Sylvain, Raphaël
111 124 564

Question 2

$$C(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \leq 1 \\ 2 \cdot C(\lfloor \frac{n}{3} \rfloor) + n & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

Résolution récurrence

Nous allons commencer par essayer de résoudre cette récurrence, que pour les occurrences de $n = 3^k \ \forall k \in \mathbb{N}$. Donc $k = log_3 n$

Nous aurons alors

$C\left(3^k\right) = 2 \cdot C\left(\left\lfloor \frac{3^k}{3} \right\rfloor\right) + 3^k = 2 \cdot C\left(3^{k-1}\right) + 3^k$

avec comme valeur de base

$C(3^0) = 0$

Résolvons :

$$\begin{aligned}
& C\left(n\right) \\
= & \qquad \langle \text{ Définition de } 3^k \rangle \\
& C\left(3^k\right) \\
= & \qquad \langle \ 1^{ere} \text{ induction } \rangle \\
& 2 \cdot C\left(3^{k-1}\right) + 3^k \\
= & \qquad \langle \ 2^{e} \text{ induction } \rangle \\
& 2 \cdot \left[2 \cdot C\left(3^{k-2}\right) + 3^{k-1}\right] + 3^k \\
= & \qquad \langle \text{ Simplification } \rangle \\
& 2^2 \cdot C\left(3^{k-2}\right) + 2 \cdot 3^{k-1} + 3^k \\
= & \qquad \langle \ 3^{e} \text{ induction } \rangle \\
& 2^2 \cdot \left[2 \cdot C\left(3^{k-3}\right) + 3^{k-2}\right] + 2 \cdot 3^{k-1} + 3^k \\
= & \qquad \langle \text{ Simplification } \rangle \\
& 2^3 \cdot C\left(3^{k-3}\right) + 2^2 \cdot 3^{k-2} + 2 \cdot 3^{k-1} + 3^k \\
= & \qquad \langle \text{ Suite } \rangle \\
& \ldots \\
= & \qquad \langle \ i^{e} \text{ induction } \rangle
\end{aligned}$$

$$2^i \cdot C\left(3^{k-i}\right) + 2^{i-1} \cdot 3^{k-(i-1)} + ... + 2^2 \cdot 3^{k-2} + 2 \cdot 3^{k-1} + 3^k$$

$=$ ⟨ Suite ⟩

...

$=$ ⟨ k^e induction ⟩

$$2^k \cdot C\left(3^{k-k}\right) + 2^{k-1} \cdot 3^{k-(k-1)} + ... + 2^2 \cdot 3^{k-2} + 2 \cdot 3^{k-1} + 3^k$$

$=$ ⟨ Simplification ⟩

$$2^k \cdot C\left(3^0\right) + 2^{k-1} \cdot 3^1 + ... + 2^2 \cdot 3^{k-2} + 2^1 \cdot 3^{k-1} + 2^0 \cdot 3^k$$

$=$ ⟨ Simplification ⟩

$$2^k \cdot C\left(3^0\right) + \sum_{i=1}^{k} \left(2^{k-i} \cdot 3^i\right)$$

$=$ ⟨ Simplification ⟩

$$2^k \cdot C(1) + \sum_{i=1}^{k} \left(2^{k-i} \cdot 3^i\right)$$

$=$ ⟨ Valeur de base ⟩

$$2^k \cdot 0 + \sum_{i=1}^{k} \left(2^{k-i} \cdot 3^i\right)$$

$=$ ⟨ Simplification ⟩

$$\sum_{i=1}^{k} \left(2^{k-i} \cdot 3^i\right)$$

$=$ ⟨ Règle expostant ⟩

$$\sum_{i=1}^{k} \left(\frac{2^k}{2^i} \cdot 3^i\right)$$

$=$ ⟨ Séparer fraction ⟩

$$\sum_{i=1}^{k} \left(2^k \cdot \frac{1}{2^i} \cdot 3^i\right)$$

$=$ ⟨ Simplification ⟩

$$\sum_{i=1}^{k} \left(2^k \cdot \frac{3^i}{2^i}\right)$$

$=$ ⟨ Simplification ⟩

$$\sum_{i=1}^{k} \left(2^k \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^i\right)$$

$= \quad \langle$ Extraire produit constant de la sommation $\rangle$

$$2^k \cdot \sum_{i=1}^{k} \left(\left(\tfrac{3}{2}\right)^i \right)$$

$= \quad \langle$ Ajuster borne de la sommation $\rangle$

$$2^k \cdot \left(\sum_{i=0}^{k} \left(\left(\tfrac{3}{2}\right)^i \right) - \left(\tfrac{3}{2}\right)^0 \right)$$

$= \quad \langle$ Simplification $\rangle$

$$2^k \cdot \left(\sum_{i=0}^{k} \left(\left(\tfrac{3}{2}\right)^i \right) - 1 \right)$$

$= \quad \langle$ Application de la règle de sommation $\rangle$

$$2^k \cdot \left(\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{k+1} - 1}{\frac{3}{2} - 1} - 1 \right)$$

$= \quad \langle$ Simplification $\rangle$

$$2^k \cdot \left(\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{k+1} - 1}{\frac{1}{2}} - 1 \right)$$

$= \quad \langle$ Simplification $\rangle$

$$2^k \cdot \left(2 \cdot \left(\left(\tfrac{3}{2}\right)^{k+1} - 1 \right) - 1 \right)$$

