Sylvain, Raphaël
111 124 564

# Question 2

$$C(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \leq 1 \\ 2 \cdot C(\lfloor \frac{n}{3} \rfloor) + n & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

## Résolution récurrence

Nous allons commencer par essayer de résoudre cette récurrence, que pour les occurrences de $n = 3^k \ \forall k \in \mathbb{N}$. Donc $k = log_3 n$

Nous aurons alors
$C\left(3^k\right) = 2 \cdot C\left(\left\lfloor \frac{3^k}{3} \right\rfloor\right) + 3^k = 2 \cdot C\left(3^{k-1}\right) + 3^k$
avec comme valeur de base
$C(3^0) = 0$
Résolvons :

$$\begin{aligned}
& C\left(n\right) \\
= & \qquad \langle \text{ Définition de } 3^k \ \rangle \\
& C\left(3^k\right) \\
= & \qquad \langle \ 1^{ere} \text{ induction } \rangle \\
& 2 \cdot C\left(3^{k-1}\right) + 3^k \\
= & \qquad \langle \ 2^{e} \text{ induction } \rangle \\
& 2 \cdot \left[2 \cdot C\left(3^{k-2}\right) + 3^{k-1}\right] + 3^k \\
= & \qquad \langle \text{ Simplification } \rangle \\
& 2^2 \cdot C\left(3^{k-2}\right) + 2 \cdot 3^{k-1} + 3^k \\
= & \qquad \langle \ 3^{e} \text{ induction } \rangle \\
& 2^2 \cdot \left[2 \cdot C\left(3^{k-3}\right) + 3^{k-2}\right] + 2 \cdot 3^{k-1} + 3^k \\
= & \qquad \langle \text{ Simplification } \rangle \\
& 2^3 \cdot C\left(3^{k-3}\right) + 2^2 \cdot 3^{k-2} + 2 \cdot 3^{k-1} + 3^k \\
= & \qquad \langle \text{ Suite } \rangle \\
& \ldots \\
= & \qquad \langle \ i^{e} \text{ induction } \rangle
\end{aligned}$$

$$2^i \cdot C\left(3^{k-i}\right) + 2^{i-1} \cdot 3^{k-(i-1)} + ... + 2^2 \cdot 3^{k-2} + 2 \cdot 3^{k-1} + 3^k$$

$= \quad \langle$ Suite $\rangle$

...

$= \quad \langle$ $k^e$ induction $\rangle$

$$2^k \cdot C\left(3^{k-k}\right) + 2^{k-1} \cdot 3^{k-(k-1)} + ... + 2^2 \cdot 3^{k-2} + 2 \cdot 3^{k-1} + 3^k$$

$= \quad \langle$ Simplification $\rangle$

$$2^k \cdot C\left(3^0\right) + 2^{k-1} \cdot 3^1 + ... + 2^2 \cdot 3^{k-2} + 2^1 \cdot 3^{k-1} + 2^0 \cdot 3^k$$

$= \quad \langle$ Simplification $\rangle$

$$2^k \cdot C\left(3^0\right) + \sum_{i=1}^{k}\left(2^{k-i} \cdot 3^i\right)$$

$= \quad \langle$ Simplification $\rangle$

$$2^k \cdot C\left(1\right) + \sum_{i=1}^{k}\left(2^{k-i} \cdot 3^i\right)$$

$= \quad \langle$ Valeur de base $\rangle$

$$2^k \cdot 0 + \sum_{i=1}^{k}\left(2^{k-i} \cdot 3^i\right)$$

$= \quad \langle$ Simplification $\rangle$

$$\sum_{i=1}^{k}\left(2^{k-i} \cdot 3^i\right)$$

$= \quad \langle$ Règle expostant $\rangle$

$$\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{2^k}{2^i} \cdot 3^i\right)$$

$= \quad \langle$ Séparer fraction $\rangle$

$$\sum_{i=1}^{k}\left(2^k \cdot \frac{1}{2^i} \cdot 3^i\right)$$

$= \quad \langle$ Simplification $\rangle$

$$\sum_{i=1}^{k}\left(2^k \cdot \frac{3^i}{2^i}\right)$$

$= \quad \langle$ Simplification $\rangle$

$$\sum_{i=1}^{k}\left(2^k \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^i\right)$$

$=$ $\langle$ Extraire produit constant de la sommation $\rangle$

$$2^k \cdot \sum_{i=1}^{k} \left( \left(\frac{3}{2}\right)^i \right)$$

$=$ $\langle$ Ajuster borne de la sommation $\rangle$

$$2^k \cdot \left( \sum_{i=0}^{k} \left( \left(\frac{3}{2}\right)^i \right) - \left(\frac{3}{2}\right)^0 \right)$$

$=$ $\langle$ Simplification $\rangle$

$$2^k \cdot \left( \sum_{i=0}^{k} \left( \left(\frac{3}{2}\right)^i \right) - 1 \right)$$

$=$ $\langle$ Application de la règle de sommation $\rangle$

$$2^k \cdot \left( \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{k+1} - 1}{\frac{3}{2} - 1} - 1 \right)$$

$=$ $\langle$ Simplification $\rangle$

$$2^k \cdot \left( \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{k+1} - 1}{\frac{1}{2}} - 1 \right)$$

