

Colección Matemáticas para la Administración

Álgebra Lineal y Métodos Cuantitativos

(Incluye aplicaciones en Microsoft EXCEL®)

Carlos Mario Morales C

Ingeniero Electricista (U de A)

Magíster en Administración de Empresas (EAFIT)

Especialista en Pedagogía para el Aprendizaje Autónomo (UNAD)

Contenido

1. Los modelos y las ciencias de la administración
2. Los modelos matemáticos
3. Clasificación de los modelos cuantitativos
4. Solución de los modelos cuantitativos
5. El proceso de solución de los problemas en ciencias de la administración
6. Métodos cuantitativos en la práctica

Referencias Bibliográficas

Preguntas y problemas propuestos

Competencias

- Comprender y conceptualizar sobre los modelos cuantitativos para la administración
- Identificar diferentes problemas empresariales
- Asociar los modelos a la solución de los problemas empresariales
- Entender la diferencia entre los modelos normativos y descriptivos
- Clasificar los modelos cuantitativos para la solución de los problemas empresariales
- Describir el proceso de solución de los problemas en ciencias de la administración

1. LOS MODELOS Y LAS CIENCIAS DE LA ADMINISTRACIÓN

En el sector privado o público una de las funciones del administrador es la solución de los problemas operacionales de las empresas. Considerando que la solución de un problema trae involucrada la necesidad de escoger entre varias alternativas de solución, es necesario que los administradores tengan habilidades para la toma de decisiones de forma que puedan elegir la mejor alternativa para la solución de los problemas.

3

Al enfrentar un problema los administradores consciente o inconscientemente elaboran modelos que permiten el análisis, y estudio de las alternativas de solución. Cuando los administradores elaboran esos modelos utilizando métodos racionales se puede afirmar que ellos están aplicando las ciencias de la administración.

Las Ciencias de la Administración, se pueden definir como:

La aplicación de procedimientos, técnicas y herramientas científicas que permiten modelar los problemas operativos de la empresa, con el objeto de desarrollar y ayudar a evaluar soluciones. Es decir que la ciencia de la administración, como disciplina incluye todos los enfoques racionales basados en métodos científicos que se aplican en la toma de decisiones.

Teniendo en cuenta esta definición es necesario que se aborde el concepto de modelo y en especial el modelo matemático, que es el tema central de este texto.

Modelo

Un modelo es una representación simplificada de una realidad compleja que se elabora con el fin de facilitar su comprensión y análisis. Los modelos pueden tomar diferentes formas todas útiles cuando se quiere estudiar un objeto o dar solución a un problema. Dependiendo de la forma, los modelos pueden clasificarse en:

- **Mentales.** Son aquellos donde se hace una representación mental del objeto de estudio o la problemática que se analiza. Por ejemplo: Una persona que no se encuentra a gusto con su cuarto de estudio puede imaginar diferentes formas de organizarlo y a partir de allí tomar una decisión para reordenar físicamente el cuarto.
- **Escala.** A través de ellos se hace una representación física de la realidad, usualmente en dimensiones diferentes a las reales. Por ejemplo: la maqueta que elabora el arquitecto o el ingeniero previamente antes de construir el edificio permite analizar detalles estructurales, estéticos, espaciales, entre otros. Estos estudios en la maqueta pueden ayudar al ingeniero a decidir entre distintas alternativas.
- **Matemático.** Este tipo de modelos permiten representar la realidad a través de símbolos y relaciones matemáticas. Por ejemplo: $y = 2000 + 100x$, podría ser un modelo que representa lo que percibe el vendedor de una empresa que recibe un salario básico de 2000 pesos y una comisión de 100 pesos por cada producto (x) que venda. Este modelo matemático ayuda al administrador a estudiar la situación salarial de este empleado y a decidir si es pertinente un aumento o no.

2. LOS MODELOS MATEMÁTICOS

Los modelos matemáticos en las ciencias de la administración, conocidos como métodos cuantitativos, permiten representar los problemas operativos de la empresa con el objeto de ayudar al administrador a analizar, evaluar y decidir las mejores soluciones.