$= \quad \langle$ Simplification $\rangle$

$$2^k \cdot \left(2 \cdot \left(\tfrac{3}{2}\right)^{k+1} - 2 - 1 \right)$$

$= \quad \langle$ Simplification $\rangle$

$$2^k \cdot \left(2 \cdot \left(\tfrac{3}{2}\right)^{k+1} - 3 \right)$$

$= \quad \langle$ Extraire un $\frac{3}{2}$ $\rangle$

$$2^k \cdot \left(2 \cdot \tfrac{3}{2} \cdot \left(\tfrac{3}{2}\right)^{k} - 3 \right)$$

$= \quad \langle$ Simplification $\rangle$

$$2^k \cdot \left(3 \cdot \left(\tfrac{3}{2}\right)^{k} - 3 \right)$$

$= \quad \langle$ Appliquer k sur $\frac{3}{2}$ $\rangle$

$$2^k \cdot \left(3 \cdot \tfrac{3^k}{2^k} - 3 \right)$$

$= \quad \langle$ Appliquer multiplication 2^k $\rangle$

$$2^k \cdot 3 \cdot \tfrac{3^k}{2^k} - 2^k \cdot 3$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & \langle \text{ Simplification } \rangle \\
& 3 \cdot 3^k - 2^k \cdot 3 \\
= \quad & \langle \text{ Définition de } n \text{ et de } k \text{ } \rangle \\
& 3n - 2^{log_3(n)} \cdot 3 \\
= \quad & \langle \text{ Simplification } \rangle \\
& 3 \cdot \left(n - 2^{log_3(n)}\right) \\
= \quad & \langle \text{ Règle des log } \rangle \\
& 3 \cdot \left(n - 2^{log_3(2) log_2(n)}\right) \\
= \quad & \langle \text{ Règle des exposants } \rangle \\
& 3 \cdot \left(n - \left(2^{log_2(n)}\right)^{log_3(2)}\right) \\
= \quad & \langle \text{ Simplification } \rangle \\
& 3 \cdot \left(n - n^{log_3(2)}\right) \\
\approx \quad & \langle \text{ Approximation du } log_3 2 \text{ } \rangle \\
& 3 \cdot (n - n^{0.63})
\end{aligned}
$$

Notation asymptotique

Nous pouvons trouver la notation asymptotique :
Borne supérieure :

$$
\begin{aligned}
& \tfrac{3}{2}n - \tfrac{3}{2} \\
\leq \quad & \langle \text{ En ajoutant } \tfrac{3}{2} \text{ } \rangle \\
& \tfrac{3}{2}n \\
\in \quad & \langle \text{ Définition du } \mathcal{O} \text{ avec } c_2 = \tfrac{3}{2} \text{ et } n_0 = 0 \text{ } \rangle \\
& \mathcal{O}(n)
\end{aligned}
$$

Borne inférieure :

$$
\begin{aligned}
& \tfrac{3}{2}n - \tfrac{3}{2} \\
= \quad & \langle \text{ Réécriture } \rangle \\
& \tfrac{3n}{2} - \tfrac{3}{2}
\end{aligned}
$$

$\geq$ $\langle$ En retirant $\frac{n}{2} - \frac{3}{2}$ $\rangle$

$\frac{3n}{2} - \frac{3}{2} - \left(\frac{n}{2} - \frac{3}{2}\right)$

$=$ $\langle$ Appliquer la négation sur la parenthèse $\rangle$

$\frac{3n}{2} - \frac{3}{2} - \frac{n}{2} + \frac{3}{2}$

$=$ $\langle$ Appliquer la négation $\rangle$

$\frac{3n}{2} - \frac{n}{2}$

$=$ $\langle$ $-\frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 0$ $\rangle$

$\frac{3n-n}{2}$

$=$ $\langle$ Fusionner la soustraction de même base $\rangle$

$\frac{2n}{2}$

$=$ $\langle$ Simplification $\rangle$

n

$\in$ $\langle$ Définition de Ω avec $c_1 = 1$ et $n_0 = 0$ $\rangle$

$\Omega\left(n\right)$

Donc comme $\frac{3}{2}n - \frac{3}{2} \in \Omega\left(n\right)$ et $\frac{3}{2}n - \frac{3}{2} \in \mathcal{O}\left(n\right)$, nous pouvons conclure que $\frac{3}{2}n - \frac{3}{2} \in \Theta\left(n\right)$.

Nous pouvons aussi conclure que $C\left(n\right) \in \Theta\left(n\right)$ pour $n = 3^k$ $\forall k \in \mathbb{N}$

Démonstration de la validité pour tout entier n

Nous pouvons utiliser la règle de l'harmonie pour montrer que la notation asymptotique que nous avons trouvé pour les $n = 3^k$ est valide $\forall n \in \mathbb{N}$. Pour ce faire, nous devons montrer 3 choses :

1. $\frac{3}{2}n - \frac{3}{2}$ doit être éventuellement non décroissante.
   C'est le cas puisque c'est une fonction linéaire avec une pente positive.
2. L'ordre de croissance, doit être une fonction harmonieuse, donc que $2n \in \Theta\left(n\right)$.
   C'est le cas puisque

   $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2n}{n}$

   $=$ $\langle$ Simplification $\rangle$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{x\to\infty} 2 && \langle \text{ Application de la limite } \rangle \\
&\ 2 && \langle \text{ Valeur constante} > 0,\ 2n \in \Theta\left(n\right) \rangle
\end{aligned}
$$

3. On doit avoir $C\left(n\right) \in \Theta\left(n\right)$ pour $n = b^k$ $\forall k \in \mathbb{N}$
   C'est le cas puisque nous l'avons démontré dans la section "Notation asymptotique" avec $b = 3$.

Puisque nous répondons aux trois critères, nous pouvons conclure que $C(n) \in \Theta\left(n\right)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.