2018级第一学期《数学分析》（荣誉）（1）测验试题

参考解答

一、填空题（每小题4分，共20分）

1. “$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=+\infty$”的定义为：

$$\forall M>0，\exists \delta>0，\forall x\in(x_0-\delta,x_0)：\ f(x)>M$$

2. “数列$\{x_n\}$为基本列”的定义为：

$$\forall \varepsilon>0，\exists N\in\mathbb{N}，\forall m,n>N：|x_m-x_n|<\varepsilon$$

3. 设$x_n=\dfrac{(-1)^n}{n}+\dfrac{1+(-1)^n}{2}\ (n\in\mathbb{N})$，则$\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\{x_n\}=\underline{\dfrac{3}{2}}$，$\inf\limits_{n\in\mathbb{N}}\{x_n\}=\underline{-1}$.

4. 设$U(x,\delta)$表示以x为中心，$\delta(>0)$为半径的邻域，又指标集$\Lambda=[0,2]$，则

$$\bigcup_{x\in\Lambda}U\left(x,\frac{1}{2}\right)=\underline{\left(-\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right)}.$$

5. 若当$x\to0$时，$\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1+\tan x}\sim ax^b$，则常数$a=\underline{-\dfrac{1}{4}}$，$b=\underline{3}$.

二、单项选择题（每小题3分，共12分）

6. 函数$f(x)$在区间I上严格单调是其存在反函数$f^{-1}(x)$的 ……【 A 】

(A) 充分不必要条件.　　**(B)** 必要不充分条件.

(C) 充要条件.　　**(D)** 既非充分又非必要条件.

7. 设函数$f(x)=\dfrac{1+e^{\frac{1}{x}}}{1-e^{\frac{1}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\ (x\neq0)$，则$f(x)$在$x=0$处 ……【 A 】

(A)左、右极限都存在且相等.　　**(B)**左、右极限都存在，但不相等.

(C)左、右极限中有且仅有一个存在.　　**(D)**左、右极限都不存在.

8. 设$a_n>0\ (n\in\mathbb{N})$，下列命题中 ……【 A 】

I. 若$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=1$，则必有$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$.

II. 若$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$，则必有$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=1$.

(A) **I** 正确，**II** 不正确.　　　　(B) **I** 不正确，**II** 正确.

(C) **I** 和 **II** 都正确.　　　　(D) **I** 和 **II** 都不正确.

9. 若 $x_n>0\,(n\in\mathbb{N})$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=0$，下列断语中 ……【 C 】

I. 必有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.　　**II.** 必有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{n}=0$.　　**III.** 必有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}=0$.

(A) **I, II, III** 都正确.　　　　(B) **I, II, III** 都不正确.

(C) **I** 不正确，**II** 和 **III** 都正确.　　　　(D) **I** 和 **II** 都正确，**III** 不正确.

三、证明题（本题共 10 分）

10. 设 $x_n>0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A>0$，用"$\varepsilon-\mathbb{N}$"定义证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x_n}}=\dfrac{1}{\sqrt{A}}$.

【证】由保号性知：$\exists N_1\in\mathbb{N}$，$\forall n>N_1$：$x_n>\dfrac{A}{4}$；

又由条件知 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N_2\in\mathbb{N}$，$\forall n>N_2$：$|x_n-A|<\dfrac{A\sqrt{A}}{2}\varepsilon$.

令 $N=\max\{N_1,N_2\}$，$\forall n>N$：

$$\left|\frac{1}{\sqrt{x_n}}-\frac{1}{\sqrt{A}}\right|=\frac{|x_n-A|}{\sqrt{x_nA}(\sqrt{x_n}+\sqrt{A})}<\frac{2}{A\sqrt{A}}|x_n-A|<\varepsilon.$$

四、求下列极限（每小题 8 分，共 32 分）

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n\cdot\arctan n}$.

【解】对 $\forall n\in\mathbb{N}$ 有 $\sqrt[n]{\dfrac{\pi}{4}n}\le\sqrt[n]{n\cdot\arctan n}<\sqrt[n]{\dfrac{\pi}{2}n}$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{\pi}{4}n}=1=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{\pi}{2}n}$，由夹逼性知 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n\cdot\arctan n}=1$.

12. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{\cos x}-\cos x}{x^2}$.

