Målinger og usikkerhet

M. B. Lilledahl[a], V. Risinggård[a]

[a] *Institutt for fysikk, Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet, 7491 Trondheim.*

Sammendrag

Alle målinger har en begrenset nøyaktighet, og for praktiske og eksperimentelle anvendelser av fysikk er det viktig å ha kontroll på usikkerheten i tallverdiene vi bruker. Når man regner oppgaver er det lett å få et passivt forhold til usikkerhet. Laboratoriekurset i fysikk er ment å gi dere et mer aktivt forhold til målinger og usikkerhet i eksperimentelt arbeid.

1. Måling

En grunnleggende egenskap ved en fysisk *størrelse* er at den kan måles. Men hva betyr det egentlig å måle noe? En måling er i bunn og grunn kun en sammenlikning av det vi ønsker å måle med en definert *standard*.

Om vi skal måle lengden til noe kan vi for eksempel legge det ved siden av en *målestokk* og lese av som best vi kan. Et mer avansert alternativ kan være å sammenligne lengden med bølgelengden til lys med en kjent frekvens, for eksempel ved help av et interferometer.

Resultatet av en måling vil være et sammensatt objekt: et *måltall* og en *enhet*. Enheten forteller oss hva slags type måling vi utførte og måltallet forteller oss hvor stor den fysiske størrelsen var i forhold til standarden.

For eksempel kan vi tenke oss at en student skal måle høyden til foreleseren sin. Resultatet oppgir studenten som $h = 193\,\mathrm{cm}$. Her er h størrelsen, 193 er måltallet og cm er enheten.

I de fleste tilfeller vil ikke måleredskapet vi bruker være det redskapet som definerer målestandarden. Som regel vil måleredskapet ha gjennomgått flere kopier av den grunnleggende målestandarden.

Hva er så meter-standarden? 1 m er dem avstanden lyset beveger seg i vakuum i løpet av $1/(299\,792\,458)$-del av et sekund [1]. Da må vi også vite hva et sekund er. Et sekund er definert som varigheten av 9 192 631 770 perioder av strålingen som sendes ut når et elektron overføres mellom de to hyperfine nivåene i grunntilstanden til cesium-133 atomet [1]. For å finne lengden som er definert som 1 m må man altså telle periodene til strålingen samtidig som man måler hvor langt lyset beveger seg (og det går ganske fort!). Ikke så enkelt, altså.

Alle disse grunnleggende definisjonen er gitt i SI-systemet, som er et internasjonalt omforent system for måleenheter. SI-systemet forvaltes av Det internasjonale byrået for mål og vekt, http://www.bipm.org.

2. Usikkerhet

Standarder er vel og bra, men ingen metoder for å sammenligne en størrelse med en standard kan sikre oss at størrelsen for eksempel er *eksakt lik* standarden. Det vil alltid være en *usikkerhet* assosiert med målingen.

En vanlig målestokk er gradert til nærmeste millimeter. Om en student skal måle høyden til foreleseren sin må vi derfor regne med at studenten ikke kan måle mer nøyaktig enn nettopp til nærmeste millimeter. Antakelig vil det være mange kilder til usikkerhet som gjør at nøyaktigheten blir lavere enn det.

En mulig klassifisering av kilder til usikkerhet er:

- *Definisjonsusikkerhet.* Hva ønsker vi egentlig å måle? Er vi for eksempel ute etter høyden til foreleseren med eller uten hår? Hva med sko? For å unngå definisjonsusikkerhet må vi legge vekt på klare definisjoner av størrelsene vi er ute etter.
- *Systematisk feil.* I noen tilfeller gir måling ved hjelp av et måleredskap eller en målemetode for høy eller for lav verdi hver gang, sammenlignet med et annet måleredskap/-metode. Vi kan for eksemplel tenke oss at vi tok med oss målestokken til Justervesenet på Kjeller (http://www.justervesenet.no) der de med en målemetode som hadde nøyaktighet ned til fjerde desimal målte lengden på målestokken til å være 1,0051 m. Hvis vi har små systematisk feil sier vi at målingen er nøyaktig (*accurate*).
- *Tilfeldig feil.* Uansett hvor forsiktig man er vil mange gjentatte målinger av samme størrelse ikke gi samme resultat. (Se for eksempel på eksempelrapporten [2].) Slike tilfeldige feil kalles også *stokastiske feil*, og stokastisitet og stokastiske prosesser er et viktig tema i statistikk. Om målingen er har lite tilfeldige feil sier vi at den er presis (*precise*).

