期中复习

一、选择题

1. 设 A, B 都是 3 阶方阵, $|A|=-1$, $|B|=2$, 则 $|-3(A^{\mathrm{T}}B^{-1})^2A^*|=(\quad)$

   A. $\dfrac{1}{3}$　　B. $\dfrac{6}{5}$　　C. $-\dfrac{7}{4}$　　D. $-\dfrac{27}{4}$

2. 已知齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+\lambda x_2+\lambda^2 x_3=0 \\ x_1-x_2+x_3=0 \\ 2x_1+4x_2+8x_3=0 \end{cases}$$

   有非零解, 则 λ 的取值为 $(\quad)$

   A. 1 或 -2　　B. 1 或 2　　C. -1 或 2　　D. -1 或 -2

3. 设 A, B 都是 n 阶方阵, 若 $AB=O$, 则 $(\quad)$

   A. $A=O$ 或 $B=O$　　B. $A+B=O$

   C. $|A|=0$ 或 $|B|=0$　　D. $|A|+|B|=0$

4. 设 n 阶方阵 A 与 B 等价, 则 $(\quad)$

   A. $|A|=|B|$　　B. $|A|\neq|B|$

   C. $|A|\neq 0$ 当且仅当 $|B|\neq 0$　　D. $|A|=-|B|$

5. 设 A, B 都是 n 阶方阵, 则 $(\quad)$

   A. $|A+B|=|A|+|B|$　　B. $AB=BA$

   C. $|AB|=|BA|$　　D. $(A+B)^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$

6. 设 A, B, C 都是 n 阶方阵, 满足 $ABC = E$, 则 ( )

A. $ACB = E$　　B. $CBA = E$

C. $BAC = E$　　D. $BCA = E$

7. A 是 $m \times n$ 阶矩阵, C 与 n 阶单位矩阵 E_n 等价. $B = AC$, 若 $r(A) = r$, $r(B) = r_1$, 则 ( )

A. $r > r_1$　　B. $r < r_1$

C. $r = r_1$　　D. r 与 r_1 的关系依 C 而定

8. 分块矩阵 $P = \begin{pmatrix} E_n & \mathbf{0} \\ -\alpha^{\mathrm{T}} A^* & |A| \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^{\mathrm{T}} & 1 \end{pmatrix}$, 其中 A 是 n 阶可逆矩阵, α 是 n 维列向量, A^* 是 A 的伴随矩阵, E_n 是单位矩阵. 则 PQ 可逆的充分必要条件是 $\alpha^{\mathrm{T}} A^{-1} \alpha \neq$ ( )

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

9. 设 A, B 都是 n 阶非零矩阵, 若 $AB = O$, 则 A 和 B 的秩 ( )

A. 必有一个等于 0　　B. 都小于 n

C. 一个小于 n, 一个等于 n　　D. 都等于 n

10. 设 A 是 $n\,(n \geq 2)$ 阶可逆矩阵, A^* 是 A 的伴随矩阵, 则 ( )

A. $(A^*)^* = |A|^{n-1} A$　　B. $(A^*)^* = |A|^{n+1} A$

C. $(A^*)^* = |A|^{n-2} A$　　D. $(A^*)^* = |A|^{n+2} A$

11. 设 A 是 $n(n \geq 2)$ 阶可逆矩阵,交换 A 的第 1 行与第 2 行得到矩阵 B, 其中 A^*, B^* 分别是 A, B 的伴随矩阵, 则 ( )

A. 交换 A^* 的第 1 列与第 2 列得到矩阵 B^*

B. 交换 A^* 的第 1 行与第 2 行得到矩阵 B^*

C. 交换 A^* 的第 1 列与第 2 列得到矩阵 $-B^*$

D. 交换 A^* 的第 1 行与第 2 行得到矩阵 $-B^*$

12. 3 阶矩阵 $A = (a_{ij})_{3\times 3}$ 满足 $A^* = A^{\mathrm{T}}$, 其中 A^* 是 A 的伴随矩阵, A^{T} 是 A 的转置矩阵, 若 $a_{11} = a_{12} = a_{13} > 0$, 则 $a_{11} =$ ( )

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B. 3　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\sqrt{3}$

13. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2$ 都是 4 维向量, 且 4 阶行列式 $|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1| = m$, $|\alpha_1,\alpha_2,\beta_2,\alpha_3| = n$, 则 4 阶行列式 $|\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1,(\beta_1+\beta_2)| =$ ( )

