Universidad de las Américas Puebla

Escuela de ciencias

Departamento de Actuaría, Física y Matemáticas

Reporte: Explorando la Optimización

Cálculo II MAT2012-13

Anabel Hernandez Ramirez

Equipo: Malcolm in The Middle

183339 Juan Pablo Lopez Moreno LMT
185406 Amy Marianee Ramírez Sánchez LMT
183887 Malcolm Arriaga Galván LBM
182733 Fátima Lucía Carmona Lagarda LQI
186295 Mayela Martin Meneses LQI
182884 Yahel Reyes Noguez LBM

21 de Noviembre de 2025, San Andrés Cholula, Puebla

1 Planteamiento del Problema

La optimización con restricciones en funciones de dos variables es una técnica clave del análisis matemático, mediante la cual se busca optimizar (maximizar o minimizar) una función objetivo respetando ciertas condiciones que limitan las variables, como por ejemplo un volumen fijo.

Problema Específico

Se desea diseñar un cilindro abierto (sin tapa) con volumen fijo de $V = 500$ cm^3 de manera que se minimice el área total del material utilizado.

- **Función Objetivo (Área a Minimizar):** $A(r, h) = \pi r^2 + 2\pi rh$.
- **Restricción (Volumen Fijo):** $V(r, h) = \pi r^2 h = 500$.

2 Método de Solución

Para resolver el problema de optimización, se siguió el siguiente procedimiento:

1. **Planteamiento de la Restricción:** Se despejó la altura h en función del radio r a partir de la restricción del volumen fijo $V = 500$ cm^3.
2. **Formulación del Área Total $A(r)$:** Se sustituyó la expresión de $h(r)$ en la función de área $A(r, h)$ para obtener una función de una sola variable, $A(r)$.
3. **Búsqueda de Puntos Críticos:** Se calculó la primera derivada $A'(r)$, se igualó a cero para encontrar el punto crítico, y se despejó el radio óptimo r.
4. **Cálculo de la Altura Óptima:** El valor de r hallado se sustituyó en la expresión de $h(r)$ para obtener la altura óptima h.
5. **Comprobación (Clasificación):** Se utilizó la segunda derivada $A''(r)$ para verificar que el punto crítico corresponde a un mínimo.
6. **Evaluación del Área Mínima:** Se sustituyó el radio óptimo en $A(r)$ para obtener el área mínima.

3 Cálculos Completos

3.1 1. Expresión del Área en una Variable

Restricción (Volumen): $V = \pi r^2 h = 500$.

$$h = \frac{500}{\pi r^2} \tag{1}$$

Función de Área: $A(r, h) = 2\pi rh + \pi r^2$. Sustituyendo h (Ec. 1) en $A(r, h)$:

$$A(r) = 2\pi r \left(\frac{500}{\pi r^2}\right) + \pi r^2 = \frac{1000}{r} + \pi r^2 \tag{2}$$

3.2 2. Puntos Críticos

Calculando la primera derivada $A'(r)$:

$$A'(r) = -\frac{1000}{r^2} + 2\pi r \tag{3}$$

Igualando a cero para encontrar el punto crítico $A'(r) = 0$:

$$\begin{aligned} -\frac{1000}{r^2} + 2\pi r &= 0 \\ 2\pi r &= \frac{1000}{r^2} \\ 2\pi r^3 &= 1000 \\ r^3 &= \frac{1000}{2\pi} \end{aligned}$$

El radio óptimo es:

$$r = \left(\frac{1000}{2\pi}\right)^{1/3} \approx 5.419 \text{ cm} \tag{4}$$

3.3 3. Altura Óptima

Sustituyendo r en la ecuación de h (Ec. 1):

$$h = \frac{500}{\pi(5.419)^2} \approx 5.419 \text{ cm} \tag{5}$$

Resultado: Se confirma que $r = h \approx 5.419$ cm.

