IFT-2002 Informatique Théorique
Devoir 1

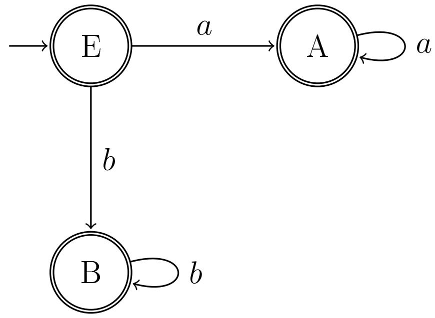
À remettre le 11 octobre 2018 avant minuit

Question 1.

Construisez des automates finis qui acceptent les langages suivants. Les automates peuvent être non-déterministes si cela vous simplifie la tâche. Par contre, vous ne pouvez pas utiliser des transitions étiquetées par un mot (voir p. 38 dans les anciennes notes de cours), par une expression régulière ou par le mot vide ϵ.

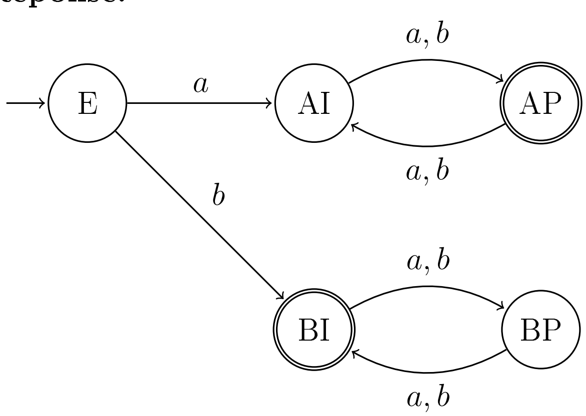
- Sur l'alphabet $\{a, b\}$, le langage L des mots qui ne contiennent ni la sous-séquence ab ni la sous-séquence ba.

  Réponse:



- Sur l'alphabet $\{a, b\}$, le langage L des mots qui soit débutent par un a et sont de longueur paire soit débutent par un b et sont de longueur impaire.

Réponse:

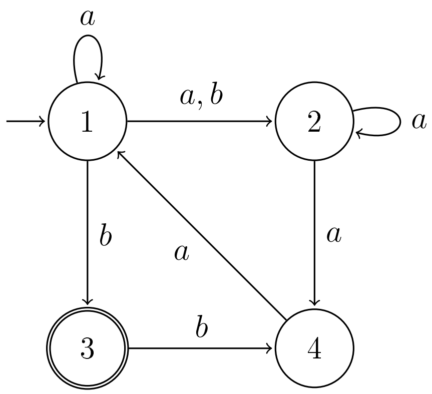


Question 2. Donnez des expressions régulières qui représentent les deux langages de la question 1.

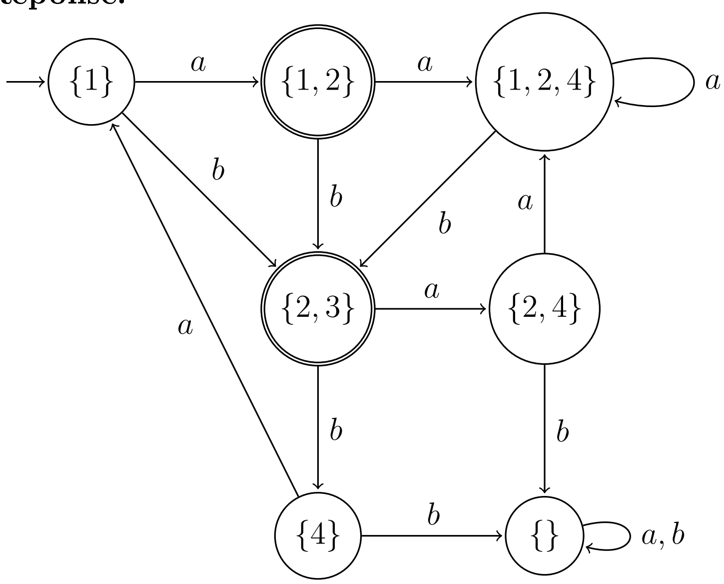
Réponse 1: $a^* \cup b^*$

Réponse 2: $(a(a \cup b) \cup b)((a \cup b)(a \cup b))^*$

Question 3. Construisez un automate déterministe qui accepte le même langage que l'automate non-déterministe ci-dessous. *Vous pouvez omettre l'état poubelle si ça vous permet d'avoir un automate plus lisible.*



