Sylvain, Raphaël
111 124 564

Question 3

Algorithme 1

Nous allons séparer l'analyse de cet algorithme en deux blocs distincts. Le bloc A portera sur les boucles `for` imbriquées. Le bloc B portera sur la dernière boucle `for`. Les opérations restantes sont des opérations atomiques et ne changeront donc pas l'analyse asymptotique.

Bloc A

Taille de l'instance

La taille de l'instance est n, la valeur fournie en paramètre.

Opérateur de base

Nous allons prendre comme opérateur de base l'addition de c avec 1 (`c+1`).

Le nombre de fois que cet opérateur est atteint dépend uniquement de la valeur de n.

Le nombre de fois que l'opérateur de base est appelé peut être donné par la sommation suivante :

$C_A(n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i^3}^{n^3} 1$

Résolvons cette équation.

$$
\begin{aligned}
& C_A(n) \\
= & \qquad \langle \text{ Définition de } C_A(n) \rangle \\
& \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i^3}^{n^3} 1 \\
= & \qquad \langle \text{ Sommation d'une constante } \rangle \\
& \sum_{i=1}^{n} ((n^3 - i^3 + 1) \cdot 1) \\
= & \qquad \langle \text{ Simplification } \rangle \\
& \sum_{i=1}^{n} (n^3 - i^3 + 1)
\end{aligned}
$$

Analyse asymptotique

Nous allons borner la sommation par une intégrale.

La sommation est non croissante.

Avec $f(i) = \sum\limits_{i=1}^{n} (n^3 - i^3 + 1)\,;$

Avec $g(x) = \int\limits_{1}^{n+1} (n^3 - x^3 + 1)\, dx\,;$

Avec $h(x) = \int\limits_{0}^{n} (n^3 - x^3 + 1)\, dx\,;$

Résolvons $g(x) \leq f(i) \leq h(x)$, l'approximation par intégrale d'une sommation nulle part croissante :

Résolvons $g(x) = \int\limits_{1}^{n+1} (n^3 - x^3 + 1)\, dx$, soit une borne inférieure de $\sum\limits_{i=1}^{n} (n^3 - i^3 + 1)$.

$$
\begin{aligned}
& C_A\,(n) \\
= \quad & \qquad \langle \text{ Définition de } C_A\,(n) \text{ } \rangle \\
& f(i) \\
\geq \quad & \qquad \langle \text{ Définition de } g(x) \text{ } \rangle \\
& g(x) \\
= \quad & \qquad \langle \text{ Définition de } g(x) \text{ } \rangle \\
& \int\limits_{1}^{n+1} (n^3 - x^3 + 1)\, dx \\
= \quad & \qquad \langle \text{ Distribution de l'intégration } \rangle \\
& \int\limits_{1}^{n+1} n^3 dx - \int\limits_{1}^{n+1} x^3 dx + \int\limits_{1}^{n+1} 1 dx \\
= \quad & \qquad \langle \text{ Intégration } \rangle \\
& [n^3 x|_{1}^{n+1} - \left[\tfrac{x^4}{4}\right|_{1}^{n+1} dx + [x|_{1}^{n+1}\, dx \\
= \quad & \qquad \langle \text{ Évaluation } \rangle \\
& (n^3(n+1) - n^3(1)) - \left(\tfrac{(n+1)^4}{4} - \tfrac{1^4}{4}\right) + (n + 1 - 1) \\
= \quad & \qquad \langle \text{ Simplification } \rangle \\
& (n^4 + n^3 - n^3) - \left(\tfrac{(n+1)^4 - 1}{4}\right) + n \\
= \quad & \qquad \langle \text{ Simplification } \rangle
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& n^4 - \frac{\left(n^2+2n+1\right)^2-1}{4} + n \\
= & \qquad \langle \text{ Simplification } \rangle \\
& n^4 - \frac{n^4+4n^3+6n^2+4n+1-1}{4} + n \\
= & \qquad \langle \text{ Simplification } \rangle \\
& n^4 - \frac{n^4+4n^3+6n^2+4n}{4} + n \\
= & \qquad \langle \text{ Mettre sur la même base } \rangle \\
& \frac{4n^4}{4} - \frac{n^4+4n^3+6n^2+4n}{4} + \frac{4n}{4} \\
= & \qquad \langle \text{ Rammener sur la même division } \rangle \\
& \frac{4n^4-\left(n^4+4n^3+6n^2+4n\right)+4n}{4} \\
= & \qquad \langle \text{ Distribuer la soustraction } \rangle \\
& \frac{4n^4-n^4-4n^3-6n^2-4n+4n}{4} \\
= & \qquad \langle \text{ Simplifier } \rangle \\
& \frac{3n^4-4n^3-6n^2}{4} \\
= & \qquad \langle \text{ Extraction de } fracn^2 4 \text{ } \rangle \\
& \frac{n^2}{4}\left(3n^2-4n-6\right) \\
\geq & \qquad \langle \ \forall n \geq 6 \ \rangle \\
& \frac{n^2}{4}\left(3n^2-4n-n\right) \\
= & \qquad \langle \text{ Simplification } \rangle \\
& \frac{n^2}{4}\left(3n^2-3n\right) \\
= & \qquad \langle \text{ Simplification } \rangle \\
& \frac{n^3}{4}\left(3n-3\right) \\
\geq & \qquad \langle \ \forall n \geq 3 \ \rangle \\
& \frac{n^3}{4}\left(3n-n\right) \\
= & \qquad \langle \text{ Simplification } \rangle \\
& \frac{n^3}{4}\left(2n\right) \\
= & \qquad \langle \text{ Simplification } \rangle
\end{aligned}
$$