I all eksprimentell naturvitenskap, om man jobber med partikkelfysikk eller brobygging, er det alltid vikig å vurdere, rapportere og bruke usikkerheten i en måling. Når man bare regner oppgaver med oppgitt tall får man et for passivt forhold til den essensielle rollen usikkerhet har i alle eksprimentelle verdier. Et av hovedmålene med eksperimentelt prosjekt i fysikk er å utvikle forståelsen av rollen usikkerhet og usikkerhetsanalyse har i eksprimentelt arbeid.

3. Bestemmelse av usikkerheten

Usikkerheten kan i mange tilfeller vurderes skjønnsmessig. For eksempel anslo vi på forrige side at det er vanskelig å måle lengder mer nøyaktig enn til nærmeste millimeter når man bruker en målestokk. Målestokken er et eksempel på et måleredskap som har analog avlesning. Om man bruker et måleinstrument med digital avlesning vil det stå i spesifikasjonen til instrumentet hvor nøyaktig instrumentet er og hvilke forhåndsregler man må ta for å oppnå best mulig nøyaktighet, se for eksempel figur 1.

Størrelsen på de tilfeldige feilene kan vurderes ved å gjenta samme måling mange (N) ganger. *Gjennomsnittet*

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \tag{1}$$

av N målinger vil være et estimat for den mest sannsynlige verdien for størrelsen vi måler. Et vanlig mål på usikkerheten i hver enkelt måling er *standardavviket*, som vi kan tenke på som det gjennomsnittlige avviket fra den mest sannsynlige verdien[1]

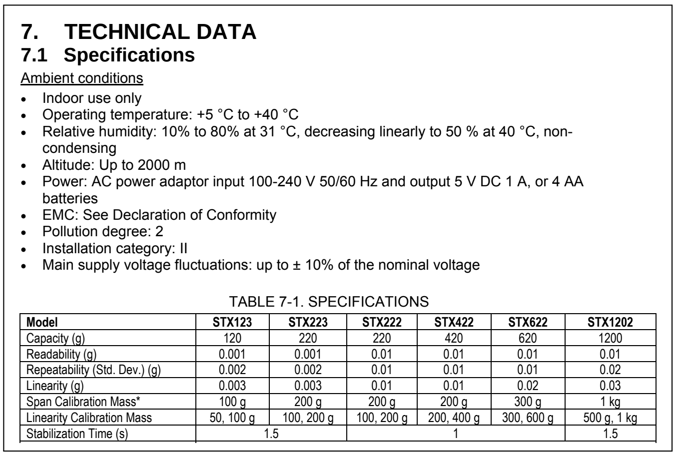
$$\delta x = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}. \tag{2}$$

Et mål på usikkerheten i gjennomsnittet er [3, 4]

$$\delta \bar{x} = \frac{\delta x}{\sqrt{N}}, \tag{3}$$

som vi kaller *standardfeilen*. Om vi dobler antall målinger forteller intuisjonen oss at usikkerheten i den siste målingen skal være den samme som usikkerheten i den første målingen. Et blikk på ligning (2) forteller oss at intuisjonen vår stemmer. δx holder seg relativt konstant om vi øker N til $2N$. Det virker imidlertid rimelig å forvente at vi kjenner den mest sannsynlige verdien av x bedre om vi gjør dobbelt så mange målinger. Vi kan se fra (3) at dette stemmer. Gjør vi $2N$ målinger reduseres $\delta\bar{x}$ med en faktor $\sqrt{2}$.

[1]Vi bruker $(N-1)$ når vi regner ut standardavviket i stedet for N. Grunnen til det er at δx^2 er en såkalt *forventningsrett estimator* for variansen til utvalget [3].



