

Sylvain, Raphaël
(111 124 564)

Conception et analyse d'algorithmes
IFT-3001

Travail 2
Question 1

Travail présenté à
Yanick Ouellet

Département d'informatique et de génie logiciel
Université Laval
Hiver 2019

Question 1

Algorithme 1

Le temps d'exécution de l'algorithme dépend de la taille de l'instance n (nombre d'éléments dans le vecteur d'entrée A) et de la valeur de k générée aléatoirement.

L'opération de base est le calcul de $i \bmod n$. C'est l'opération qui peut être le plus souvent.

Il n'y a pas de pire ou de meilleur cas, car l'algorithme ne dépend pas du contenu du vecteur (à l'exception de $n = 1$, où la valeur $A[0] = 0$ où la conditionnelle s'exécutera toujours et où $A[0] = 1$ ou elle ne s'exécutera jamais).

Désignons la valeur de $A[0]$ par a

La complexité de l'algorithme dans tous les cas est donc la suivante :

$$\begin{aligned}
 & C(n) \\
 = & \quad \langle \text{Définition de l'algorithme} \rangle \\
 & E_a [E_k [C(n, k, a)]] \\
 = & \quad \langle \text{Étendre les espérances} \rangle \\
 & \sum_a \rho(a) \sum_k \rho(k) C(n, k, a) \\
 = & \quad \langle \text{Valeur de } a \text{ possible est de } [0..1] \rangle \\
 & \sum_{a=0}^1 \rho(a) \sum_k \rho(k) C(n, k, a) \\
 = & \quad \langle \text{Valeur de } k \text{ possible est de } [0..n-1] \rangle \\
 & \sum_{a=0}^1 \rho(a) \sum_{k=0}^{n-1} \rho(k) C(n, k, a) \\
 = & \quad \langle \text{Toutes les possibilités d'avoir une valeur } a \\
 & \quad \text{sont équiprobables. Donc } \rho(a) = \frac{1}{2} \rangle \\
 & \sum_{a=0}^1 \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \rho(k) C(n, k, a) \\
 = & \quad \langle \text{Toutes les possibilités d'avoir une valeur } k \\
 & \quad \text{sont équiprobables. Donc } \rho(a) = \frac{1}{n} \rangle
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{a=0}^1 \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} C(n, k, a) \\
= & \quad \langle \text{Mettre en évidence les constantes} \rangle \\
& \frac{1}{2} \frac{1}{n} \sum_{a=0}^1 \sum_{k=0}^{n-1} C(n, k, a) \\
= & \quad \langle \text{Étendre partiellement la sommation de } k \rangle \\
& \frac{1}{2} \frac{1}{n} \sum_{a=0}^1 \left(C(n, 0, a) + C(n, 1, a) + \sum_{k=2}^{n-1} C(n, k, a) \right) \\
= & \quad \langle \text{Selon le tableau plus bas, } \forall k \geq 2 : C(n, k, a) = 0 \rangle \\
& \frac{1}{2} \frac{1}{n} \sum_{a=0}^1 (C(n, 0, a) + C(n, 1, a)) \\
= & \quad \langle \text{Étendre la sommation de } a \rangle \\
& \frac{1}{2} \frac{1}{n} (C(n, 0, 0) + C(n, 1, 0) + C(n, 0, 1) + C(n, 1, 1)) \\
= & \quad \langle \text{Selon le tableau plus bas} \rangle \\
& \frac{1}{2} \frac{1}{n} (100n + 0 + 0 + 100n) \\
= & \quad \langle \text{Simplification} \rangle \\
& \frac{1}{2} \frac{1}{n} (200n) \\
= & \quad \langle \text{Simplification} \rangle \\
& \frac{1}{2} (200) \\
= & \quad \langle \text{Simplification} \rangle \\
& 100 \\
\in & \quad \langle \text{Définition de } \Theta(1) \rangle \\
& \Theta(1)
\end{aligned}$$

Analysons $C(n, k, a)$

	$C(n, k, a)$				
a	$C(n, 0, a)$	$C(n, 1, a)$	$C(n, 2, a)$	$C(n, i, a)$	$C(n, n, a)$
$a = 0$	$100 \cdot n$	0	0	0	0
$a = 1$	0	$100 \cdot n$	0	0	0

Algorithme 2

Le temps d'exécution de l'algorithme dépend de la taille de l'instance n (nombre d'éléments dans le vecteur d'entrée A) et de la valeur de k générée aléatoirement.

L'opération de base est le calcul de $i \bmod n$. C'est l'opération qui peut être exécutée le plus souvent.