A. $m+n$　　B. $-m-n$　　C. $n-m$　　D. $m-n$

14. 对任意实数 a,b,c, 下面线性无关的向量组是 ( )

A. $(a,1,2),(2,b,3),(0,0,0)$　　B. $(b,1,1),(1,a,3),(2,3,c),(a,0,c)$

C. $(1,a,1,1),(1,b,1,0),(1,c,0,0)$　　D. $(1,1,1,a),(2,2,2,b),(0,0,0,c)$

15. 向量组 $\alpha_1=(1,-1,2,4)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_2=(0,3,1,2)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_3=(3,0,7,14)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_4=(1,-2,2,0)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_5=(2,1,5,10)^{\mathrm{T}}$ 的极大线性无关组为 ( )

A. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$　　B. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$

C. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_5$　　D. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4,\alpha_5$

16. 已知 β_1,β_2 是非齐次线性方程组 $AX=b$ 的两个不同的解, α_1,α_2 是对应齐次线性方程组 $AX=\mathbf{0}$ 的基础解系, k_1,k_2 为任意常数, 则 $AX=b$ 的通解是 ( )

A. $k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1+\alpha_2)+\frac{\beta_1-\beta_2}{2}$　　B. $k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1-\alpha_2)+\frac{\beta_1+\beta_2}{2}$

C. $k_1\alpha_1+k_2(\beta_1+\beta_2)+\frac{\beta_1-\beta_2}{2}$　　D. $k_1\alpha_1+k_2(\beta_1-\beta_2)+\frac{\beta_1+\beta_2}{2}$

17. 已知 n 阶矩阵 A 的伴随矩阵 $A^*\neq O$, 若 ξ_1,ξ_2,ξ_3,ξ_4 是非齐次线性方程组 $AX=b$ 的互不相同的解, 则对应齐次线性方程组 $AX=\mathbf{0}$ 的基础解系 ( )

A. 不存在　　B. 仅含一个非零解向量

C. 含有两个线性无关的解向量　　D. 含有三个线性无关的解向量

18. 设 A 是 n 阶实矩阵, 则对于齐次线性方程组 (一) : $AX=\mathbf{0}$ 和 (二) : $A^{\mathrm{T}}AX=\mathbf{0}$, 必有 ( )

A. (二) 的解是 (一) 的解, (一) 的解是 (二) 的解

B. (二) 的解是 (一) 的解, (一) 的解不是 (二) 的解

C. (一) 的解是 (二) 的解, (二) 的解不是 (一) 的解

D. (一) 的解不是 (二) 的解, (二) 的解不是 (一) 的解

19. 设向量 β 可由 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示, 但不能由向量组 A : $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m-1}$ 线性表示, 记向量组 B : $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m-1},\beta$, 则 ( )

A. α_m 不能由 A 线性表示, 也不能由 B 线性表示

B. α_m 不能由 A 线性表示, 可由 B 线性表示

C. α_m 可由 A 线性表示, 也可由 B 线性表示

D. α_m 可由 A 线性表示, 不能由 B 线性表示

20. 设 n 维列向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\,(m<n)$ 线性无关, 则 n 维向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 线性无关的充分必要条件为 ( )

A. 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 能由向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 线性表示

B. 向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 能由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示

C. 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 与向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 等价

D. 矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$ 与矩阵 $B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)$ 等价

21. A 是 $m\times n$ 阶矩阵, E_m 是 m 阶单位矩阵. 若 $r(A)=m<n$, 则下述结论正确的是 ( )

A. A 的任意 m 个列向量必线性无关

B. A 的任意一个 m 阶子式不等于零

C. A 通过初等行变换可以化为 $(E_m\,|\,O)$ 的形式

D. 非齐次线性方程组 $AX=b$ 一定有无穷多解

22. A 是 n 阶矩阵, 若 $|A|=0$, 则 A 中 ( )

A. 必有一列元素全为 0

B. 必有两列元素对应成比例

C. 必有一列向量是其余列向量的线性组合

D. 任一列向量是其余列向量的线性组合

23. 矩阵 $\begin{pmatrix}1&b&1\\b&a&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}$ 相似, 则 a 和 b 取值分别为 ( )

A. $1,2$ B. $2,1$ C. $1,3$ D. $3,1$

24. 设 4 阶方阵 A 与 B 相似, 若 B 的特征值是 $1,-1,2,4$, 则 $|A^*|=$ ( )

A. -512 B. 16 C. 32 D. 64

25. 已知 $\xi=(1,1,-1)^{\mathrm{T}}$ 是矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{pmatrix}$ 的属于特征值 λ 的特征向量, 则 $\lambda=(\quad)$

A. -1　　B. -2　　C. -3　　D. -4

二、填空题

1. 求行列式 $D_n=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1&1\\0&0&\cdots&2&1\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&n-1&\cdots&0&1\\n&0&\cdots&0&1\end{vmatrix}=$_________.

