Projet Elasticité Linéaire

Rapport Projet Eléments Finis

Groupe 94

LEPL1110

Année universitaire 2022/2023

Lausberg Ygor, Lemaire Antoine

1 Introduction

Le facétieux père Noël a malencontreusement laissé tomber son traîneau dans une cheminé. Pour ne plus que ça arrive, il fait appel à nous pour modéliser un nouveau traîneau résistant au flammes.
Pour ceci nous allons analyser les performances de différents matériaux soumis aux contraintes auxquelles peut être soumis un traîneau. Notre problème se résume donc à un problème d'élasticité linéaire sous contraintes planes, que nous allons résoudre par le biais des éléments finis.

2 Analyse physique du problème

Le traîneau est constitué de plusieurs parties qui vont être soumis à des contraintes. Premièrement nous avons le dessous du patin qui est en contact avec le sol. Ce patin est par conséquent soumis à une condition de Dirichlet selon l'axe verticale nulle. Cette condition impose que le traîneau reste en contact avec le sol.

Ensuite nous avons que le traîneau est tracté par les rennes. Les rennes tractent le traîneau par une corde qui est attaché à une attache à l'avant du traîneau. Cette force est représenté par une condition de Neumann horizontale. Cette condition est exprimé par une valeur exprimé en Pascal. Suivant les dimensions de notre traîneau visible sur la figure 1, nous estimons cette contrainte. Nous approximons que le poids du traîneau vaut 380 kg et du père Noël 80 kg, ce qui donne une masse totale de 460 kg. En partant du principe que la traction génère une accélération de $2[\frac{m}{s^2}]$, nous devons tracter une force de $(380+80)[kg]\cdot 2[\frac{m}{s^2} = 920[N]]$, sur une surface de $10[cm]\cdot 10[cm] = 0.01[m^2]$, ce qui nous donne une contrainte de $\frac{920[N]}{0.01[m^2]} = 92[kPa]$. Pour ces calculs nous considérons qu'il n'y a pas de forces de frottements.

Dernièrement nous avons le poids du père Noël sur l'assise. Nous modélisons ce poids par une condition de Neumann verticale vers le bas dont la valeur de la contrainte vaut le poids du père Noël diviser par la surface de l'assise, ce qui nous donne une contrainte de $2.62[kPa]$.

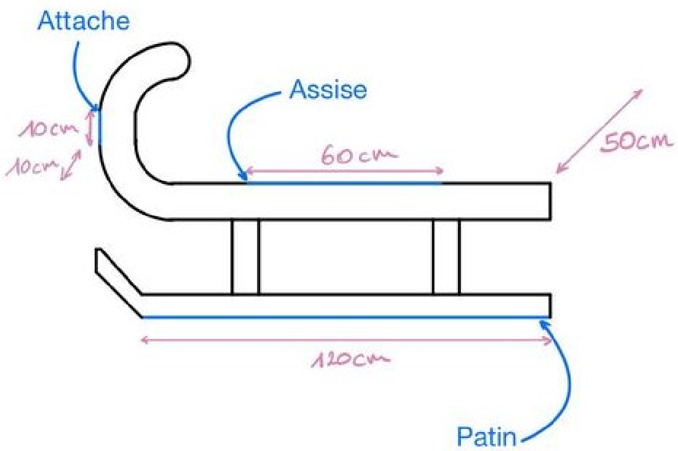

Figure 1 – Schéma du traîneau

3 Réalisation numérique

3.1 Condition tangentielles et normales

Nous avons implémentez la possibilité d'imposer des conditions de Dirichlet et de Neumann en tangentielles et normales. Ceci nous permets de pouvoir imposer des conditions en des directions autres que les directions de la base cartésienne. Cette implémentassions est principalement utile pour les géométries ou l'on veut imposer des conditions sur des segments non-droit.

