LMS/RLS 滤波实验报告

杨坤泽
2023210799

2023 年 12 月 13 日

1 参数计算与算法流程

考虑根据 LMS 算法与 RLS 算法设计自适应滤波器，其中输入信号的长度 $N = 500$，滤波器阶数 $M = 11$，期望响应为初始输入的延时信号。

令初始输入信号为 $x_0[n]$，其中期望响应 $d = x_0[n-7]$。输入信号过信道加噪声后的信号为 $x[n]$。令滤波器系数为 $\hat{w}$，则 LMS 算法的迭代步骤如下：

$$y[n] = \hat{w}^H[n]x[n]$$
$$e[n] = d[n] - y[n]$$
$$\hat{w}[n+1] = \hat{w}[n] + \mu x[n]e[n]$$

其中 x[n] 代表需要与对应阶数的滤波器进行运算的对应 M 点的信号。

类似的对于 RLS 算法，迭代步骤如下：

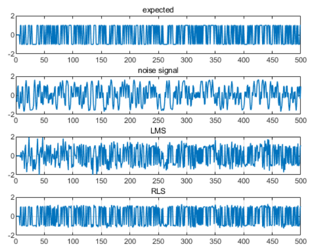
$$k[n] = \frac{\lambda^{-1}P[n-1]x[n]}{1 + \lambda^{-1}x^H[n]P[n-1]x[n]}$$
$$\epsilon[n] = d[n] - \hat{w}^H[n-1]x[n]$$
$$\hat{w}[n] = \hat{w}[n-1] + k[n]\epsilon[n]$$
$$P[n] = \lambda^{-1}P[n-1] - \lambda^{-1}k[n]x^H[n]$$
$$y[n] = \hat{w}^H[n]x[n]$$

其中 λ 为遗忘因子，取 0.95；P 初始化为 $\frac{1}{\Delta}$ 和单位阵的乘积，Δ 取 0.1。

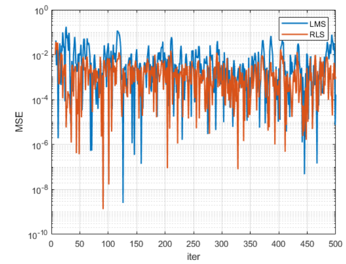
2 仿真结果

根据上述分析进行仿真，取步长为 0.1，噪声标准差为 0.1 时的滤波结果和均方误差曲线如下：

注意到在信噪比较小时，由于噪声功率大，LMS 算法与 RLS 算法的性能相差不大，都无法恢复出与期望响应相近的波形曲线。说明两种算法对于噪声的敏感性较强，在低信噪比的条件下难以发挥出最佳性能。而相对比之下，RLS 算法整体较优于 LMS 算法，更接近于期望响应曲线。

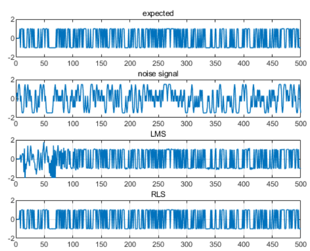


(a) 信号曲线

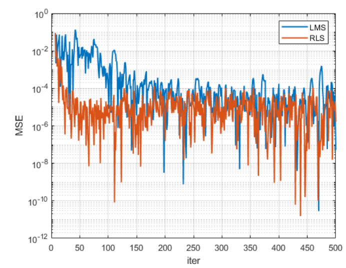


(b) 均方误差曲线

取步长为 0.1，噪声标准差为 0.01 时的滤波结果和均方误差曲线如下：



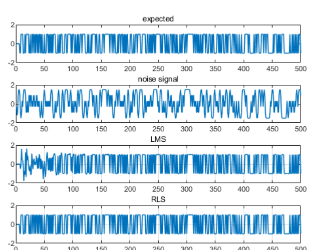
(a) 信号曲线



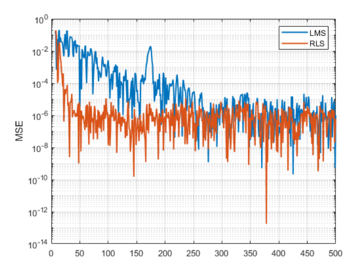
(b) 均方误差曲线

注意到随着信噪比的提高，LMS 算法与 RLS 算法的整体性能的差别主要体现在收敛速度，RLS 算法整体收敛速度快，而在稳定后两者的性能差别不大。

取步长为 0.1，噪声标准差为 0.001 时的滤波结果和均方误差曲线如下：



(a) 信号曲线

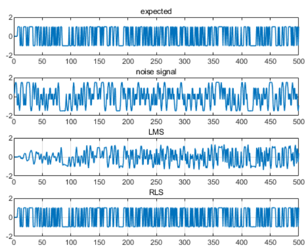


(b) 均方误差曲线

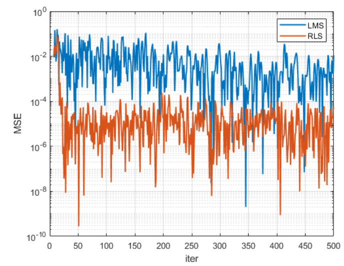
信噪比进一步减小，LMS 算法与 RLS 算法收敛速度的差异被放大，可以看出 RLS 的稳定性更强。在低信噪比的条件下 RLS 算法能够取得比较

理想的滤波效果。因此在实际应用中，需要考虑信号受到噪声的影响情况；如果信号的信噪比条件较差，采用 LMS 算法与 RLS 算法的性能都会受到限制，滤波效果也不会太理想。

取步长为 0.01，噪声标准差为 0.01 时的滤波结果和均方误差曲线如下：



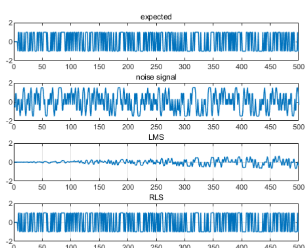
(a) 信号曲线



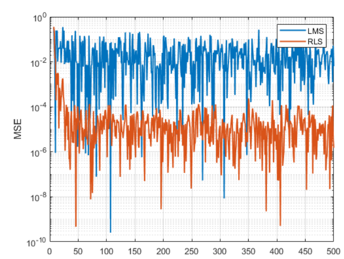
(b) 均方误差曲线

可以注意到随着步长的减小，LMS 算法本身相较于 RLS 算法收敛速度就较慢，因此更加难以收敛，滤波后的波形与期望响应相差甚远。而 RLS 算法本身不受步长的影响，依然保持着稳定的性能与收敛速度。在均方误差曲线的对比图中也能够很明显的观察到此时 LMS 算法与 RLS 算法的性能差距。

取步长为 0.001，噪声标准差为 0.01 时的滤波结果和均方误差曲线如下：



(a) 信号曲线



(b) 均方误差曲线

可见 LMS 算法在步长很小的情况下完全无法收敛。因此在实际应用中，需要考虑步长值的设置，对于 LMS 算法的性能有严重影响。包括初值的设置，在最优点附近选取的初值能够帮助 LMS 算法更快的收敛，提高算法的性能。