Algunos de los problemas a los que se enfrenta el administrador

¿Cómo atender más rápido y mejor a los clientes?

¿Cómo distribuir óptimamente los recursos humanos, técnicos para una operación exitosa de la empresa?

¿Cómo distribuir el parque automotor de manera que se disminuya los costos y se optimicen las entregas de los productos a los clientes?

¿De qué forma se deben asignar los recursos a una serie de actividades para desarrollar de manera óptima un proyecto?

De acuerdo al alcance, los modelos matemáticos pueden ser de dos tipos.

Modelos Descriptivos.

Son relaciones matemáticas que describen una problemática, pero no indican nada más sobre el problema o las acciones que se deben seguir para lograr una solución al problema que se trata.

El ejemplo del salario del vendedor, $y = 2000 + 100x$ (1) es un modelo descriptivo ya que a través de él se puede describir o pronosticar el salario del empleado dependiendo de las ventas; no obstante, no indica nada sobre lo que el administrador debe hacer en caso que se este atendiendo una reclamación del empleado por mala remuneración.

Modelos Normativos.

Estos son relaciones matemáticas que además de describir la problemática, señalan el curso de acción óptimo que el administrador debe seguir para solucionar el problema. Son conocidos también con el nombre de modelos de optimización.

Un modelo normativo debe contener tres elementos básicos:

- Una o más funciones objetivo
- Variables de decisión y parámetros
- Restricciones.

Las funciones objetivo: definen el objeto que se busca en función de las variables de decisión. Por ejemplo, si se busca maximizar las ganancias (Z) en función de las utilidades que se obtienen de tres productos, esta se puede expresar como:

$$\text{Máx. } Z = 200x_1 + 240x_2 + 300x_3 \quad (2)$$

En relación con las ganancias, 200 son las utilidades que se perciben por la venta del producto x_1 , 240 las que se perciben por el producto x_2 y 300 las que se perciben por el producto x_3 .

Las variables de decisión: son las cantidades desconocidas que deben hallarse en el modelo para alcanzar el objetivo planteado. Para el ejemplo: las cantidades de los productos x_1 , x_2 y x_3 que hacen que las ganancias sean máximas.

Los parámetros: son cantidades conocidas que permiten relacionar las variables de decisión con la función objetivo. Para el ejemplo: son las ganancias unitarias que cada producto aporta a la ganancia. Es decir, los 200, 240 y 300 que aportan los productos x_1 , x_2 y x_3 respectivamente.

Las restricciones: son las limitaciones físicas, operativas u administrativas que están involucradas en el problema que se quiere modelar. Para el ejemplo: supongamos que para la fabricación de los productos x_1 , x_2 y x_3 se requieren 2, 5 y 7 unidades de materia prima A respectivamente y que solo se dispone de 300 unidades de dicha materia prima. Entonces el modelo deberá tener una restricción que refleje esta situación.

En términos matemáticos:

$$2x_1 + 5x_2 + 7x_3 \leq 300 \quad (3)$$

El sistema matemático formado por las ecuaciones (2) y (3) son un modelo que representa el problema de fabricar y vender tres productos en una empresa, con el fin de maximizar las ganancias. Al resolver el modelo el administrador obtiene información sobre la cantidad de productos x_1 , x_2 y x_3 que se deben producir y vender con el fin de maximizar las ganancias. Nótese que el modelo no solo describe la problemática, sino que además indica lo que se debe hacer con el fin de lograr el objetivo que se busca.

3. CLASIFICACIÓN DE LOS MODELOS CUANTITATIVOS

Independiente de la tipificación anterior, los modelos pueden clasificarse como:

- Modelos determinísticos
- Modelos estocásticos
- Modelos Lineales
- Modelos no lineales
- Modelos estáticos
- Modelos dinámicos

5

Los Modelos Determinísticos, son aquellos donde se conoce con certeza los parámetros del modelo. Por ejemplo: en el modelo (2) se conoce que los productos x_1 , x_2 y x_3 aportan a las ganancias 200, 240 y 300 respectivamente; en este caso puede decirse que se trata de un modelo determinístico.

