Sylvain, Raphaël
111 124 564

Question 2

$$C(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \leq 1 \\ 2 \cdot C(\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor) + n & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

Nous allons commencer par essayer de résoudre cette récurrence, que pour les occurances de $n = 3^k \ \forall k \in \mathbb{N}$

Nous aurons alors

$C\left(3^k\right) = 2 \cdot C\left(\left\lfloor \frac{3^k}{3} \right\rfloor\right) + 3^k = 2 \cdot C\left(3^{k-1}\right) + 3^k$

avec comme valeur de base

$C(3^0) = 0$

Résolvons :

$$\begin{aligned}
& C\left(3^k\right) \\
= & \qquad \langle \text{ } 1^{ere} \text{ induction } \rangle \\
& 2 \cdot C\left(3^{k-1}\right) + 3^k \\
= & \qquad \langle \text{ } 2^{e} \text{ induction } \rangle \\
& 2 \cdot \left[2 \cdot C\left(3^{k-2}\right) + 3^k\right] + 3^k \\
= & \qquad \langle \text{ Simplification } \rangle \\
& 2^2 \cdot C\left(3^{k-2}\right) + 2 \cdot 3^k \\
= & \qquad \langle \text{ } 3^{e} \text{ induction } \rangle \\
& 2^2 \cdot \left[2 \cdot C\left(3^{k-3}\right) + 3^k\right] + 2 \cdot 3^k \\
= & \qquad \langle \text{ Simplification } \rangle \\
& 2^3 \cdot C\left(3^{k-3}\right) + 3 \cdot 3^k \\
= & \qquad \langle \text{ Suite } \rangle \\
& \ldots \\
= & \qquad \langle \text{ } i^{e} \text{ induction } \rangle \\
& 2^i \cdot C\left(3^{k-i}\right) + i \cdot 3^k \\
= & \qquad \langle \text{ Suite } \rangle \\
& \ldots \\
= & \qquad \langle \text{ } k^{e} \text{ induction } \rangle \\
& 2^k \cdot C\left(3^{k-k}\right) + k \cdot 3^k
\end{aligned}$$

$= \quad \langle \text{ Simplification } \rangle$

$2^k \cdot C\left(3^0\right) + k \cdot 3^k$

$= \quad \langle \text{ Valeur de base } \rangle$

$2^k \cdot 0 + k \cdot 3^k$

$= \quad \langle \text{ Simplification } \rangle$

$k \cdot 3^k$

Nous avons alors que $\forall n = 3^k$

$C(n) = n \cdot 3^n$

$\equiv \quad \langle \text{ Division par } n \ \rangle$

$\frac{C(n)}{n} = 3^n$

$\equiv \quad \langle \text{ Application de } log_3 \ \rangle$

$log_3\left(\frac{C(n)}{n}\right) = log_3\left(3^n\right)$

$\equiv \quad \langle \text{ Règle des logs } \rangle$

$log_3\left(\frac{C(n)}{n}\right) = n \cdot log_3\left(3\right)$

$\equiv \quad \langle \text{ Règle des logs } \rangle$

$log_3\left(\frac{C(n)}{n}\right) = n \cdot 1$

$\equiv \quad \langle \text{ Simplification } \rangle$

$log_3\left(\frac{C(n)}{n}\right) = n$

$\equiv \quad \langle \text{ Règle des logs } \rangle$

$log_3\left(C(n)\right) - log_3\left(n\right) = n$

$\equiv \quad \langle \text{ Arithmétique } \rangle$

$log_3\left(C(n)\right) = n + log_3\left(n\right)$