上 海 交 通 大 学 试 卷

（ 2015 至 2016 学年 第 2 学期 2016 年 05 月 04 日 ）

班级号________________ 学号____________________ 姓名 ___________

课程名称 《数学分析荣誉(2)》（致远学院期中考试） 成绩 ___________

题 号	一	二	三	四	五	六	七	总 分
满 分	**16**	**12**	**16**	**10**	**30**	**8**	**8**	**100**
得 分								

一、填空题（每小题 4 分，共 16 分）

1． 设 $z=f\left(\ln x+\dfrac{1}{y}\right)$，其中 $f(u)$ 可微，则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=$__________.

2． 曲面 $z=\arctan\dfrac{y}{x}$ 在点 $\left(1,1,\dfrac{\pi}{4}\right)$ 处的切平面方程为____________________.

3． 设空间域 $\Omega=\left\{(x,y,z)\middle|x^2+y^2+z^2\le 1\right\}$，则 $\iiint\limits_{\Omega}[(x-2y)^2-4z^2]\mathrm{d}V=$_________.

4． 设曲面 $\Sigma=\left\{(x,y,z)\middle|x+y+z=1\,(x,y,z\ge 0)\right\}$，则曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}y^2\mathrm{d}S=$_________.

二、单项选择题（每小题 3 分，共 12 分）

5． 设 $f(x,y)=\begin{cases} xy\cdot\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\ne 0 \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$，则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处

① 连续； ② 可偏导； ③ 可微.

以上正确的结论有 ……【 】

(A) 0 个. **(B)** 1 个. **(C)** 2 个. **(D)** 3 个.

6． $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\ne(0,0), \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ 在 $(0,0)$ 点沿 $\boldsymbol{l}=(1,2)$ 的方向导数为…【 】

(A) $\dfrac{2}{5\sqrt{5}}$. **(B)** $\dfrac{4}{5\sqrt{5}}$. **(C)** 0. **(D)** 不存在.

7． 交换二次积分 $\int_0^1\mathrm{d}x\int_{2(1-x)}^{\sqrt{4-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y+\int_1^2\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{4-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$ 次序的结果为【 】

(A) $\int_0^2 \mathrm{d}y \int_{1-\frac{y}{2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$.　　　　(B) $\int_0^2 \mathrm{d}y \int_{\frac{y}{2}-1}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$.

(C) $\int_0^2 \mathrm{d}y \int_{2(1-y)}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$.　　　　(D) $\int_0^2 \mathrm{d}y \int_{2(y-1)}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$.

8. 设 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 某邻域内连续，且 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1$, 则　　……【　　】

(A) $f(0,0)$ 必为极大值.　　　　(B) $f(0,0)$ 必为极小值.

(C) $f(0,0)$ 必不是极值.　　　　(D) 不能判定 $f(0,0)$ 是否为极值.

三、(每小题 8 分，共 16 分)

9. 设 $z=z(x,y)$ 由方程 $x+y^2-ze^z=1$ 确定，又 $x=x(t)$ 由方程 $xe^x=\ln(1+t)$ 确定，$y=\cos t$ ，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 以及 $\left.\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}$.

10. 设 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，$z=f\left(x,\dfrac{x}{y}\right)$，求 z_x , z_y , z_{xy} .

四、（本题共 10 分）

11． 求 $f(x,y)=5x^2+5y^2-8xy$ 在椭圆域 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2-xy\le 75\right\}$ 上的最值，并问该最值是否为 $f(x,y)$ 的极值?

五、计算下列积分（每小题 10 分，共 30 分）

12． 计算二重积分 $\iint\limits_D\left(\sqrt{x^2+y^2}+y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D： $x^2+y^2\le 4$，$(x-1)^2+y^2\ge 1$.

13. 计算$\int\limits_{C}\dfrac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$，其中$C$是起点$A(-1,0)$到终点$B(1,0)$的抛物线段$y=x^2-1$.

14. 计算$\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\ (a>0)$，其中$\Sigma$： $z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，取上侧.

六、（本题共 8 分）

15． 设 $f \in C(\mathbb{R})$，$\varphi(x,y)$ 具有一阶连续偏导数.

(1) 令 $u(x,y)=\int_0^{\varphi(x,y)} f(t)\mathrm{d}t$ ，证明：$u(x,y)$ 可微，并求 $\mathrm{d}u$ ；

(2) 设 l 为 $\mathbb{R}^2$ 上的光滑简单闭曲线，证明：

$$\oint_l f(\varphi(x,y))\varphi_x(x,y)\mathrm{d}x + f(\varphi(x,y))\varphi_y(x,y)\mathrm{d}y = 0 .$$

七、证明题（本题共 8 分）

16. 设平面域 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le a^2\right\}$，二元函数 $f(x,y)$ 在 D 上不恒为零且有连续的偏导数，又对 $\forall(x,y)\in\partial D: x^2+y^2=a^2$ 恒有 $f(x,y)=0$． 证明：

(1) $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\dfrac{1}{2}\iint\limits_D\left(x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ；

(2) $\iint\limits_D f^2(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\le a^2\iint\limits_D\left[\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.