Los Modelos Estocásticos, a diferencia de los modelos anteriores, son aquellos donde no se conocen con certeza los parámetros. Suponga, por ejemplo, que en la ecuación (3) las necesidades de materia prima para producir x_1 no son exactamente 2, sino que su valor oscila entre 1.5 y 2.5; en este caso, el modelo que antes era determinístico, ahora será un modelo estocástico, que deberá tratarse considerando las probabilidades de que ocurra uno u otro valor.

Los Modelos Lineales, son aquellos en los cuales las relaciones entre las variables son directamente proporcionales. Un ejemplo de este tipo, es el modelo (1) con el cual se representa el salario del vendedor.

Los Modelos No lineales, son aquellos en los cuales las relaciones entre las variables no son proporcionales; la relación entre ellas se puede expresar a través de una ecuación cuadrática, por ejemplo. Para ilustrar este tipo de modelos supongamos que el salario de un vendedor se expresa como:

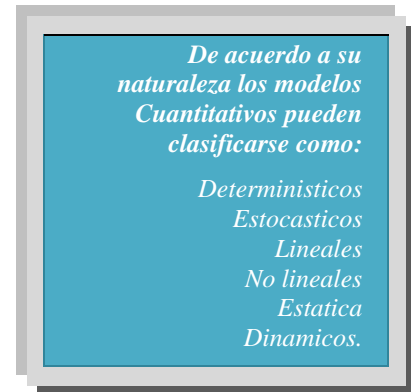
$$y = 100 + 0.5x^2 \quad (4)$$

Donde: y es el salario que recibirá el vendedor, 100 pesos es el salario básico, x las unidades vendidas y 0.5 el incentivo que se recibe por las unidades vendidas. En este caso el salario crece no proporcionalmente en la medida que las ventas sean mayores.

Los Modelos Estáticos, son aquellos que se definen para un periodo específico de tiempo, supone que las condiciones no cambian para ese periodo de tiempo en que se plantea la solución. Por ejemplo: el modelo (1) que representa el salario del vendedor podría ser válido por un año, tiempo de validez del salario básico.

Los Modelos Dinámicos, contrario a los estáticos, en estos modelos la solución tiene en cuenta el tiempo, su evaluación se realiza para periodos de tiempo múltiples. Por ejemplo, el valor que se recibe al final de una inversión (P_f) dependerá de la tasa de interés (i), el número de periodos que se haga la inversión (t) y el capital inicialmente invertido (P_o). Si el interés que se paga es variable en el tiempo, se puede decir que el modelo (5) que representa el problema del inversionista es un modelo dinámico, ya que habrá que ser evaluado para cada periodo donde se produce cambio de interés.

$$P_f = P_o(1+i)^t \quad (5)$$



4. SOLUCIÓN DE LOS MODELOS CUANTITATIVOS

El modelo matemático que representa el problema debe estar acompañado de una solución. No obstante esta solución no siempre es analíticamente posible; por esta razón se puede recurrir a tres métodos de solución de los modelos matemáticos, ellos son: los métodos heurísticos, las simulaciones y los Algoritmos.

Métodos heurísticos. Con estos métodos se llegan a soluciones aproximadas y aceptables con base en reglas empíricas e intuitivas. Esta metodología es utilizada cuando la solución analítica no es posible, o compleja y las simulaciones poco prácticas, costosas ó con una relación Beneficio-Costo desfavorable.

Simulaciones. Con esta metodología de solución se simula la conducta de un problema para un conjunto definido de condiciones de entrada, eligiendo el mejor comportamiento, el cual no necesariamente será el óptimo. La simulación es utilizada cuando la representación del problema involucra un número muy grande de variables o cuando no es posible hallar una solución analítica.

Algoritmos. Es un conjunto de procedimientos o reglas que, cuando se siguen de manera ordenada, proporcionan la mejor solución matemática para un modelo determinado. Es necesario precisar que debido a que los algoritmos se desarrollan para un tipo de modelo dado o definido este será solo aplicable para los problemas que se ajusten a las características del modelo.

