Sylvain, Raphaël
(111 124 564)

Conception et analyse d'algorithmes
IFT-3001

Travail 2

Travail présenté à
Yanick Ouellet

Département d'informatique et de génie logiciel
Univesité Laval
Hiver 2019

Sylvain, Raphaël
111 124 564

Question 1

Algorithme 1

Le temps d'exécution de l'algorithme dépend de la taille de l'instance n (nombre d'élément dans le vecteur d'entrée A) et de la valeur de k générée aléatoirement.

L'opération de base est le calcul de $i \bmod n$. C'est l'opération qui peut être le plus souvent.

Il n'y a pas de pire ou de meilleur cas, car l'algorithme ne dépend pas du contenu du vecteur (à l'exception de $n = 1$, où la valeur $A[0] = 0$ où la conditionnelle s'exécutera toujours et où $A[0] = 1$ ou elle ne s'éxécutera jamais).

Désignons la valeur de $A[0]$ par a

La complexité de l'algorithme dans tous les cas est donc la suivante :

$$C\left(n\right)$$

$=$ ⟨ Définition de l'algorithme ⟩

$$E_a\left[E_k\left[C\left(n, k, a\right)\right]\right]$$

$=$ ⟨ Étendre les espérences ⟩

$$\sum_a \rho\left(a\right) \sum_k \rho\left(k\right) C\left(n, k, a\right)$$

$=$ ⟨ Valeur de a possible est de $[0..1]$ ⟩

$$\sum_{a=0}^{1} \rho\left(a\right) \sum_k \rho\left(k\right) C\left(n, k, a\right)$$

$=$ ⟨ Valeur de k possible est de $[0..n-1]$ ⟩

$$\sum_{a=0}^{1} \rho\left(a\right) \sum_{k=0}^{n-1} \rho\left(k\right) C\left(n, k, a\right)$$

$=$ ⟨ Toutes les possibilités d'avoir une valeur a sont équiprobables. Donc $\rho(a) = \frac{1}{2}$ ⟩

$$\sum_{a=0}^{1} \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \rho\left(k\right) C\left(n, k, a\right)$$

$=$ ⟨ Toutes les possibilités d'avoir une valeur k sont équiprobables. Donc $\rho(a) = \frac{1}{n}$ ⟩

$$\sum_{a=0}^{1} \tfrac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \tfrac{1}{n} C(n,k,a)$$
$$= \quad \langle \text{ Mettre en évidance les constantes } \rangle$$
$$\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{n} \sum_{a=0}^{1} \sum_{k=0}^{n-1} C(n,k,a)$$
$$= \quad \langle \text{ Étendre partiellement la sommation de } k \text{ } \rangle$$
$$\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{n} \sum_{a=0}^{1} \left(C(n,0,a) + C(n,1,a) + \sum_{k=2}^{n-1} C(n,k,a) \right)$$
$$= \quad \langle \text{ Selon le tableau plus bas, } \forall k \geq 2 : C(n,k,a) = 0 \text{ } \rangle$$
$$\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{n} \sum_{a=0}^{1} \left(C(n,0,a) + C(n,1,a) \right)$$
$$= \quad \langle \text{ Étendre la sommation de } a \text{ } \rangle$$
$$\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{n} \left(C(n,0,0) + C(n,1,0) + C(n,0,1) + C(n,1,1) \right)$$
$$= \quad \langle \text{ Selon le tableau plus bas } \rangle$$
$$\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{n} (100n + 0 + 0 + 100n)$$
$$= \quad \langle \text{ Simplification } \rangle$$
$$\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{n} (200n)$$
$$= \quad \langle \text{ Simplification } \rangle$$
$$\tfrac{1}{2} (200)$$
$$= \quad \langle \text{ Simplification } \rangle$$
$$100$$
$$\in \quad \langle \text{ Définition de } \Theta(1) \text{ } \rangle$$
$$\Theta(1)$$

Analysons $C(n,k,a)$

	$C(n,k,a)$				
a	$C(n,0,a)$	$C(n,1,a)$	$C(n,2,a)$	$C(n,i,a)$	$C(n,n,a)$
$a=0$	$100 \cdot n$	0	0	0	0
$a=1$	0	$100 \cdot n$	0	0	0

Algorithme 2

Le temps d'exécution de l'algorithme dépend de la taille de l'instance n (nombre d'élément dans le vecteur d'entrée A) et de la valeur de k générée aléatoirement.

L'opération de base est le calcul de $i \bmod n$. C'est l'opération qui peut être exécuter le plus souvent.