3.2 Optimisation

Au niveau de l'optimisation de notre code, nous nous sommes principalement focalisé sur le fait de transformer notre problème en un problème bande. En effet, nous pouvons profiter du caractère creux de notre matrice de raideur, pour effectuer une renumérotation des noeuds selon la direction x (direction choisie selon la géométrie de notre projet), et ainsi rendre notre matrice de raideur bande. Ce faisant, nous gagnons en complexité temporelle ainsi qu'en complexité spatiale. Nous pouvons voir à la figure 2 le masque de notre matrice avant et après la renumérotation des noeuds.

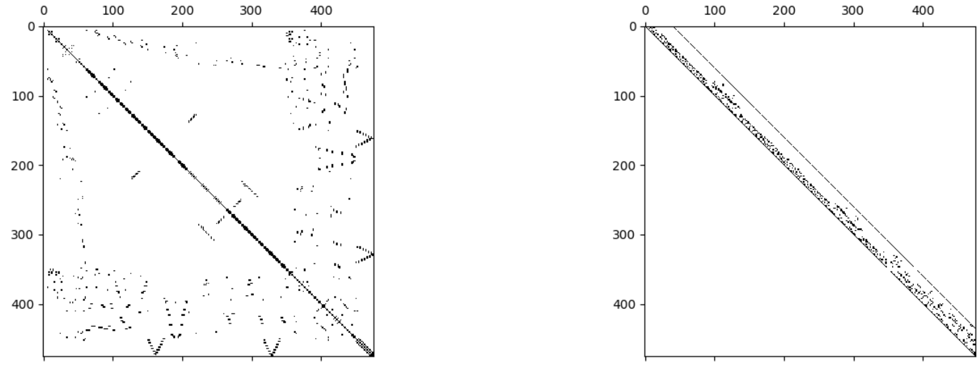

FIGURE 2 – Masque de notre matrice de raideur avant (à gauche) et après (à droite) notre renumérotation des noeuds

Au niveau temporel, nous effectuons, pour le système plein, un nombre d'opérations de l'ordre de $O(n^3)$ où n est la taille de notre matrice (donc deux fois le nombre de noeuds). Lorsque nous avons notre système bande, nous effectuons maintenant un nombre d'opérations de l'ordre de $O(n^2)$. En effet, nous n'effectuons plus $n * n^2$ éléments de la matrice, mais plus que $n * k^2$, où k est la largeur de bande de la matrice. Et en analysant la largeur de bande de la matrice en fonction de la taille de cette dernière, nous pouvons voir que k est de l'ordre de $\sqrt{n}$, $n * k^2$ devient donc de l'ordre de $n * 2$. Nous pouvons voir cette amélioration temporelle sur le graphique de la figure 3. Remarquez le fait que les échelles sont logarithmiques.

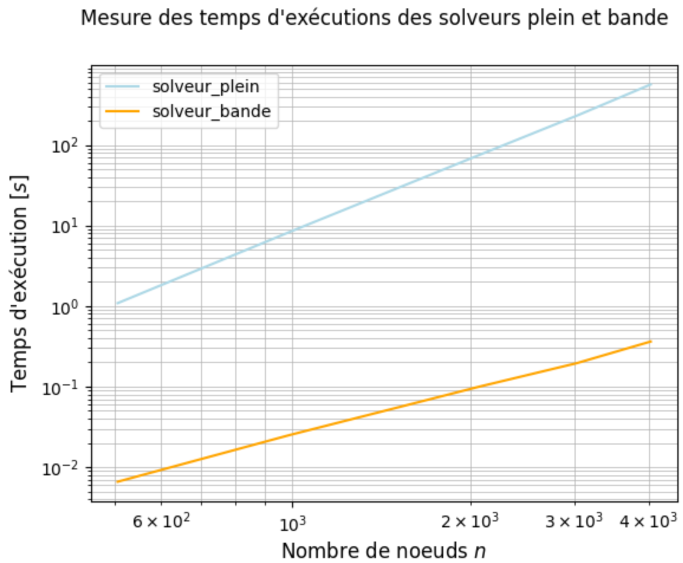

FIGURE 3 – Vitesse d'exécution de nos systèmes plein et bande, en fonction du nombre de noeuds de notre structure

