计算题

1. 已知A为三阶实对称矩阵，秩$r(A)=2$，$\alpha_1=(0,1,0)^T$，$\alpha_2=(-1,0,1)^T$，是A对应特征值$\lambda_1=\lambda_2=3$的特征向量，试求：

（1）A的另一个特征值λ_3及其特征向量α_3；　（2）矩阵A，矩阵A^n。

2. 已知3阶方阵A的特征值1，2，3对应的特征向量分别为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$。

(1) 将向量β用$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示；　(2)求$A^n\beta$，$n$为自然数。

其中：$\alpha_1=(1,1,1)^T$，$\alpha_2=(1,2,4)^T$，$\alpha_3=(1,3,9)^T$，$\beta=(1,1,3)^T$。

3. 设列向量$\alpha=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$是矩阵$A=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{pmatrix}$的对应特征值$\lambda$的一个特征向量.（1）求常数$\lambda,a,b$；　（2）试问：矩阵$A$能否相似于对角矩阵？　为什么？

4. 设n维行向量 $\alpha=(1,1,\cdots,1)$，n阶矩阵$A=E-\alpha^T\alpha$。

(1) 求矩阵A的特征值和特征向量；

(2) 问矩阵A是否可相似于对角阵？若能，求出可逆阵P和对角阵Λ，使$P^{-1}AP=\Lambda$。若不能，请说明理由。

5. 设实向量$\alpha=(a_1\quad a_2\quad a_3)^T$，其中$a_1\neq 0$，$\alpha^T\alpha=3$，矩阵$A=E-\alpha\alpha^T$

(1) 试说明矩阵A能相似于对角阵；　(2) 求可逆矩阵P，使$P^{-1}AP$为对角阵，并写出此对角阵；　(3) 求行列式$|A+E|$。

6. 设矩阵$A=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}5&-4\\2&-1\end{pmatrix}$，　(1) 求可逆阵$P$，使$P^{-1}AP$为对角阵；

(2) 求矩阵$B=27A^3+3A-E$；　(3) 求$\lim\limits_{n\to+\infty}A^n$。

7. 设$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}$，求：（1）可逆阵$P$，使$P^{-1}AP$为对角阵；（2）$A^{100}$。

8. 设A为三阶实对称矩阵，且满足$A^2+A-2E=0$ 已知A对应特征值$\lambda=1$的特征向量有$\alpha_1=(0,1,0)^T$，$\alpha_2=(1,0,1)^T$。 试求：矩阵A，A^n。其中n为自然数。

9. 设列向量$\alpha=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ 是矩阵$A=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{pmatrix}$ 的对应特征值λ的一个特征向量。

（1）求常数 λ,a,b；（2）试问：矩阵A能否相似于对角矩阵，为什么？

10. 设常数$k\neq 0$，向量$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\neq 0$，$\beta=(1,1,\cdots,1)$，矩阵$A=kE+\beta^T\alpha$。

试求：（1）行列式$|A|$；（2）矩阵A的特征值。

11. 设A为n阶方阵，满足$A^2+A-6E=0$。证明

（1）$r(A+3E)+r(A-2E)=n$；（2）A能相似于对角阵，并求行列式$|A^2-3E|$。

12. 已知矩阵$A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&y&1\\0&0&1&2\end{pmatrix}$有 1 个特征值为$3$。（1）试求：常数$y$，以及矩阵$(A^TA)$的特征值；

（2）试求：可逆矩阵P，使得矩阵$(AP)^T(AP)$为对角阵，并求出此对角阵。

13. 设A为 3 阶实对称矩阵，行列式 $|A|=0$，且$A\begin{pmatrix}0&1\\1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\\0&-1\end{pmatrix}$。又设$B$为对角阵，$P$为可逆阵，$P^{-1}AP=B$。试求：（1）矩阵$B$和$P$；（2）矩阵$A$。

14. 已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2-2x_2x_3+2x_3x_1$，求正交变换$x=Qy$，化$f(x_1,x_2,x_3)$为标准形，并写出正交变换$x=Qy$

15. 已知$A=\begin{pmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$，方程组$Ax=\beta$有无穷多解，试求：

（1）常数a的值；（2） 正交矩阵Q，使Q^TAQ为对角阵。

16. 求正交变换$x=Qy$，将实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+3x_2^2-4x_1x_2+x_3^2$ 化为标准形，并写出正交变换 $x=Qy$。

17. 设实二次型 $f(x_1\,,x_2\,,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+4x_1x_2+5x_3^2-4x_1x_3-8x_2x_3$ ，

