Sylvain, Raphaël
111 124 564

Question 2

$$C(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \leq 1 \\ 2 \cdot C(\lfloor \frac{n}{3} \rfloor) + n & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

Résolution récurence

Nous allons commencer par essayer de résoudre cette récurrence, que pour les occurances de $n = 3^k \ \forall k \in \mathbb{N}$

Nous aurons alors
$C\left(3^k\right) = 2 \cdot C\left(\left\lfloor \frac{3^k}{3} \right\rfloor\right) + 3^k = 2 \cdot C\left(3^{k-1}\right) + 3^k$
avec comme valeur de base
$C(3^0) = 0$
Résolvons :

$$
\begin{aligned}
& C\left(n\right) \\
= & \qquad \langle \text{ Définition de } 3^k \rangle \\
& C\left(3^k\right) \\
= & \qquad \langle \ 1^{ere} \text{ induction } \rangle \\
& 2 \cdot C\left(3^{k-1}\right) + 3^k \\
= & \qquad \langle \ 2^e \text{ induction } \rangle \\
& 2 \cdot \left[2 \cdot C\left(3^{k-2}\right) + 3^{k-1}\right] + 3^k \\
= & \qquad \langle \text{ Simplification } \rangle \\
& 2^2 \cdot C\left(3^{k-2}\right) + 3^{k-1} + 3^k \\
= & \qquad \langle \ 3^e \text{ induction } \rangle \\
& 2^2 \cdot \left[2 \cdot C\left(3^{k-3}\right) + 3^{k-2}\right] + 3^{k-1} + 3^k \\
= & \qquad \langle \text{ Simplification } \rangle \\
& 2^3 \cdot C\left(3^{k-3}\right) + 3^{k-2} + 3^{k-1} + 3^k \\
= & \qquad \langle \text{ Suite } \rangle \\
& \ldots \\
= & \qquad \langle \ i^e \text{ induction } \rangle
\end{aligned}
$$

$$2^i \cdot C\left(3^{k-i}\right) + 3^{k-(i-1)} + ... + 3^{k-2} + 3^{k-1} + 3^k$$

$=$ ⟨ Suite ⟩

...

$=$ ⟨ k^e induction ⟩

$$2^k \cdot C\left(3^{k-k}\right) + \sum_{i=k-(k-1)}^{k} 3^i$$

$=$ ⟨ Simplification ⟩

$$2^k \cdot C\left(3^0\right) + \sum_{i=1}^{k} 3^i$$

$=$ ⟨ Simplification ⟩

$$2^k \cdot C(1) + \sum_{i=1}^{k} 3^i$$

$=$ ⟨ Valeur de base ⟩

$$2^k \cdot 0 + \sum_{i=1}^{k} 3^i$$

$=$ ⟨ Simplification ⟩

$$\sum_{i=1}^{k} 3^i$$

$=$ ⟨ Ajout de valeurs neutres ⟩

$$\sum_{i=1}^{k} 3^i + 3^0 - 3^0$$

$=$ ⟨ Simplification + Insérer addition dans sommation ⟩

$$\sum_{i=0}^{k} 3^i - 1$$

$=$ ⟨ Règle de sommation ⟩

$$\frac{3^{k+1}-1}{3-1} - 1$$

$=$ ⟨ Simplification ⟩

$$\frac{3^{k+1}-1}{2} - \frac{2}{2}$$

$=$ ⟨ Simplification ⟩

$$\frac{3^{k+1}-1-2}{2}$$

$=$ ⟨ Simplification ⟩

$\frac{3^{k+1}-3}{2}$

$=$ $\langle$ Extraction exposant $\rangle$

$\frac{3 \cdot 3^k - 3}{2}$

$=$ $\langle$ Définition de 3^k $\rangle$

$\frac{3n-3}{2}$

$=$ $\langle$ Réécriture $\rangle$

$\frac{3}{2}n - \frac{3}{2}$

Notation asymptotique

Nous pouvons trouver la notation asymptotique :
Borne Supérieure :

$\frac{3}{2}n - \frac{3}{2}$

$\leq$ $\langle$ En ajoutant $\frac{3}{2}$ $\rangle$

$\frac{3}{2}n$

$\in$ $\langle$ Définition du $\mathcal{O}$ avec $c_2 = \frac{3}{2}$ et $n_0 = 0$ $\rangle$

$\mathcal{O}(n)$

Borne inférieure :

$\frac{3}{2}n - \frac{3}{2}$

$=$ $\langle$ Réécriture $\rangle$

$\frac{3n}{2} - \frac{3}{2}$

$\geq$ $\langle$ En retirant $\frac{n}{2} - \frac{3}{2}$ $\rangle$

$\frac{3n}{2} - \frac{3}{2} - \left(\frac{n}{2} - \frac{3}{2}\right)$

$=$ $\langle$ Appliquer la négation sur la parenthèse $\rangle$

$\frac{3n}{2} - \frac{3}{2} - \frac{n}{2} + \frac{3}{2}$

$=$ $\langle$ Appliquer la négation $\rangle$

$\frac{3n}{2} - \frac{n}{2}$

$=$ $\langle$ $-\frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 0$ $\rangle$

$\frac{3n-n}{2}$

$$
\begin{aligned}
= & \quad \langle \text{ Fusionner la soustraction de même base } \rangle \\
& \tfrac{2n}{2} \\
= & \quad \langle \text{ Simplification } \rangle \\
& n \\
\in & \quad \langle \text{ Définition de } \Omega \text{ avec } c_1 = 1 \text{ et } n_0 = 0 \rangle \\
& \Omega(n)
\end{aligned}
$$

Donc comme $\frac{3}{2}n - \frac{3}{2} \in \Omega(n)$ et $\frac{3}{2}n - \frac{3}{2} \in \mathcal{O}(n)$, nous pouvons conclure que $\frac{3}{2}n - \frac{3}{2} \in \Theta(n)$.

Nous pouvons aussi conclure que $C(n) \in \Theta(n)$ pour $n = 3^k \ \forall k \in \mathbb{N}$

Démonstration de la validité pour tout entier n

Nous pouvons utiliser la règles de l'harmonie pour montrer que la notation asymptotique que nous avons trouver pour les $n = 3^k$ est valide $\forall n \in \mathbb{N}$. Pour ce faire, nous devons montrer 3 choses :

1. $\frac{3}{2}n - \frac{3}{2}$ doit être éventuellement non décroissante.
   C'est le cas puisque c'est une fonction linéaire avec une pente positive.
2. L'ordre de croissance, doit être une fonction harmonieuse, donc que $2n \in \Theta(n)$.
   C'est le cas puisque

$$
\begin{aligned}
& \lim_{x \to \infty} \tfrac{2n}{n} \\
= & \quad \langle \text{ Simplification } \rangle \\
& \lim_{x \to \infty} 2 \\
= & \quad \langle \text{ Application de la limit } \rangle \\
& 2 \quad \langle \text{ Valeur constante} > 0,\ 2n \in \Theta(n) \rangle
\end{aligned}
$$

3. On doit avoir $C(n) \in \Theta(n)$ pour $n = b^k \ \forall k \in \mathbb{N}$
   C'est le cas puisque nous l'avons démontré dans la section "Notation asymptotique" avec $b = 3$.

Puisque nous répondont au trois critères, nous pouvons conclure que $C(n) \in \Theta(n) \ \forall n \in \mathbb{N}$.