卡尔曼滤波实验报告

杨坤泽
2023210799

2023 年 11 月 28 日

1 参数计算与算法流程

根据卡尔曼滤波的流程，对定位结果进行平滑，则需要利用到 N 个观测数据，对定位结果进行处理。首先分析观测数据，有东向定位结果 pos_e，北向定位结果 pos_n，东向速度 vel_e 和北向速度 vel_n。要分别在仅利用定位信息以及同事利用定位信息和速度信息的情况下应用匀速模型与匀加速模型对定位结果进行滤波，则需要分别建立观测方程与过程方程对卡尔曼滤波的参数以及矩阵进行分析计算。

对于匀速运动的模型，有

$$x(t+\Delta t) = x(t) + v_x \Delta t$$

令 n 时刻的状态向量 $x(n)$ 为 $x(n) = (pos\_e(n), pos\_n(n), vel\_e(n), vel\_n(n))^T$，则可写出过程方程为：

$$x(n+1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \Delta t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \Delta t \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x(n) + v_1(n)$$

则对于匀速模型，有

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \Delta t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \Delta t \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

其中 $v_1(n)$ 为过程噪声，Δt 为观测间隔。由于模型假设为匀速模型，过程中可能产生加速度的扰动；设扰动方差为 σ_a^2，则可以通过 $v = a\Delta t$ 与 $x = \frac{1}{2}a\Delta t^2$ 计算得到过程噪声的协方差矩阵为：

$$Q = \sigma_a^2 \begin{pmatrix} \frac{\Delta t^4}{4} & 0 & \frac{\Delta t^3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\Delta t^4}{4} & 0 & \frac{\Delta t^3}{2} \\ \frac{\Delta t^3}{2} & 0 & t^2 & 0 \\ 0 & \frac{\Delta t^3}{2} & 0 & t^2 \end{pmatrix}$$

进一步建立观测模型，对于仅利用定位结果与同时利用定位结果与速度结果的情况，区别在于观测模型中状态向量前矩阵的差别，进而导致观测噪声矩阵的不同。建立观测方程如下：

$$z(n) = Cx(n) + v_2(n)$$

对于仅利用定位信息的模型，有

$$C_{pos} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad R_n\_pos = \begin{pmatrix} \sigma_p^2 & 0 \\ 0 & \sigma_p^2 \end{pmatrix}$$

而对于同时利用定位信息和速度信息的模型，有

$$C_{pos}\_vel = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R_n\_pos\_vel = \begin{pmatrix} \sigma_p^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_p^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_v^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_v^2 \end{pmatrix}$$

在分析得到观测方程和过程方程的 x、F、C 等参数后，可进行卡尔曼滤波的迭代计算流程：

$$\hat{x}(n|n-1) = Fx$$
$$\alpha = y - C\hat{x}(n|n-1)$$
$$K(n|n-1) = FKF^T + Q$$
$$R = CK(n|n-1)C^T + R_n$$
$$G_f = K(n|n-1)C^T R^{-1}$$
$$x = x + G_f\alpha$$
$$K = (I - G_f C)K(n|n-1)$$

类似的对于匀加速运动的模型，有

$$x(t+\Delta t) = x(t) + v_x\Delta t + \frac{1}{2}a\Delta t^2$$

令 n 时刻的状态向量 $x(n)$ 为

$$x(n) = (pos\_e(n), pos\_n(n), vel\_e(n), vel\_n(n), a\_e(n), a\_n(n))^T$$

则可写出过程方程为:

$$x(n+1)=\begin{pmatrix}1&0&\Delta t&0&\frac{\Delta t^2}{2}&0\\0&1&0&\Delta t&0&\frac{\Delta t^2}{2}\\0&0&1&0&\Delta t&0\\0&0&0&1&0&\Delta t\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}x(n)+v_1(n)$$

计算得到过程噪声的协方差矩阵为:

$$Q=\sigma_a^2\begin{pmatrix}\frac{\Delta t^4}{4}&0&\frac{\Delta t^3}{2}&0&\frac{\Delta t^2}{2}&0\\0&\frac{\Delta t^4}{4}&0&\frac{\Delta t^3}{2}&0&\frac{\Delta t^2}{2}\\\frac{\Delta t^3}{2}&0&\Delta t^2&0&\Delta t&0\\0&\frac{\Delta t^3}{2}&0&\Delta t^2&0&\Delta t\\\Delta t^2&0&\Delta t&0&1&0\\0&\Delta t^2&0&\Delta t&0&1\end{pmatrix}$$

对于仅利用定位信息的模型，有

$$C_{pos}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\end{pmatrix}\qquad R_{n\_pos}=\begin{pmatrix}\sigma_p^2&0\\0&\sigma_p^2\end{pmatrix}$$

而对于同时利用定位信息和速度信息的模型，有

$$C_{pos\_vel}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\end{pmatrix}\qquad R_{n\_pos\_vel}=\begin{pmatrix}\sigma_p^2&0&0&0\\0&\sigma_p^2&0&0\\0&0&\sigma_v^2&0\\0&0&0&\sigma_v^2\end{pmatrix}$$

则可以采用与匀速模型下的卡尔曼滤波模型类似的方法，带入参数矩阵对定位结果进行迭代计算，实现平滑。

2 仿真结果

根据上述分析进行仿真，匀速运动模型下的卡尔曼滤波结果如下:

注意到无论是否利用速度的观测值，匀速模型都能够达到较好的平滑结果。此时的过程误差很小，说明匀速模型的可信度很高，实现了较优的平

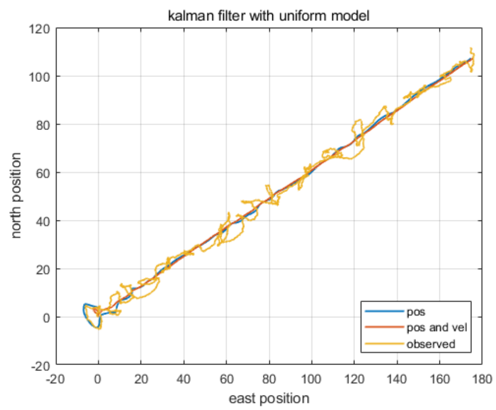

图 1: 匀速运动模型下的卡尔曼滤波结果

滑效果。同时也能够观察到相较于仅利用定位信息的方法，同时利用定位和速度的观测信息能够利用额外的信息量更快的收敛于平滑后的轨迹。

匀加速运动模型下的卡尔曼滤波结果如下：

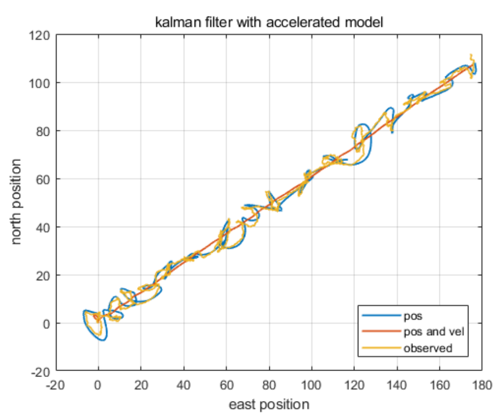

图 2: 匀加速运动模型下的卡尔曼滤波结果

注意到仅利用定位信息无法实现平滑，而同时利用定位和速度信息可以实现平滑。可能是因为系统的过程噪声协方差阵的对角值较大，导致在信息量较小的时候无法确定系统在匀加速模型下的具体运动状态，滤波结果更多参考观测值，实现了跟踪而非平滑的效果。在速度信息的辅助下，模型能够更好的确定运动状态，从而平滑定位结果。