L}\left(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s\right)=\left\{\sum_{i=1}^s k_i \boldsymbol{\alpha}_i \mid k_i \in \mathbf{K}, 1 \leqslant i \leqslant s\right\} \text{是} \mathbf{K}^n \text{的一个子空间.}$$

2.7 向量组的秩

2.7.1 线性组合

$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{s}}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbf{K}^n$, 若存在 $k_1, k_2, \cdots, k_{\boldsymbol{s}} \in \mathbf{K}$:

$$\boldsymbol{\beta}=\sum_{i=1}^s k_i \boldsymbol{\alpha}_i=k_1 \boldsymbol{\alpha}_1+k_2 \boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s \boldsymbol{\alpha}_s=\left(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\right)\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$$

则向量 $\boldsymbol{\beta}$ 是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{s}}$ 的一个线性组合. $k_1, k_2, \cdots, k_s$ 为线性组合的**系数**. 若 $\mathbf{\Sigma_1}$, $\mathbf{\Sigma_2}$ 中的向量能相互线性表示, 则这两个向量组等价, $\mathbf{\Sigma_1} \sim \mathbf{\Sigma_2}$.

2.7.2 线性相关与线性无关

$\mathbf{\Sigma}$ 是由 $\mathbf{K}^n$ 中向量向量组. 若存在数域 $\mathbf{K}$ 中一组不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_s$:

$$k_1 \boldsymbol{\alpha}_1+k_2 \boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s \boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$$

则 $\mathbf{\Sigma}$ 线性相关, 否则线性无关. 包含**零向量**的向量组必线性相关.

线性无关的充要条件

- 对于 n 个 n 维向量:

  组成矩阵行列式不为 0

  组成矩阵行满秩/列满秩/满秩

- 任何一个向量不是其余向量的线性组合
- **必要条件:** 向量个数不大于维数

2.8 极大线性无关组

$\mathbf{\Sigma}$ 是 $\mathbf{K}^n$ 中的一个向量组, $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r \in \mathbf{\Sigma}$:

- $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关
- $\forall \boldsymbol{\beta} \in \mathbf{\Sigma}$, $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\beta}$ 线性相关

则 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 为 $\mathbf{\Sigma}$ 的一个**极大线性无关组**. $r(\mathbf{\Sigma})=r$

$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 构成 $\mathbf{K}^n$ 的子空间 $\mathbf{\Sigma}$ 的一组**基**.

2.9 线性方程组的解

$\boldsymbol{W}=\{\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{K}^n \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}\}$ 的一组基是对应方程组的**基础解系**. 若 $\boldsymbol{A}$ 的阶数为 n, 秩为 r, 则基础解系中向量个数为 $n-r$, 记为 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\ldots,\boldsymbol{\eta}_{n-r}$, 方程组的**通解** $\boldsymbol{\eta}$ 可表示为它们的线性组合 $\boldsymbol{\eta}=\sum\limits_{j=1}^{n-r}k_j\boldsymbol{\eta}_j$.

非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}\neq 0$ 的**导出方程组**为齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$ 的解空间到 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}\neq 0$ 的解空间存在 $\boldsymbol{\eta}\to\boldsymbol{\gamma}_0+\boldsymbol{\eta}$ 的**双射**, 故非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 的解空间

$$\boldsymbol{W}=\left\{\boldsymbol{\gamma}_0+\sum_{j=1}^{n-r}k_j\boldsymbol{\eta}_j \mid k_j\in\mathbf{K},1\leqslant j\leqslant n-r\right\}$$

2.9.1 线性方程组的同解

- 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 阶实方阵, $\boldsymbol{B}$ 为 $n\times p$ 阶实方阵 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=0$ 与 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=0$ 同解 $\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{B})$
- 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n\times n$ 阶实方阵:

  若存在整数 m, 使得 $\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{\alpha}=0$, $\boldsymbol{A}^{m-1}\boldsymbol{\alpha}\neq 0$, 则向量组 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha},\cdots,\boldsymbol{A}^{m-1}\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关

  $\boldsymbol{A}^{n+1}\boldsymbol{x}=0$ 与 $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{x}=0$ 同解

  $r\left(\boldsymbol{A}^n\right)=r\left(\boldsymbol{A}^{n+1}\right)$
- 对于 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$, 存在整数 $1\leq i\leq n$, 使得 $r\left(\boldsymbol{A}^i\right)=r\left(\boldsymbol{A}^{i+1}\right)$, 且:

  若 $\boldsymbol{A}^k x=0$ 与 $\boldsymbol{A}^{k+1}x=0$ 同解, 那么 $\boldsymbol{A}^{k+1}x=0$ 与 $\boldsymbol{A}^{k+2}x=0$ 同解

  $r\left(\boldsymbol{A}^i\right)=r\left(\boldsymbol{A}^{i+1}\right)=\cdots=r\left(\boldsymbol{A}^n\right)=r\left(\boldsymbol{A}^{n+1}\right)=\cdots$

  设 $k=\min\left\{i \mid r\left(\boldsymbol{A}^i\right)=r\left(\boldsymbol{A}^{i+1}\right),i\geq 1\right\}$. 那么 k 恰等于:

  0 作为 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式 $m_{\boldsymbol{A}}(x)$ 根的**重数**

  $\boldsymbol{A}$ 的 **Jordan 标准形中**, 对角线为 0 的 Jordan 块的最大阶数

3 可逆矩阵

3.1 特征值与特征向量

$\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0},\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$, 则 λ 为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的**特征值**, $\boldsymbol{\alpha}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ 的**特征向量**, $f(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的**特征多项式**:

$$\begin{aligned} f(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}| &=\lambda^n-\left(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}\right)\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^n|A| \\ &=\left(\lambda-\lambda_1\right)\left(\lambda-\lambda_2\right)\cdots\left(\lambda-\lambda_n\right) \end{aligned}$$

3.1.1 特征值和特征向量求法

- 求 $f(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|$, 解方程 $(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$

3.1.2 特征值与特征向量的性质

- n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, 则 $tr(\boldsymbol{A}) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i$, $|\boldsymbol{A}| = \prod\limits_{i=1}^{n} \lambda_i$
- 属于不同特征值的特征向量线性无关
- $|\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}^T| = |\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}|$, 但 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^T$ 不一定具有相同的特征向量
- 若 λ 为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, $\boldsymbol{\alpha}$ 为属于 λ 的特征向量, 则

    $k\lambda$ 为 $k\boldsymbol{A}$ 的特征值, $\boldsymbol{\alpha}$ 为属于 $k\lambda$ 的特征向量

    λ^m 为 $\boldsymbol{A}^m$ 的特征值, $\boldsymbol{\alpha}$ 为属于 λ^m 的特征向量

    若 $\boldsymbol{A}$ 可逆:

    $\varphi(\lambda)$ 为 $\varphi(\boldsymbol{A})$ 的特征值, $\boldsymbol{\alpha}$ 为属于 $\varphi(\boldsymbol{A})$ 的特征向量, 其中 $\varphi(x)$ 为多项式

    $\frac{1}{\lambda}$ 为 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值, $\boldsymbol{\alpha}$ 为属于 $\frac{1}{\lambda}$ 的特征向量

    $\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}$ 为 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值,$\boldsymbol{\alpha}$ 为属于 $\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}$ 的特征向量

- 若 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{E}, \boldsymbol{A}$ 的特征值为 ± 1
- 若 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}$ 的特征值为 0 或 1
- 若 $\exists k, \boldsymbol{A}^k = \boldsymbol{O}, \boldsymbol{A}$ 的特征值为 0
- 若 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵, $\boldsymbol{A}$ 的特征值**模长**为 ± 1
  且若 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 属于 λ 的特征向量, $\overline{\boldsymbol{\alpha}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 属于 $\overline{\lambda}$ 的特征向量

3.1.3 几何重数和代数重数

几何重数 $\leqslant$ 代数重数, 特征值向量空间的秩 $\leqslant$ 维数

3.2 相似变换

n 阶方阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$, n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$, 则称方阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ **相似**, 记作 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$

3.2.1 相似矩阵的性质

- 相似矩阵有相同的特征值:

    迹, 秩, 行列式, 特征多项式都相同

    可逆性相同, 如可逆, 则逆矩阵相似

- 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵, 若 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$, 则 $k\boldsymbol{A} \sim k\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A}^m \sim \boldsymbol{B}^m$, $\boldsymbol{A}^T \sim \boldsymbol{B}^T$
- 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵, 且 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $\boldsymbol{AB} \sim \boldsymbol{BA}$
- 设 $\varphi(x)$ 为多项式, $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵, 若 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$, 则 $\varphi(\boldsymbol{A}) \sim \varphi(\boldsymbol{B})$
- 若 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{P} = \boldsymbol{B}_1$ 且 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{P} = \boldsymbol{B}_2$, 则 $\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2 \sim \boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{B}_2$,$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2 \sim \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_2$

3.2.2 对角化

设 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$, 它们分别属于特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 即

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_j = \lambda_j \boldsymbol{\alpha}_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant n$$

令

$$\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$$

则得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{AP} &= \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_n) = (\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1, \lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \lambda_n\boldsymbol{\alpha}_n) \\ &= (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{P}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}\end{aligned}$$

由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关知 $\boldsymbol{P}$ **可逆**, 因此得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

相似对角化的条件:

- 充要条件

  $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量

  $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值的代数重数等于几何重数

  $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形是对角阵, 有 n 个 Jordan 块, 所有 Jordan 块均为一阶

  $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式 $m_{\boldsymbol{A}(x)}$ 无重根

- 充分条件

  $\boldsymbol{A}$ 有 n 个不同的特征值

  $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶幂等矩阵

3.3 Jordan 标准形

$1 \leqslant i \leqslant s$, λ_i 为复数:

$$\boldsymbol{J_i} = \begin{pmatrix} \lambda_i & & & & \\ 1 & \lambda_i & & & \\ & 1 & \lambda_i & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & \lambda_i \end{pmatrix}_{n_i \times n_i}$$

的 n_i 阶方阵叫做 n_i 阶 **Jordan 块**, 由 Jordan 块组成的分块对角矩阵

$$\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{J}_1 & & & \\ & \boldsymbol{J}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{J}_s \end{pmatrix}$$

叫做 Jordan 标准形.

3.3.1 Jordan 标准形的性质

- m 阶 Jordan 块

$$\boldsymbol{J_0} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & & & \\ 1 & \lambda_0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda_0 \end{pmatrix}_{m\times m}$$

  的特征多项式为 $(\lambda-\lambda_0)^m$, 并且 $\boldsymbol{J}_0$ 不是 $m-1$ 次多项式 $(\lambda-\lambda_0)^{m-1}$ 的根, 即

$$(\boldsymbol{J}_0-\lambda_0\boldsymbol{E})^{m-1} \neq \boldsymbol{O}$$

- m 阶 Jordan 块

$$\boldsymbol{J}_0 = \begin{pmatrix} \lambda_0 & & & \\ 1 & \lambda_0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda_0 \end{pmatrix}_{m\times m}, \quad \boldsymbol{J}_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ 1 & \lambda_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda_1 \end{pmatrix}_{m\times m}$$

  为两个同阶的 Jordan 块, 若 $\lambda_0 \neq \lambda_1$, 则 $\boldsymbol{J}_0$ 与 $\boldsymbol{J}_1$ 不相似.

3.3.2 Jordan 标准形的意义

- 复数域 $\mathbf{C}$ 上每一个方阵 $\boldsymbol{A}$ 都相似于唯一的 Jordan 标准形, 不计 Jordan 块的顺序
- 每个 m 阶 Jordan 块对角线上的元素 λ_i 都是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 (代数重数为 m)
- 对角线上为 λ_i 的 Jordan 块数量等于特征值 λ_i 的几何重数

3.4 化零多项式与最小多项式

3.4.1 化零多项式

设 $\boldsymbol{A}$ 为数域 $\mathbf{K}$ 上的 n 阶方阵, $f(x)$ 为 $\mathbf{K}$ 上非零多项式. 若 $f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$, 则称 $f(x)$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的化零多项式.

$\boldsymbol{A}$ 的特征多项式

$$f(\lambda) = |\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}| = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

$$f(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{O}$$

$f(\lambda)$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的化零多项式, 可知任何 n 阶方阵存在一个不超过 n 次的化零多项式.

3.4.2 最小多项式

方阵 $\boldsymbol{A}$ 的次数最低的首项系数为 1 的化零多项式 $m_A(\lambda)$ 为其最小多项式.

基本性质

- 方阵 A 的特征值必为最小多项式 $m_A(x)$ 的根
- 方阵 $\boldsymbol{A}$ 的任意化零多项式都能被 $m_{\boldsymbol{A}}(\lambda)$ 整除:

  $f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$. 由带余除法可知, 存在多项式 $q(x)$ 和 $r(x)$ 使

  $$f(\lambda)=q(\lambda)\cdot m_{\boldsymbol{A}}(\lambda)+r(\lambda)$$

  其中 $r(\lambda)=0$ 或 $r(\lambda)$ 的次数小于 $m_{\boldsymbol{A}}(\lambda)$ 的次数. 由 $f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}, m_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$ 及 (3.4.1) 式得

  $$r(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$$

  若 $r(\lambda)\neq 0$, 则 $r(\lambda)$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 的化零多项式, 并且次数比 $m_{\boldsymbol{A}}(\lambda)$ 的次数低. 这是不可能的, 从而得

  $$f(\lambda)=q(\lambda)\cdot m_{\boldsymbol{A}}(\lambda)$$

- 方阵 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式必定存在且唯一:

  方阵 $\boldsymbol{A}$ 有化零多项式存在, 从而 $\boldsymbol{A}$ 有次数最低且首项系数为 1 的化零多项式即最小多项式存在. 设 $\boldsymbol{A}$ 有两个最小多项式 $m_1(\lambda)$ 与 $m_2(\lambda)$, 则 $m_1(\lambda)$ 与 $m_2(\lambda)$ 互相整除且首项系数相等, 因此必有

  $$m_1(\lambda)=m_2(\lambda)$$

- 分块对角矩阵

  $$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_s\end{pmatrix}$$

  则 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式为各块最小多项式的最小公倍式, 即 $m_{\boldsymbol{A}(x)}=[m_{\boldsymbol{A}_1}(x), m_{\boldsymbol{A}_2}(x),\ldots,m_{\boldsymbol{A}_s}(x)]$

- Jordan 标准形

  $$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{J}_1 & & & \\ & \boldsymbol{J}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{J}_s\end{pmatrix}\quad 其中, \boldsymbol{J_i}=\begin{pmatrix}\lambda_i & & & & \\ 1 & \lambda_i & & & \\ & 1 & \lambda_i & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & \lambda_i\end{pmatrix}_{n_i\times n_i}$$

  $\boldsymbol{J}$ 的最小多项式为

  $$m_{\boldsymbol{J}}(\lambda)=[(\lambda-\lambda_1)^{n_1},(\lambda-\lambda_2)^{n_2},\cdots,(\lambda-\lambda_s)^{n_s}]$$

3.5 特殊矩阵与相似标准形的应用

3.5.1 幂等矩阵

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵. 若 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$, 那么称 $\boldsymbol{A}$ 为幂等矩阵 (投影矩阵):

- $\boldsymbol{A}$ 的秩为 r, 则存在 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$:

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r & \\ & \boldsymbol{O}_{n-r}\end{pmatrix}$$

- $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=n$
- 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以相似对角化, 对角化以后, 对角线上 1 的数目等于 $r(\boldsymbol{A})$

3.5.2 方阵求幂

$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$, 其中

$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_m\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^n=\left(\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}\right)^n=\underbrace{(\boldsymbol{P\Lambda P^{-1}})(\boldsymbol{P\Lambda P^{-1}})\cdots(\boldsymbol{P\Lambda P^{-1}})}_{n\text{组}}=\boldsymbol{P\Lambda}(\boldsymbol{P^{-1}P})\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{P^{-1}P})\cdots(\boldsymbol{P^{-1}})\boldsymbol{P})\boldsymbol{\Lambda P^{-1}}$$

$$=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^n\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\lambda_1^n & & & \\ & \lambda_2^n & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_m^n\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}$$

3.5.3 幂零矩阵

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵. 若存在正整数 m, 使得 $\boldsymbol{A}^m=\boldsymbol{O}$, 那么称 $\boldsymbol{A}$ 为幂零矩阵, 使得 $\boldsymbol{A}^m=\boldsymbol{O}$ 的最小正整数 m 为 $\boldsymbol{A}$ 的幂零指数.