Réponse:



Question 4.
Soit K le langage suivant sur l'alphabet $\{0,1\}$.

$$K = \{0^i10^j10^k | i,j,k \in \mathbb{N} \wedge k = \max\{i,j\}\}$$

Montrez que K n'est pas régulier.

Réponse:
Supposons que K est régulier. Il satisfait donc le lemme de pompage pour une certaine longueur de pompage $p > 0$.
Quel que soit p, considérons le mot $w = 0^p10^p10^p$. Ce mot est de longueur $3p+2$ et appartient à K donc il peut être "pompé".
Plus pécisément, il existe $w = xyz$ tel que

1. $|xy| \leq p$
2. $|y| > 0$
3. $xy^iz \in K$ pour tout $i \in \mathbb{N}$.

Puisque $|xy| \leq p$ et puisque les p premiers symboles de w sont des 0, on sait que y ne contient que des 0.
On ne sait pas combien de 0 sont contenus dans y, mais on sait qu'il en a j pour un certain j compris entre 1 et p.
Prenons $i = 3$. On a $xy^3z = xyyyz = 0^{p+j}10^p10^p$. Ce mot ne fait pas partie du language, puisque $j > 0$ et que $p + j > p$ alors que le mot doit finir avec le nombre de 0 le plus nombreux (0^{p+j} dans ce cas), mais il fini avec 0^p.
K n'est donc pas régulier.

Question 5.
Soit L un langage sur l'alphabet Σ. On définit le langage $L_{presque}$ (ou simplement L_p) comme suit :

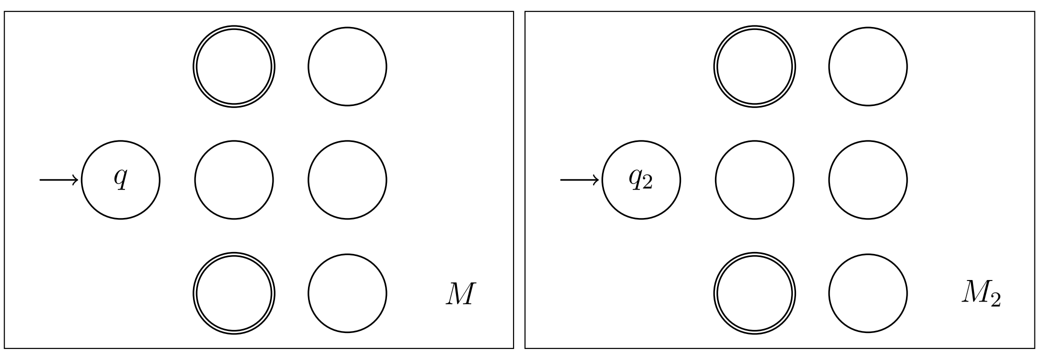
$$L_p = \{xay : a \in \Sigma \wedge x, y \in \Sigma^* \wedge xy \in L\}.$$

En d'autres mots, L_p contient les mots w qui ont la propriété suivante: il est possible d'obtenir un mot de L en effaçant une des lettres de w.
Montrez que si L est régulier alors L_p est aussi régulier.

