

# IFT-2002 Informatique Théorique

## Devoir 1

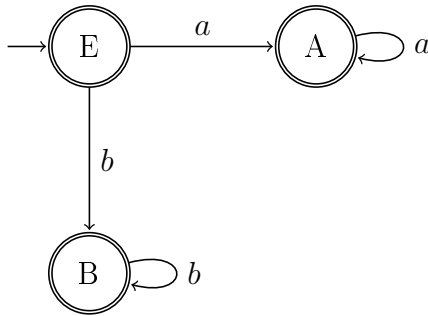
À remettre le 11 octobre 2018 avant minuit

### Question 1.

Construisez des automates finis qui acceptent les langages suivants. Les automates peuvent être non-déterministes si cela vous simplifie la tâche. Par contre, vous ne pouvez pas utiliser des transitions étiquetées par un mot (voir p. 38 dans les anciennes notes de cours), par une expression régulière ou par le mot vide  $\epsilon$ .

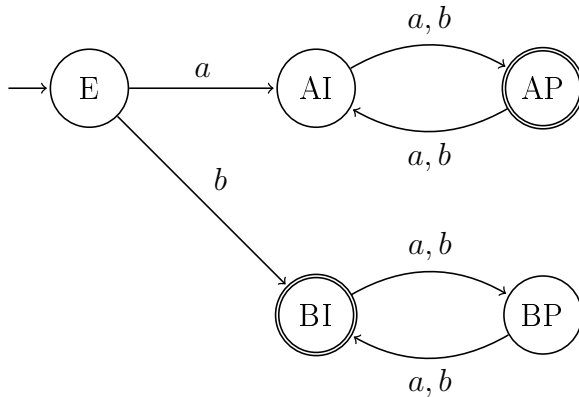
- Sur l'alphabet  $\{a, b\}$ , le langage  $L$  des mots qui ne contiennent ni la sous-séquence  $ab$  ni la sous-séquence  $ba$ .

Réponse:



- Sur l'alphabet  $\{a, b\}$ , le langage  $L$  des mots qui soit débutent par un  $a$  et sont de longueur paire soit débutent par un  $b$  et sont de longueur impaire.

Réponse:

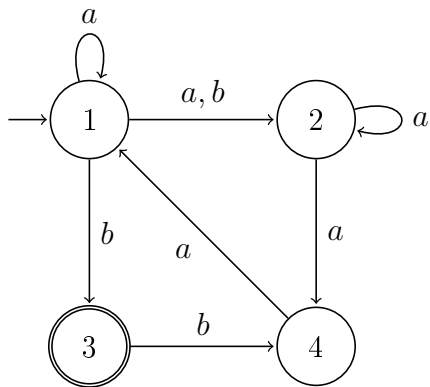


**Question 2.** Donnez des expressions régulières qui représentent les deux langages de la question 1.

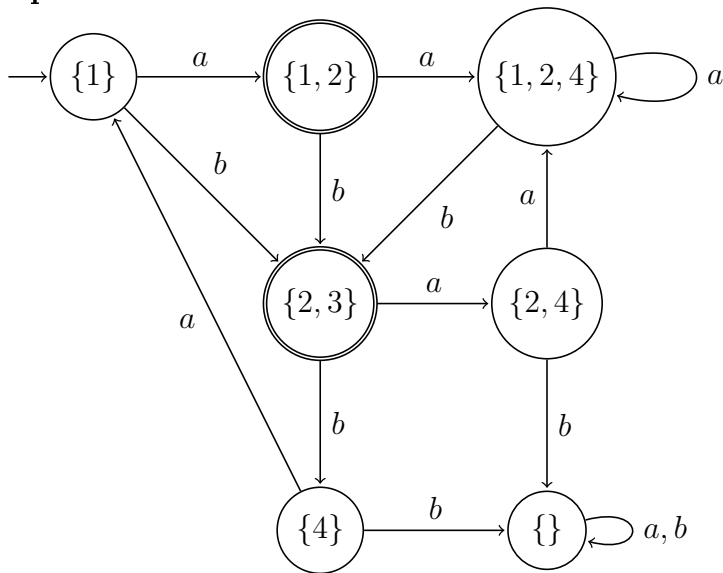
Réponse 1:  $a^* \cup b^*$

Réponse 2:  $(a(a \cup b) \cup b)((a \cup b)(a \cup b))^*$

**Question 3.** Construisez un automate déterministe qui accepte le même langage que l'automate non-déterministe ci-dessous. Vous pouvez omettre l'état poubelle si ça vous permet d'avoir un automate plus lisible.