Au niveau spatiale, nous avons également un gain lorsque nous utilisons des structures bandes. En effet, en utilisant une matrice brande, nous ne gardons en mémoire que la bande de la matrice et non les éléments en dehors de la bande. Tandis que en utilisant une structure de matrice pleine, nous gardons en mémoire l'ensemble des éléments de la matrice, malgré que celle-ci soit creuse. On peut également noter que nous ne gardons en réalité en mémoire seulement la partie triangulaire supérieure de la matrice étant donné que notre matrice de raideur sera toujours positive.

Nous avons également utilisé 'Valgrind' pour analyser les fuites de mémoire au sein de notre code. Nous avons un total de 281 bytes non libérés dans notre code final lorsque nous avons une géométrie avec 238 noeuds.

3.3 Analyse des matériaux

Au niveau du matériau utilisé pour construire notre traîneau, nous avons analysé les déformations de ce-dernier suite à l'utilisation de différents matériaux, en particulier l'acier et la fonte. Nous voyons sur les figures 4, 5, 6 et 7 les déformations du traîneau dans différents cas de figures, à savoir, lorsque le traîneau est soumis seulement à son propre poids et lorsqu'il est soumis à son poids ainsi qu'au poids du père Noël sur le traîneau, et ce pour dans le cas de l'acier et le cas de la fonte.

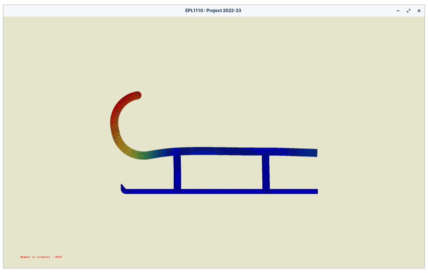

FIGURE 4 – Traîneau en acier avec seul son propre poids

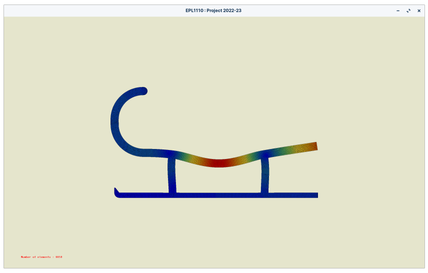

FIGURE 5 – Traîneau en acier avec le père Noël sur l'assise

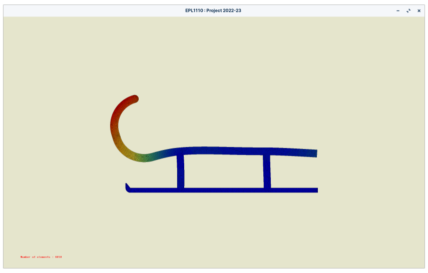

FIGURE 6 – Traîneau en fonte avec seul son propre poids

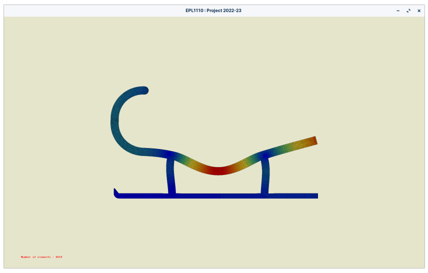

FIGURE 7 – Traîneau en fonte avec le père Noël sur l'assise

Nous avons finalement choisi l'acier pour constituer notre traîneau. En effet l'acier se déforme moins sous son propre poids que la fonte, comme on le voit entre les figures 4 et 6, et il se déforme également moins que la fonte lorsque le père Noël est posé sur l'assise, comme on le voit entre les figures 5 et 7 (notons que pour ces deux images nous supposons un poids du père Noël beaucoup plus élevé qu'en réalité, et ce car un poids vraisemblable n'est pas suffisent pour voir la déformation sur le traîneau).