求：正交变换$x=Qy$，将f化为标准型。

18. 设实二次型 $f(x_1\,,x_2\,,x_3)=(1-\lambda)x_1^2+(1-\lambda)x_2^2+2(1+\lambda)x_1x_2+2x_3^2$ ，

已知秩$r(f)=2$,求：（1）常数λ；　（2）正交变换$x=Qy$，将f化为标准型。

19. 设$A=\begin{pmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$，已知线性方程组$Ax=\beta$有解但不唯一。试求:

（1）a的值；　（2）正交矩阵Q,使得Q^TAQ为对角矩阵。

20. 设二次型$f=x_1^2+ax_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2ax_1x_3+2x_2x_3$，已知秩$r(f)=2$。试求:

（1）a的值；　（2）正交变换$x=Qy$化二次型f为标准型。

21. 设矩阵$A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&-1\\1&-1&2\end{pmatrix}$。求正交矩阵$Q$，使得$Q^TAQ$为对角阵。

22. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+ax_2^2+x_3^2+2bx_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$ 通过正交变换 $x=Qy$化为标准形 $f=y_2^2+4y_3^2$。试求:（1）常数a,b的值;（2）正交矩阵Q。

10. 设欧氏空间R^4中向量$\beta=(1,1,1,1)^T$，又设V是R^4中与β正交的向量的集合。

（1）证明V是R^4的子空间；　（2）试求V的一个标准正交基。

23. 已知二次型$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=(1-a){x_1}^2+(1-a){x_2}^2+2{x_3}^2+2(1+a)x_1x_2$的秩为 2。试求:

（1）常数a的值；　（2）正交变换$x=Qy$，把$f\left(x_1,x_2,x_3\right)$化成标准形。

24. 已知二次型$f(x_1,\ x_2,\ x_3)=x^TAx$ 经正交变换 $x=Qy$化为标准型 $y_1^2+y_2^2-2y_3^2$，且正交矩阵Q 的第三列为$(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})^T$。

（1）试求：正交矩阵Q 和实对称矩阵A；（2）证明：矩阵$B=A+3E$为正定矩阵。

25. 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3)=x_1^2+4x_2^2+x_3^2-4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3$。

（1）试求：正交变换 $x=Qy$ 化此二次型为标准型；

（2）试问：此二次型是否正定？为什么？

26. 设A为 3 阶方阵,A中每行元素之和为 3，且满足 $AB=O$，其中$B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\\ -2 & 0\end{pmatrix}$.

试求矩阵A.

27. 设三元实二次型$f(x)=x^TAx=ax_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2bx_1x_3\ (b>0)$.

28.已知二次型矩阵A特征值之和为 1，特征值之积为-12.

(1) 求a和b的值.

(2) 求正交替换$x=Py$将上述二次型化为标准形，并写出标准形.

29. 设A为 n 阶实方阵，$r(A)=r$.

(1) 试证：存在秩为r的$n\times r$阵H和秩为r的$r\times n$阵L，使得$A=HL$.

(2) 试证：存在秩为r的 n 阶幂等矩阵B和可逆矩阵C，使得$A=BC$.

(3) 若A可逆，则存在正交矩阵Q，和上三角矩阵R，使得$A=QR$.

30.设R^3的两个基$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$；$\beta_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\beta_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\beta_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

（1） 求由基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵P；

（2） 已知向量$\alpha=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，求向量$\alpha$在基 β_1,β_2,β_3 下的坐标；

(3) 求在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$和 β_1,β_2,β_3下有相同坐标的所有向量。

31. 已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 3 维线性空间V的一个基，且

$$\beta_1=\alpha_1,\qquad \beta_2=-2\alpha_2+\alpha_3,\qquad \beta_3=\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3。$$

（1）求由基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵P；

（2）设向量 $\alpha=2\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3$，求 α 在基 β_1,β_2,β_3 下的坐标

32. 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是实数域上的线性空间$V$的一个基，向量组

$$\beta_1=\alpha_1,\beta_2=\alpha_1+\alpha_2,\cdots,\beta_n=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n。$$

(1) 证明$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$也是$V$的一个基，并求出由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$到$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$的过渡矩阵$C$；

(2) 设向量$\alpha = n\alpha_1 + (n-1)\alpha_2 + \cdots + 2\alpha_{n-1} + \alpha_1$，求$\alpha$在基$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$下的坐标；

(3) 设V上的线性变换A：$\mathrm{A}(\alpha_i) = \beta_i \quad i = 1, 2, \cdots, n$，求$\mathrm{A}$在基$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$下的矩阵$A$以及$\mathrm{A}(\alpha)$在$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$下的坐标$y$。

33. 设R^3的基为 $\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\beta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\beta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 。