$\frac{2n^4}{4}$

$=$ $\langle$ Simplification $\rangle$

$\frac{n^4}{2}$

$\in$ $\langle$ Définition de Ω $\rangle$

$\Omega\left(n^4\right)$

Résolvons $h(x) = \int\limits_0^n \left(n^3 - x^3 + 1\right) dx$, soit une borne supérieure de $\sum\limits_{i=1}^n \left(n^3 - i^3 + 1\right)$.

$C_A\left(n\right)$

$=$ $\langle$ Définition de $C_A\left(n\right)$ $\rangle$

$f(i)$

$\leq$ $\langle$ Définition de $h(x)$ $\rangle$

$h(x)$

$=$ $\langle$ Définition de $h(x)$ $\rangle$

$\int\limits_0^n \left(n^3 - x^3 + 1\right) dx$

$=$ $\langle$ Distribution de l'intégration $\rangle$

$\int\limits_0^n n^3 dx - \int\limits_0^n x^3 dx + \int\limits_0^n 1 dx$

$=$ $\langle$ Intégration $\rangle$

$\left[n^3 x\right|_0^n - \left[\frac{x^4}{4}\right|_0^n dx + \left[x\right|_0^n dx$

$=$ $\langle$ Évaluation $\rangle$

$\left(n^3(n) - n^3(0)\right) - \left(\frac{(n)^4}{4} - \frac{0^4}{4}\right) + (n - 0)$

$=$ $\langle$ Simplification $\rangle$

$n^4 - \frac{n^4}{4} + n$

$=$ $\langle$ Simplification $\rangle$

$\frac{3}{4}n^4 + n$

$\leq$ $\langle$ $\forall n \geq 0$ $\rangle$

$\frac{3}{4}n^4$

$\in$ $\langle$ Définition de $\mathcal{O}$ $\rangle$

$\mathcal{O}\left(n^4\right)$

Donc $C_A\left(n\right) \in \Theta\left(n^4\right)$, puisque $f(i) \in \Omega\left(n^4\right)$ et $f(i) \in \mathcal{O}\left(n^4\right)$

Bloc B

Taille de l'instance

La taille de l'instance est n, la valeur fournie en paramètre.

Opérateur de base

Nous allons prendre comme opérateur de base l'addition de c avec 1 (`c+1`).

Le nombre de fois que cet opérateur est atteint dépend uniquement de la valeur de n.

Le nombre de fois que l'opérateur de base est appelé peut être donné par la sommation suivante :

$C_B\left(n\right) = \sum_{i=1}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} 1$

Résolvons cette équation.

$$\begin{aligned}
& C_B\left(n\right) \\
= & \qquad \langle \text{ Définition de } C_B\left(n\right) \text{ } \rangle \\
& \sum_{i=1}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} 1 \\
= & \qquad \langle \text{ Sommation d'une constante } \rangle \\
& \left(\left(\lfloor\sqrt{n}\rfloor - 1 + 1\right) \cdot 1\right) \\
= & \qquad \langle \text{ Simplification } \rangle \\
& \lfloor\sqrt{n}\rfloor
\end{aligned}$$

Analyse asymptotique

En utilisant la définition de la fonction plancher, nous avons :

$\sqrt{n} - 1 < C_B\left(n\right) \leq \sqrt{n}$

Utilisons ces inéquation pour trouver la notation asymptotique de $C_B\left(n\right)$

Trouvons Ω

$$
\begin{aligned}
& C_B(n) \\
= & \quad \langle \text{ Définition de } C_B(n) \text{ } \rangle \\
& \lfloor \sqrt{n} \rfloor \\
> & \quad \langle \text{ Définition de la fonction plancer } \rangle \\
& \sqrt{n} - 1 \\
\geq & \quad \langle\ \forall n \geq 4\ \rangle \\
& \sqrt{n} - \tfrac{\sqrt{n}}{2} \\
= & \quad \langle \text{ Simplification } \rangle \\
& \tfrac{\sqrt{n}}{2} \\
= & \quad \langle \text{ Définition de la racine carrée } \rangle \\
& \tfrac{n^{\frac{1}{2}}}{2} \\
\in & \quad \langle \text{ Définition } \Omega \text{ } \rangle \\
& \Omega\left(n^{\frac{1}{2}}\right)
\end{aligned}
$$