Il y a un meilleur et un pire cas.

Pire cas

En pire cas, la valeur à la première position du vecteur A est 0. ($A[0] = 0$)
Alors, nous entrons dans la conditionnelle `si - alors`.

La complexité de l'algorithme en pire cas sera donc la suivante :

$$\begin{aligned}
 & C_{worst}(n) \\
 = & \quad \langle \text{Définition de l'algorithme} \rangle \\
 & E_k[C(n, k)] \\
 = & \quad \langle \text{Étendre les espérances} \rangle \\
 & \sum_k \rho(k) C(n, k) \\
 = & \quad \langle \text{Valeur possible de } k \rangle \\
 & \sum_{k=0}^{n-1} \rho(k) C(n, k) \\
 = & \quad \langle \text{Toutes les possibilités d'avoir une valeur de } k \\
 & \quad \text{sont équiprobables. Donc } \rho(k) = \frac{1}{n} \rangle \\
 & \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} C(n, k) \\
 = & \quad \langle \text{Extraction de valeur constante de la sommation} \rangle \\
 & \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} C(n, k) \\
 = & \quad \langle \text{Extraction de valeur constante de la sommation} \rangle \\
 & \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} C(n, k) \\
 = & \quad \langle \text{Définition de } C(n, k) \rangle
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=1}^{k^2} 1 \\
= & \quad \langle \text{R\`egle de sommation} \rangle \\
& \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (k^2 - 1 + 1) \cdot 1 \\
= & \quad \langle \text{Simplification} \rangle \\
& \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} k^2 \\
= & \quad \langle \text{R\`egle de sommation} \rangle \\
& \frac{1}{n} \frac{(n-1)(n-1+1)(2(n-1)+1)}{6} \\
= & \quad \langle \text{Simplification} \rangle \\
& \frac{1}{n} \frac{(n-1)(n)(2n-2+1)}{6} \\
= & \quad \langle \text{Simplification} \rangle \\
& \frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6n} \\
= & \quad \langle \text{Simplification} \rangle \\
& \frac{(n-1)(2n-1)}{6} \\
= & \quad \langle \text{\`Etendre le polyn\^ome} \rangle \\
& \frac{2n^2-3n+1}{6} \\
= & \quad \langle \text{R\`epartir la fraction} \rangle \\
& \frac{2n^2}{6} - \frac{3n}{6} + \frac{1}{6} \\
= & \quad \langle \text{Simplification} \rangle \\
& \frac{n^2}{3} - \frac{n}{2} + \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

Calcul de \mathcal{O}

$$\begin{aligned}
& C_{\text{worst}}(n) \\
= & \quad \langle \text{D\'efinition plus haut} \rangle \\
& \frac{n^2}{3} - \frac{n}{2} + \frac{1}{6} \\
\leq & \quad \langle \text{Retirer la soustraction} \rangle \\
& \frac{n^2}{3} + \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

$$\in \begin{array}{l} \langle \text{R\`egle du maximum et d\'efinition de } \mathcal{O} \rangle \\ \mathcal{O}(n^2) \end{array}$$

Calcul de Ω

$$\begin{aligned} & C_{worst}(n) \\ = & \begin{array}{l} \langle \text{D\'efinition plus haut} \rangle \\ \frac{n^2}{3} - \frac{n}{2} + \frac{1}{6} \end{array} \\ \geq & \begin{array}{l} \langle \text{Retirer l'addition d'une constante} \rangle \\ \frac{n^2}{3} - \frac{n}{2} \end{array} \\ = & \begin{array}{l} \langle \text{Remettre sur un diviseur commun} \rangle \\ \frac{2n^2}{6} - \frac{3n}{6} \end{array} \\ = & \begin{array}{l} \langle \text{Mettre en \\'evidence le diviseur.} \rangle \\ \frac{1}{6}(2n^2 - 3n) \end{array} \\ \geq & \begin{array}{l} \langle \forall n \geq 3 \rangle \\ \frac{1}{6}(2n^2 - n^2) \end{array} \\ = & \begin{array}{l} \langle \text{Simplification} \rangle \\ \frac{1}{6}(n^2) \end{array} \\ \in & \begin{array}{l} \langle \text{D\'efinition de } \Omega \rangle \\ \Omega(n^2) \end{array} \end{aligned}$$

D\'efinition de Θ

Puisque $C_{worst}(n) \in \Omega(n^2)$ et $C_{worst}(n) \in \mathcal{O}(n^2)$, $C_{worst}(n) \in \Theta(n^2)$

Meilleur cas

En meilleur cas, la valeur \`a la premi\`ere position du vecteur A est 1.
($A[0] = 1$)

Alors, nous sautons compl\`etement la conditionnelle `si - alors`.

