Sylvain, Raphaël
111 124 564

Question 2

$$C(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \leq 1 \\ 2 \cdot C(\lfloor \frac{n}{3} \rfloor) + n & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

Résolution récurrence

Nous allons commencer par essayer de résoudre cette récurrence, que pour les occurrences de $n = 3^k \ \forall k \in \mathbb{N}$

Nous aurons alors
$C\left(3^k\right) = 2 \cdot C\left(\left\lfloor \frac{3^k}{3} \right\rfloor\right) + 3^k = 2 \cdot C\left(3^{k-1}\right) + 3^k$
avec comme valeur de base
$C(3^0) = 0$
Résolvons :

$C\left(n\right)$
$=$ $\langle$ Définition de 3^k $\rangle$
$C\left(3^k\right)$
$=$ $\langle$ 1^{ere} induction $\rangle$
$2 \cdot C\left(3^{k-1}\right) + 3^k$
$=$ $\langle$ 2^e induction $\rangle$
$2 \cdot \left[2 \cdot C\left(3^{k-2}\right) + 3^{k-1}\right] + 3^k$
$=$ $\langle$ Simplification $\rangle$
$2^2 \cdot C\left(3^{k-2}\right) + 2 \cdot 3^{k-1} + 3^k$
$=$ $\langle$ 3^e induction $\rangle$
$2^2 \cdot \left[2 \cdot C\left(3^{k-3}\right) + 3^{k-2}\right] + 2 \cdot 3^{k-1} + 3^k$
$=$ $\langle$ Simplification $\rangle$
$2^3 \cdot C\left(3^{k-3}\right) + 2^2 \cdot 3^{k-2} + 2 \cdot 3^{k-1} + 3^k$
$=$ $\langle$ Suite $\rangle$
...
$=$ $\langle$ i^e induction $\rangle$

$2^i \cdot C\left(3^{k-i}\right) + 2^{i-1} \cdot 3^{k-(i-1)} + ... + 2^2 \cdot 3^{k-2} + 2 \cdot 3^{k-1} + 3^k$

$=$ ⟨ Suite ⟩

...

$=$ ⟨ k^e induction ⟩

$2^k \cdot C\left(3^{k-k}\right) + \sum_{i=k-(k-1)}^{k} (i3^i)$

$=$ ⟨ Simplification ⟩

$2^k \cdot C\left(3^0\right) + \sum_{i=1}^{k} (i3^i)$

$=$ ⟨ Simplification ⟩

$2^k \cdot C\left(1\right) + \sum_{i=1}^{k} (i3^i)$

$=$ ⟨ Valeur de base ⟩

$2^k \cdot 0 + \sum_{i=1}^{k} (i3^i)$

$=$ ⟨ Simplification ⟩

$\sum_{i=1}^{k} (i3^i)$

$=$ ⟨ >A CORRIGER À PARTIR DICI" !!!! Ajout de valeurs neutres ⟩

$\sum_{i=1}^{k} 3^i + 3^0 - 3^0$

$=$ ⟨ Simplification + insérer addition dans sommation ⟩

$\sum_{i=0}^{k} 3^i - 1$

$=$ ⟨ Règle de sommation ⟩

$\frac{3^{k+1}-1}{3-1} - 1$

$=$ ⟨ Simplification ⟩

$\frac{3^{k+1}-1}{2} - \frac{2}{2}$

$=$ ⟨ Simplification ⟩

$\frac{3^{k+1}-1-2}{2}$

$=$ ⟨ Simplification ⟩

$\frac{3^{k+1}-3}{2}$

$=$ ⟨ Extraction exposant ⟩

$\frac{3 \cdot 3^{k}-3}{2}$

$=$ ⟨ Définition de 3^k ⟩

$\frac{3n-3}{2}$

$=$ ⟨ Réécriture ⟩

$\frac{3}{2}n - \frac{3}{2}$

Notation asymptotique

Nous pouvons trouver la notation asymptotique :
Borne supérieure :

$\frac{3}{2}n - \frac{3}{2}$

$\leq$ ⟨ En ajoutant $\frac{3}{2}$ ⟩

$\frac{3}{2}n$

$\in$ ⟨ Définition du $\mathcal{O}$ avec $c_2 = \frac{3}{2}$ et $n_0 = 0$ ⟩

$\mathcal{O}(n)$

Borne inférieure :

$\frac{3}{2}n - \frac{3}{2}$

$=$ ⟨ Réécriture ⟩

$\frac{3n}{2} - \frac{3}{2}$

$\geq$ ⟨ En retirant $\frac{n}{2} - \frac{3}{2}$ ⟩

$\frac{3n}{2} - \frac{3}{2} - \left(\frac{n}{2} - \frac{3}{2}\right)$

$=$ ⟨ Appliquer la négation sur la parenthèse ⟩

$\frac{3n}{2} - \frac{3}{2} - \frac{n}{2} + \frac{3}{2}$

$=$ ⟨ Appliquer la négation ⟩

$\frac{3n}{2} - \frac{n}{2}$

$=$ $\langle -\frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 0 \rangle$

$\frac{3n-n}{2}$

$=$ $\langle$ Fusionner la soustraction de même base $\rangle$

$\frac{2n}{2}$

$=$ $\langle$ Simplification $\rangle$

n

$\in$ $\langle$ Définition de Ω avec $c_1 = 1$ et $n_0 = 0$ $\rangle$

$\Omega(n)$

Donc comme $\frac{3}{2}n - \frac{3}{2} \in \Omega(n)$ et $\frac{3}{2}n - \frac{3}{2} \in \mathcal{O}(n)$, nous pouvons conclure que $\frac{3}{2}n - \frac{3}{2} \in \Theta(n)$.

Nous pouvons aussi conclure que $C(n) \in \Theta(n)$ pour $n = 3^k$ $\forall k \in \mathbb{N}$

Démonstration de la validité pour tout entier n

Nous pouvons utiliser la règle de l'harmonie pour montrer que la notation asymptotique que nous avons trouvé pour les $n = 3^k$ est valide $\forall n \in \mathbb{N}$. Pour ce faire, nous devons montrer 3 choses :

1. $\frac{3}{2}n - \frac{3}{2}$ doit être éventuellement non décroissante.
   C'est le cas puisque c'est une fonction linéaire avec une pente positive.
2. L'ordre de croissance, doit être une fonction harmonieuse, donc que $2n \in \Theta(n)$.
   C'est le cas puisque

   $\lim_{x\to\infty} \frac{2n}{n}$

   $=$ $\langle$ Simplification $\rangle$

   $\lim_{x\to\infty} 2$

   $=$ $\langle$ Application de la limite $\rangle$

   2 $\langle$ Valeur constante > 0, $2n \in \Theta(n)$ $\rangle$

3. On doit avoir $C(n) \in \Theta(n)$ pour $n = b^k$ $\forall k \in \mathbb{N}$
   C'est le cas puisque nous l'avons démontré dans la section "Notation asymptotique" avec $b = 3$.

Puisque nous répondons aux trois critères, nous pouvons conclure que $C(n) \in \Theta\left(n\right) \; \forall n \in \mathbb{N}$.