(1) 试由$\beta_1, \beta_2, \beta_3$构造$R^3$的一个标准正交基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$；

(2) 求由基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的过渡矩阵P；

(3) 已知向量$\alpha = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3$，求向量$\alpha$在基$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$下的坐标。

34. 设$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & a & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，已知存在$3 \times 2$实矩阵$B \neq 0$，使$AB = 0$。（1）求常数$a$；（2）问满足$AB = 0$的所有实矩阵是否构成$R^{3\times 2}$的子空间？若是，写出它的一个基。若不是，请说明理由。

35. 已知线性空间R^3的基$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$到基$\beta_1, \beta_2, \beta_3$的过渡矩阵为$P$，且

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

试求: (1) 基$\beta_1, \beta_2, \beta_3$; (2) 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下有相同坐标的全体向量。

36. 已知$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$是线性空间$V$的一个基，且

$$\beta_1 = \alpha_1, \quad \beta_2 = -2\alpha_2 + \alpha_3, \quad \beta_3 = \alpha_1 + \lambda\alpha_2 - \alpha_3; \quad \alpha = 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3。$$

（1）问λ取何值时，$\beta_1, \beta_2, \beta_3$也是$V$的基？ （2）求$\alpha$在基$\beta_1, \beta_2, \beta_3$下的坐标。

37. 已知向量空间R^3的两个基为

$$(a)\ \ \alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \ \alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\ \ \alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\text{。及 } (b)\ \beta_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\ \ \beta_2=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix},\ \ \beta_3=\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix},$$

(1)求由基(a)到基(b)的过渡矩阵A;(2)求在基(a)和基(b)下有相同坐标的全体向量。

38. 已知向量空间R^3的两个基为

$$(a)\ \ \alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\ \alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\text{。及 } (b)\ \beta_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\ \beta_2=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix},\ \beta_3=\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}\text{。}$$

向量$\alpha=\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3$。试求:(1)基$(a)$到基$(b)$的过渡矩阵$A$;(2)$\alpha$在基$(b)$下的坐标$y$。

证明题

1. 设A，B是n阶实矩阵,A的特征值互异。证明:矩阵$AB=BA$的充分必要条件为A的特征向量都是B的特征向量。

2. 设A，B是n阶矩阵, $f(\lambda)=|\lambda E-B|$是B的特征多项式。证明: 矩阵$f(A)$可逆的充分必要条件为B的特征值都不是A的特征值

3. 设A为n阶矩阵，且 $A^2-8A+15E=0$。(1) 证明秩$r(A-3E)+r(A-5E)=n$；

   (2) 证明A可相似于对角阵；　(3) 求行列式$|A+4E|$。

4. 设$A=(a_{ij})_{n\times n}$为实矩阵，A^T为A的转置矩阵，A的迹为$tr(A)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$。证明：

（1）　若AA^T的迹$tr(AA^T)=0$，则$A=0$；　（2）若$A^2=AA^T$，则A为实对称阵。

5. 已知矩阵A,B为n阶正定矩阵,证明:

   （1）　矩阵AB的特征值都大于零；　（2）若$AB=BA$，则AB为正定矩阵。

6. 设n阶方阵$A=E-\alpha\alpha^T$,其中$\alpha\neq 0$是n维列向量,证明:

   （1）$A^2=A$的充要条件为$\alpha^T\alpha=1$；　（2）当$\alpha^T\alpha=1$时，矩阵A不可逆。

7. 设A，B是n阶正定矩阵，AB是实对称矩阵。证明: 矩阵AB是正定矩阵。

8. 设α_1，α_2，α_3是n维非零实向量，$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$，$k_1$，$k_2$为使得$\beta\neq 0$的任意常数。

   以下结论若正确，请证明；若不正确，请举出反例。

   (1)　若α_3与α_1正交，且α_3与α_2也正交，则α_3与β正交。

   (2)　若α_3与α_1线性无关，且α_3与α_2也线性无关，则α_3与β线性无关。

9. 设A，B为n阶实对称矩阵，α为任一n维实列向量。试证:

   (1) 若$\alpha^TA\alpha=0$，则A=0；(2) 若$\alpha^TA\alpha=\alpha^TB\alpha$，则$A=B$。

10. 设A实非零反对称矩阵，证明:（1）A^2是半负定矩阵；（2）　行列式$|E-A^2|>1$。

11. （1）试叙述实矩阵A为正交矩阵的定义；（2）证明：n阶实矩阵A是正交矩阵的充分必要条件为，在欧氏空间中对任意n维列向量α，内积$(A\alpha, A\alpha)=(\alpha, \alpha)$。