Trouvons $\mathcal{O}$

$$
\begin{aligned}
& C_B(n) \\
= & \quad \langle \text{ Définition de } C_B(n) \text{ } \rangle \\
& \lfloor \sqrt{n} \rfloor \\
\leq & \quad \langle \text{ Définition de la fonction plancer } \rangle \\
& \sqrt{n} \\
= & \quad \langle \text{ Définition de la racine carrée } \rangle \\
& n^{\frac{1}{2}} \\
\in & \quad \langle \text{ Définition } \mathcal{O} \text{ } \rangle \\
& \mathcal{O}\left(n^{\frac{1}{2}}\right)
\end{aligned}
$$

Donc $C_B(n) \in \Theta\left(n^{\frac{1}{2}}\right)$

Résultat finaux

Nous avons pour le bloc A que $C_A(n) \in \Theta(n^4)$ et pour le bloc B que $C_B(n) \in \Theta\left(n^{\frac{1}{2}}\right)$.

Puisque chacun des blocs s'exécute une fois, nous pouvons conclure $C(n) \in \Theta(n^4) + \Theta\left(n^{\frac{1}{2}}\right)$.

En utilisant la règle du maximum, nous pouvons avoir : $C(n) \in \Theta(n^4)$.

Algorithme 2

Taille de l'instance

La taille de l'instance est n, le nombre d'élément dans l'étendue, soit 1 plus la différence entre le paramètre r (position d'un élément à droite) et le paramètre l (position d'un élément à gauche).
$n = (r - l) + 1$

Opérateur de base

L'opérateur de base à utiliser est la comparaison `l < r` du premier `if`. C'est l'opération exécuter le plus souvent, car il n'y a aucune boucle dans la méthode et que c'est la première opération effectuée.

Définition de la récurence

Le nombre $C(n)$ d'opérations de base effectées sur un vecteur est donnée par la récurence suivante :

$$C(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \leq 2 \\ 1 + 3 \cdot C\left(n - \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor\right) & \text{si } n > 2 \end{cases}$$

Explication de la récurence :

1. Si $n = 1 + (l - r) \leq 1$, alors on effectue la comparaison (opérateur de base), puis on sort de la méthode directement.
2. Si $n = 1 + (l - r) = 2$, alors on effectue la comparaison (opérateur de base), puis on effectue une deuxième comparaison (des valeurs), en effectuant ou non un échange, on n'entre pas par la suite dans dernier `if`, puis on sort de la méthode.
3. Si $n = l - r \geq 3$, alors on effectue la comparaison (opérateur de base), puis on effectue une deuxième comparaison (des valeurs), en effectuant ou non un échange, on entre par la suite dans le dernier `if`, ou l'on va appeler trois fois la récursion. Deux fois en retirant $k = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ de la valeur de r et une fois en l'ajoutant à l, ce qui a pour effet de retirer retirer k à n, d'où le $n - \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$.

Résolution de la récurence (pour notation asymptotique)

Supposons $n = 3^k \equiv log_3(n) = k$.
Nous pouvons redéfinir $C(n)$ ainsi :

$$
\begin{aligned}
& C(n) \\
= & \qquad \langle \text{ Définition de } C(n) \rangle \\
& 1 + 3 \cdot C\left(n - \left\lfloor \tfrac{n}{3} \right\rfloor\right) \\
= & \qquad \langle \text{ Définition de } n \rangle \\
& 1 + 3 \cdot C\left(3^k - \left\lfloor \tfrac{3^k}{3} \right\rfloor\right) \\
= & \qquad \langle \text{ Règle des exposants } \rangle \\
& 1 + 3 \cdot C\left(3^k - \left\lfloor 3^{k-1} \right\rfloor\right) \\
= & \qquad \langle \text{ Fonction plancher sur nombre entier } \rangle \\
& 1 + 3 \cdot C\left(3^k - 3^{k-1}\right) \\
= & \qquad \langle \text{ Règle des exposants } \rangle \\
& 1 + 3 \cdot C\left(3 \cdot 3^{k-1} - 3^{k-1}\right) \\
= & \qquad \langle \text{ Simplification } (3x - x = 2x) \rangle \\
& 1 + 3 \cdot C\left(2 \cdot 3^{k-1}\right)
\end{aligned}
$$

Nous aurons alors la définition de récurence suivante :

$$
C\left(3^k - 1\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } k \leq 0 \\ 1 + 3 \cdot C\left(\left(3^k - 1\right) - \left\lfloor \frac{\left(3^k - 1\right) + 1}{3} \right\rfloor\right) & \text{si } k > 1 \end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
& C(n) \\
= & \qquad \langle \text{ En supposant } n = 3^k - 1 \rangle \\
& C\left(3^k - 1\right) \\
= & \qquad \langle \text{ Définition de } C\left(3^k - 1\right) \text{ via la définition de } C(n) \rangle \\
& 1 + 3 \cdot C\left(n - \left\lfloor \tfrac{n+1}{3} \right\rfloor\right)
\end{aligned}
$$