**Réponse:**



**Question 4.**

Soit  $K$  le langage suivant sur l'alphabet  $\{0, 1\}$ .

$$K = \{0^i 10^j 10^k \mid i, j, k \in \mathbb{N} \wedge k = \max\{i, j\}\}$$

Montrez que  $K$  n'est pas régulier.

**Réponse:**

Supposons que  $K$  est régulier. Il satisfait donc le lemme de pompage pour une certaine longueur de pompage  $p > 0$ .

Quel que soit  $p$ , considérons le mot  $w = 0^p 10^p 10^p$ . Ce mot est de longueur  $3p+2$  et appartient à  $K$  donc il peut être "pompe".

Plus précisément, il existe  $w = xyz$  tel que

1.  $|xy| \leq p$
2.  $|y| > 0$
3.  $xy^i z \in K$  pour tout  $i \in \mathbb{N}$ .

Puisque  $|xy| \leq p$  et puisque les  $p$  premiers symboles de  $w$  sont des 0, on sait que  $y$  ne contient que des 0.

On ne sait pas combien de 0 sont contenus dans  $y$ , mais on sait qu'il en a  $a$  pour un certain  $a$  compris entre 1 et  $p$ .

Prenons  $i = 3$ . On a  $xy^2 z = xy y z = 0^{p+a} 10^p 10^p$ . Ce mot ne fait pas partie du langage, puisque  $a > 0$  et que  $p + a > p$  alors que le mot doit finir avec le nombre de 0 le plus nombreux ( $0^{p+a}$  dans ce cas), mais il fini avec  $0^p$ .

$K$  n'est donc pas régulier.

**Question 5.**

Soit  $L$  un langage sur l'alphabet  $\Sigma$ . On définit le langage  $L_{\text{presque}}$  (ou simplement  $L_p$ ) comme suit :

$$L_p = \{xay : a \in \Sigma \wedge x, y \in \Sigma^* \wedge xy \in L\}.$$

En d'autres mots,  $L_p$  contient les mots  $w$  qui ont la propriété suivante: il est possible d'obtenir un mot de  $L$  en effaçant une des lettres de  $w$ .

Montrez que si  $L$  est régulier alors  $L_p$  est aussi régulier.

*Quelques remarques/indices. Partez d'un automate pour  $L$  et construisez en un pour  $L_p$ . Utilisez le non-déterminisme. Combinez deux "copies" de l'automate pour  $L$ . Je ne demande pas une preuve formelle que votre construction fonctionne mais je m'attends à ce que votre construction soit claire.*

**Réponse :**

Puisque  $L$  est régulier, alors  $L$  peut être défini par un automate.

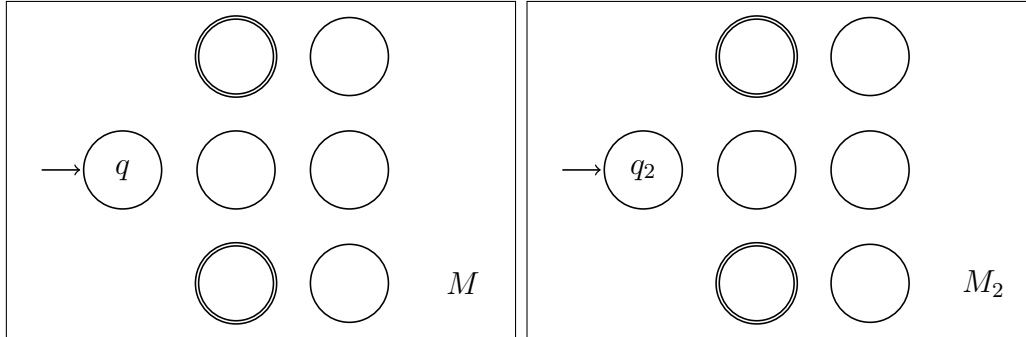
Soit  $M = (Q, \Sigma, \rho, q, F)$ , l'automate répondant au langage  $L$ , construisons  $M_2$  une copie de  $M$ .