*Métodos de Solución de los
modelos cuantitativos.*

*Algoritmos
Simulaciones
Métodos Heurísticos.*

6

5. EL PROCESO DE SOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS EN CIENCIAS DE LA ADMINISTRACIÓN

Independiente del método de solución, cuando se quiere resolver un problema empresarial a través de las Ciencias de la Administración deben seguirse varios pasos con el fin de dar un tratamiento integral, evitando así que se afecten otras áreas aparentemente no involucradas.

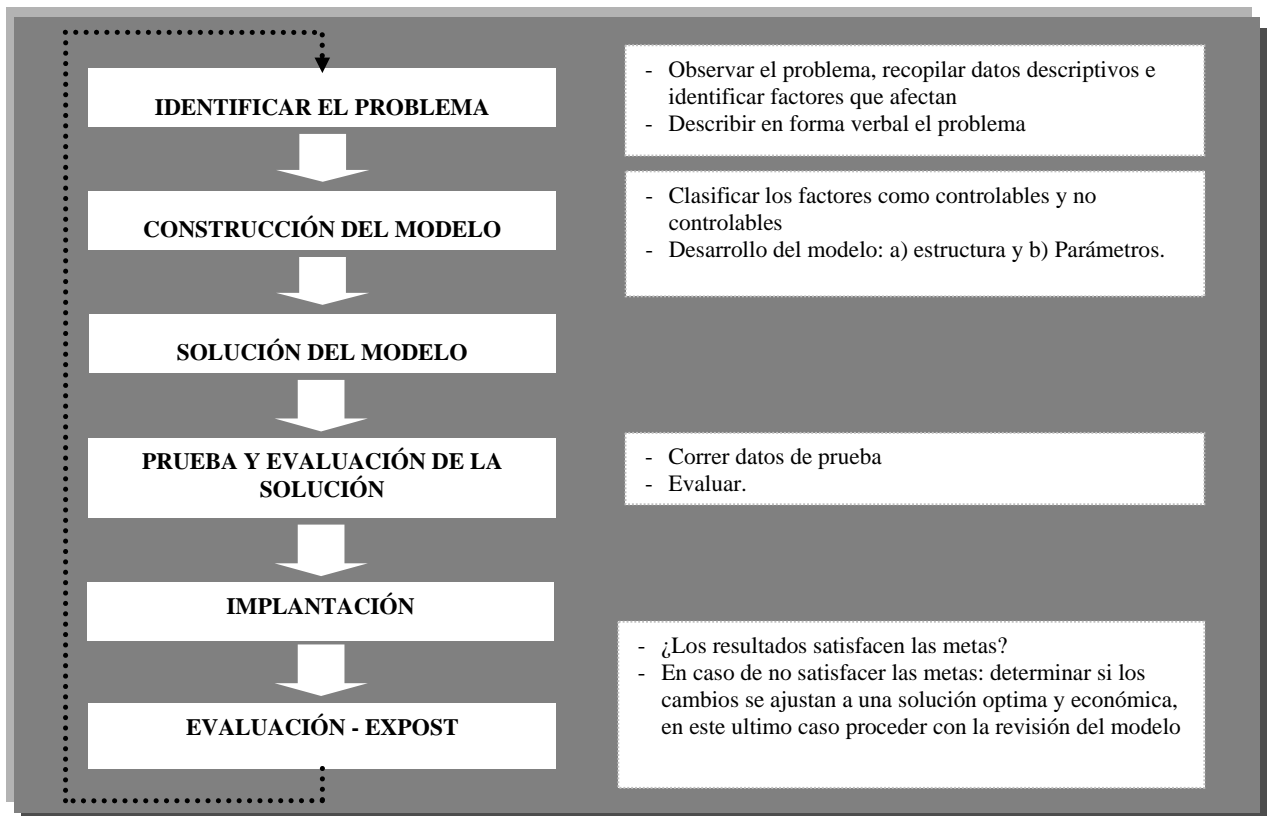
Así pues, no se trata, por ejemplo, solo de hallar un algoritmo para resolver un problema; hay que ir más allá para asegurar que la solución se adapta a los requerimientos y está alineada con los objetivos y metas de la empresa.