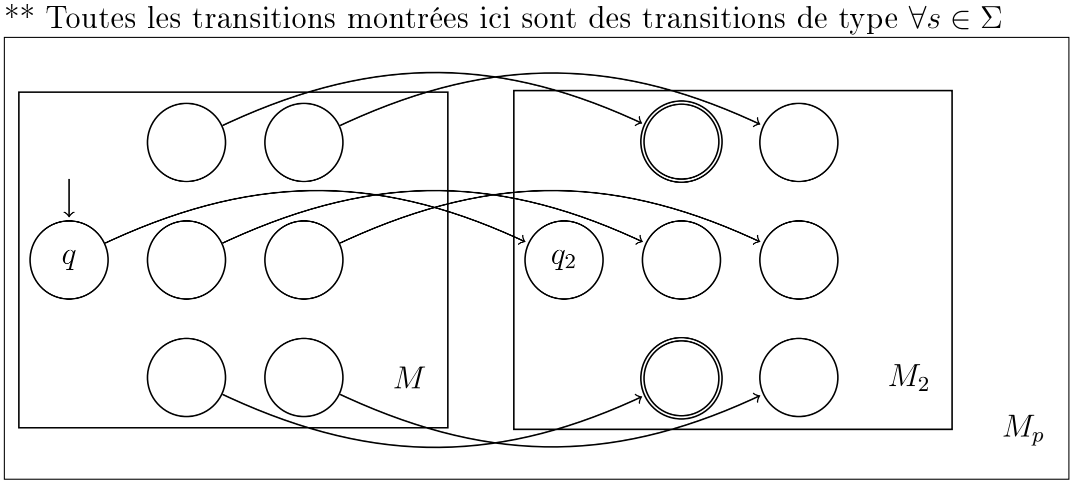
Quelques remarques/indices. Partez d'un automate pour L et construisez en un pour L_p. Utilisez le non-déterminisme. Combinez deux "copies" de l'automate pour L. Je ne demande pas une preuve formelle que votre construction fonctionne mais je m'attends à ce que votre construction soit claire.

Réponse :
Puisque L est régulier, alors L peut être défini par un automate.
Soit $M = (Q, \Sigma, \rho, q, F)$, l'automate répondant au langage L, construisons M_2 une copie de M.
$M_2 = (Q_2, \Sigma, \rho_2, q_2, F_2)$
Construisons M_p, un ϵ-AFN répondant un language L_p comme suit:
$M_p = (Q', \Sigma, \rho', q, F_2)$ avec

- $Q' = Q \cup Q_2$
- $\rho' = \rho \cup \rho_2 \cup \{(p, s, r) : p \in Q \wedge r \in Q_2 \wedge r$ est état copie de $p \wedge s \in \Sigma\}$
  toutes les transitions de M et M_2
  avec une transition de tous les symboles entre les états "copie" de M vers M_2



** Toutes les transitions montrées ici sont des transitions de type $\forall s \in \Sigma$



Que ce passe-t-il dans cet automate?
Remarquons que les états acceptants se trouve tous dans M_2 et qu'il n'y a aucune transition qui commence de M_2 pour se rendre à M. De plus, toutes les transitions de M à M_2 sont sur des noeuds

"Clones" et qu'ils sont valides pour tous les symboles de de l'alphabet Σ. Ceci à pour effet qu'à chaque lecture d'un symbole à partir d'un noeud de M, on se trouve sur le même état, mais dans M_2. Nous avons donc réussi à omettre un symbole. De plus, il n'est plus possible d'omettre de nouveaux symboles, puisque qu'il n'y a plus de transition "maison" de disponible (il commence tous de noeuds de M). Finalement, remarquons que si nous lisons aucun symbole (ϵ), nous sommes forcément dans un noeud de M et donc, nous sommes certains de ne pas être dans un état acceptant.