7. TECHNICAL DATA

7.1 Specifications

Ambient conditions

- Indoor use only
- Operating temperature: +5 °C to +40 °C
- Relative humidity: 10% to 80% at 31 °C, decreasing linearly to 50 % at 40 °C, non-condensing
- Altitude: Up to 2000 m
- Power: AC power adaptor input 100-240 V 50/60 Hz and output 5 V DC 1 A, or 4 AA batteries
- EMC: See Declaration of Conformity
- Pollution degree: 2
- Installation category: II
- Main supply voltage fluctuations: up to ± 10% of the nominal voltage

TABLE 7-1. SPECIFICATIONS

Model	STX123	STX223	STX222	STX422	STX622	STX1202
Capacity (g)	120	220	220	420	620	1200
Readability (g)	0.001	0.001	0.01	0.01	0.01	0.01
Repeatability (Std. Dev.) (g)	0.002	0.002	0.01	0.01	0.01	0.02
Linearity (g)	0.003	0.003	0.01	0.01	0.02	0.03
Span Calibration Mass*	100 g	200 g	200 g	200 g	300 g	1 kg
Linearity Calibration Mass	50, 100 g	100, 200 g	100, 200 g	200, 400 g	300, 600 g	500 g, 1 kg
Stabilization Time (s)	1.5		1			1.5

Figur 1: Tekniske spesifikasjoner for en portabel vekt. Nøyaktigheten til denne vekten er angitt ved å oppgi at standardavviket over mange målinger av samme masse i beste fall er 0,002 g.

4. Rapportere usikkerhet

En god måte å oppgi den målte størrelsen på er å oppgi den mest sannsynlige verdien sammen med standardfeilen. Den vanlige måten å skrive dette på er

$$\bar{x} \pm \delta\bar{x}.$$

For eksempel kan høyden til foreleseren bli målt til $h = (193 \pm 3)$ cm der 193 cm er gjennomsnittet og 3 cm er standardfeilen.

En annen måte å oppgi usikkerheten i en måling på er å aktivt bruke *antall signifikante siffer* slik at bare ett usikkert siffer er med, altså 193 cm. Her ligger usikkerheten i siste siffer – en senere, mer nøyaktig måling kan like gjerne vise at dette sifferet skal være 1 eller 5.

Uansett hvordan vi oppgir usikkerheten er det viktig å være klar over at det ikke gir mening å skrive 193,00 cm: Når det tredje sifferet like gjerne kunne vært 1 eller 5 vil de to siffrene etter komma være meningsløse.[2]

For å kunne bruke korrekt antall siffer i store tall (og slippe å skrive mange nuller foran små tall) er det vanlig å bruke såkalt vitenskapelig notasjon eller SI-prefikser. I stedet for å skrive at jordens radius er 6 371 000 m, som indikerer at vi kjenner radiusen med noen meters nøyaktighet, bør vi heller skrive $6371 \cdot 10^3$ m eller 6371 km dersom vi bare kjenner radiusen med noen tusen meters nøyaktighet.

En annen informativ måte å angi usikkerheten på er å bruke *relativ usikkerhet*, definert som $\delta\bar{x}/\bar{x}$. Den relative usikkerheten oppgis gjerne i prosent.

[2]Dersom det første usikre tallet er 1 eller 9 kan det være riktig å oppgi to usikre siffer. For eksempel vil 193,11 cm være meningsfullt forskjellig fra 193,19 cm selv om det fjerde tallet er usikkert.