2. 已知 4 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}3&0&4&0\\2&2&2&2\\0&7&0&0\\5&3&-2&2\end{vmatrix}.$$

设 M_{4j}, A_{4j} 分别是元素 a_{4j} 的余子式和代数余子式, 则 $\sum_{j=1}^{4}A_{4j}=$_________. $\sum_{j=1}^{4}M_{4j}=$_________.

3. 设 $A=(a_{ij})_{3\times3}$ 是 3 阶非零矩阵, 若 $a_{ij}+A_{ij}=0\,(i,j=1,2,3)$, 其中 A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式, 则 $|A|=$_________.

4. 设 A 为 m 阶方阵, B 为 n 阶方阵, 且 $|A|=a$, $|B|=b$, $C=\begin{pmatrix}O&A\\B&O\end{pmatrix}$, 则 $|C|=$_________.

5. n 阶矩阵 A 满足 $AA^{\mathrm{T}}=E_n$, $|A|<0$, 则 $|A+E|=$_________.

6. 两个实矩阵 $\begin{pmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&b&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 相似的充分必要条件为_________.

7. 已知 $A=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&-2&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$, 则 $A^3=$__________.

8. $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$, $n\geq 2$ 是正整数, 则 $A^n-2A^{n-1}=$__________.

9. 设 A, B 都是 n 阶方阵, 若 A, B, $A+B$ 都可逆, 则 $(A+B)^{-1}=$__________.

10. n 阶方阵 A 满足 $2A(A-E)=A^3$, 则 $(E-A)^{-1}=$__________.

11. 若 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&2&0\\3&4&5\end{pmatrix}$, 则 $(A^*)^{-1}=$__________.

12. 设 A, B 都是 n 阶方阵, A^*, B^* 分别是 A, B 的伴随矩阵, 令 $C=\begin{pmatrix}A&O\\O&B\end{pmatrix}$, 则 $C^*=$__________.

13. A 是 4×3 阶矩阵, $B=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&0\\-1&0&3\end{pmatrix}$, 若 $r(A)=2$, 则 $r(AB)=$__________.

14. 已知 A 是 4 阶不可逆矩阵, 则 $r(A^*)^*=$__________.

15. 若向量组 $\alpha_1=(1,2,-1,1)$, $\alpha_2=(2,0,t,0)$, $\alpha_3=(0,-4,5,-2)$ 的秩为 2, 则 $t=$__________.

16. A 是 3 阶矩阵, $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 是 3 阶可逆矩阵, 且 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$, 若 $Q=(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3)$, 则 $Q^{-1}AQ=$__________.

17. 3 阶实矩阵 $A=(a_{ij})_{3\times3}$ 满足 $AA^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}A=E_3$, 且 $a_{11}=1$, $b=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$, 则线性方程组 $AX=b$ 的解_________.

18. 已知非齐次线性方程组

$$\begin{cases} kx_1+x_2+x_3=1 \\ 3x_1+kx_2+3x_3=1 \\ -3x_1+3x_2+kx_3=1 \end{cases}$$

有唯一解, 则 k_________.

19. 已知线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2=-a_1 \\ x_2+x_3=a_2 \\ x_3+x_4=-a_3 \\ x_4+x_1=a_4 \end{cases}$$

有解, 则常数 a_1,a_2,a_3,a_4 应满足的条件为_________.

20. 设

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

其中 $a_i\neq a_j\,(\forall\, i\neq j)$, 则线性方程组 $A^{\mathrm{T}}X=b$ 的解是_________.

21. 已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是线性无关的, 令 $\beta_1=\alpha_1+\alpha_2$, $\beta_2=\alpha_2+\alpha_3$, $\beta_3=\alpha_3+\alpha_1$. 则向量组 β_1,β_2,β_3 之间的关系是_________.(填: **线性相关** 或 **线性无关**)

22. 若 n 阶矩阵 A 的各行元素之和均为零, 且 $r(A)=n-1$, 则齐次线性方程组 $AX=\mathbf{0}$ 的通解为_________.

