上 海 交 通 大 学 试 卷

（ 2020 至 2021 学年 第 1 学期 2020 年 11 月 25 日 ）

班级号__________ 学号__________ 姓名 __________

课程名称 《数学分析》(荣誉)I (期中考试) 成绩 __________

题 号	一	二	三	四	五	六	七	总 分
满 分	**20**	**12**	**10**	**32**	**10**	**8**	**8**	**100**
得 分								

一、填空题 (每小题 4 分，共 20 分)

1. 设曲线 $f(x)=x^n$ 在点 $(1,1)$ 处的切线与 x 轴的交点为 $(\xi_n,0)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} f(\xi_n)=$___.

2. 设 $f'(\mathrm{e}^x)=\sin x$，则 $f(x)=$________________.

3. 设 $f(x)=|x^3-3x-1|\,(0\le x\le 2)$，则 $\min\limits_{x\in[0,2]}\{f(x)\}=$______，$\max\limits_{x\in[0,2]}\{f(x)\}=$______.

4. 设函数 $y=x\mathrm{e}^x\ (x>0)$ 的反函数为 $x=x(y)$，则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}\right|_{y=\mathrm{e}}=$________________.

5. 设 $f(x)=\dfrac{x}{x^3+1}$，则 $f^{(10)}(0)=$________________.

二、单项选择题 (每小题 3 分，共 12 分)

6. 设 $\int xf(x)\,\mathrm{d}x=\arcsin x+C$，则 $\int\dfrac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x=$ …… 【 】

(A) $\sqrt{1-x^2}+C$. **(B)** $x\sqrt{1-x^2}+C$.

(C) $-\dfrac{1}{2}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+C$. **(D)** $-\dfrac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+C$.

7. 设函数 $f(x)$ 在 $U(0)$ 有定义，且 $\lim\limits_{x\to0} f(x)=0$，则 …… 【 】

(A) 当 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=0$ 时， $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

(B) 当 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}=0$ 时， $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

(C) 当 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导时， $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=0$.

(D) 当 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导时， $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}=0$.

8. 设 $a<b$，f 是闭区间 $[a,b]$ 上的凸函数，则下列断语中 ……【　　】

① $f(x)$ 必在开区间 (a,b) 内连续.　　② $f(x)$ 必在开区间 (a,b) 内可导.

③ $f(x)$ 必在开区间 (a,b) 内有界.

(A) ①正确，②和③不正确.　　**(B)** ①和③正确，②不正确.

(C) ③正确，①和②不正确.　　**(D)** ①，②和③都正确.

9. 设函数 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上可导，则下列断语中 ……【　　】

① 若 $f' \in U.C(a,+\infty)$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在，则必有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$.

② 若 $f' \in U.C(a,+\infty)$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$，则必有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在.

(A) ①正确，②不正确.　　**(B)** ①不正确，②正确.

(C) ①和②都正确.　　**(D)** ①和②都不正确.

三、作图题 (本题共 10 分)

10. 全面讨论 $y = x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ 的性态，并作出函数图像.

四、计算题（每小题 8 分，共 32 分）

11. 设 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{x}, & x>-1\text{且}x\neq 0, \\ 1, & x=0, \end{cases}$ 求 $f'(x)$.

12. 计算不定积分 $\displaystyle\int \frac{1}{2\sin x-\cos x+5}\mathrm{d}x$.

13. 计算不定积分$\int \frac{\mathrm{e}^x(x-1)}{x^2}\mathrm{d}x$.

14. 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{-x^4}-\cos^2 x-x^2}{\sin^4 x}$.

五、 (本题共 10 分)

15. 设函数 f 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $f(0)=f(1)=0$， $f(x_0)=\min\limits_{0\le x\le 1}\{f(x)\}=-1$.

(1) 试写出 $f(x)$ 在 x_0 处带 Lagrange 型余项的一阶 Taylor 公式；

(2) 证明：存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $f''(\xi)\ge 8$.

六、证明题 (本题共 8 分)

16. 设函数 f 在 $[a,b]$ 上二阶可导，且 $f(a)=f'(a)$， $f(b)=f'(b)$. 证明：存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f(\xi)=f''(\xi)$.

七、证明题 (本题共 8 分)

17. 设函数 f 在 $\mathbb{R}$ 上具有连续导数，且对 $\forall x\in\mathbb{R}$，有 $f(x+1)-f(x)=f'(x)$.

(1) 对 $\forall x\in\mathbb{R}$，令 $E_x=\left\{t\,\middle|\,f'(t)=f'(x),t\in\mathbb{R}\right\}$，证明：$\sup\{E_x\}=+\infty$；

(2) 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=c$(常数)，证明：$f'(x)\equiv c$.