De esta manera, en la solución de problemas es necesario cubrir varias etapas que empiezan con la identificación del problema y terminan con el implante y la evaluación de la solución. Estas etapas deben seguirse de manera ordenada y rigurosa con el fin de asegurar cierto grado de éxito en el proceso de solución por modelos.

En el proceso de *solución de problemas* se deben cubrir seis etapas, así como se muestra en la gráfica No 1.1, las cuales son:

- 1) Identificación, observación y planteamiento del problema
- 2) Construcción del modelo
- 3) Generación de la solución del modelo
- 4) Prueba y evaluación de la solución
- 5) Implantación
- 6) Evaluación Ex post

7



Gráfica No 1-1 Proceso de solución de problemas

6. LOS MÉTODOS CUANTITATIVOS.

Como se ha visto los métodos cuantitativos son técnicas, procedimientos o metodologías que basadas en el método científico permiten modelar situaciones y problemas empresariales. Aunque su campo de acción es prácticamente ilimitado, en la vida práctica los métodos más utilizados para apoyar el trabajo de los administradores, son los siguientes:

Sistemas Lineales

Esta metodología permite modelar muchos fenómenos y problemas de la vida empresarial. A través de estos modelos se pueden describir los problemas con el fin de analizarlos y estudiarlos y tomar decisiones para solucionarlos.

Programación lineal

Este método se ha desarrollado para el modelamiento de los problemas que tratan la maximización o minimización de una función lineal sujeta a restricciones lineales que limitan el alcance del objetivo.

Programación lineal entera

Es un método utilizado para modelar problemas que se pueden programar como lineales con el requisito adicional que algunas o todas las recomendaciones de decisión tienen que ser valores enteros.

Programación de proyectos (Teoría de redes)

La teoría de redes es una metodología que permite planear, programar y controlar la ejecución de proyectos constituidos por muchas tareas o actividades. En especial el método PERT¹ (Program Evaluation and

¹ Técnica de Evaluación y Revisión de Programas.

Review Technique) y el método CPM² (Critical Path Method) son técnicas que a través de modelos ayudan a los administradores a alcanzar los objetivos en la ejecución de los proyectos empresariales.

Modelos de inventarios

A través de este modelo se puede estudiar uno de los problemas más relevantes de la empresa, el cual tiene que ver con la disyuntiva de mantener inventarios suficientes para atender la demanda y al mismo tiempo minimizar los costos que representa el mantenimiento de inventarios.

Modelos de líneas de espera

Estos modelos han sido desarrollados para ayudar a los administradores a comprender y tomar decisiones en aquellas operaciones que implican la atención de clientes que deben esperar en una fila.

8

Simulaciones

Es una técnica utilizada para modelar la operación de un sistema que involucra muchas variables interactuando y las cuales no es fácil de tratar de forma analítica. Usualmente la técnica emplea aplicaciones computacionales para modelar la operación y para llevar a cabo cálculos de simulación.

Análisis de decisiones.

El análisis de decisiones es una técnica que permite modelar situaciones particulares con el fin de determinar estrategias óptimas cuando se analizan o estudian situaciones que involucran varias alternativas de decisión y un patrón de eventos de incertidumbre o de alto riesgo.

Modelos de procesos de Markov.

Es una técnica que permite modelar para el estudio el comportamiento y evolución de ciertos sistemas a lo largo de ensayos repetidos. Por ejemplo: a través de ella se puede determinar la probabilidad de que un equipo funcione o no, cuando se opera por un periodo de tiempo determinado.

Existen otros métodos cuantitativos que si bien no son tan utilizados son igualmente importantes. Técnicas como la programación de metas, los pronósticos, los procesos de jerarquías analíticas son también herramientas de gran ayuda para el administrador que cada vez se ve más presionado a tomar decisiones acertadas.

7. LA LIMITACIONES DE LOS MÉTODOS CUANTITATIVOS.

La aplicación de los métodos cuantitativos a la solución de los problemas empresariales presenta dos tipos de limitaciones. La primera hace referencia a la estructura misma de los modelos ya que estos son representaciones simplificadas de la realidad y los segundos tienen que ver con la solución y aplicabilidad de los modelos mismos.

