上 海 交 通 大 学 试 卷（ A 卷）

（ 2019 至 2020 学年 第 2 学期 ）

班级号 ______________ 学号 ______________ 姓名 ______________

课程名称 数学分析（II） 成绩 ______________

主要解析 谭 宇 试题重制 叶昊宇

审核补充 邹嘉阳 审核排版 仲 泰

一、判断题（每题 6 分，共 30 分）（正确的打√，并简要陈述理由，错误的打×，并举出反例）

1. 设D为平面上的区域(连通开集)，P，Q在D上具有连续偏导数，若在D内成立$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，

则第二类曲线积分与路径无关.

解：

错误，必须为单连通区域.

反例：经典的挖洞题：$\displaystyle\oint_{\Gamma}\frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$，其中$\Gamma$是单位圆的边，区域$D=\{(x,y):0<x^2+y^2<2\}$，

若与路径无关，则该积分为0. 但是作极坐标代换得到：

$$I=\int_0^{2\pi}(\cos^2\theta+\sin^2\theta)\mathrm{d}\theta=2\pi$$

2. 设$F_1,F_2\in\mathbb{R}^2$都是闭集，且$F_1\cap F_2=\varnothing$，则必存在两个开集O_1,O_2使得$F_{\mathrm{i}}\subset O_{\mathrm{i}}$，$\mathrm{i}=1,2,\ldots$且

$O_1\cap O_2=\varnothing$.

解：

错误. 我们有结论：如果闭集F，紧集（有界闭集）B，则若$F\cap B=\varnothing$，则$\rho(F,B)>0$，则

存在两个开集$O_1\supset F,O_2\supset B$，使得$O_1\cap O_2=\varnothing$. 反例：取

$$F_1=\{(x,y):y=0\},F_2=\left\{(x,y):y=\frac{1}{x}\right\}$$

则对于任意的开集$O_1\supset F_1$，恒有$O_1\cap F_2\neq 0$，这是因为$\rho(F_1,F_2)=0$.

3. 面积为0的集合没有内点.

解：

正确. 这里我们假定了如下的面积定义：对于区域D，若常值函数 1 在D上可积，则称D的面积为：$m(D)=\int_D 1\,\mathrm{d}\sigma$. 考虑反证法：若存在内点$x_0$，则存在$r>0$，使得开球$B(x_0,r)\subset D$，从而有：

$$0=\int_D 1\,\mathrm{d}\sigma \geqslant \int_{B(x_0,r)} 1\,\mathrm{d}\sigma=\pi r^2>0$$

矛盾！

4. 在D上内闭一致收敛的函数序列必在D上一致收敛.

解：

错误. 反例：考虑函数列$f_n(x)=x^n \to f(x)=0$在$(0,1)$上的一致收敛性.对于任意的$x\in[M,1-M],\forall M\in\left(0,\frac{1}{2}\right]$，均有：

$$f_n(x)\leqslant(1-M)^n \to 0(n\to\infty)$$

但是，取$x=1-\frac{1}{n}$，则$f_n\left(1-\frac{1}{n}\right)=\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \to \mathrm{e}^{-1}\neq 0(n\to\infty)$

5. 任意阶可导的函数的Taylor 级数一定能收敛于函数本身.

解：

错误. 反例：$f(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0\end{cases}$，而其Taylor 级数恒为$0$.

二（10 分）假设Σ是下半球面：$x^2+y^2+z^2=1(z\leq 0)$.请分别计算第一类曲面积分$\iint_\Sigma \mathrm{d}S$和第二类曲面积分$\iint_\Sigma \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$（这里取方向朝下）.

解：

第一类曲面积分表示球的半表面积，从而直接得到：

$$\int_{\Sigma}\mathrm{d}S=2\pi$$

对于第二类曲面积分，直接向xOy平面投影即可得到：

$$\int_{\Sigma}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-\int_{D}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-\pi$$

其中$D=\{(x,y):x^2+y^2\leqslant 1\}$

三（10 分）考虑第二类曲面积分

$$\int_{\Gamma}(2x\cos(xy)-x^2y\sin(xy))\,\mathrm{d}x-x^3\sin(xy)\,\mathrm{d}y$$

（1）证明此曲面积分与路径无关；

（2）计算原函数.

解：

（1）证明：注意到：

从而原积分与路径无关.

（2）由（1）中所凑全微分知：原函数为$U=x^2\cos xy+C$

四（10 分）证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^2x^2}$在$[0,1]$上不一致收敛.

证明：

取$x=\frac{1}{n}$，即可得到：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{n}}{1+n^2\cdot\frac{1}{n^2}}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=+\infty$$

从而原级数在$[0,1]$上不一致收敛.

五（10 分）设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数，且有 $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2}$，$x\in[0,2\pi)$，求其Fourier 级数，

并求其Fourier 级数的和函数.

