

Question 2

$$C(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \leq 1 \\ 2 \cdot C(\lfloor \frac{n}{3} \rfloor) + n & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

Nous allons commencer par essayer de résoudre cette récurrence, que pour les occurrences de $n = 3^k \forall k \in \mathbb{N}$

Nous aurons alors

$$C(3^k) = 2 \cdot C\left(\left\lfloor \frac{3^k}{3} \right\rfloor\right) + 3^k = 2 \cdot C(3^{k-1}) + 3^k$$

avec comme valeur de base

$$C(3^0) = 0$$

Réolvons :

$$\begin{aligned} & C(3^k) \\ = & \quad \langle 1^{ere} \text{ induction} \rangle \\ & 2 \cdot C(3^{k-1}) + 3^k \\ = & \quad \langle 2^e \text{ induction} \rangle \\ & 2 \cdot [2 \cdot C(3^{k-2}) + 3^{k-1}] + 3^k \\ = & \quad \langle \text{Simplification} \rangle \\ & 2^2 \cdot C(3^{k-2}) + 3^{k-1} + 3^k \\ = & \quad \langle 3^e \text{ induction} \rangle \\ & 2^2 \cdot [2 \cdot C(3^{k-3}) + 3^{k-2}] + 3^{k-1} + 3^k \\ = & \quad \langle \text{Simplification} \rangle \\ & 2^3 \cdot C(3^{k-3}) + 3^{k-2} + 3^{k-1} + 3^k \\ = & \quad \langle \text{Suite} \rangle \\ & \dots \\ = & \quad \langle i^e \text{ induction} \rangle \\ & 2^i \cdot C(3^{k-i}) + 3^{k-(i-1)} + \dots + 3^{k-2} + 3^{k-1} + 3^k \\ = & \quad \langle \text{Suite} \rangle \\ & \dots \\ = & \quad \langle k^e \text{ induction} \rangle \\ & 2^k \cdot C(3^{k-k}) + \sum_{i=k-(k-1)}^k 3^i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \langle \text{Simplification} \rangle \\
&\quad 2^k \cdot C(3^0) + \sum_{i=1}^k 3^i \\
&= \langle \text{Simplification} \rangle \\
&\quad 2^k \cdot C(1) + \sum_{i=1}^k 3^i \\
&= \langle \text{Valeur de base} \rangle \\
&\quad 2^k \cdot 0 + \sum_{i=1}^k 3^i \\
&= \langle \text{Simplification} \rangle \\
&\quad \sum_{i=1}^k 3^i \\
&= \langle \text{Ajout de valeurs neutres} \rangle \\
&\quad \sum_{i=1}^k 3^i + 3^0 - 3^0 \\
&= \langle \text{Simplification} + \text{Insérer addition dans sommation} \rangle \\
&\quad \sum_{i=0}^k 3^i - 1 \\
&= \langle \text{Règle de sommation} \rangle \\
&\quad \frac{3^{k+1}-1}{3-1} - 1 \\
&= \langle \text{Simplification} \rangle \\
&\quad \frac{3^{k+1}-1}{2} - \frac{2}{2} \\
&= \langle \text{Simplification} \rangle \\
&\quad \frac{3^{k+1}-1-2}{2} \\
&= \langle \text{Simplification} \rangle \\
&\quad \frac{3^{k+1}-3}{2} \\
&= \langle \text{Extraction exposant} \rangle \\
&\quad \frac{3 \cdot 3^k - 3}{2} \\
&= \langle \text{Définition de } 3^k \rangle \\
&\quad \frac{3n-3}{2} \\
&= \langle \text{Réécriture} \rangle \\
&\quad \frac{3}{2}n - \frac{3}{2}
\end{aligned}$$