设幂零矩阵 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$:

- 存在列向量 $\boldsymbol{\alpha}$, 使得 $\boldsymbol{A}^{m-1}\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$
- 方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}+x_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}+x_3\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}+\cdots+x_m\boldsymbol{A}^{m-1}\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$ 只有零解
- 向量组 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha},\cdots,\boldsymbol{A}^{m-1}\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关

若 $\boldsymbol{A}$ 的幂零指数为 n, 列向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 满足 $\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{P}=\left(\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A}^{n-2}\boldsymbol{\alpha},\cdots,\boldsymbol{\alpha}\right)$ 是可逆矩阵.

若 $\boldsymbol{A}$ 为秩为 1 , 迹为 0 的方阵, 那么 $\boldsymbol{A}$ 是幂零指数为 2 的矩阵.

3.5.4 对合矩阵

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵. 若 $\boldsymbol{A}^2=E$, 那么称 $\boldsymbol{A}$ 为对合矩阵:

- 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{x}\neq 0$, 那么 $\boldsymbol{x}$ 是对应到特征值 1 的特征向量
- 若 $\boldsymbol{Ax}=-\boldsymbol{x}\neq 0$, 那么 $\boldsymbol{x}$ 是对应到特征值 -1 的特征向量
- $r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})+r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=n$
- 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以相似对角化

3.5.5 循环矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ \ldots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_3 & a_4 & a_5 & \cdots & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}, a_i \in \mathbf{R}$$

则 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶循环矩阵.

4 二次型与实对称矩阵

4.1 二次型

4.1.1 表示方法

平面上二次曲线的方程可表为二次齐次式:

数域 $\mathbf{K}$ 上含 n 个变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的二次齐次多项式

$$\begin{aligned} f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=a_{11}x_1^2 &+ 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\ &+ a_{22}x_2^2 + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\ &+ \cdots \\ &+ a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

为 $\mathbf{K}$ 上的一个 n 元**二次型**. 当 $\mathbf{K}$ 为实数域时, 称为**实二次型**.

只含平方项的二次型称为**标准二次型**:

$$f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{nn}x_n^2$$

如果标准二次型各项的系数为 $1,-1$ 或 0, 则称其为**规范二次型**:

$$f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_p^2-x_{p+1}^2-\cdots-x_r^2,\quad r\leqslant n$$

二次型的矩阵表示

$$
\begin{aligned}
&\text{设} a_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n),\ \text{则二次型可表为}\\
f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=&a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+\cdots+a_{1n}x_1x_n\\
&+a_{21}x_2x_1+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{2n}x_2x_n\\
&+\cdots\\
&+a_{n1}x_nx_1+a_{n2}x_nx_2+\cdots+a_{nn}x_n^2\\
=&\sum_{i=1}^{n}\sum_{j-1}^{n}a_{ij}x_ix_j
\end{aligned}
$$

$$
\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}
$$

$\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵, 且

$$
f=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}
$$

为二次型 f 的**矩阵表示式**, 称实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为二次型 f 的矩阵.

又称 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $r(\boldsymbol{A})$ 为 f 的**秩**, 记作 $r(f)$, 即

$$
r(f)=r(\boldsymbol{A})
$$

若 f 为标准二次型, 则 f 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为对角矩阵

$$
\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn}\end{pmatrix}
$$

若 f 为规范二次型, 则 f 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为

$$
\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_p & & \\ & -\boldsymbol{E}_{r-p} & \\ & & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}
$$

其中 $r=r(\boldsymbol{A})=r(f)$

4.1.2 线性替换与二次型

对 n 元二次型 $f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 存在**非奇异线性替换** $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ 将 $\boldsymbol{f}$ 化为标准二次型:

$$
f=\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}=b_{11}y_1^2+b_{22}y_2^2+\cdots+b_{\mathrm{nn}}y_n^2
$$

4.2 合同变换

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵, 若存在 n 阶**可逆矩阵** $\boldsymbol{C}$ 使 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$, 则称方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ **合同**

4.2.1 合同关系的性质

- 合同关系是**等价关系**:

  自反性: $\boldsymbol{A}$ 合同于 $\boldsymbol{A}$

  对称性: 若 $\boldsymbol{A}$ 合同于 $\boldsymbol{B}$, 则 $\boldsymbol{B}$ 也合同于 $\boldsymbol{A}$

  传递性: 若 $\boldsymbol{A}$ 合同于 $\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{B}$ 合同于 $\boldsymbol{C}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 也合同于 $\boldsymbol{C}$

- 若 $\boldsymbol{A}$ 合同于 $\boldsymbol{B}$, 则 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$

- 若 $\boldsymbol{A}$ 合同于 $\boldsymbol{B}$, 且 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵, 则 $\boldsymbol{B}$ 也为对称矩阵

- 对称矩阵可经合同变换化为对角阵

- 对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ **合同**的**充要条件**

  存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$ 使 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$

  $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 对应二次型可经非奇异线性替换互化

  $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的标准形有相同的**正惯性指数**和**负惯性指数**

4.3 正定二次型与正定矩阵

4.3.1 惯性指数与惯性定理

惯性定理

二次型经非奇异线性替换化为标准形, 在给定二次型的所有标准形中正项的项数都相同.

正惯性指数和负惯性指数

设 $f=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 为实二次型, $r(f)=r$, 经非奇异线性替换化 f 为标准形. 若 f 的标准形中有 p 个正项, 则称 p 为实二次型 f 与实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**正惯性指数**, 并分别称 $q=r-p$ 和 $s=p-q$ 为二次型 f 与实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**负惯性指数**和**符号差**.

相关结论

- 二次型的正惯性指数、负惯性指数和符号差与所作的非奇异线性替换无关

- 设 $f=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 为 n 元实二次型, $r(f)=r$, 则存在非奇异线性替换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ 将 f 化为规范形, 即

$$f \xlongequal{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}} y_1^2+y_2^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2,$$

  其中 p 为 f 的正惯性指数

- 两个 n 元实二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 与 $g=\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}$ 有相同的秩及相同的正惯性指数的充分必要条件为存在非奇异线性替换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$, 使

$$f=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \xlongequal{\boldsymbol{x}=C\boldsymbol{y}} \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}=g$$

- 任一 n 阶实对称矩阵都合同于合同标准形

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_p & & \\ & -\boldsymbol{E}_q & \\ & & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$$

  其中 p 和 q 分别为 $\boldsymbol{A}$ 的正惯性指数和负惯性指数, $p+q=r$

4.3.2 正定矩阵

n 元实二次型

$$f\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)=\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}$$

若对任意非零向量 $\boldsymbol{\alpha}=\left(c_1, c_2, \cdots, c_n\right)^T$, 都有

$$f\left(c_1, c_2, \cdots, c_n\right)=\boldsymbol{\alpha}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{\alpha}>0$$

则称二次型 f 为正定二次型, 其矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵. 若 $\boldsymbol{\alpha}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{\alpha} \geqslant 0$, 则称 f 为半正定二次型. 类似还有负定二次型, 不定二次型.

正定矩阵的充要条件

- f 的正惯性指数 $p=n$
- f 的规范形为 $z_1^2+z_2^2+\cdots+z_n^2$
- $\boldsymbol{A}$ 合同于单位阵 $\boldsymbol{E}$: 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{M}$ 使 $\boldsymbol{M}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{M}=\boldsymbol{E}$
  存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{M}^{-1}$: $\boldsymbol{C}^T \boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}$
- $\boldsymbol{A}$ 的各阶**顺序主子式**均大于零

半正定矩阵的充要条件

- n 元实二次型 $f=\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}$ 半正定 $\Leftrightarrow f$ 的正惯性指数 $p=r(f) \leqslant n$
- n 元实二次型 $f=\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}$ 不定 $\Leftrightarrow f$ 的正惯性指数 p 满足 $0<p<r(f)$
- 实二次型 f 负定 $\Leftrightarrow -f$ 正定
- 实二次型 f 半负定 $\Leftrightarrow -f$ 半正定

正定矩阵的性质

- 若 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 是正定矩阵, $\lambda \boldsymbol{A}+\mu \boldsymbol{B}$ 也是正定矩阵
- 若 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵, 则 $\boldsymbol{A}^2, \boldsymbol{A}^3, \ldots, \boldsymbol{A}^m$ 均为正定矩阵
- 若正定矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $\boldsymbol{A}^{-1}, \boldsymbol{A}^*$ 均为正定矩阵
- 若 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 实矩阵, 则 $r(\boldsymbol{A})=n$ 的充要条件是 $\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{A}$ 为正定矩阵
- 若 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 正定的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值均大于零

4.4 正交向量组与正交矩阵

4.4.1 内积的定义

在 n 维实向量空间 $\mathbf{R}^n$ 中, 设向量

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

称实数

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta}$$

为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的**内积**.