$M_2 = (Q_2, \Sigma, \rho_2, q_2, F_2)$

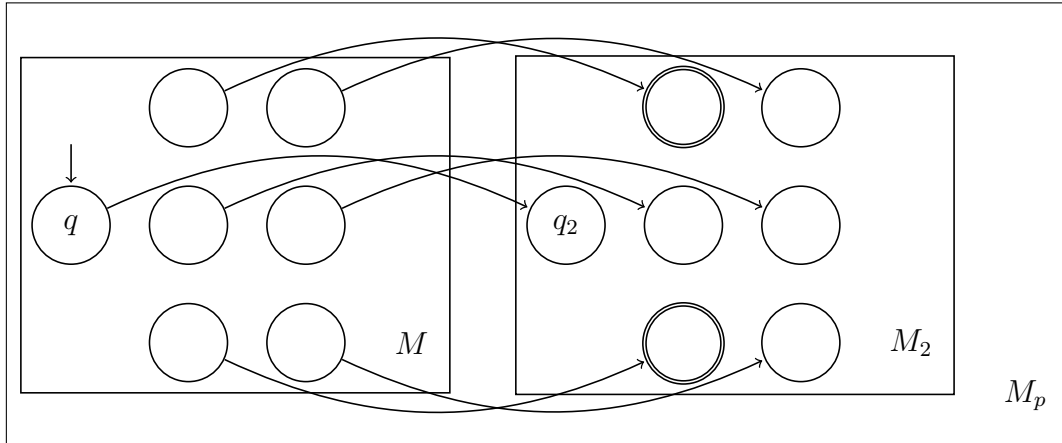
Construisons  $M_p$ , un  $\epsilon$ -AFN répondant un langage  $L_p$  comme suit:

$M_p = (Q', \Sigma, \rho', q, F_2)$  avec

- $Q' = Q \cup Q_2$
- $\rho' = \rho \cup \rho_2 \cup \{(p, s, r) : p \in Q \wedge r \in Q_2 \wedge r \text{ est état copie de } p \wedge s \in \Sigma\}$   
toutes les transitions de  $M$  et  $M_2$   
avec une transition de tous les symboles entre les états "copie" de  $M$  vers  $M_2$



\*\* Toutes les transitions montrées ici sont des transitions de type  $\forall s \in \Sigma$



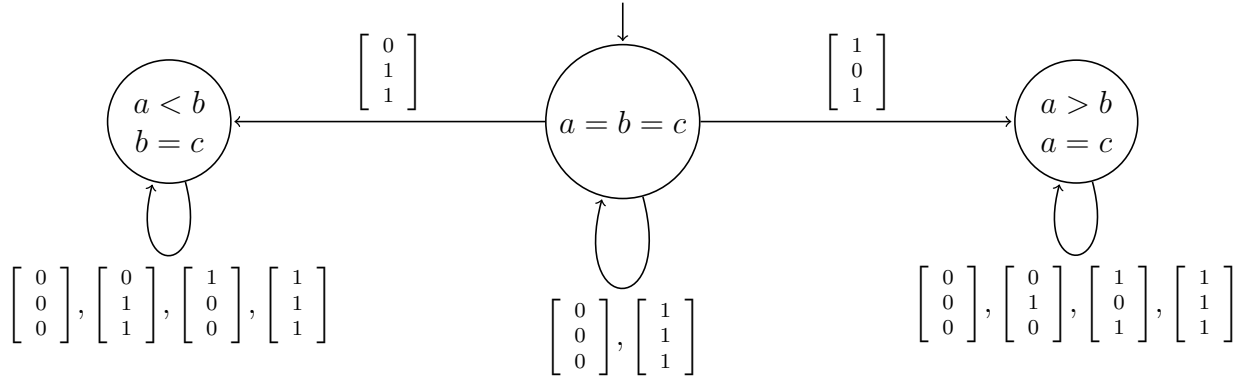
**Question 6.** Soit  $\Sigma$  l'alphabet de 8 symboles  $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ .  
 Un mot  $w \in \Sigma^*$  de longueur  $n$  peut-être vu à la fois comme une suite de  $n$  colonnes de 3 bits ou comme 3 rangées de  $n$  bits qui peuvent être interprétées comme 3 entiers  $a_w, b_w, c_w$  écrits en représentation binaire. Montrez que le langage  $L \subseteq \Sigma^*$  des  $w$  tels que  $c_w = \max\{a_w, b_w\}$  est un langage régulier.

Par exemple, on aura  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in L$  puisque dans ce cas on a  $a_w = 6, b_w = 5, c_w = 6$  et  $6 = \max\{6, 5\}$ .

Par contre  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \notin L$  puisque dans ce cas on a  $a_w = 2, b_w = 5$  et  $c_w = 2$  mais  $2 \neq \max\{2, 5\}$ .