4 Clasificación de Puntos Críticos

Para clasificar el punto crítico, se utiliza el criterio de la segunda derivada.

4.1 Segunda Derivada

Calculando la segunda derivada $A''(r)$:

$$A''(r) = \frac{2000}{r^3} + 2\pi \tag{6}$$

4.2 Evaluación en el Punto Crítico

Evaluando en el punto crítico (usando la aproximación $r \approx 5$ cm para simplificar el cálculo en el reporte):

$$\begin{aligned} A''(5) &= \frac{2000}{5^3} + 2\pi \\ A''(5) &= \frac{2000}{125} + 2\pi \\ A''(5) &= 16 + 2\pi \end{aligned}$$

Dado que $A''(5) > 0$, se concluye que el punto crítico corresponde a un **mínimo**. Esto significa que las dimensiones $r = h = 5.419$ cm minimizan el área total del material.

5 Gráficas Generadas por el Equipo

La gráfica muestra el modelo geométrico del cilindro sin tapa que se utiliza en el problema de optimización. En este modelo, el volumen del cilindro se mantiene fijo en 500 cm^3, y el objetivo es encontrar las dimensiones (radio r y altura h) que minimicen el área total del material necesario para construirlo.

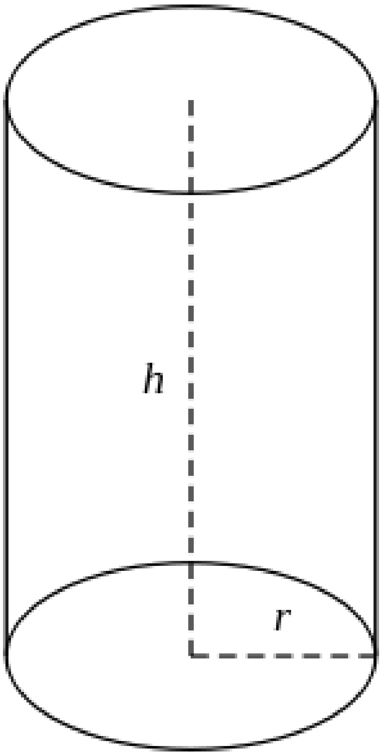

Figure 1: Representación Geométrica del Cilindro Óptimo.

La visualización ayuda a entender por qué la solución matemática exige que el radio y la altura deben ser iguales ($r = h$) para reducir al mínimo el material utilizado.

6 Conclusiones

El problema de optimización se resolvió satisfactoriamente. El estudio de la optimización con restricciones en funciones de dos variables permitió lograr el diseño óptimo bajo la condición limitante del volumen fijo.

- **Resultados:** El área mínima del cilindro ocurre cuando el radio y la altura son iguales, con valores aproximados $r = h \approx 5.41926$ cm.

- **Área Mínima:** En estas dimensiones, el área total del material alcanza aproximadamente $A \approx 276.791\ \text{cm}^2$.
- **Aplicación Práctica:** Esta metodología se utiliza en campos como el diseño industrial, la ingeniería y la manufactura, donde reducir el área de material implica disminuir costos, peso y desperdicio, siendo esencial para optimizar envases y recipientes.

7 Bibliografía

References

[1] IBM. (s.f.). *¿Qué es el modelado de optimización?* https://www.ibm.com/mx-es/think/topics/optimization-model.

[2] Martins, J. R. R. A., & Ning, A. (2021). *Engineering Design Optimization.* Cambridge University Press. https://flowlab.groups.et.byu.net/mdobook.pdf.

[3] La Prof Lina M3. (2019, 8 mayo). *Dimensiones de un cilindro para que el material sea mínimo — La Prof Lina M3* [Vídeo]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=TVLb1VZUt4c.

[4] Stewart, J. (2012). *Cálculo de varias variables trascendentes tempranas.* (7th ed.). Cengage Learning Editores. https://intranetua.uantof.cl/estudiomat/calculo3/stewart.pdf.