4.4.2 向量内积的性质

- 三大基本性质:

  对称性 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})$

  线性性 $(k\boldsymbol{\alpha}_1+l\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta})=k\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}\right)+l\left(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}\right)$

  正定性 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})\geqslant 0$, $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})=0$ 当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$

- $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中的向量, $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 与 $l_1,l_2,\cdots,l_t$ 为实数, 则

$$\left(\sum_{i=1}^{s} k_i\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\beta}_1\right)=\sum_{i=1}^{s} k_i\left(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\beta}_1\right)$$
$$\left(\sum_{i=1}^{s} k_i\boldsymbol{\alpha}_i,\sum_{j=1}^{t} l_j\boldsymbol{\beta}_j\right)=\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t} k_il_j\left(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\beta}_j\right)$$

模, 距离和单位向量

- 设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中的向量,

$$|\boldsymbol{\alpha}|=\sqrt{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}.$$

  为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的**模**

- 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中的向量, 则向量 $\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}$ 的**距离**

$$|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}|=\sqrt{(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})}$$

- 如果向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的模为 1, 则称 $\boldsymbol{\alpha}$ 为**单位向量**. 若 $\boldsymbol{\beta}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的任一非零向量, 则

$$\boldsymbol{\beta}_0=\frac{1}{|\boldsymbol{\beta}|}\boldsymbol{\beta}\text{是单位向量}$$

向量模的性质

- 正定性: $|\boldsymbol{\alpha}| \geqslant 0$, 且 $|\boldsymbol{\alpha}| = 0$ 当且仅当 $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$
- $|k\boldsymbol{\alpha}| = |k||\boldsymbol{\alpha}|$
- 三角不等式: $|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}| \leqslant |\boldsymbol{\alpha}| + |\boldsymbol{\beta}|$
- **Cauchy-Schwarz 不等式**: $|(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})| \leqslant |\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|$, 等号仅当 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 线性相关时成立

  若 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 线性相关, $\boldsymbol{\beta} = l\boldsymbol{\alpha}$, 则 $|\boldsymbol{\beta}| = |l||\boldsymbol{\alpha}|$, 因此

  $$|(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})| = |(\boldsymbol{\alpha},l\boldsymbol{\alpha})| = |l(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})| = |l||\boldsymbol{\alpha}|^2 = |\boldsymbol{\alpha}||l\boldsymbol{\alpha}| = |\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|, \text{等号成立}$$

  若 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 线性无关, 则对任意实数 t, 向量 $t\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta} \neq \mathbf{0}$, 因而

  $$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})t^2 - 2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})t + (\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}) = (\mathrm{t}\,\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}, t\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}) = |t\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}|^2 > 0$$

  $$\Delta = [-2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})]^2 - 4(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}) < 0$$

  于是 $|(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})| < |\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|$
- 设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的非零向量, 则向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的**夹角**

  $$\boldsymbol{\theta} = \arccos\frac{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{|\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|}, \quad 0 \leqslant \boldsymbol{\theta} \leqslant \pi$$

  当 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) = 0$ 时 $\boldsymbol{\theta} = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$, 此时称 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ **正交**

4.4.3 正交向量组

正交向量组中向量两两正交. 若这些向量都是单位向量, 则向量组是**标准正交向量组**. 如果这些向量还是向量空间 $\mathbf{R}^n$ 的一组基, 则该向量组为**标准正交基**.

向量空间 $\mathbf{R}^n$ 中, 正交向量组比线性无关.

向量组正交化方法: 斯密特正交化

设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s (s \geqslant 2)$ 是线性无关的向量组:

1. **正交化**

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\beta}_1 &= \boldsymbol{\alpha}_1, \\
\boldsymbol{\beta}_2 &= \boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1, \\
\boldsymbol{\beta}_3 &= \boldsymbol{\alpha}_3 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\boldsymbol{\beta}_s &= \boldsymbol{\alpha}_s - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1 - \cdots - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_{s-1})}{(\boldsymbol{\beta}_{s-1},\boldsymbol{\beta}_{s-1})}\boldsymbol{\beta}_{s-1}
\end{aligned}$$

$\boldsymbol{\beta}_1$ 与 $\boldsymbol{\beta}_2$ 正交, 再利用归纳法可得 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 是正交向量组

2. **单位化**

$$\boldsymbol{\eta}_i = \frac{1}{|\boldsymbol{\beta}_i|}\boldsymbol{\beta}_i (i = 1, 2, \cdots, s)$$

则 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_s$ 为标准正交向量组并且与 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 等价

$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 可以相互线性表示, 因此 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 等价, 从而 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_s$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 等价

4.4.4 正交矩阵

$\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实矩阵, 若 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组是标准正交向量组, 即

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$$

$\boldsymbol{A}$ 的列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 满足

$$(\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n)$$

则 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵.

正交矩阵结论

- n 阶实矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵的**充要条件**为 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$

  设 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$, 即

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$$

  则

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^T \\ \boldsymbol{\alpha}_2^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_n^T \end{pmatrix} (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^T\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_1^T\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_1^T\boldsymbol{\alpha}_n \\ \boldsymbol{\alpha}_2^T\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2^T\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_2^T\boldsymbol{\alpha}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_n^T\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_n^T\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n^T\boldsymbol{\alpha}_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_1) & (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2) & \cdots & (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_n) \\ (\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_1) & (\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2) & \cdots & (\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_1) & (\boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_2) & \cdots & (\boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_n) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

  若 n 维欧氏空间 $\boldsymbol{V}$ 的一组基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} (\varepsilon_1, \varepsilon_1) & (\varepsilon_1, \varepsilon_2) & \cdots & (\varepsilon_1, \varepsilon_n) \\ (\varepsilon_2, \varepsilon_1) & (\varepsilon_2, \varepsilon_2) & \cdots & (\varepsilon_2, \varepsilon_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\varepsilon_n, \varepsilon_1) & (\varepsilon_n, \varepsilon_2) & \cdots & (\varepsilon_n, \varepsilon_n) \end{pmatrix}$$

  为基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 的**度量矩阵**. 度量矩阵为正定矩阵

- $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵的**充要条件**是 $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^T$

- 若 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵, 则 $|\boldsymbol{A}| = \pm 1$
- 若 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵, 则 $\boldsymbol{A}^{-1}, \boldsymbol{A}^*$ 均为正交矩阵
- 若 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵, $\boldsymbol{A}$ 的特征值模长为 ± 1
  且若 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 属于 λ 的特征向量, $\overline{\boldsymbol{\alpha}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 属于 $\overline{\lambda}$ 的特征向量
- 若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为正交矩阵, 则 $\boldsymbol{AB}$ 也为正交矩阵

4.4.5 共轭矩阵

设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}$ 为复矩阵, $\overline{\boldsymbol{A}} = (\overline{a}_{ij})_{m\times n}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的共轭矩阵, 其中 $\overline{a}_{ij}$ 是 a_{ij} 的共轭复数:

$$\overline{k\boldsymbol{A}} = \overline{k}\overline{\boldsymbol{A}}, \quad \overline{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}} = \overline{\boldsymbol{A}} + \overline{\boldsymbol{B}}, \quad \overline{\boldsymbol{AB}} = \overline{\boldsymbol{A}}\overline{\boldsymbol{B}}$$

其中, $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为 $m \times n$ 复矩阵, k 为复数.