23. 已知 3 阶方阵 A 的特征值为 $-1,0,1$, 令 $B = A^3 - 2A^2 + E$, 则 $|B| =$__________. $|B+E| =$__________.

24. $\alpha = (1,k,1)^{\mathrm{T}}$ 是矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵 A^{-1} 的特征向量, 则常数 $k =$__________.

25. 已知 3 阶方阵 A 的特征值为 $1,-1,0$, 对应的特征向量分别为

$$p_1 = (1,0,-1)^{\mathrm{T}},\ p_2 = (0,3,2)^{\mathrm{T}},\ p_3 = (-2,-1,1)^{\mathrm{T}},$$

求矩阵 $A =$__________.

一、选择题

1.
$$
\begin{aligned}
|-3(A^TB^{-1})^2A^*| &= (-3)^3|A|^2|B^{-1}|^2|A^*| \\
&= -27\times 1\times\frac{1}{4}\times(-1)\times\frac{1}{-1} = -\frac{27}{4}
\end{aligned}
\tag{9}
$$

选D.

2.
$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix}1 & \lambda & \lambda^2\\ 1 & -1 & 1\\ 2 & 4 & 8\end{vmatrix} &= 0\\
-8+4\lambda^2+2\lambda+2\lambda^2-8\lambda-4 &= 0\\
(\lambda-2)(\lambda+1) &= 0
\end{aligned}
\tag{10}
$$

选C.

3. $|AB|=0 \implies |A|=0$或$|B|=0$ 选C.

4. $r(A)=r(B) \implies |A|\neq 0 \Leftrightarrow |B|\neq 0$ 选C.

5. C

6. $A(BC)=E \implies A^{-1}=BC \implies BCA=E$ 选D.

7. C

8.
$$
\begin{aligned}
PQ &= \begin{bmatrix}A & \boldsymbol{\alpha}\\ \mathbf{0} & -\boldsymbol{\alpha}^TA^*\boldsymbol{\alpha}+|A|\end{bmatrix}\\
&= |A|\begin{bmatrix}\frac{A}{|A|} & \frac{\boldsymbol{\alpha}}{|A|}\\ \mathbf{0} & -\boldsymbol{\alpha}^TA^{-1}\boldsymbol{\alpha}+1\end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{11}
$$

由A可逆知选B

9. $r(AB)\geq r(A)+r(B)-n \implies r(A)+r(B)\leq n$ 选B.

10. $(A^*)^*=|A^*|(A^*)^{-1}=||A|A^{-1}||A^{-1}|A=|A|^{n-2}A$

11. $B^*=(E(1,2)A)^*=|E(1,2)A|(E(1,2)A)^{-1}=-|A|A^{-1}E^{-1}(1,2)=-A^*E(1,2)$

选C.

12. 设$A=[\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3]$，有$|A|A^{-1}=A^T \implies |A|E=A^TA$

$$
\begin{gathered}
\begin{bmatrix}|A| & & \\ & |A| & \\ & & |A|\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^T\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2^T\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_3^T\boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{\alpha}_1^T\boldsymbol{\alpha}_2 & \boldsymbol{\alpha}_2^T\boldsymbol{\alpha}_2 & \boldsymbol{\alpha}_3^T\boldsymbol{\alpha}_2\\ \boldsymbol{\alpha}_1^T\boldsymbol{\alpha}_3 & \boldsymbol{\alpha}_2^T\boldsymbol{\alpha}_3 & \boldsymbol{\alpha}_3^T\boldsymbol{\alpha}_3\end{bmatrix}\\
\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}_1^T\boldsymbol{\alpha}_1=|A|\\ \quad |A|^3=|A^TA|=|A|^2\end{cases}
\end{gathered}
\tag{12}
$$

从而$3a_{11}^2=|A|=1$，$a_{11}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

选A.

13. $|\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,(\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2)|=|\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1|+|\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_2|=(-1)^3m+(-1)^4n=-m+n$

选C.

14. $r\left(\begin{bmatrix}1 & a & 1 & 1\\ 1 & b & 1 & 0\\ 1 & c & 0 & 0\end{bmatrix}\right)=3$ 选C.

