Sylvain, Raphaël
111 124 564

Question 2

$$C(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \leq 1 \\ 2 \cdot C(\lfloor \frac{n}{3} \rfloor) + n & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

Résolution récurence

Nous allons commencer par essayer de résoudre cette récurrence, que pour les occurances de $n = 3^k \ \forall k \in \mathbb{N}$

Nous aurons alors
$C\left(3^k\right) = 2 \cdot C\left(\left\lfloor \frac{3^k}{3} \right\rfloor\right) + 3^k = 2 \cdot C\left(3^{k-1}\right) + 3^k$
avec comme valeur de base
$C(3^0) = 0$
Résolvons :

$$\begin{aligned}
& C\left(n\right) \\
= & \qquad \langle \text{ Définition de } 3^k \ \rangle \\
& C\left(3^k\right) \\
= & \qquad \langle \ 1^{ere} \text{ induction } \rangle \\
& 2 \cdot C\left(3^{k-1}\right) + 3^k \\
= & \qquad \langle \ 2^e \text{ induction } \rangle \\
& 2 \cdot \left[2 \cdot C\left(3^{k-2}\right) + 3^{k-1}\right] + 3^k \\
= & \qquad \langle \text{ Simplification } \rangle \\
& 2^2 \cdot C\left(3^{k-2}\right) + 3^{k-1} + 3^k \\
= & \qquad \langle \ 3^e \text{ induction } \rangle \\
& 2^2 \cdot \left[2 \cdot C\left(3^{k-3}\right) + 3^{k-2}\right] + 3^{k-1} + 3^k \\
= & \qquad \langle \text{ Simplification } \rangle \\
& 2^3 \cdot C\left(3^{k-3}\right) + 3^{k-2} + 3^{k-1} + 3^k \\
= & \qquad \langle \text{ Suite } \rangle \\
& \ldots \\
= & \qquad \langle \ i^e \text{ induction } \rangle
\end{aligned}$$

$2^i \cdot C\left(3^{k-i}\right) + 3^{k-(i-1)} + ... + 3^{k-2} + 3^{k-1} + 3^k$

$=$ $\langle$ Suite $\rangle$

...

$=$ $\langle$ k^e induction $\rangle$

$2^k \cdot C\left(3^{k-k}\right) + \sum_{i=k-(k-1)}^{k} 3^i$

$=$ $\langle$ Simplification $\rangle$

$2^k \cdot C\left(3^0\right) + \sum_{i=1}^{k} 3^i$

$=$ $\langle$ Simplification $\rangle$

$2^k \cdot C\left(1\right) + \sum_{i=1}^{k} 3^i$

$=$ $\langle$ Valeur de base $\rangle$

$2^k \cdot 0 + \sum_{i=1}^{k} 3^i$

$=$ $\langle$ Simplification $\rangle$

$\sum_{i=1}^{k} 3^i$

$=$ $\langle$ Ajout de valeurs neutres $\rangle$

$\sum_{i=1}^{k} 3^i + 3^0 - 3^0$

$=$ $\langle$ Simplification + Insérer addition dans sommation $\rangle$

$\sum_{i=0}^{k} 3^i - 1$

$=$ $\langle$ Règle de sommation $\rangle$

$\frac{3^{k+1}-1}{3-1} - 1$

$=$ $\langle$ Simplification $\rangle$

$\frac{3^{k+1}-1}{2} - \frac{2}{2}$

$=$ $\langle$ Simplification $\rangle$

$\frac{3^{k+1}-1-2}{2}$

$=$ $\langle$ Simplification $\rangle$

$\frac{3^{k+1}-3}{2}$

$=$ $\langle$ Extraction exposant $\rangle$

$\frac{3 \cdot 3^k - 3}{2}$

$=$ $\langle$ Définition de 3^k $\rangle$

$\frac{3n-3}{2}$

$=$ $\langle$ Réécriture $\rangle$

$\frac{3}{2}n - \frac{3}{2}$

Notation asymptotique

Nous pouvons trouver la notation asymptotique :
Borne Supérieure :

$\frac{3}{2}n - \frac{3}{2}$

$\leq$ $\langle$ En ajoutant $\frac{3}{2}$ $\rangle$

$\frac{3}{2}n$

$\in$ $\langle$ Définition du $\mathcal{O}$ avec $c_2 = \frac{3}{2}$ $\rangle$

$\mathcal{O}\left(n\right)$

Borne inférieure :

$\frac{3}{2}n - \frac{3}{2}$

$=$ $\langle$ Réécriture $\rangle$

$\frac{3n}{2} - \frac{3}{2}$

$\geq$ $\langle$ En retirant $\frac{n}{2} - \frac{3}{2}$ $\rangle$

$\frac{3n}{2} - \frac{3}{2} - \left(\frac{n}{2} - \frac{3}{2}\right)$

$=$ $\langle$ Appliquer la négation sur la parenthèse $\rangle$

$\frac{3n}{2} - \frac{3}{2} - \frac{n}{2} + \frac{3}{2}$

$=$ $\langle$ Appliquer la négation $\rangle$

$\frac{3n}{2} - \frac{n}{2}$

$=$ $\langle$ $-\frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 0$ $\rangle$

$\frac{3n-n}{2}$

$=$ $\langle$ Fusionner la soustraction de même base $\rangle$

$\frac{2n}{2}$

$=$ ⟨ Simplification ⟩

n

$\in$ ⟨ Définition de Ω avec $c_1 = 1$ ⟩

$\Omega\left(n\right)$

Donc comme $\frac{3}{2}n - \frac{3}{2} \in \Omega\left(n\right)$ et $\frac{3}{2}n - \frac{3}{2} \in \mathcal{O}\left(n\right)$, nous pouvons conclure que $\frac{3}{2}n - \frac{3}{2} \in \Theta\left(n\right)$.

Nous pouvons aussi conclure que $C\left(n\right) \in \Theta\left(n\right)$ pour $n = 3^k\ \forall k \in \mathbb{N}$