4.4.6 实对称矩阵的性质

- 实对称矩阵的特征值都是实数

  设 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵, $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 属于特征值 λ 的特征向量, 即 $\boldsymbol{A\alpha} = \lambda\boldsymbol{\alpha}$. 因为 $\overline{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{A}$, 且 $\overline{\boldsymbol{A\alpha}} = \overline{\lambda\boldsymbol{\alpha}} = \overline{\lambda}\overline{\boldsymbol{\alpha}}$. 所以

  $$\begin{aligned} \overline{\boldsymbol{\alpha}}^T\boldsymbol{A\alpha} &= \overline{\boldsymbol{\alpha}}^T(\boldsymbol{A\alpha}) = \lambda\overline{\boldsymbol{\alpha}}^T\boldsymbol{\alpha} \\ \overline{\boldsymbol{\alpha}}^T\boldsymbol{A\alpha} &= (\overline{\boldsymbol{A\alpha}})^T\boldsymbol{\alpha} = (\overline{\lambda}\overline{\boldsymbol{\alpha}})^T\boldsymbol{\alpha} = \overline{\lambda}\overline{\boldsymbol{\alpha}}^T\boldsymbol{\alpha} \end{aligned}$$

  故有

  $$(\lambda - \overline{\lambda})\overline{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha} = 0$$

  设 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T$, 由 $\boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{0}$, 知

  $$\overline{\boldsymbol{\alpha}}^T\boldsymbol{\alpha} = \sum_{i=1}^{n}\overline{a_i}a_i = \sum_{i=1}^{n}|a_i|^2 > 0$$

  其中 $|a_i|$ 是复数 a_i 的模 $(i = 1, 2, \cdots, n)$. 因此 $\lambda = \overline{\lambda}$, 即 λ 为实数

- 实对称矩阵的属于不同特征值的特征向量相互**正交**

  设 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵. $\boldsymbol{A\alpha}_1 = \lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{A\alpha}_2 = \lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2$, 其中 λ_1 和 λ_2 是 $\boldsymbol{A}$ 的两个不同的特征值. α_1 与 α_2 分别为属于 λ_1 与 λ_2 的特征向量, 由

  $$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}_1^T\boldsymbol{A\alpha}_2 &= \boldsymbol{\alpha}_1^T(\boldsymbol{A\alpha}_2) = \lambda_2\boldsymbol{\alpha}_1^T\boldsymbol{\alpha}_2 \\ \boldsymbol{\alpha}_1^T\boldsymbol{A\alpha}_2 &= (\boldsymbol{A\alpha}_1)^T\boldsymbol{\alpha}_2 = \lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1^T\boldsymbol{\alpha}_2 \end{aligned}$$

  知

  $$(\lambda_1 - \lambda_2)\boldsymbol{\alpha}_1^T\boldsymbol{\alpha}_2 = 0$$

  由于 $\lambda_1 \neq \lambda_2$, 所以一定有

  $$\boldsymbol{\alpha}_1^T\boldsymbol{\alpha}_2 = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2) = 0$$

  因此, 特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 正交

- 实对称矩阵正交相似于对角矩阵
- n 阶实对称矩阵有 n 个线性无关的实特征向量
- n 阶实对称矩阵有 n 个互相正交的单位实特征向量

4.4.7 正交相似标准形

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称矩阵, 则存在 n 阶正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$, 使得

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}, \qquad \boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 即

$$f=\boldsymbol{x}^{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\overset{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}}{=\!=\!=\!=}\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\cdots+\lambda_n y^2$$

4.4.8 对称矩阵 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{T}$ 和 $\boldsymbol{A}^{T}\boldsymbol{A}$

设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 阶实数矩阵

- $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{T}$ 和 $\boldsymbol{A}^{T}\boldsymbol{A}$ 都是对称矩阵
- 方程组 $\boldsymbol{A}^{T}\boldsymbol{A}x=0$ 和方程组 $\boldsymbol{A}x=0$ 是同解方程组
- $r(\boldsymbol{A})=r\left(\boldsymbol{A}^{T}\right)=r\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{T}\right)=r\left(\boldsymbol{A}^{T}\boldsymbol{A}\right)$
- 矩阵 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{T}$ 和 $\boldsymbol{A}^{T}\boldsymbol{A}$ 是半正定的
- 若 $\boldsymbol{A}$ 为列满秩矩阵, 那么 $\boldsymbol{A}^{T}\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵
- 若 $\boldsymbol{A}$ 为行满秩矩阵, 那么 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{T}$ 是正定矩阵

5 线性空间与线性变换

5.1 线性空间

5.1.1 定义

设 $\boldsymbol{V}$ 是一个非空集合, $\mathbf{K}$ 是数域. 在 $\boldsymbol{V}$ 的元素之间定义加法运算 $+$, 对任意两个元素 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in\boldsymbol{V}$, 有唯一的 $\boldsymbol{\delta}\in\boldsymbol{V}$ 与之对应, 则称 $\boldsymbol{\delta}$ 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的和, 记作 $\boldsymbol{\delta}=\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$. 并且加法运算 $+$ 满足:

- 交换律: $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$
- 结合律: $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$
- **零元**的存在性: V 中存在一个零元 $\mathbf{0}$, $\forall\boldsymbol{\alpha}\in\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{0}=\boldsymbol{\alpha}$
- **负元**的存在性: $\forall\boldsymbol{\alpha}\in\boldsymbol{V}$, $\exists\boldsymbol{\beta}\in\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0},\boldsymbol{\beta}$ 叫做 $\boldsymbol{\alpha}$ 的负元

在数域 $\mathbf{K}$ 和集合 $\boldsymbol{V}$ 之间还定义纯量乘法, 即 $\forall \boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{V}$ 和 $k \in K$, 有唯一的 $\boldsymbol{\eta} \in \boldsymbol{V}$ 与之对应, 称 $\boldsymbol{\eta}$ 为 k 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 的乘积, 记为 $\boldsymbol{\eta} = k\boldsymbol{\alpha}$, $\forall k, l \in \mathbf{K}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \boldsymbol{V}$, 满足:

- $1\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}$
- $k(l\boldsymbol{\alpha}) = l(k\boldsymbol{\alpha}) = (kl)\boldsymbol{\alpha}$
- $(k+l)\boldsymbol{\alpha} = k\boldsymbol{\alpha} + l\boldsymbol{\alpha}$
- $k(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) = k\boldsymbol{\alpha} + k\boldsymbol{\beta}$

则称集合 $\boldsymbol{V}$ 关于向量加法与纯量乘法组成数域 $\mathbf{K}$ 上的一个线性空间, 或称 $\boldsymbol{V}$ 为 $\mathbf{K}$ 上的一个线性空间. 当 $\mathbf{K}$ 为实数域时, 称 $\boldsymbol{V}$ 为实线性空间.

5.1.2 线性空间的简单性质

设 $\boldsymbol{V}$ 是数域 $\mathbf{K}$ 上的线性空间:

- 零元唯一, 记作 $\mathbf{0}$
- $\boldsymbol{V}$ 中元素 $\boldsymbol{\alpha}$ 的负元唯一, 记为 $-\boldsymbol{\alpha}$
- $\forall \boldsymbol{\alpha} \in$, 有 $0\boldsymbol{\alpha} = 0, (-1)\boldsymbol{\alpha} = -\boldsymbol{\alpha}$
- $\forall k \in \mathbf{K}$, 有 $k \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$
- 若 $k \cdot \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$, 则有 $k = 0$ 或 $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$

5.1.3 线性空间的例子

- 数域 $\mathbf{K}$ 上的全体 n 维向量的集合依照向量的加法和向量与数的纯量乘法构成数域 $\mathbf{K}$ 上的线性空间, 记作 $\mathbf{K}^n$
- 数域 $\mathbf{K}$ 上的全体 $m \times n$ 矩阵的集合关于矩阵的加法和矩阵的纯量乘法构成数域 $\mathbf{K}$ 上的线性空间, 记为 $\mathbf{K}^{m \times n}$
- 区间 $[a, b]$ 上的全体实连续函数关于函数的加法和函数与数的乘法构成实线性空间, 记为 $\mathbf{C}[a, b]$
- 复数域 $\mathbf{C}$ 关于复数的加法和实数与复数的乘法构成实数域 $\mathbf{R}$ 上的线性空间
- 数域 K 上全体一元多项式关于多项式的加法和数与多项式的乘法构成数域 K 上的线性空间, 记为 $\mathbf{K}[x]$. 特别地, 所有的实系数一元多项式依照多项式的加法和多项式与数的乘法构成实线性空间, 记为 $\mathbf{R}[x]$
- 区间 $[a, b]$ 上的全体 n 次可微函数关于函数的加法和数与函数的乘法构成实线性空间, 记为 $\mathbf{D}^{(n)}[a, b]$

5.2 线性子空间

设 $\boldsymbol{V}$ 是数域 $\mathbf{K}$ 上的线性空间, 如果 $\boldsymbol{V}$ 的非空子集合 $\boldsymbol{W}$ 对于 $\boldsymbol{V}$ 的加法和纯量乘法运算封闭, 则 $\boldsymbol{W}$ 是 $\boldsymbol{V}$ 的一个子空间.

