

Question 3

Algorithme 1

Nous allons séparer l'analyse de cet algorithme en deux blocs distincts. Le bloc A portera sur les boucles `for` imbriquées. Le bloc B portera sur la dernière boucle `for`. Les opérations restantes sont des opérations atomiques et ne changeront donc pas l'analyse asymptotique.

Bloc A

Taille de l'instance

La taille de l'instance est n , la valeur fournie en paramètre.

Opérateur de base

Nous allons prendre comme opérateur de base l'addition de c avec 1 ($c+1$).

Le nombre de fois que cet opérateur est atteint dépend uniquement de la valeur de n .

Le nombre de fois que l'opérateur de base est appelé peut être donné par la sommation suivante :

$$C_A(n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i^3}^{n^3} 1$$

Résolvons cette équation.

$$\begin{aligned} & C_A(n) \\ = & \quad \langle \text{Définition de } C_A(n) \rangle \\ & \sum_{i=1}^n \sum_{j=i^3}^{n^3} 1 \\ = & \quad \langle \text{Somme d'une constante} \rangle \\ & \sum_{i=1}^n ((n^3 - i^3 + 1) \cdot 1) \\ = & \quad \langle \text{Simplification} \rangle \\ & \sum_{i=1}^n (n^3 - i^3 + 1) \end{aligned}$$

Analyse asymptotique

Nous allons borner la sommation par une intégrale.

La sommation est non croissante.

$$\text{Avec } f(i) = \sum_{i=1}^n (n^3 - i^3 + 1);$$

$$\text{Avec } g(x) = \int_1^{n+1} (n^3 - x^3 + 1) dx;$$

$$\text{Avec } h(x) = \int_0^n (n^3 - x^3 + 1) dx;$$

Réolvons $g(x) \leq f(i) \leq h(x)$, l'approximation par intégrale d'une sommation nulle part croissante :

$$\text{Réolvons } g(x) = \int_1^{n+1} (n^3 - x^3 + 1) dx, \text{ soit une borne inférieure de } \sum_{i=1}^n (n^3 - i^3 + 1).$$

$$\begin{aligned} & C_A(n) \\ = & \quad \langle \text{Définition de } C_A(n) \rangle \\ & f(i) \\ \geq & \quad \langle \text{Définition de } g(x) \rangle \\ & g(x) \\ = & \quad \langle \text{Définition de } g(x) \rangle \\ & \int_1^{n+1} (n^3 - x^3 + 1) dx \\ = & \quad \langle \text{Distribution de l'intégration} \rangle \\ & \int_1^{n+1} n^3 dx - \int_1^{n+1} x^3 dx + \int_1^{n+1} 1 dx \\ = & \quad \langle \text{Intégration} \rangle \\ & [n^3 x]_1^{n+1} - \left[\frac{x^4}{4} \right]_1^{n+1} + [x]_1^{n+1} dx \\ = & \quad \langle \text{Évaluation} \rangle \\ & (n^3(n+1) - n^3(1)) - \left(\frac{(n+1)^4}{4} - \frac{1^4}{4} \right) + (n+1-1) \\ = & \quad \langle \text{Simplification} \rangle \\ & (n^4 + n^3 - n^3) - \left(\frac{(n+1)^4 - 1}{4} \right) + n \\ = & \quad \langle \text{Simplification} \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& n^4 - \frac{(n^2+2n+1)^2-1}{4} + n \\
= & \quad \langle \text{Simplification} \rangle \\
& n^4 - \frac{n^4+4n^3+6n^2+4n+1-1}{4} + n \\
= & \quad \langle \text{Simplification} \rangle \\
& n^4 - \frac{n^4+4n^3+6n^2+4n}{4} + n \\
= & \quad \langle \text{Mettre sur la même base} \rangle \\
& \frac{4n^4}{4} - \frac{n^4+4n^3+6n^2+4n}{4} + \frac{4n}{4} \\
= & \quad \langle \text{Rammener sur la même division} \rangle \\
& \frac{4n^4 - (n^4+4n^3+6n^2+4n) + 4n}{4} \\
= & \quad \langle \text{Distribuer la soustraction} \rangle \\
& \frac{4n^4 - n^4 - 4n^3 - 6n^2 - 4n + 4n}{4} \\
= & \quad \langle \text{Simplifier} \rangle \\
& \frac{3n^4 - 4n^3 - 6n^2}{4} \\
= & \quad \langle \text{Extraction de } \frac{n^2}{4} \rangle \\
& \frac{n^2}{4} (3n^2 - 4n - 6) \\
\geq & \quad \langle \forall n \geq 6 \rangle \\
& \frac{n^2}{4} (3n^2 - 4n - n) \\
= & \quad \langle \text{Simplification} \rangle \\
& \frac{n^2}{4} (3n^2 - 3n) \\
= & \quad \langle \text{Simplification} \rangle \\
& \frac{n^3}{4} (3n - 3) \\
\geq & \quad \langle \forall n \geq 3 \rangle \\
& \frac{n^3}{4} (3n - n) \\
= & \quad \langle \text{Simplification} \rangle \\
& \frac{n^3}{4} (2n) \\
= & \quad \langle \text{Simplification} \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{2n^4}{4} \\
= & \quad \langle \text{Simplification} \rangle \\
& \frac{n^4}{2} \\
\in & \quad \langle \text{Définition de } \Omega \rangle \\
& \Omega(n^4) \\
\text{Résolvons } h(x) = \int_0^n (n^3 - x^3 + 1) dx, \text{ soit une borne supérieure de } \sum_{i=1}^n (n^3 - i^3 + 1). \\
& C_A(n) \\
= & \quad \langle \text{Définition de } C_A(n) \rangle \\
& f(i) \\
\leq & \quad \langle \text{Définition de } h(x) \rangle \\
& h(x) \\
= & \quad \langle \text{Définition de } h(x) \rangle \\
& \int_0^n (n^3 - x^3 + 1) dx \\
= & \quad \langle \text{Distribution de l'intégration} \rangle \\
& \int_0^n n^3 dx - \int_0^n x^3 dx + \int_0^n 1 dx \\
= & \quad \langle \text{Intégration} \rangle \\
& [n^3 x]_0^n - \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^n + [x]_0^n \\
= & \quad \langle \text{Évaluation} \rangle \\
& (n^3(n) - n^3(0)) - \left(\frac{n^4}{4} - \frac{0^4}{4} \right) + (n - 0) \\
= & \quad \langle \text{Simplification} \rangle \\
& n^4 - \frac{n^4}{4} + n \\
= & \quad \langle \text{Simplification} \rangle \\
& \frac{3}{4}n^4 + n \\
\leq & \quad \langle \forall n \geq 0 \rangle \\
& \frac{3}{4}n^4 \\
\in & \quad \langle \text{Définition de } \mathcal{O} \rangle
\end{aligned}$$