Considerando que los métodos cuantitativos no son más que técnicas que permiten modelar situaciones y problemas empresariales es natural que al aplicarlos haya que realizar algunas simplificaciones del problema real, usualmente complejo, con el fin de poderlo modelar. El proceso de simplificación produce un modelo del problema simplificado que puede manipularse con el fin de obtener una solución inicial. El ejemplo más típico de esto es la modelación que se hace en economía del mercado, donde entre otros, se hace el supuesto de que existe competencia perfecta; aunque esta es una consideración bastante fuerte, aún así es posible desarrollar un modelo económico útil para estudiar los efectos de diversas fuerzas sobre el mercado.

La aplicación de los métodos cuantitativos tiene dos tipos de limitaciones: estructurales y operativas.

Las estructurales se refieren a los modelos mismos ya que estos son representaciones simplificadas de la realidad.

Las operativas tienen que ver con la solución de los modelos.

² Método del Camino Crítico

De esta forma, dado que los modelos son representaciones simplificadas de la realidad, los administradores deben cuestionarse si el modelo o los modelos que pretenden utilizar si representan el problema que quieren solucionar. En muchas ocasiones son tantas las simplificaciones que se hacen al momento de elaborar un modelo que este no resulta útil para apoyar la toma de decisiones.

Otro limitante de las ciencias de la administración o los métodos cuantitativos es que en los modelos normativos consideran solo una función objetivo, no obstante en la práctica quien toma las decisiones tiene otros objetivos, por ejemplo, aparte de maximizar las utilidades o minimizar los costos. Eventualmente otros objetivos pueden ser determinantes, razón por la cual los administradores que hacen uso de este tipo de modelos debe cuestionarse si su uso resulta acorde con los requerimientos y objetivos de la empresa. En los últimos años se han hecho algunos avances en los modelos de múltiples objetivos, la técnica de programación de metas es uno de ellos.

Existen otro tipo de limitaciones de tipo operativo que tienen que ver con el tamaño de los modelos y la cantidad de cálculos que es necesario realizar cuando se quiere solucionar estos; no obstante, estas limitaciones son cada vez menores ya que hoy día el acceso a las computadoras es mayor y los tiempos de procesamiento de estas máquinas menor.

Una consideración final que debe hacerse el administrador al hacer uso de los métodos cuantitativos es la conveniencia de hacer uso de ellos o no. Para ello, debe plantearse comparaciones de relaciones de Beneficio-Costo. En muchas ocasiones los costos que resultan de desarrollar o implantar un modelo pueden superar los ahorros que se obtienen de aplicar este. Muchos problemas de toma de decisiones empresariales pueden resolverse sin el uso de modelos muy elaborados y costosos.

8. EVOLUCIÓN DE LAS CIENCIAS DE LA ADMINISTRACIÓN.

No obstante que el nombre "Ciencia de la administración"³ es un término surgido hace más de 50 años, en el campo práctico de la administración sigue siendo desconocido y aún más ignoradas sus técnicas que posibilitan la toma racional de decisiones.

El comienzo de las Ciencias de la Administración se remonta a la primera mitad del siglo XX, cuando investigadores de distintas áreas del conocimiento empezaron a utilizar procedimientos científicos para tratar problemas que se encontraban por fuera del alcance de las ciencias exactas. No obstante, no fue sino hasta la Segunda Guerra Mundial que los esfuerzos de los investigadores se sistematizaron. Un programa desarrollado por Gran Bretaña reunió un equipo de matemáticos, ingenieros y científicos que tuvieron como objetivo determinar la forma más óptima de utilizar los recursos militares escasos destinados a la defensa del país. Debido a la naturaleza del trabajo, orientado básicamente a las operaciones militares, la técnica desarrollada recibió el nombre de Investigación de Operaciones y no el de Ciencias de la Administración.

En los Estados Unidos igualmente se realizaron trabajos de investigación orientados principalmente a la solución de problemas logísticos complejos, al desarrollo de patrones de vuelo para aviones, la planeación de maniobras navales y la optimización del uso de los recursos militares.