Il y a un meilleur et un pire cas.

Pire cas

En pire cas, la valeur à la première position du vecteur A est 0. ($A[0] = 0$)
Alors, nous entrons dans la conditionnelle `si - alors`.
La complexité de l'algorithme en pire cas sera donc la suivante :

$$
\begin{aligned}
& C_{worst}(n) \\
= & \qquad \langle \text{ Définition de l'algorithme } \rangle \\
& E_k\left[C(n,k)\right] \\
= & \qquad \langle \text{ Étendre les espérences } \rangle \\
& \sum_k \rho(k)\, C(n,k) \\
= & \qquad \langle \text{ Valeur possible de } k \ \rangle \\
& \sum_{k=0}^{n-1} \rho(k)\, C(n,k) \\
= & \qquad \langle \text{ Toutes les possibilités d'Avoir une valeur de } k \\
& \qquad \ \text{sont équiprobables. Donc } \rho(k) = \tfrac{1}{n} \ \rangle \\
& \sum_{k=0}^{n-1} \tfrac{1}{n} C(n,k) \\
= & \qquad \langle \text{ Extraction de valeur constante de la sommation } \rangle \\
& \sum_{k=0}^{n-1} \tfrac{1}{n} C(n,k) \\
= & \qquad \langle \text{ Extraction de valeur constante de la sommation } \rangle \\
& \tfrac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} C(n,k) \\
= & \qquad \langle \text{ Définition de } C(n,k) \ \rangle
\end{aligned}
$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=1}^{k^2} 1$$

$=$ $\langle$ Règle de sommation $\rangle$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(k^2 - 1 + 1)\cdot 1$$

$=$ $\langle$ Simplification $\rangle$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}k^2$$

$=$ $\langle$ Règle de sommation $\rangle$

$$\frac{1}{n}\frac{(n-1)(n-1+1)(2(n-1)+1)}{6}$$

$=$ $\langle$ Simplification $\rangle$

$$\frac{1}{n}\frac{(n-1)(n)(2n-2+1)}{6}$$

$=$ $\langle$ Simplification $\rangle$

$$\frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6n}$$

$=$ $\langle$ Simplification $\rangle$

$$\frac{(n-1)(2n-1)}{6}$$

$=$ $\langle$ Étendre le polynôme $\rangle$

$$\frac{2n^2-3n+1}{6}$$

$=$ $\langle$ Répartir la fraction $\rangle$

$$\frac{2n^2}{6} - \frac{3n}{6} + \frac{1}{6}$$

$=$ $\langle$ Simplification $\rangle$

$$\frac{n^2}{3} - \frac{n}{2} + \frac{1}{6}$$

Calcul de Ω

$$C_{worst}(n)$$

$=$ $\langle$ Définition plus haut $\rangle$

$$\frac{n^2}{3} - \frac{n}{2} + \frac{1}{6}$$

$\leq$ $\langle$ Retirer la soustraction $\rangle$

$$\frac{n^2}{3} + \frac{1}{6}$$

$\in$ $\langle$ Règle du maximum et définition de Ω $\rangle$

$\Omega\left(n^2\right)$

Calcul de $\mathcal{O}$

$C_{worst}\left(n\right)$

$=$ $\langle$ Définition plus haut $\rangle$

$\frac{n^2}{3} - \frac{n}{2} + \frac{1}{6}$

$\geq$ $\langle$ Retirer l'addition d'une constante $\rangle$

$\frac{n^2}{3} - \frac{n}{2}$

$=$ $\langle$ Remettre sur un diviseur commun $\rangle$

$\frac{2n^2}{6} - \frac{3n}{6}$

$=$ $\langle$ Mettre en évidance le diviseur. $\rangle$

$\frac{1}{6}\left(2n^2 - 3n\right)$

$\geq$ $\langle$ $\forall n \geq 3$ $\rangle$

$\frac{1}{6}\left(2n^2 - n^2\right)$

$=$ $\langle$ Simplification $\rangle$

$\frac{1}{6}\left(n^2\right)$

$\in$ $\langle$ Définition de $\mathcal{O}$ $\rangle$

$\mathcal{O}\left(n^2\right)$

Définition de Θ

Puisque $C_{worst}\left(n\right) \in \Omega\left(n^2\right)$ et $C_{worst}\left(n\right) \in \mathcal{O}\left(n^2\right)$, $C_{worst}\left(n\right) \in \Theta\left(n^2\right)$