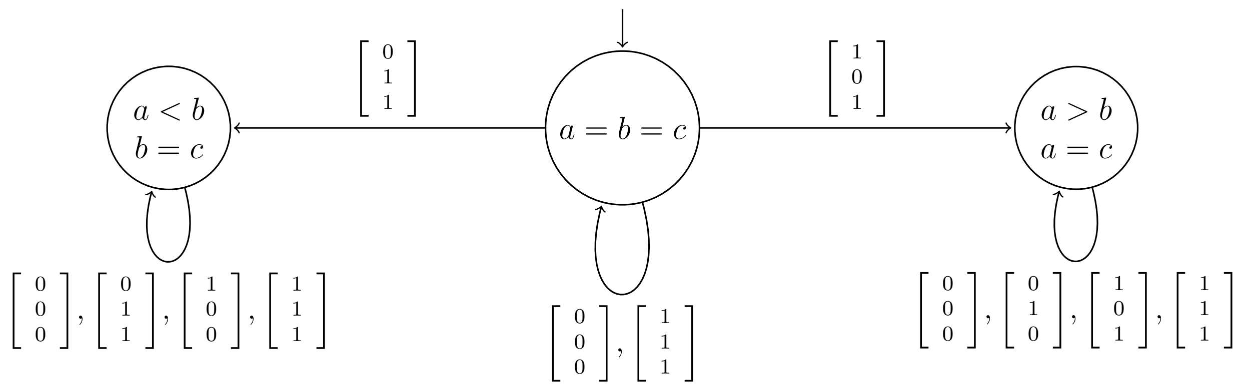
Question 6. Soit Σ l'alphabet de 8 symboles $\left\{\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$. Un mot $w \in \Sigma^*$ de longueur n peut-être vu à la fois comme une suite de n colonnes de 3 bits ou comme 3 rangées de n bits qui peuvent être interprétées comme 3 entiers a_w, b_w, c_w écrits en représentation binaire. Montrez que le langage $L \subseteq \Sigma^*$ des w tels que $c_w = \max\{a_w, b_w\}$ est un langage régulier.

Par exemple, on aura $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \in L$ puisque dans ce cas on a $a_w = 6$, $b_w = 5$, $c_w = 6$ et $6 = \max\{6, 5\}$.

Par contre $\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \notin L$ puisque dans ce cas on a $a_w = 2$, $b_w = 5$ et $c_w = 2$ mais $2 \neq \max\{2, 5\}$.

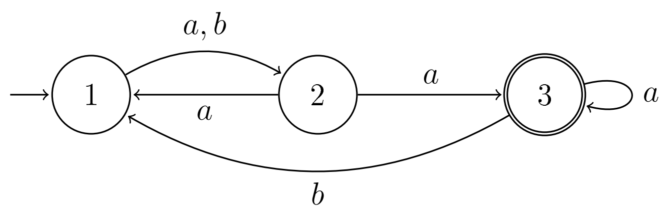
Si vous donnez votre réponse sous la forme d'un automate, vous pouvez omettre l'état poubelle si cela rend votre réponse plus lisible.

Réponse:



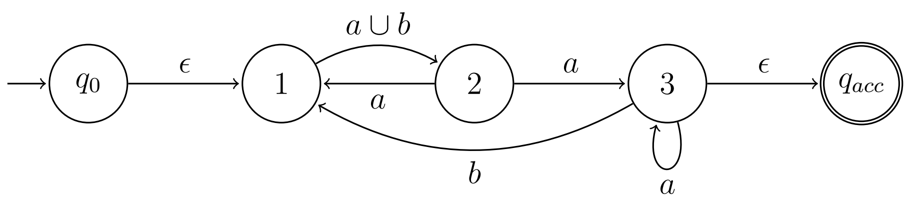
Question 7.

Donnez une expression régulière qui représente le langage accepté par l'automate ci-dessous. Donnez les étapes intermédiaires (c'est pour votre bien et celui de mon correcteur).



Réponse:

Débutons par construire un AFNG.

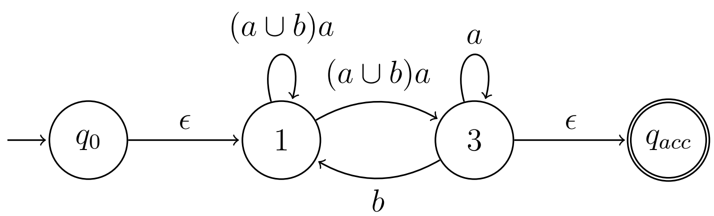


Faisons disparaître l'état 2.