5. Feilforplantning

5.1. Perioden til en pendel

Det er en ting å kjenne usikkerheten i en størrelse vi måler, men hva om vi måler to ulike størrelser og ønsker å bruke resultatene til å regne ut en tredje størrelse? For eksempel vil perioden T til en rektangulær pendel (vist i figur 2) avhenge av tyngdeakselerasjonen g på stedet,

$$T = 2\pi\sqrt{I/mgh}, \tag{4}$$

der I er treghetsmomentet til pendelen, m er massen til pendelen og h er opphengslengden (se figur 2). Perioden vil altså være større på månen ($g \approx 1{,}6\,\mathrm{m/s^2}$) enn på jorda ($g \approx 9{,}8\,\mathrm{m/s^2}$). Dersom vi *måler* dimensjonene og perioden til pendelen kan vi altså regne ut tyngdeakselerasjonen,

$$g = \frac{4\pi^2 I}{mhT^2} = \frac{4\pi^2(r^2+h^2)}{hT^2}, \tag{5}$$

der vi brukte at

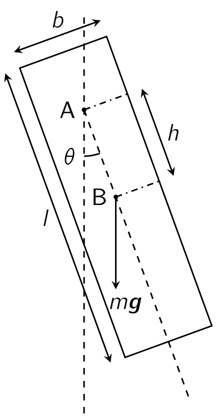
$$I = m(r^2+h^2) \quad \text{og} \quad r = \sqrt{\tfrac{1}{12}(l^2+b^2)}$$

der r er treghetsradien, l er lengden og b er bredden til pendelen (se figur 2).

Men så var det dette med usikkerheten, da… Gitt r, h og T, hva er usikkerheten i g?

5.2. Gauss' feilforplantningslov

Siden l, b og T er størrelsene vi måler direkte, sier vi at g er en *avledet* størrelse. Vi kan analysere hvordan feilen i de målte størrelsene *propagerer* til den avledede størrelsen ved hjelp av *Gauss' feilforplantningslov.* En virkelig utledning av Gauss' feilforplantningslov krever litt statistikk [4]. Her gir vi et kort intuitivt argument for loven.



Figur 2: Skisse av en rektangulær pendel med masse m, lengde l og bredde b. Pendelen er opphengt i A og har massesenter i B. Opphengslengden h er avstanden mellom A og B. Utslaget til pendelen er θ.

La oss starte med den avledede størrelsen $z = 2x$. Om vi tegner grafen til z som funksjon av x, som vist i figur 3a ser vi at dersom vi måler $x = x_0 \pm \delta x$ må z være $z = 2x_0 \pm 2\delta x$. La oss nå se på $z = -2x$ (figur 3b). Om vi igjen måler $x = x_0 \pm \delta x$ må z være $z = -2x_0 \pm 2\delta x$. Det ser altså ut for at en generell størrelse $f = ax$ har usikkerheten

$$\delta f = |a|\delta x = \left|\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|\delta x = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\delta x\right)^2}. \tag{6}$$

Dersom vi har en avledet størrelse som avhenger av flere målte størrelser, $f = f(x, y, \dots)$ kan det da virke rimelig å bruke Pythagoras' setning og skrive

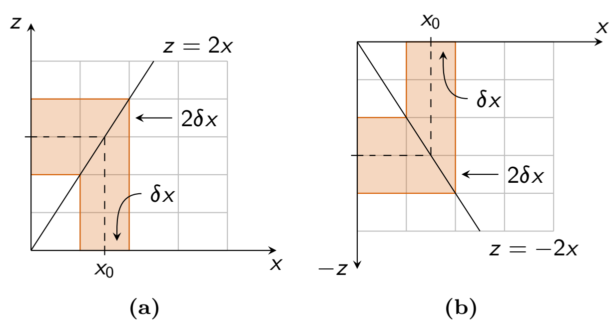
$$\delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\delta y\right)^2 + \dots} \tag{7}$$