【解】原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(\sqrt[3]{\cos x}-1\right)+(1-\cos x)}{x^2}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{\cos x}-1}{x^2}+\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{3}\cdot\frac{\cos x-1}{x^2}+\frac{1}{2}=-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$$

13. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\cdots+\sqrt{2n-1}}{n\sqrt{n}}$.

【解】令 $x_n=1+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{2n-1}$， $y_n=n\sqrt{n}$，则$\{y_n\}$严格增加且$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=+\infty$，又

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n-1}}{n\sqrt{n}-(n-1)\sqrt{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n-1}}{n(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})+\sqrt{n-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2-1/n}}{\sqrt{n}(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})+\sqrt{1-1/n}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

据 Stolz 定理知：原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

14. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\sin^2 x+\dfrac{x^2\mathrm{e}^x}{2}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$.

【解】原式$=\exp\lim\limits_{x\to 0}\left\{\dfrac{\sin^2 x+\dfrac{x^2\mathrm{e}^x}{2}}{1-\cos x}\right\}=\exp\lim\limits_{x\to 0}\left\{\dfrac{\sin^2 x+\dfrac{x^2\mathrm{e}^x}{2}}{\dfrac{x^2}{2}}\right\}$

$$=\exp\lim_{x\to 0}\left\{\frac{2\sin^2 x}{x^2}+\mathrm{e}^x\right\}=\mathrm{e}^3$$

五、证明题（本题共 8 分）

15. 若$\{x_n\}$为非无穷大数列，证明：$\{x_n\}$必含有有界子列.

【证】由条件知：$\exists M>0$，$\forall N\in\mathbb{N}$，$\exists n_N>N$：$|x_{n_N}|\le M$.

取 $N_1=1$，$\exists n_1>1$：$|x_{n_1}|\le M$；

取 $N_2=n_1$，$\exists n_2>n_1$：$|x_{n_2}|\le M$；

…，一般地，取 $N_k=n_{k-1}$，$\exists n_k>n_{k-1}$：$|x_{n_k}|\le M$；

由构造知$\{x_{n_k}\}$为$\{x_n\}$的有界子列.

六、证明题（本题共 10 分）

16. 设 $x_n=1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n}$ $(n\in\mathbb{N})$，证明：数列$\{x_n\}$收敛.

【证一】因为

$$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}}-2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<0$$

所以$\{x_n\}$单调减少. 又因为$\frac{1}{\sqrt{k}}>\frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}=2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$，所以

$$\begin{aligned}x_n&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}-2\sqrt{n}>2\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})-2\sqrt{n}\\&=2(\sqrt{n+1}-1)-2\sqrt{n}>-2\end{aligned}$$

即$\{x_n\}$有下界-2，据单调有界定理知$\{x_n\}$收敛.

【证二】因为

$$0<x_n-x_{n+1}=2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})-\frac{1}{\sqrt{n+1}}=\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}<\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

所以

$$\begin{aligned}|x_{n+p}-x_n|&=x_n-x_{n+p}=(x_n-x_{n+1})+(x_{n+1}-x_{n+2})+\cdots+(x_{n+p-1}-x_{n+p})\\&<\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{n+2}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{n+p-1}}-\frac{1}{\sqrt{n+p}}\right)\\&=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+p}}<\frac{1}{\sqrt{n}}\end{aligned}$$

故$\forall\varepsilon>0$，取$N=\left[\frac{1}{\varepsilon^2}\right]+1$，$\forall n>N$，$\forall p\in\mathbb{N}$：

$$|x_{n+p}-x_n|<\frac{1}{\sqrt{n}}<\varepsilon$$

据 Cauchy 收敛准则知$\{x_n\}$收敛.

七、证明题（本题共 8 分）

17. 设函数$f(x)$在$[a,b]$上定义且单调递增，又f的值域为区间$[f(a),f(b)]$，证明：对$\forall x_0\in[a,b]$，有$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

【证】不妨设$x_0\in(a,b)$，由于f在$U(x_0)$单调有界，故

$$\sup f\left(\mathring{U}_-(x_0)\right)=f(x_0-0)\le f(x_0)\le f(x_0+0)=\inf f\left(\mathring{U}_+(x_0)\right)$$

若结论不真，则有$f(x_0-0)<f(x_0+0)$. 由于

$$f(x)\begin{cases}\le f(x_0-0), & x<x_0\\ \ge f(x_0+0), & x>x_0\end{cases}$$

故$(f(x_0-0),f(x_0+0))$至多含f值域中的$f(x_0)$，从而f的值域非区间，矛盾.