

Question 2

$$C(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \leq 1 \\ 2 \cdot C(\lfloor \frac{n}{3} \rfloor) + n & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

Résolution récurrence

Nous allons commencer par essayer de résoudre cette récurrence, que pour les occurrences de $n = 3^k \forall k \in \mathbb{N}$

Nous aurons alors

$$C(3^k) = 2 \cdot C\left(\left\lfloor \frac{3^k}{3} \right\rfloor\right) + 3^k = 2 \cdot C(3^{k-1}) + 3^k$$

avec comme valeur de base

$$C(3^0) = 0$$

Résolvons :

$$\begin{aligned} & C(n) \\ = & \quad \langle \text{Définition de } 3^k \rangle \\ & C(3^k) \\ = & \quad \langle 1^{ere} \text{ induction} \rangle \\ & 2 \cdot C(3^{k-1}) + 3^k \\ = & \quad \langle 2^e \text{ induction} \rangle \\ & 2 \cdot [2 \cdot C(3^{k-2}) + 3^{k-1}] + 3^k \\ = & \quad \langle \text{Simplification} \rangle \\ & 2^2 \cdot C(3^{k-2}) + 3^{k-1} + 3^k \\ = & \quad \langle 3^e \text{ induction} \rangle \\ & 2^2 \cdot [2 \cdot C(3^{k-3}) + 3^{k-2}] + 3^{k-1} + 3^k \\ = & \quad \langle \text{Simplification} \rangle \\ & 2^3 \cdot C(3^{k-3}) + 3^{k-2} + 3^{k-1} + 3^k \\ = & \quad \langle \text{Suite} \rangle \\ & \dots \\ = & \quad \langle i^e \text{ induction} \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2^i \cdot C(3^{k-i}) + 3^{k-(i-1)} + \dots + 3^{k-2} + 3^{k-1} + 3^k \\
= & \quad \langle \text{Suite} \rangle \\
& \dots \\
= & \quad \langle k^e \text{ induction} \rangle \\
& 2^k \cdot C(3^{k-k}) + \sum_{i=k-(k-1)}^k 3^i \\
= & \quad \langle \text{Simplification} \rangle \\
& 2^k \cdot C(3^0) + \sum_{i=1}^k 3^i \\
= & \quad \langle \text{Simplification} \rangle \\
& 2^k \cdot C(1) + \sum_{i=1}^k 3^i \\
= & \quad \langle \text{Valeur de base} \rangle \\
& 2^k \cdot 0 + \sum_{i=1}^k 3^i \\
= & \quad \langle \text{Simplification} \rangle \\
& \sum_{i=1}^k 3^i \\
= & \quad \langle \text{Ajout de valeurs neutres} \rangle \\
& \sum_{i=1}^k 3^i + 3^0 - 3^0 \\
= & \quad \langle \text{Simplification} + \text{insérer addition dans sommation} \rangle \\
& \sum_{i=0}^k 3^i - 1 \\
= & \quad \langle \text{R\`egle de sommation} \rangle \\
& \frac{3^{k+1}-1}{3-1} - 1 \\
= & \quad \langle \text{Simplification} \rangle \\
& \frac{3^{k+1}-1}{2} - \frac{2}{2} \\
= & \quad \langle \text{Simplification} \rangle \\
& \frac{3^{k+1}-1-2}{2} \\
= & \quad \langle \text{Simplification} \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{3^{k+1}-3}{2} \\
= & \quad \langle \text{Extraction exposant} \rangle \\
& \frac{3 \cdot 3^k - 3}{2} \\
= & \quad \langle \text{Définition de } 3^k \rangle \\
& \frac{3n-3}{2} \\
= & \quad \langle \text{Réécriture} \rangle \\
& \frac{3}{2}n - \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Notation asymptotique

Nous pouvons trouver la notation asymptotique :
Borne supérieure :

$$\begin{aligned}
& \frac{3}{2}n - \frac{3}{2} \\
\leq & \quad \langle \text{En ajoutant } \frac{3}{2} \rangle \\
& \frac{3}{2}n \\
\in & \quad \langle \text{Définition du } \mathcal{O} \text{ avec } c_2 = \frac{3}{2} \text{ et } n_0 = 0 \rangle \\
& \mathcal{O}(n)
\end{aligned}$$

Borne inférieure :

$$\begin{aligned}
& \frac{3}{2}n - \frac{3}{2} \\
= & \quad \langle \text{Réécriture} \rangle \\
& \frac{3n}{2} - \frac{3}{2} \\
\geq & \quad \langle \text{En retirant } \frac{n}{2} - \frac{3}{2} \rangle \\
& \frac{3n}{2} - \frac{3}{2} - \left(\frac{n}{2} - \frac{3}{2}\right) \\
= & \quad \langle \text{Appliquer la négation sur la parenthèse} \rangle \\
& \frac{3n}{2} - \frac{3}{2} - \frac{n}{2} + \frac{3}{2} \\
= & \quad \langle \text{Appliquer la négation} \rangle \\
& \frac{3n}{2} - \frac{n}{2} \\
= & \quad \langle -\frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 0 \rangle \\
& \frac{3n-n}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \langle \text{Fusionner la soustraction de même base} \rangle \\
&\quad \frac{2n}{2} \\
&= \langle \text{Simplification} \rangle \\
&\quad n \\
&\in \langle \text{Définition de } \Omega \text{ avec } c_1 = 1 \text{ et } n_0 = 0 \rangle \\
&\quad \Omega(n)
\end{aligned}$$

Donc comme $\frac{3}{2}n - \frac{3}{2} \in \Omega(n)$ et $\frac{3}{2}n - \frac{3}{2} \in \mathcal{O}(n)$, nous pouvons conclure que $\frac{3}{2}n - \frac{3}{2} \in \Theta(n)$.

Nous pouvons aussi conclure que $C(n) \in \Theta(n)$ pour $n = 3^k \forall k \in \mathbb{N}$

Démonstration de la validité pour tout entier n

Nous pouvons utiliser la règle de l'harmonie pour montrer que la notation asymptotique que nous avons trouvé pour les $n = 3^k$ est valide $\forall n \in \mathbb{N}$. Pour ce faire, nous devons montrer 3 choses :

1. $\frac{3}{2}n - \frac{3}{2}$ doit être éventuellement non décroissante.
C'est le cas puisque c'est une fonction linéaire avec une pente positive.
2. L'ordre de croissance, doit être une fonction harmonieuse, donc que $2n \in \Theta(n)$.
C'est le cas puisque

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2n}{n} \\
&= \langle \text{Simplification} \rangle \\
&\quad \lim_{x \rightarrow \infty} 2 \\
&= \langle \text{Application de la limite} \rangle \\
&\quad 2 \quad \langle \text{Valeur constante } > 0, 2n \in \Theta(n) \rangle
\end{aligned}$$

3. On doit avoir $C(n) \in \Theta(n)$ pour $n = b^k \forall k \in \mathbb{N}$
C'est le cas puisque nous l'avons démontré dans la section "Notation asymptotique" avec $b = 3$.

Puisque nous répondons aux trois critères, nous pouvons conclure que $C(n) \in \Theta(n) \forall n \in \mathbb{N}$.