5.2.1 证明步骤

1. $\boldsymbol{W} \subseteq \boldsymbol{V}$
2. $\boldsymbol{W}$ 对于 $\boldsymbol{V}$ 中的加法和数乘封闭
3. $\boldsymbol{W}$ 中零元和负元存在

5.2.2 子空间的例子

- 线性空间 $\boldsymbol{V}$ 的仅含零元素的子集合是 $\boldsymbol{V}$ 的一个子空间, 常称零子空间. V 本身也是 V 的一个子空间, 这两种子空间都称为 V 的平凡子空间
- 设不过原点的一个平面 $\boldsymbol{W}_1 = \{(x, y, z) \mid x, y \in \mathbf{R}, z \neq 0\}$, 则 $\boldsymbol{W}_1$ 不是 $\mathbf{R}^3$ 的子空间. 这是因为它对于 $\mathbf{R}^3$ 中的加法与数乘都不封闭. 例如

  $$(x, y, z) - (x, y, z) \notin \boldsymbol{W}_1 \qquad \mathbf{0} = 0 \cdot (x, y, z) \notin \boldsymbol{W}_1$$

  但是, 起点为点 $O'(0, 0, z)$ 的 $\boldsymbol{W}_1$ 上的平面向量的集合 $\boldsymbol{W}_1'$ 关于平面向量的加法与纯量乘法构成一个线性空间.

  上例说明, $\boldsymbol{V}$ 的子空间 $\boldsymbol{W}$ 的两种运算必须与 $\boldsymbol{V}$ 的两种运算相一致. 一般地, 把 $\boldsymbol{W}$ 看成一个子空间比把 $\boldsymbol{W}$ 自身看成一个线性空间更有用. 因为验证 $\boldsymbol{W}$ 是某个线性空间的一个**子空间**, 比验证 $\boldsymbol{W}$ 是一个线性空间简单得多
- 连续函数集合

  $$\boldsymbol{M} = \{f(x) \in C[a, b] \mid f(a) = 0\}$$

  是线性空间 $\boldsymbol{C}[a, b]$ 的子空间
- 连续函数集合 $\boldsymbol{M} = \{f(x) \in \boldsymbol{C}[a, b] \mid f(a) = k\}(k \neq 0)$ 不是线性空间 $\boldsymbol{C}[a, b]$ 的子空间
- n 阶上三角形实矩阵集合 '下三角形实矩阵集合和实对角矩阵集合都是由所有 n 阶方阵构成的线性空间 $\mathbf{R}^{n \times n}$ 的子空间
- 数域 $\boldsymbol{K}$ 上的次数小于 n 的一元多项式全体和零多项式组成的集合 $\boldsymbol{K}[x]_n$ 构成线性空间 $\boldsymbol{K}[x]$ 的子空间
- 数域 $\boldsymbol{K}$ 上的 n 次一元多项式全体构成的集合不能构成线性空间 $\boldsymbol{K}[x]$ 的子空间
- **构造线性子空间的重要方法**

  设 $\boldsymbol{V}$ 是数域 $\boldsymbol{K}$ 上的线性空间, $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m \in \boldsymbol{V}$, 集合

  $$\boldsymbol{L} = \{\boldsymbol{\beta} \mid \boldsymbol{\beta} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m, k_1, k_2, \cdots, k_m \in \boldsymbol{K}\}$$

  构成线性空间 $\boldsymbol{V}$ 的子空间, 称该子空间为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 生成的子空间, 记为

  $$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m)$$

5.3 同构

5.3.1 基, 维数与坐标

设 $\boldsymbol{V}$ 是数域 $\boldsymbol{K}$ 上的线性空间, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\in\boldsymbol{V}$, 若存在 $\boldsymbol{K}$ 中不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$, 则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ **线性相关**, 否则称 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ **线性无关**.

设 $\boldsymbol{V}$ 是数域 $\boldsymbol{K}$ 上的线性空间, 设 $n\geqslant 1$, 若 $\boldsymbol{V}$ 中存在一组向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 满足:

1. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关
2. $\boldsymbol{V}$ 中任一向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 均可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示

则称 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是线性空间 V 的一组**基底**或**基**. 称基底 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 所含向量的个数 n 为线性空间 V 的**维数** $\dim V=n$, 此时也称 V 是 K 上的 n 维线性空间 $\boldsymbol{V}_n(\boldsymbol{K})$ 或 $\boldsymbol{V}_n$.

- $\dim\{\mathbf{0}\}=0$
- 对整数 $n\geqslant 0, n$ 维线性空间称为**有限维线性空间**
- $\boldsymbol{V}$ 中含有无限多个线性无关的向量, 则称 $\boldsymbol{V}$ 为**无限维线性空间**

设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 $\boldsymbol{K}$ 上 n 维线性空间 V 的一组基, 且对任意 $\boldsymbol{\gamma}\in\boldsymbol{V}$, 有

$$\boldsymbol{\gamma}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n$$

令 σ 为 $\boldsymbol{V}$ 到 $\boldsymbol{K}^n$ 上的如下**映射**:

$$\sigma(\boldsymbol{\gamma})=\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\in\mathbf{K}^n$$

则称 $\sigma(\boldsymbol{\gamma})$ 为 $\boldsymbol{\gamma}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 下的**坐标**, $\sigma(\boldsymbol{\gamma})$ 是唯一的.

5.3.2 坐标变换

设 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 和 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$ 是 n 维线性空间 $\boldsymbol{V}$ 中的两组基, 且

$$\begin{cases}\boldsymbol{\eta}_1=c_{11}\boldsymbol{\varepsilon}_1+c_{21}\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+c_{n1}\boldsymbol{\varepsilon}_n\\\boldsymbol{\eta}_2=c_{12}\boldsymbol{\varepsilon}_1+c_{22}\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+c_{n2}\boldsymbol{\varepsilon}_n\\\cdots\cdots\cdots\\\boldsymbol{\eta}_n=c_{1n}\boldsymbol{\varepsilon}_1+c_{2n}\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+c_{nn}\boldsymbol{\varepsilon}_n\end{cases}$$

令

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}&\cdots&c_{1n}\\c_{21}&c_{22}&\cdots&c_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\c_{n1}&c_{n2}&\cdots&c_{nn}\end{pmatrix}$$

则

$$(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n) = (\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n)\,\boldsymbol{C}$$

称为**基变换公式**, 矩阵 $\boldsymbol{C} = (c_{ij})_{n\times n}$ 为由基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 到基 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n$ 的**过渡矩阵**.

$\boldsymbol{C}$ 可逆, 并且 $\boldsymbol{C} = (c_{ij})_{n\times n}$ 的第 j 列恰为 $\boldsymbol{\eta}_j$ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 下的坐标. 若向量 $\boldsymbol{\xi}$ 在这两组基下的坐标分别为

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

和

$$\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$$

则有**坐标变换公式**

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}' \qquad \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{x}$$

5.3.3 线性空间的同构

设 $\boldsymbol{V}$ 和 $\boldsymbol{V}'$ 是数域 $\mathbf{K}$ 上两个线性空间, 如果存在 $\boldsymbol{V}$ 到 $\boldsymbol{V}'$ 上的一个双射 σ:

- $\sigma(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) = \sigma(\boldsymbol{\alpha}) + \sigma(\boldsymbol{\beta}), \forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \boldsymbol{V}$
- $\sigma(k\boldsymbol{\alpha}) = k\sigma(\boldsymbol{\alpha}), \forall \boldsymbol{\alpha} \in V, \forall k \in \mathbf{K}$

则称 σ 为 $\boldsymbol{V}$ 到 $\boldsymbol{V}'$ 的一个**同构**.