$$\mathcal{O}(n^4)$$

Donc $C_A(n) \in \Theta(n^4)$, puisque $f(i) \in \Omega(n^4)$ et $f(i) \in \mathcal{O}(n^4)$

Bloc B

Taille de l'instance

La taille de l'instance est n , la valeur fournie en paramètre.

Opérateur de base

Nous allons prendre comme opérateur de base l'addition de c avec 1 ($c+1$).

Le nombre de fois que cet opérateur est atteint dépend uniquement de la valeur de n .

Le nombre de fois que l'opérateur de base est appelé peut être donné par la sommation suivante :

$$C_B(n) = \sum_{i=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} 1$$

Réolvons cette équation.

$$\begin{aligned} & C_B(n) \\ = & \quad \langle \text{Définition de } C_B(n) \rangle \\ & \sum_{i=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} 1 \\ = & \quad \langle \text{Sommation d'une constante} \rangle \\ & ((\lfloor \sqrt{n} \rfloor - 1 + 1) \cdot 1) \\ = & \quad \langle \text{Simplification} \rangle \\ & \lfloor \sqrt{n} \rfloor \end{aligned}$$

Analyse asymptotique

En utilisant la définition de la fonction plancher, nous avons :

$$\sqrt{n} - 1 < C_B(n) \leq \sqrt{n}$$

Utilisons ces inéquation pour trouver la notation asymptotique de $C_B(n)$

Trouvons Ω

$$\begin{aligned}
& C_B(n) \\
= & \quad \langle \text{Définition de } C_B(n) \rangle \\
& \lfloor \sqrt{n} \rfloor \\
> & \quad \langle \text{Définition de la fonction plancer} \rangle \\
& \sqrt{n} - 1 \\
\geq & \quad \langle \forall n \geq 4 \rangle \\
& \sqrt{n} - \frac{\sqrt{n}}{2} \\
= & \quad \langle \text{Simplification} \rangle \\
& \frac{\sqrt{n}}{2} \\
= & \quad \langle \text{Définition de la racine carrée} \rangle \\
& \frac{n^{\frac{1}{2}}}{2} \\
\in & \quad \langle \text{Définition } \Omega \rangle \\
& \Omega\left(n^{\frac{1}{2}}\right)
\end{aligned}$$

Trouvons \mathcal{O}

$$\begin{aligned}
& C_B(n) \\
= & \quad \langle \text{Définition de } C_B(n) \rangle \\
& \lfloor \sqrt{n} \rfloor \\
\leq & \quad \langle \text{Définition de la fonction plancer} \rangle \\
& \sqrt{n} \\
= & \quad \langle \text{Définition de la racine carrée} \rangle \\
& n^{\frac{1}{2}} \\
\in & \quad \langle \text{Définition } \mathcal{O} \rangle \\
& \mathcal{O}\left(n^{\frac{1}{2}}\right)
\end{aligned}$$

Donc $C_B(n) \in \Theta\left(n^{\frac{1}{2}}\right)$

Résultat finaux

Nous avons pour le bloc A que $C_A(n) \in \Theta(n^4)$ et pour le bloc B que $C_B(n) \in \Theta\left(n^{\frac{1}{2}}\right)$.

Puisque chacun des blocs s'exécute une fois, nous pouvons conclure $C(n) \in \Theta(n^4) + \Theta\left(n^{\frac{1}{2}}\right)$.

En utilisant la règle du maximum, nous pouvons avoir : $C(n) \in \Theta(n^4)$.