4 Analyse des résultats obtenus

Pour avoir des visualisations plus complètes de l'impact des différentes forces sur notre traîneau, veuillez regarder les différents Gifs se trouvant dans le fichier src du rapport.

Le traîneau de base subit une force verticale vers le bas en raison de son poids. Ensuite, lorsque le père Noël se pose sur le traîneau avant le démarrage, ce-dernier s'aplati légèrement en son centre. Tout ceci est visible à la figure 8. Une fois que les rennes commencent à tracter le traîneau, l'attache subit une force horizontale vers la gauche, entraînant ainsi tout le traîneau en mouvement, ce qui est visible à la figure 9. Par la suite, une fois arrivé à une cheminée, le patin du traîneau se fait bloquer par cette cheminée. Au moment de l'impact, la cheminée exerce donc une force sur le traîneau opposée à la traction des rennes, comme on peut le voir à la figure 10. Finalement, une fois l'impact passé, la cheminée va simplement empêcher le traîneau de bouger au niveau du patin, et donc l'empêcher de continuer à avancer. Cette dernière situation est visible sur la figure 11.

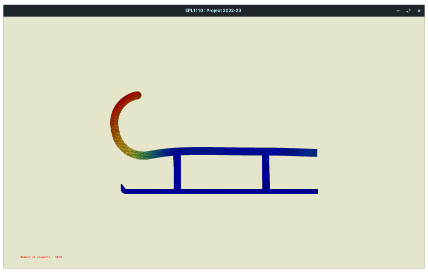

FIGURE 8 – Force du poids du traîneau ainsi que du poids du père-Noël sur l'assise

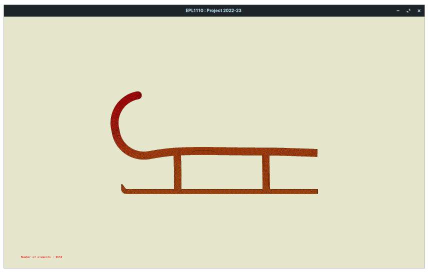

FIGURE 9 – Force de traction sur l'attache en plus du poids

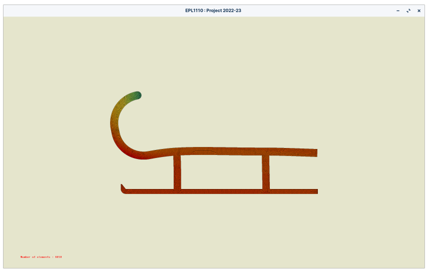

FIGURE 10 – Force de traction sur l'attache en plus du poids, au moment de heurter la cheminée

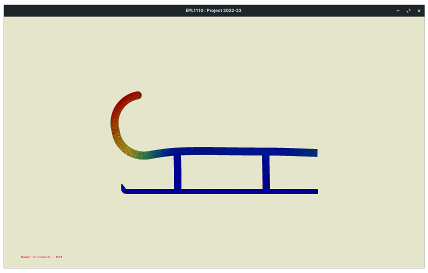

FIGURE 11 – Force de traction sur l'attache en plus du poids une fois le patin immobilisé par la cheminée

5 Validation du code numérique

Pour vérifier la pertinence de nos résultats de problèmes ayant des conditions de Neumann, nous avons résolu un problème d'élasticité linéaire simple dont la solution analytique se trouve dans le syllabus du cours. Ceci nous à permis de comparer nos résultats et affirmer que notre code fonctionne correctement pour les conditions de Neumann verticale et horizontale. Nous faisons référence à ce problème dans notre ReadMe, comme étant le 'problème simple'.

6 Conclusion

Finalement, en raison des différentes déformations subies par le traîneau, et ce pour différents matériaux, nous choisissons d'opter pour un traîneau en acier, dont les dimensions sont reprises à la figure 1. Ce traîneau va évidemment subir certaines déformations, mais celles-ci ont pu être étudiées durant ce projet, et elles n'empêcheront finalement pas le père-Noël de faire son tour des cheminées pour livrer tous ces cadeaux.