5.3.4 同构映射的性质

- 设 $\mathbf{0}, \mathbf{0}'$ 分别为 $\boldsymbol{V}, \boldsymbol{V}'$ 的零向量, $\boldsymbol{\alpha}$ 为 $\boldsymbol{V}$ 中任意向量, 则

$$\sigma(\mathbf{0}) = \mathbf{0}', \quad \sigma(-\boldsymbol{\alpha}) = -\sigma(\boldsymbol{\alpha})$$

- 对任意 $\boldsymbol{\alpha}_i \in \boldsymbol{V}, k_i \in \mathbf{K}, 1 \leqslant i \leqslant r$, 都有

$$\sigma\left(k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{\alpha}_r\right) = k_1\sigma\left(\boldsymbol{\alpha}_1\right) + k_2\sigma\left(\boldsymbol{\alpha}_2\right) + \cdots + k_r\sigma\left(\boldsymbol{\alpha}_r\right)$$

- $\boldsymbol{V}$ 中元素 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ 象 $\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1), \sigma(\boldsymbol{\alpha}_2), \cdots, \sigma(\boldsymbol{\alpha}_r)$ 在 $\boldsymbol{V}'$ 中线性相关
- $\boldsymbol{V}$ 中元素 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关 $\Leftrightarrow$ 象 $\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1), \sigma(\boldsymbol{\alpha}_2), \cdots, \sigma(\boldsymbol{\alpha}_r)$ 在 $\boldsymbol{V}'$ 中线性无关
- $\boldsymbol{V}$ 中向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 是 V 的一组基 $\Leftrightarrow$ 象 $\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1), \sigma(\boldsymbol{\alpha}_2), \cdots, \sigma(\boldsymbol{\alpha}_r)$ 是 $\boldsymbol{V}'$ 的一组基
- 若 $\boldsymbol{W}$ 是 $\boldsymbol{V}$ 的子空间, 则 $\sigma(\boldsymbol{W})$ 是 $\boldsymbol{V}'$ 的子空间, 且 $\dim \sigma(\boldsymbol{W}) = \dim \boldsymbol{W}$

5.3.5 数域 $\mathbf{K}$ 上任意一个 n 维线性空间 $\boldsymbol{V}$ 均与 $\mathbf{K}^n$ 同构

取 $\boldsymbol{V}$ 的一组基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 与 $\mathbf{K}^n$ 中一组基 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$, 定义 $\boldsymbol{V}$ 到 $\mathbf{K}^n$ 上的映射 σ: $\forall\boldsymbol{\alpha}=\sum_{i=1}^n x_i\varepsilon_i$, 令

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha})=\sum_{i=1}^n x_i\boldsymbol{e}_i=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$$

σ 是一个同构映射. $\sigma(\boldsymbol{\alpha})=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$ 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的坐标 $\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{\alpha}}$. 记 $\boldsymbol{V}$ 中的元素 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的坐标为 $\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{\alpha}_1},\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{\alpha}_2},\cdots,\boldsymbol{X}_{\alpha_r}$, 根据 $\boldsymbol{V}$ 同构于 $\mathbf{K}^n,\sigma:\boldsymbol{\alpha}\to\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{\alpha}}$ 是同构映射:

- $\boldsymbol{V}$ 中元素 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ 其坐标向量 $\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{\alpha}_1},\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{\alpha}_2},\cdots,\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{\alpha}_s}$ 线性相关
- $\boldsymbol{V}$ 中元系 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关 $\Leftrightarrow$ 其坐标向量 $\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{\alpha}_1},\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{\alpha}_2},\cdots,\boldsymbol{X}_{\alpha_s}$ 线性无关
- $\boldsymbol{V}$ 中元素 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 为 $\boldsymbol{V}$ 的一组基 $\Leftrightarrow$ 其坐标向量 $\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{\alpha}_1},\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{\alpha}_2},\cdots,\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{\alpha}_n}$ 为 $\mathbf{K}^n$ 中的一组基, 即行列式
$$|(\boldsymbol{X}_{\alpha_1},\boldsymbol{X}_{\alpha_2},\cdots,\boldsymbol{X}_{\alpha_n})|\neq 0$$
- $\sigma\left(\boldsymbol{L}\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\right)\right)=\boldsymbol{L}\left(\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{\alpha}_1},\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{\alpha}_2},\cdots,\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{\alpha}_s}\right)$ 且 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 为 $\boldsymbol{L}\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\right)$ 的基 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{\alpha}_1},\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{\alpha}_2},\cdots,\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{\alpha}_s}$ 为 $\boldsymbol{L}\left(\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{\alpha}_1},,\boldsymbol{X}_{\alpha_2},\cdots,\boldsymbol{X}_{\alpha_s}\right)$ 的基. 故
$$\dim\boldsymbol{L}\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\right)=\dim L\left(\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{\alpha}_1},\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{\alpha}_2},\cdots,\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{\alpha}_s}\right)$$

5.4 线性变换

5.4.1 定义

设 $\boldsymbol{V}$ 是数域 $\mathbf{K}$ 上的线性空间, $\boldsymbol{V}$ 到自身的一个映射 $\mathscr{A}$ 为 $\boldsymbol{V}$ 的一个**变换**, 对任意 $\boldsymbol{\alpha}\in\boldsymbol{V}$, 都有唯一的向量 $\boldsymbol{\beta}\in\boldsymbol{V}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 对应, $\boldsymbol{\beta}$ 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 在变换 $\mathscr{A}$ 下的象, $\boldsymbol{\beta}=\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}$ 或 $\boldsymbol{\beta}=\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})$.

若 $\forall\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in\boldsymbol{V}$, $\forall k\in\mathbf{K},\mathscr{A}$:

- $\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})+\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta})$
- $\mathscr{A}(k\boldsymbol{\alpha})=k\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})$

则称 $\mathscr{A}$ 为线性空间 $\boldsymbol{V}$ 的一个线性变换.

5.4.2 线性变换的矩阵

设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 $\boldsymbol{V}$ 的一组基, $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 在线性变换 $\mathscr{A}$ 下的象为

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}\left(\varepsilon_1\right)=&a_{11}\varepsilon_1+a_{21}\varepsilon_2+a_{n1}\varepsilon_n\\
\mathscr{A}\left(\varepsilon_2\right)=&a_{12}\varepsilon_1+a_{22}\varepsilon_2+a_{n2}\varepsilon_n\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\mathscr{A}\left(\varepsilon_n\right)=&a_{1n}\varepsilon_1+a_{2n}\varepsilon_2+a_{nn}\varepsilon_n
\end{aligned}$$

令 $\mathscr{A}\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\right)$=$(\mathscr{A}\left(\varepsilon_1\right),\mathscr{A}\left(\varepsilon_2\right),\cdots,\mathscr{A}\left(\varepsilon_n\right))$:

$$\mathscr{A}\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\right)=\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\right)\boldsymbol{A},\quad \boldsymbol{A}=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

若向量 $\boldsymbol{\xi}$ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的坐标为

$$x=\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)^T$$

那么 $\boldsymbol{\xi}$ 的象 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\xi})$ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的坐标为 $\boldsymbol{Ax}$.

若

$$\begin{aligned}\mathscr{A}\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\right)&=\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\right)\boldsymbol{A}\\ \mathscr{A}\left(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n\right)&=\left(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n\right)\boldsymbol{B}\end{aligned}$$

且

$$\left(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n\right)=\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\right)\boldsymbol{C}$$

则

$$\begin{aligned}\mathscr{A}\left(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n\right)&=\mathscr{A}\left(\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\right)\boldsymbol{C}\right)=\mathscr{A}\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\right)\boldsymbol{C}\\ &=\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\right)\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}=\left(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n\right)\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{AC}\end{aligned}$$

即

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{AC}$$

5.4.3 其他线性变换

恒等变换 (单位变换):$\forall\boldsymbol{\alpha}\in\boldsymbol{V}$

$$I(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\alpha}$$

零变换:$\forall\boldsymbol{\alpha}\in\boldsymbol{V}$

$$0(\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}$$

$\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}$ 为 $\boldsymbol{V}$ 的两个线性变换. 令

$$\begin{aligned}&(\mathscr{A}+\mathscr{B})(\boldsymbol{\alpha})=\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})+\mathscr{B}(\boldsymbol{\alpha}), && \forall\boldsymbol{\alpha}\in\boldsymbol{V}\\ &(k\mathscr{A})(\boldsymbol{\alpha})=k(\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})), && \forall k\in\mathbf{K},\forall\boldsymbol{\alpha}\in\boldsymbol{V}\\ &(\mathscr{A}\mathscr{B})(\boldsymbol{\alpha})=\mathscr{A}(\mathscr{B}(\boldsymbol{\alpha})), && \forall\boldsymbol{\alpha}\in\boldsymbol{V}\end{aligned}$$