解：

有啥办法嘛，老老实实展就对了. 记

$$f(x)\sim a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx$$

则有：

$$\begin{aligned}a_0&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\,\mathrm{d}x=0\\a_n&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cdot\cos nx\,\mathrm{d}x=0\\b_n&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cdot\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\end{aligned}$$

从而得到：

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nx$$

由Dirichlet 收敛定理，连续函数的傅里叶级数收敛于本身，且注意到边界处取平均值（或者直接单独考虑辣），从而得到：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=\begin{cases}\dfrac{\pi-x}{2}, & x\in(0,2\pi)\\0, & x=0\end{cases}$$

六（15 分）设 Σ 是光滑闭曲面，所围区域为 Ω，$\vec{n}$ 为 Σ 上的单位外法向量，(x_0,y_0,z_0) 为 Ω 内固定一点，$(x,y,z)\in\Sigma$，$\vec{r}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$，证明

$$\iint_{\Sigma}\cos(\vec{n},\vec{r})\,\mathrm{d}S=2\iiint_{\Omega}\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{|\vec{r}|}$$

证明：

注意到$\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r})=\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}}{\|\boldsymbol{r}\|}$，利用高斯定理即可得到：

$$\int_{\Sigma}\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r})\mathrm{d}S=\int_{\Sigma}\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}}{\|\boldsymbol{r}\|}\mathrm{d}S=\int_{\Sigma}\frac{\boldsymbol{r}}{\|\boldsymbol{r}\|}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\xlongequal{\text{Gauss}}\int_{\Omega}\nabla\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{\|\boldsymbol{r}\|}\mathrm{d}V=2\int_{\Omega}\frac{\mathrm{d}V}{\|\boldsymbol{r}\|}$$

七（15 分）证明：设$\dfrac{1}{1-x-x^2}$的Maclaurin级数为$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，则$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_na_{n+2}}$收敛.

证明：

记$f(x)=\dfrac{1}{1-x-x^2}$，则$f(0)=1$. 事实上，这是Fibonacci数列的生成函数（或称为母函数），若记$a_n=\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$，我们必有$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n,a_0=a_1=1$. 在这个结论的前提下，易知$a_n\to\infty$，从而有：

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n(a_n+a_{n+1})}&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_n+a_{n+1}}\right)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+2}}\right)\\&=\frac{1}{a_0}+\frac{1}{a_1}=2\end{aligned}$$

从而我们只需要补证$f(x)=\dfrac{1}{1-x-x^2}$是$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n,a_0=a_1=1$的母函数，也即求出$f(x)$的幂级数展开即可. 计算易得$f(0)=f^{(1)}(0)=1$，变形得到：

$$(1-x-x^2)f(x)=0$$

两边同时对x求n阶导：

$$(1-x-x^2)f^{(n)}(x)+C_n^1(-1-2x)f^{(n-1)}(x)+C_n^2(-2)f^{(n-2)}(x)=0$$

代入$x=0$得到：

$$f^{(n)}(0)=nf^{(n-1)}(0)+n(n-1)f^{(n-2)}(0)$$

两边同时除以$n!$得到：

$$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$$

综上，命题得证，且$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n a_{n+2}} = 2 < \infty$.

附加题（10 分）设u，v在$\bar{\Omega}$上二阶连续可微，且在Ω的边界上$u = v$，如果u是调和函数（即$\Delta u = \nabla \cdot \nabla u = 0$），证明

$$\iiint_{\Omega} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \leq \iiint_{\Omega} |\nabla v|^2 \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$$

证明：

利用高斯定理：

$$\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_{\Omega} \nabla \cdot \boldsymbol{F} \mathrm{d}V$$

取$\boldsymbol{F} = v \nabla u$，对于左边：

$$\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_{\partial\Omega} v \nabla u \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_{\partial\Omega} u \nabla u \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

两种形式分别代入高斯定理右边计算得到：

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_{\partial\Omega} v \nabla u \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_{\partial\Omega} u \nabla u \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \\
= \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u \, \mathrm{d}V + \int_{\Omega} v \Delta u \, \mathrm{d}V = \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u \, \mathrm{d}V \\
= \int_{\Omega} \|\nabla u\|^2 \mathrm{d}V + \int_{\Omega} u \Delta u \, \mathrm{d}V = \int_{\Omega} \|\nabla u\|^2 \mathrm{d}V
\end{aligned}$$

从而有：

$$\int_{\Omega} \|\nabla u\|^2 \mathrm{d}V = \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u \, \mathrm{d}V$$

利用柯西不等式与基本不等式有：

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \|\nabla u\|^2 \mathrm{d}V = \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u \, \mathrm{d}V \leqslant \int_{\Omega} \|\nabla v\| \cdot \|\nabla u\| \mathrm{d}V \\
\leqslant \int_{\Omega} \frac{\|\nabla v\|^2 + \|\nabla u\|^2}{2} \mathrm{d}V
\end{aligned}$$

整理即可得到：

$$\int_{\Omega} \|\nabla u\|^2 \mathrm{d}V \leqslant \int_{\Omega} \|\nabla v\|^2 \mathrm{d}V$$