Nous allons perdre la transition $1 \xrightarrow{a\cup b} 2 \xrightarrow{a} 3$. Il faut donc rajouter la transition $1 \xrightarrow{(a\cup b)a} 3$

Nous allons perdre la transition $1 \xrightarrow{a\cup b} 2 \xrightarrow{a} 1$. Il faut donc rajouter la transition $1 \xrightarrow{(a\cup b)a} 1$

Nous obtenons cet AFNG

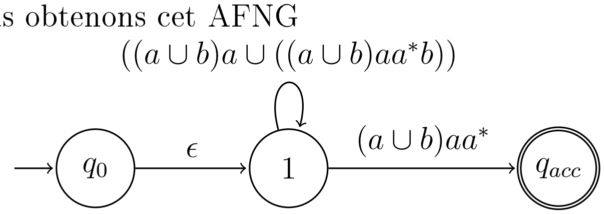


Faisons disparaître l'état 3.

Nous allons perdre la transition $1 \xrightarrow{(a\cup b)a} 3 \xrightarrow{b} 1$. Il faut donc rajouter la transition $1 \xrightarrow{((a\cup b)a)a^*b} 1$

Nous allons perdre la transition $1 \xrightarrow{(a\cup b)a} 3 \xrightarrow{\epsilon} q_{acc}$. Il faut donc rajouter la transition $1 \xrightarrow{((a\cup b)a)a^*\epsilon} q_{acc}$

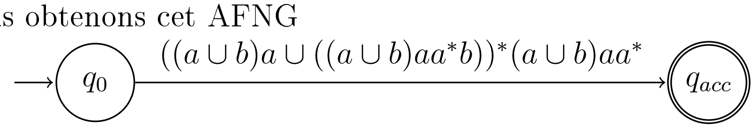
Nous obtenons cet AFNG



Faisons disparaître l'état 3.

Nous allons perdre la transition $q_0 \xrightarrow{\epsilon} 1 \xrightarrow{(a\cup b)aa*} q_{acc}$. Il faut donc rajouter la transition $q_0 \xrightarrow{\epsilon((a\cup b)a)^*((a\cup b)aa*)}$ q_{acc}

Nous obtenons cet AFNG



Question 8. (facultative)

Soit L un langage sur l'alphabet $\{a, b\}$. Définissons K sur ce même alphabet par $K = \{x|xx \in L\}$. Montrez que si L est régulier alors K est aussi régulier.

(Les bonnes idées qui ne marchent pas tout à fait seront récompensées!)

Réponse: Comment éviter les boucles dans un automate???
Je ne réussi pas à prouver par le lemme de pompage que K n'est pas régulier.

Cependant, je ne vois pas comment je suis capable de dupliquer un automate, puisque s'il y a une boucle dans l'automate, la boucle doit se reproduire exactement dans la 2e copie du mot. Ceci me semble impossible à moins d'avoir une quantité infinie d'états.
La façon de le dire qui pourrait ressembler le plus à une solution est là suivante:

Pour chaque transition de M, l'automate de L, faire un produit synchrone avec une copie de l'automate ne contenant que les transitions déjà réalisées.

En tous cas, voici la démarche pour prouver que K est irrégulier, même si elle ne prouve rien.

Supposons que K est régulier. Il satisfait donc le lemme de pompage pour une certaine longueur de pompage $p > 0$.

Supposons que L est le langage de tous les mots de l'alphabet a, b défini par $(a \cup b)^*$.

Quel que soit p, considérons le mot $w = a^p b^p$. Ce mot est de longueur $2p$ et appartient à K donc il peut être "pompé".

$ww \in L$

Plus pécisément, il existe $w = xyz$ tel que

1. $|xy| \leq p$
2. $|y| > 0$
3. $xy^i z \in K$ pour tout $i \in \mathbb{N}$.

Puisque $|xy| \leq p$ et puisque les p premiers symboles de w sont des a, on sait que y ne contient que des a.
On ne sait pas combien de a sont contenus dans y, mais on sait qu'il en a j pour un certain j compris entre 1 et p.
Prenons $i = 3$. On a $xy^3z = xyyyz = a^{p+j}b^p a^p b^p$. Ce mot fait bien parti du langage, car $xyyyzxyyyz \in L$
K n'est donc pas prouvé irrégulier.
Si on se donne un L tel qu'il est impossible de $xx \in L$. (Par exemple, $L = a$), alors l'automate suivant pourra répondre pour K: $a \cap b$. Ce qui ne montre pas que K n'est pas régulier.