Terminada la guerra la comunidad científica vio como muchos de las técnicas y métodos aplicados inicialmente a resolver problemas militares se podían aplicar a los problemas de la empresa. Aunque en un comienzo se utilizaron aplicaciones directas traídas de la industria militar como el control de inventarios, y la solución al problema de transporte pronto con el desarrollo de las computadoras los conceptos de la investigación de operaciones se extendieron a otras áreas de la empresa como las compras, la mercadotecnia, el área financiera y contable e incluso a la gerencia general. Particularmente en los Estados Unidos se hicieron contribuciones al desarrollo de la investigación de operaciones; es así como el método

³ La primera revista "Management Science" la primera en hacer referencia a "ciencias de la Administración" fue publicada en el año 1954.

simplex para la solución del modelo de Programación Lineal una de las técnicas matemáticas de más amplia aceptación fue desarrollada por el estadounidense George B. Dantzig. Esta técnica en particular ha tenido amplias aplicaciones a muchos problemas operativos y es la base para muchas otras técnicas matemáticas, como la programación de metas y la programación entera.

De otro lado, aunque en la Gran Bretaña, primer país donde se institucionalizó la disciplina se utilizó el nombre de Investigación de Operaciones, en los Estados Unidos se han usado indistintamente los nombres de Investigación de Operaciones (IO) y Ciencias de la administración (CA). El uso de este último nombre se institucionalizó con el establecimiento de *The Institute of Management Sciences* en 1953.⁴

10

Aunque muchas de las aplicaciones de las Ciencias de la Administración ocurrieron en la década del 50, no fue sino hasta principios de los años 60 que se establecieron programas formales de capacitación en esta disciplina en universidades e instituciones especializadas. De esta forma, solo, después del año 65 incipientemente se inició formalmente el uso de estas técnicas en las organizaciones industriales y gubernamentales. En Colombia, en particular, la aplicación de las Ciencias de la Administración se ha centrado en pocas empresas, siendo su uso desconocido en la mayoría de las organizaciones tanto privadas, como públicas.

En un principio, a nivel mundial, la aplicación de las Ciencias de la Administración no condujo a una utilización exitosa de las técnicas, ya que muchos especialistas estuvieron más interesados en manipular los problemas para que se ajustaran a las técnicas ya desarrolladas, que en trabajar en el análisis y solución de los problemas. Hoy en día, sin embargo, la ciencia de la administración ha madurado y una gran cantidad de los problemas que se tuvo en los inicios se han superado, gracias especialmente al desarrollo de la informática y a los cambios en los programas académicos.

La disponibilidad y desarrollo de las computadoras cada vez más permite que los administradores enfrenten la modelación y solución de los problemas operacionales de las empresas, con lo cual se disminuyó la necesidad de que expertos en ciencia de la administración actúen como intermediarios entre el administrador y los modelos; de esta manera, el administrador de hoy puede explorar situaciones hipotéticas, hacer simulaciones y en general interactuar con los modelos con el fin de comprender y definir el potencial de éstos. La forma lógica de apreciar el alcance, limitaciones y capacidades de las Ciencias de la Administración es realizando aplicaciones no importando que estas inicialmente no conduzcan a resultados exitosos, después de algún tiempo los éxitos seguramente llegaran.

Aunque la comprensión de los fundamentos de las técnicas de las Ciencias de la Administración y sus aplicaciones bajo diferentes circunstancias son materias importantes para los administradores, ellos no deben dejar comprender los conceptos generales del planteamiento y desarrollo de modelos, y la forma como ellos se relacionan con las técnicas de la ciencia de la administración.

⁴ Se han hecho numerosos intentos de diferenciar CA e IO, pero es difícil hacer una distinción clara. En este texto utilizaremos ambos términos en forma indistinta.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- **ANDERSON, David R.; SWEENEY, Dennis J y WILLIAMS, Thomas A.** Métodos Cuantitativos para los Negocios. México: Thompson Editores. 1999.
- **DAVIS, K. Roscoe y MCKEOWN, Patrick O.** Modelos Cuantitativos para Administración. México: Grupo Editorial Iberoamérica. 1986.