称 $\mathscr{A}+\mathscr{B}$ 为线性变换 $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}$ 的**和**, $k\mathscr{A}$ 为数 k 与线性变换 $\mathscr{A}$ 的**纯量积**, $\mathscr{A}\mathscr{B}$ 为线性变换 $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}$ 的**积**. $\mathscr{A}+\mathscr{B},k\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{A}\mathscr{B}$ 都是 $\boldsymbol{V}$ 的线性变换:

- $$\begin{aligned}(\mathscr{A}+\mathscr{B})(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})&=\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\mathscr{B}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})+\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta})+\mathscr{B}(\boldsymbol{\alpha})+\mathscr{B}(\boldsymbol{\beta})\\ &=(\mathscr{A}+\mathscr{B})(\boldsymbol{\alpha})+(\mathscr{A}+\mathscr{B})(\boldsymbol{\beta})\\ (\mathscr{A}+\mathscr{B})(k\boldsymbol{\alpha})&=\mathscr{A}(k\boldsymbol{\alpha})+\mathscr{B}(k\boldsymbol{\alpha})=k\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})+k\mathscr{B}(\boldsymbol{\alpha})\\ &=k(\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})+\mathscr{B}(\boldsymbol{\alpha}))=k(\mathscr{A}+\mathscr{B})(\boldsymbol{\alpha})\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}(k\mathscr{A})(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}) &= k(\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})) = k(\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})+\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta})) \\ &= k(\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}))+k(\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta})) = (k\mathscr{A})(\boldsymbol{\alpha})+(k\mathscr{A})(\boldsymbol{\beta})\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}(\mathscr{A}\mathscr{B})(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}) &= \mathscr{A}\mathscr{B}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}) = \mathscr{A}(\mathscr{B}(\boldsymbol{\alpha})+\mathscr{B}(\boldsymbol{\beta})) \\ &= \mathscr{A}(\mathscr{B}(\boldsymbol{\alpha}))+\mathscr{A}(\mathscr{B}(\boldsymbol{\beta})) = (\mathscr{A}\mathscr{B})(\boldsymbol{\alpha})+(\mathscr{A}\mathscr{B})(\boldsymbol{\beta}) \\ (\mathscr{A}\mathscr{B}(k\boldsymbol{\alpha})) &= \mathscr{A}(\mathscr{B}(k\boldsymbol{\alpha})) = \mathscr{A}(k\mathscr{B}(\boldsymbol{\alpha})) \\ &= k\mathscr{A}(\mathscr{B}(\boldsymbol{\alpha})) = k(\mathscr{A}\mathscr{B})(\boldsymbol{\alpha})\end{aligned}$$

5.4.4 线性变换的性质

- $\mathscr{A}(\mathbf{0})=\mathbf{0}, \mathscr{A}(-\boldsymbol{\alpha})=-\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})$
- 线性变换保持向量间的线性关系不变:$\forall \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m \in \boldsymbol{V}$, $\forall x_1, x_2, \cdots, x_m \in \mathbf{K}$ 都有
$$\mathscr{A}\left(x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_m\boldsymbol{\alpha}_m\right)=x_1\mathscr{A}\left(\boldsymbol{\alpha}_1\right)+x_2\mathscr{A}\left(\boldsymbol{\alpha}_2\right)+\cdots+x_m\mathscr{A}\left(\boldsymbol{\alpha}_m\right)$$
- 线性变换将线性相关的向量组变为线性相关的向量组

5.4.5 线性空间的值域和核

设 $\mathscr{A}$ 为线性空间 $\boldsymbol{V}$ 的线性变换, 令

$$\begin{gathered}\mathscr{A}(\boldsymbol{V})=\{\mathscr{A}(\boldsymbol{\xi}) \mid \boldsymbol{\xi} \in \boldsymbol{V}\} \\ \mathscr{A}^{-1}(\mathbf{0})=\{\boldsymbol{\xi} \in \boldsymbol{V} \mid \mathscr{A}(\boldsymbol{\xi})=\mathbf{0}\}\end{gathered}$$

$\mathscr{A}(\boldsymbol{V})$ 为线性变换 $\mathscr{A}$ 的值域 $\operatorname{Im}(\mathscr{A})$, $\mathscr{A}^{-1}(0)$ 为线性变换 $\mathscr{A}$ 的核 $\operatorname{Ker}(\mathscr{A})$, $\operatorname{Im}(\mathscr{A})$ 和 $\operatorname{Ker}(\mathscr{A})$ 为 $\boldsymbol{V}$ 的子空间.

$$\begin{gathered}r(\mathscr{A})=\operatorname{dim}(\operatorname{Im}(\mathscr{A}))\text{为线性变换}\mathscr{A}\text{的秩}, r(\mathscr{A})=r(\boldsymbol{A}) \\ r\left(\mathscr{A}^{-1}(\mathbf{0})\right)=\operatorname{dim}(\operatorname{Ker}(\mathscr{A}))\text{为线性变换}\mathscr{A}\text{的零度}, r\left(\mathscr{A}^{-1}(\mathbf{0})\right)=n-r(\boldsymbol{A})\end{gathered}$$

5.5 欧氏空间

5.5.1 定义

设 $\boldsymbol{V}$ 为实数域 $\mathbf{R}$ 上的一个线性空间. $\forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \boldsymbol{V}$, 都有 $\mathbf{R}$ 中唯一实数与之对应, 记作 $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$:

- 对称性 $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}), \forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \boldsymbol{V}$
- $(k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})=k(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma})+l(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}), \forall k, l \in \mathbf{R}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma} \in \boldsymbol{V}$
- 正定性 $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}) \geqslant 0$, 且 $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha})=0$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$

称 $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ 为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的**内积**, 实数域上线性空间 $\boldsymbol{V}$ 关于这样定义的内积构成一个 **Euclid 空间**或**欧氏空间**. 先前定义了向量的内积, 相应的向量空间 $\boldsymbol{V}$ 构成关于向量内积的欧氏空间.

6 附录

6.1 关于“任何”的说法

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实方阵:

- 对任何 n 维列向量 $x \in \mathbb{R}^n$, 都有 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$, 当且仅当 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$
- 对任何 n 阶实方阵 $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 都有 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$, 当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 是**数量矩阵**
- 对任何 n 维列向量 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, 都有 $x^T\boldsymbol{A}x = 0$, 当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 是**实反对称矩阵**
- 对任何 n 维列向量 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, 都有 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{Ax})$, 当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 是 **正交矩阵**
- 对任何 n 维列向量 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, 都有 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Ay}) = (\boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{y})$, 当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 是 **对称矩阵**
- 对任何 n 维列向量 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, 都有 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Ay}) = -(\boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{y})$, 当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 是**反对称矩阵**

6.2 利用两个多项式恒等

- **代数基本定理**: 任何复系数一元 n 次多项式方程在复数域上至少有一根 $(n \geq 1)$, 因此, n 次复系数多项式方程在复数域内有且只有 n 个根
- $f(x)$ 和 $g(x)$ 是两个复系数一元 n 次多项式, 存在 $n+1$ 个不同复数 $a_1, \ldots, a_{n+1}$ 使得 $f(a_i) = g(a_i)$, 那么 $f(x) \equiv g(x)$

  利用行列式给出一种证明: 设

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$$
$$g(x) = b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0$$

  满足 $f(x_1) = g(x_1), f(x_2) = g(x_2), \cdots, f(x_{n+1}) = g(x_{n+1}), x_i \neq x_j$, 则

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \cdots & x_{n+1}^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 - b_0 \\ a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ \vdots \\ a_n - b_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{O}$$

$$\text{而} \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \cdots & x_{n+1}^n \end{pmatrix} = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} (x_j - x_i) \neq 0, \text{故} \begin{pmatrix} a_0 - b_0 \\ a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ \vdots \\ a_n - b_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{O}$$

  即 $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \cdots, a_n = b_n$

- 设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是两个 n 阶复方阵, 则 $(\boldsymbol{AB})^* = \boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*$
- 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶幂零方阵, 幂零指数为 m. 若方阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$, 则 $|\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{B}|$