Denne ligningen kaller vi *Gauss' feilforplantningslov.*

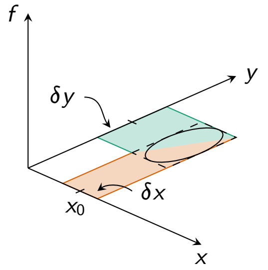
I figur 3a og 3b fant vi δz ved å se på maksimums- og minimumsverdien z tok innenfor intervallet $\pm\delta x$. Når vi uttrykker usikkerheten i f ved ligning (7) finner vi *ikke* feilen ved å se på maksimums- og minimumsverdien f tar innenfor rektangelet $(\pm\delta x, \pm\delta y)$, men ved å se på maksimumsverdien f tar innenfor *ellipsen* $(\delta x)^2 + (\delta y)^2 = 1$ (se figur 4). Grunnen til at vi ser på ellipsen i stedet for rektangelet (som ville gitt $\delta f = |\partial f/\partial x|\delta x + |\partial f/\partial y|\delta y + \dots$) er at det er usannsynlig at *både* den «sanne» verdien for x *og* den «sanne» verdien for y begge ligger i utkanten av usikkerhetsintervallene sine. Ellipsen beskriver et mer sannsynlige scenario der vi har truffet ganske godt på noen av de målte størrelsene og bommet mer på andre. Dette lar seg bevise for uavhengige, normalfordelte, stokastiske variable dersom $f(x, y, \dots)$ er tilnærmet lineær innenfor variasjonsbredden til de stokastiske variablene [4].

5.3. Usikkerheten i perioden

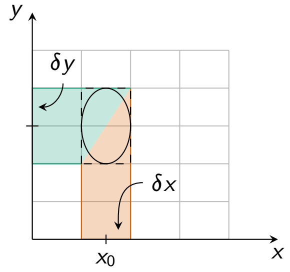
Nå kan vi regne ut usikkerheten i g fra Gauss' feilforplantningslov. g er gitt ved tre størrelser, r, h og T. Vi regner



Figur 3: De to avledede størrelsene (a) $z = 2x$ og (b) $z = -2x$. Om $x = x_0 \pm \delta x$ ser vi at $\delta z = 2\delta x = |\mathrm{d}z/\mathrm{d}x|\delta x$.



(a)



(b)

Figur 4: Gauss' feilforplantningslov gir oss feilen i f som halvparten av differansen mellom maksimums- og minimumsverdien til f innenfor ellipsen $(\delta x)^2 + (\delta y)^2 = 1$.

først ut de partiellderiverte:

$$\frac{\partial g}{\partial r} = \frac{8\pi^2 r}{hT^2}, \quad \frac{\partial g}{\partial T} = -\frac{8\pi^2(r^2+h^2)}{hT^3}, \quad \frac{\partial g}{\partial h} = \frac{4\pi^2(h^2-r^2)}{h^2T^2}.$$

Av r, h og T er en størrelse er gitt av pendelen, r, en størrelse skal måles, T, og en størrelse kan velges, h. Før vi går i gang med et eksperiment for å bestemme g bør vi analysere de partiellderiverte og se om valget av h på noen måte kan minimere feilen i g. Vi ser med en gang at valget $h = r$ gir $\partial g/\partial h = 0$. Utrolig nok er feilen i g *uavhengig* av feilen i h dersom $h \approx r$! Da har vi

$$g = \frac{8\pi^2 r}{T^2} \tag{8}$$

og

$$\delta g = 8\pi^2 \sqrt{\frac{(T\delta r)^2 + (2r\delta T)^2}{T^6}}. \tag{9}$$

Om vi for eksempel bruker en pendel med dimensjonene $l = (1000{,}264 \pm 0{,}016)\,\mathrm{mm}$ og $b = (24{,}95 \pm 0{,}05)\,\mathrm{mm}$ og måler perioden $T = (1{,}5227 \pm 0{,}0001)\,\mathrm{s}$ kan vi regne ut $g = (9{,}836 \pm 0{,}001)\,\mathrm{m/s^2}$.

---

[1] BIPM: *Le Système international d'unités.* teknisk rapport, Bureau international des poids et mesures, 8. utgave, 2006. http://www.bipm.org/en/publications/si-brochure/.

[2] Risinggård, V., Institutt for fysikk, NTNU: *Bestemmelse av tyngdeakselerasjonen via rulling på skråplan.* http://home.phys.ntnu.no/brukdef/undervisning/fyslab/files/eksempelrapport.pdf, (sjekket 18.08.2017).

[3] Walpole, R. E., R. H. Meyers, S. L. Meyers og K. Ye: *Probability & Statistics for Engineers & Scientists.* 9. utgave, 2012.

[4] Taylor, J. R.: *An Introduction to Error Analysis.* University Science Books, 2 utgave, 1997.