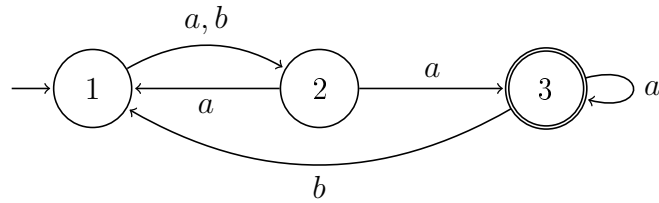
Si vous donnez votre réponse sous la forme d'un automate, vous pouvez omettre l'état poubelle si cela rend votre réponse plus lisible.

**Réponse:**



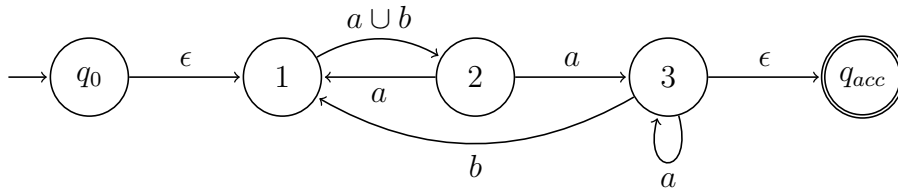
### Question 7.

Donnez une expression régulière qui représente le langage accepté par l'automate ci-dessous. Donnez les étapes intermédiaires (c'est pour votre bien et celui de mon correcteur).



### Réponse:

Débutons par construire un AFNG.

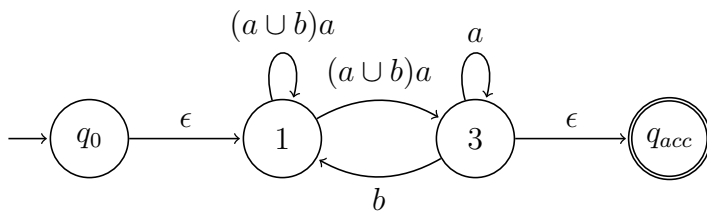


Faisons disparaître l'état 2.

Nous allons perdre la transition  $1 \xrightarrow{a \cup b} 2 \xrightarrow{a} 3$ . Il faut donc rajouter la transition  $1 \xrightarrow{(a \cup b)a} 3$

Nous allons perdre la transition  $1 \xrightarrow{a \cup b} 2 \xrightarrow{a} 1$ . Il faut donc rajouter la transition  $1 \xrightarrow{(a \cup b)a} 1$

Nous obtenons cet AFNG

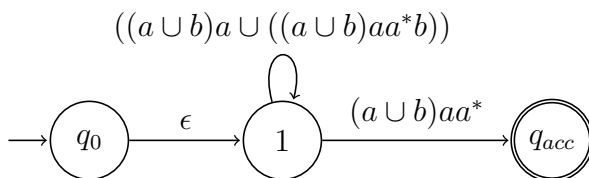


Faisons disparaître l'état 3.

Nous allons perdre la transition  $1 \xrightarrow{(a \cup b)a} 3 \xrightarrow{b} 1$ . Il faut donc rajouter la transition  $1 \xrightarrow{((a \cup b)a)a^*b} 1$

Nous allons perdre la transition  $1 \xrightarrow{(a \cup b)a} 3 \xrightarrow{\epsilon} q_{acc}$ . Il faut donc rajouter la transition  $1 \xrightarrow{((a \cup b)a)a^*\epsilon} q_{acc}$

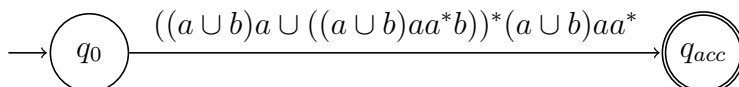
Nous obtenons cet AFNG



Faisons disparaître l'état 1.

Nous allons perdre la transition  $q_0 \xrightarrow{\epsilon} 1 \xrightarrow{(a \cup b)aa^*} q_{acc}$ . Il faut donc rajouter la transition  $q_0 \xrightarrow{\epsilon((a \cup b)a)^*((a \cup b)aa^*)} q_{acc}$

Nous obtenons cet AFNG



**Question 8. (facultative)**

Soit  $L$  un langage sur l'alphabet  $\{a, b\}$ . Définissons  $K$  sur ce même alphabet par  $K = \{x|xx \in L\}$ . Montrez que si  $L$  est régulier alors  $K$  est aussi régulier.

(Les bonnes idées qui ne marchent pas tout à fait seront récompensées!)