15.

$$[\boldsymbol{\alpha}_1 \quad \boldsymbol{\alpha}_2 \quad \boldsymbol{\alpha}_3 \quad \boldsymbol{\alpha}_4 \quad \boldsymbol{\alpha}_5] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 14 & 0 & 10 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \end{bmatrix} \tag{13}$$

选B.

16. 选B.

17. 由题知$\alpha_1 = \xi_1 - \xi_2, \alpha_2 = \xi_1 - \xi_3, \alpha_3 = \xi_1 - \xi_4$ 是 $AX = \mathbf{0}$的三个互不相同的解，从而 $r(A) < n$ 又由$A^* \neq O$ 知 $r(A) = n - 1$ 从而基础解系只有一个向量，选B.

18. $AX = \mathbf{0} \implies A^TAX = \mathbf{0}$ 显然成立，若$A^TAX = \mathbf{0}$则 $X^TA^TAX = \mathbf{0} \implies (AX)^TAX = \mathbf{0} \implies AX = \mathbf{0}$ 选A.

19. 选B.

20. 令$\alpha_1 = [1,0,0,0], \alpha_2 = [0,1,0,0], \beta_1 = [0,0,1,0], \beta_2 = [0,0,0,1]$，可知选D.

21. 选D.

22. 选C.

23. $a + 2 = 5$得$a = 3$ 选D.

24. $|A^*| = |A|^{n-1} = (-8)^3 = -512$ 选A

25. 由$A\xi = -\xi$得$\lambda = -1$ 选A.

二、填空题

1. $(-1)^{\frac{n(n+3)}{2}}(n-1)!(1 - \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i})$

2. 0 28

3. 与选择题12题类似的方法得 -1

4. $(-1)^{mn}ab$

5. $|A| = -1$，A的特征值只能为± 1, 从而$|A + E| = 0$

6. $a = 0$

7.

令$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

$$A^3 = \begin{bmatrix} B^3 & O \\ O & C^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{14}$$

8. 由6知A的特征值为$2,2,0$，对角化后得$A=\begin{bmatrix}0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & & \\ & 2 & \\ & & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}^T$

从而

$$\begin{aligned}A^n-2A^{n-1}&=A^{n-1}(A-2E)\\ &=\begin{bmatrix}0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2^{n-1} & & \\ & 2^{n-1} & \\ & & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}\\ &=O\end{aligned} \tag{15}$$

9. $A^{-1}(A^{-1}+B^{-1})B^{-1}$

10. 设$(E-A)^{-1}=A^2+\lambda A+\mu E$，解得$\lambda=-1,\mu=1$，从而$(E-A)^{-1}=A^2-A+E$

11. $\frac{1}{10}A$

12. $\begin{bmatrix}|B|A^* & O\\ O & |A|B^*\end{bmatrix}$

13. 2

14.

$$r(A^*)=\begin{cases}n, & r(A)=n\\ 1, & r(A)=n-1\\ 0, & otherwise\end{cases} \tag{16}$$

因此$r((A^*)^*)=0$

15. 3

16. α_1,α_2对应的特征值都为1，从而$Q^{-1}AQ=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$

17. 令$A=E_3$，解得$\boldsymbol{x}=b$

18. $k\notin\{0,-3,3\}$

19. $a_1+a_2+a_3+a_4=0$

20. 知A可逆，从而 $X=(A^T)^{-1}b=(\frac{1}{|A|}A^*)^Tb=\frac{1}{|A|}(A^*)^Tb$。利用代数余子式的性质不难得到$(A^*)^Tb=[1\quad 0\quad 0\quad \cdots\quad 0]^T$

21. 线性无关

22. 知基础解系只有一个向量，由各行元素之和为零知$[1\quad 1\quad 1\quad \cdots\quad 1]^T$为一个解，从而通解为$k[1\quad 1\quad 1\quad \cdots\quad 1]^T$其中$k$为任意常数.

23. B的特征值为-2，1，0，$|B+E|$的特征值为-1，2，1，从而$|B|=0$，$|B+E|=-2$

24. 利用$A\alpha=\lambda\alpha$解得$k=1$或-2

25. $A\begin{bmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & 3 & -1\\ -1 & 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ -1 & -2 & 0\end{bmatrix}$解得$A=\begin{bmatrix}-5 & 4 & -6\\ 3 & -3 & 3\\ 7 & -6 & 8\end{bmatrix}$