IFT-2002 Informatique Théorique
Devoir 1

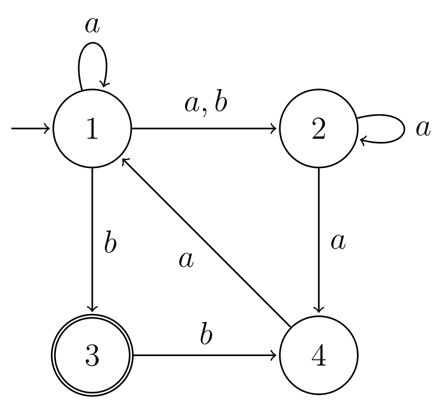
À remettre le 11 octobre 2018 avant minuit

Question 1.
Construisez des automates finis qui acceptent les langages suivants. Les automates peuvent être non-déterministes si cela vous simplifie la tâche. Par contre, vous ne pouvez pas utiliser des transitions étiquetées par un mot (voir p. 38 dans les anciennes notes de cours), par une expression régulière ou par le mot vide ϵ.

- Sur l'alphabet $\{a, b\}$, le langage L des mots qui ne contiennent ni la sous-séquence ab ni la sous-séquence ba.
- Sur l'alphabet $\{a, b\}$, le langage L des mots qui soit débutent par un a et sont de longueur paire soit débutent par un b et sont de longueur impaire.

Question 2. Donnez des expressions régulières qui représentent les deux langages de la question 1.

Question 3. Construisez un automate déterministe qui accepte le même langage que l'automate non-déterministe ci-dessous. *Vous pouvez omettre l'état poubelle si ça vous permet d'avoir un automate plus lisible.*



Question 4.
Soit K le langage suivant sur l'alphabet $\{0, 1\}$.

$$K = \{0^i 1 0^j 1 0^k | i, j, k \in \mathbb{N} \wedge k = \max\{i, j\}\}$$

Montrez que K n'est pas régulier.

Question 5.

Soit L un langage sur l'alphabet Σ. On définit le langage $L_{presque}$ (ou simplement L_p) comme suit :

$$L_p = \{xay : a \in \Sigma \wedge x, y \in \Sigma^* \wedge xy \in L\}.$$

En d'autres mots, L_p contient les mots w qui ont la propriété suivante: il est possible d'obtenir un mot de L en effaçant une des lettres de w.
Montrez que si L est régulier alors L_p est aussi régulier.

Quelques remarques/indices. Partez d'un automate pour L et construisez en un pour L_p. Utilisez le non-déterminisme. Combinez deux "copies" de l'automate pour L. Je ne demande pas une preuve formelle que votre construction fonctionne mais je m'attends à ce que votre construction soit claire.

Question 6.

Soit Σ l'alphabet de 8 symboles $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. Un mot $w \in \Sigma^*$ de longueur n peut-être vu à la fois comme une suite de n colonnes de 3 bits ou comme 3 rangées de n bits qui peuvent être interprétées comme 3 entiers a_w, b_w, c_w écrits en représentation binaire. Montrez que le langage $L \subseteq \Sigma^*$ des w tels que $c_w = \max\{a_w, b_w\}$ est un langage régulier.

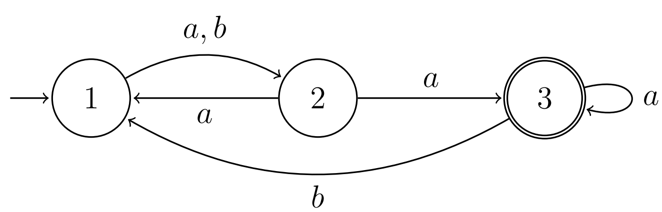
Par exemple, on aura $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in L$ puisque dans ce cas on a $a_w = 6$, $b_w = 5$, $c_w = 6$ et $6 = \max\{6, 5\}$.

Par contre $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \notin L$ puisque dans ce cas on a $a_w = 2$, $b_w = 5$ et $c_w = 2$ mais $2 \neq \max\{2, 5\}$.

Si vous donnez votre réponse sous la forme d'un automate, vous pouvez omettre l'état poubelle si cela rend votre réponse plus lisible.

Question 7.

Donnez une expression régulière qui représente le langage accepté par l'automate ci-dessous. Donnez les étapes intermédiaires (c'est pour votre bien et celui de mon correcteur).



Question 8. (facultative)

Soit L un langage sur l'alphabet $\{a, b\}$. Définissons K sur ce même alphabet par $K = \{x | xx \in L\}$. Montrez que si L est régulier alors K est aussi régulier.

(Les bonnes idées qui ne marchent pas tout à fait seront récompensées!)