$=$ $\langle$ Simplification $\rangle$

$$2^k \cdot \left( 2 \cdot \left( \left(\frac{3}{2}\right)^{k+1} - 1 \right) - 1 \right)$$

$=$ $\langle$ Simplification $\rangle$

$$2^k \cdot \left( 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{k+1} - 2 - 1 \right)$$

$=$ $\langle$ Simplification $\rangle$

$$2^k \cdot \left( 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{k+1} - 3 \right)$$

$=$ $\langle$ Extraire un $\frac{3}{2}$ $\rangle$

$$2^k \cdot \left( 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{k} - 3 \right)$$

$=$ $\langle$ Simplification $\rangle$

$$2^k \cdot \left( 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{k} - 3 \right)$$

$=$ $\langle$ Appliquer $k$ sur $\frac{3}{2}$ $\rangle$

$$2^k \cdot \left( 3 \cdot \frac{3^k}{2^k} - 3 \right)$$

$=$ $\langle$ Appliquer multiplication $2^k$ $\rangle$

$$2^k \cdot 3 \cdot \frac{3^k}{2^k} - 2^k \cdot 3$$

$=$ ⟨ Simplification ⟩

$3 \cdot 3^k - 2^k \cdot 3$

$=$ ⟨ Définition de $n$ et de $k$ ⟩

$3n - 2^{log_3(n)} \cdot 3$

$=$ ⟨ Simplification ⟩

$3\left(n - 2^{log_3(n)}\right)$

$=$ ⟨ Règle des log ⟩

$3\left(n - 2^{log_3(2) log_2(n)}\right)$

$=$ ⟨ Règle des exposants ⟩

$3\left(n - \left(2^{log_2(n)}\right)^{log_3(2)}\right)$

$=$ ⟨ Simplification ⟩

$3\left(n - n^{log_3(2)}\right)$

$\approx$ ⟨ Approximation du $log_3 2$ ⟩

$3\left(n - n^{0.63093}\right)$

# Notation asymptotique

Nous pouvons trouver la notation asymptotique :
Borne supérieure :

$3\left(n - n^{log_3(2)}\right)$

$=$ ⟨ Réécriture ⟩

$3n - 3n^{log_3(2)}$

$\leq$ ⟨ En ajoutant $3n^{log_3(2)}$ ⟩

$3n - 3n^{log_3(2)} + 3n^{log_3(2)}$

$=$ ⟨ Simplification ⟩

$3n$

$\in$ ⟨ Définition du $\mathcal{O}$ avec $c_2 = 3$ et $n_0 = 0$ ⟩

$\mathcal{O}(n)$

Borne inférieure :

$3\left(n - n^{log_3(2)}\right)$

$=$ $\langle$ Réécriture $\rangle$

$3n - 3n^{log_3(2)}$

$\geq$ $\langle$ En retirant $n - 3n^{log_3(2)}$. Vrai $\forall n \geq 20$ $\rangle$

$3n - 3n^{log_3(2)} - \left(n - 3n^{log_3(2)}\right)$

$=$ $\langle$ Appliquer la négation sur la parenthèse $\rangle$

$3n - 3n^{log_3(2)} - n + 3n^{log_3(2)}$

$=$ $\langle$ Appliquer la négation $\rangle$

$2n$

$\in$ $\langle$ Définition de $\Omega$ avec $c_1 = 2$ et $n_0 = 20$ $\rangle$

$\Omega\left(n\right)$

Donc comme $3\left(n - n^{log_3(2)}\right) \in \Omega\left(n\right)$ et $3\left(n - n^{log_3(2)}\right) \in \mathcal{O}\left(n\right)$, nous pouvons conclure que $3\left(n - n^{log_3(2)}\right) \in \Theta\left(n\right)$.

Nous pouvons aussi conclure que $C\left(n\right) \in \Theta\left(n\right)$ pour $n = 3^k$ $\forall k \in \mathbb{N}$

# Démonstration de la validité pour tout entier n

Nous pouvons utiliser la règle de l'harmonie pour montrer que la notation asymptotique que nous avons trouvé pour les $n = 3^k$ est valide $\forall n \in \mathbb{N}$. Pour ce faire, nous devons montrer 3 choses :

1. $3\left(n - n^{log_3(2)}\right)$ doit être éventuellement non décroissante.
   C'est le cas, en particulier lorsque $n \geq 1$.
2. L'ordre de croissance, doit être une fonction harmonieuse, donc que $2n \in \Theta\left(n\right)$.
   C'est le cas puisque

   $\lim_{x \to \infty} \frac{2n}{n}$

   $=$ $\langle$ Simplification $\rangle$

   $\lim_{x \to \infty} 2$

   $=$ $\langle$ Application de la limite $\rangle$

   $2$ $\langle$ Valeur constante $> 0$, $2n \in \Theta\left(n\right)$ $\rangle$

3. On doit avoir $C\left(n\right) \in \Theta\left(n\right)$ pour $n = b^k$ $\forall k \in \mathbb{N}$
   C'est le cas puisque nous l'avons démontré dans la section "Notation asymptotique" avec $b = 3$.

Puisque nous répondons aux trois critères, nous pouvons conclure que $C(n) \in \Theta\left(n\right)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.