Puisque l'op\'eration de base n'est jamais ex\'ecut\'ee, la complexit\'e de l'algorithme en meilleur cas sera donc la suivante : $C_{best}(n) = 0 \in \Theta(1)$

Cas moyen

En cas moyen, il faut calculer la moyenne sur toutes les instances de taille n .

Définition $a = A[0]$

La complexité de l'algorithme en cas moyen sera donc la suivante :

$$\begin{aligned}
& C_{avg}(n) \\
= & \quad \langle \text{Définition de l'algorithme} \rangle \\
& E_a E_k [C(n, k, a)] \\
= & \quad \langle \text{Étendre l'espérance de } a \rangle \\
& \sum_a \rho(a) E_k [C(n, k, a)] \\
= & \quad \langle \text{Valeurs possibles de } a \rangle \\
& \sum_{a=0}^1 \rho(a) E_k [C(n, k, a)] \\
= & \quad \langle \text{Toutes les possibilités d'avoir une valeur de } a \text{ sont} \\
& \quad \text{équiprobables. Donc } \rho(a) = \frac{1}{2} \rangle \\
& \sum_{a=0}^1 \frac{1}{2} E_k [C(n, k, a)] \\
= & \quad \langle \text{Extraire multiplication constante} \rangle \\
& \frac{1}{2} \sum_{a=0}^1 E_k [C(n, k, a)] \\
= & \quad \langle \text{Étendre la sommation de } a \rangle \\
& \frac{1}{2} (E_k [C(n, k, 0)] + E_k [C(n, k, 1)]) \\
= & \quad \langle C_{worst}(n) = E_k [C(n, k, 0)] \text{ puisque } a = 0 \rangle \\
& \frac{1}{2} (C_{worst}(n) + E_k [C(n, k, 1)]) \\
= & \quad \langle C_{best}(n) = E_k [C(n, k, 1)] \text{ puisque } a = 1 \rangle \\
& \frac{1}{2} (C_{worst}(n) + C_{best}(n)) \\
= & \quad \langle \text{Définition de } C_{worst}(n) \rangle \\
& \frac{1}{2} \left(\frac{2n^2 - 3n + 1}{6} + C_{best}(n) \right) \\
= & \quad \langle \text{Définition de } C_{best}(n) \rangle \\
& \frac{1}{2} \left(\frac{2n^2 - 3n + 1}{6} + 0 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \langle \text{Simplification} \rangle \\
 &\quad \frac{1}{2} \left(\frac{2n^2-3n+1}{6} \right) \\
 &= \langle \text{Simplification} \rangle \\
 &\quad \frac{2n^2-3n+1}{12}
 \end{aligned}$$

Calcul de thêta

Montrons que $C_{avg}(n) \in \Theta(n^2)$.

Nous supposons que $C_{avg}(n) \in \Theta(n^2)$, car le polynôme ressemble beaucoup au $C_{worst}(n)$.

$$\begin{aligned}
 &\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2n^2-3n+1}{12}}{n^2} \\
 &= \langle \text{Double fraction} \rangle \\
 &\quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2-3n+1}{12n^2} \\
 &= \langle \text{Règle de l'Hôpital} \rangle \\
 &\quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n^2-3n+1)'}{(12n^2)'} \\
 &= \langle \text{Distribuer la dérivée} \rangle \\
 &\quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n^2)' - (3n)' + (1)'}{(12n^2)'} \\
 &= \langle \text{Dérivée} \rangle \\
 &\quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 2n - 1 \cdot 3 + 0 \cdot 1}{2 \cdot 12n} \\
 &= \langle \text{Simplifier} \rangle \\
 &\quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n-3}{24n} \\
 &= \langle \text{Règle de l'Hôpital} \rangle \\
 &\quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(4n-3)'}{(24n)'} \\
 &= \langle \text{Distribuer la dérivée} \rangle \\
 &\quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(4n)' - (3)'}{(24n)'} \\
 &= \langle \text{Dérivée} \rangle \\
 &\quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 4 - 0 \cdot 3}{1 \cdot 24} \\
 &= \langle \text{Simplifier} \rangle
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{24} \\
 = & \quad \langle \text{Résoudre la limite} \rangle \\
 & \frac{4}{24} \\
 = & \quad \langle \text{Simplifier} \rangle \\
 & \frac{1}{6} \\
 \text{Donc } C_{avg}(n) & \in \Theta(n^2).
 \end{aligned}$$