Sylvain, Raphaël
(111 124 564)

Conception et analyse d'algorithmes
IFT-3001

Travail 2

Travail présenté à
Yanick Ouellet

Département d'informatique et de génie logiciel
Univesité Laval
Hiver 2019

Sylvain, Raphaël
111 124 564

Question 1

Algorithme 1

Le temps d'exécution de l'algorithme dépend de la taille de l'instance n (nombre d'éléments dans le vecteur d'entrée A) et de la valeur de k générée aléatoirement.

L'opération de base est le calcul de $i \bmod n$. C'est l'opération qui peut être le plus souvent.

Il n'y a pas de pire ou de meilleur cas, car l'algorithme ne dépend pas du contenu du vecteur (à l'exception de $n = 1$, où la valeur $A[0] = 0$ où la conditionnelle s'exécutera toujours et où $A[0] = 1$ ou elle ne s'exécutera jamais).

Désignons la valeur de $A[0]$ par a

La complexité de l'algorithme dans tous les cas est donc la suivante :

$$
\begin{aligned}
& C(n) \\
= & \qquad \langle \text{ Définition de l'algorithme } \rangle \\
& E_a\left[E_k\left[C(n,k,a)\right]\right] \\
= & \qquad \langle \text{ Étendre les espérances } \rangle \\
& \sum_a \rho(a) \sum_k \rho(k)\, C(n,k,a) \\
= & \qquad \langle \text{ Valeur de } a \text{ possible est de } [0..1] \ \rangle \\
& \sum_{a=0}^{1} \rho(a) \sum_k \rho(k)\, C(n,k,a) \\
= & \qquad \langle \text{ Valeur de } k \text{ possible est de } [0..n-1] \ \rangle \\
& \sum_{a=0}^{1} \rho(a) \sum_{k=0}^{n-1} \rho(k)\, C(n,k,a) \\
= & \qquad \langle \text{ Toutes les possibilités d'avoir une valeur } a \\
& \qquad\ \ \text{sont équiprobables. Donc } \rho(a) = \tfrac{1}{2} \ \rangle \\
& \sum_{a=0}^{1} \tfrac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \rho(k)\, C(n,k,a) \\
= & \qquad \langle \text{ Toutes les possibilités d'avoir une valeur } k \\
& \qquad\ \ \text{sont équiprobables. Donc } \rho(a) = \tfrac{1}{n} \ \rangle
\end{aligned}
$$

$$\sum_{a=0}^{1} \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} C\left(n,k,a\right)$$

$= \quad \langle$ Mettre en évidence les constantes $\rangle$

$$\frac{1}{2}\frac{1}{n} \sum_{a=0}^{1} \sum_{k=0}^{n-1} C\left(n,k,a\right)$$

$= \quad \langle$ Étendre partiellement la sommation de k $\rangle$

$$\frac{1}{2}\frac{1}{n} \sum_{a=0}^{1} \left(C\left(n,0,a\right) + C\left(n,1,a\right) + \sum_{k=2}^{n-1} C\left(n,k,a\right) \right)$$

$= \quad \langle$ Selon le tableau plus bas, $\forall k \geq 2 : C\left(n,k,a\right) = 0$ $\rangle$

$$\frac{1}{2}\frac{1}{n} \sum_{a=0}^{1} \left(C\left(n,0,a\right) + C\left(n,1,a\right) \right)$$

$= \quad \langle$ Étendre la sommation de a $\rangle$

$$\frac{1}{2}\frac{1}{n} \left(C\left(n,0,0\right) + C\left(n,1,0\right) + C\left(n,0,1\right) + C\left(n,1,1\right) \right)$$

$= \quad \langle$ Selon le tableau plus bas $\rangle$

$$\frac{1}{2}\frac{1}{n} \left(100n + 0 + 0 + 100n\right)$$

$= \quad \langle$ Simplification $\rangle$

$$\frac{1}{2}\frac{1}{n} \left(200n\right)$$

$= \quad \langle$ Simplification $\rangle$

$$\frac{1}{2} \left(200\right)$$

$= \quad \langle$ Simplification $\rangle$

$$100$$

$\in \quad \langle$ Définition de $\Theta\left(1\right)$ $\rangle$

$$\Theta\left(1\right)$$

Analysons $C\left(n,k,a\right)$

	$C(n,k,a)$				
a	$C(n,0,a)$	$C(n,1,a)$	$C(n,2,a)$	$C(n,i,a)$	$C(n,n,a)$
$a=0$	$100 \cdot n$	0	0	0	0
$a=1$	0	$100 \cdot n$	0	0	0

Algorithme 2

Le temps d'exécution de l'algorithme dépend de la taille de l'instance n (nombre d'éléments dans le vecteur d'entrée A) et de la valeur de k générée aléatoirement.

L'opération de base est le calcul de $i \bmod n$. C'est l'opération qui peut être exécutée le plus souvent.

Il y a un meilleur et un pire cas.

Pire cas

En pire cas, la valeur à la première position du vecteur A est 0. ($A[0] = 0$)
Alors, nous entrons dans la conditionnelle `si - alors`.
La complexité de l'algorithme en pire cas sera donc la suivante :

$$
\begin{aligned}
& C_{worst}(n) \\
= & \qquad \langle \text{ Définition de l'algorithme } \rangle \\
& E_k\left[C(n,k)\right] \\
= & \qquad \langle \text{ Étendre les espérances } \rangle \\
& \sum_k \rho(k)\, C(n,k) \\
= & \qquad \langle \text{ Valeur possible de } k \text{ } \rangle \\
& \sum_{k=0}^{n-1} \rho(k)\, C(n,k) \\
= & \qquad \langle \text{ Toutes les possibilités d'avoir une valeur de } k \\
& \qquad\quad \text{sont équiprobables. Donc } \rho(k) = \tfrac{1}{n} \text{ } \rangle \\
& \sum_{k=0}^{n-1} \tfrac{1}{n} C(n,k) \\
= & \qquad \langle \text{ Extraction de valeur constante de la sommation } \rangle \\
& \sum_{k=0}^{n-1} \tfrac{1}{n} C(n,k) \\
= & \qquad \langle \text{ Extraction de valeur constante de la sommation } \rangle \\
& \tfrac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} C(n,k) \\
= & \qquad \langle \text{ Définition de } C(n,k) \text{ } \rangle
\end{aligned}
$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=1}^{k^2} 1$$

$=$ ⟨ Règle de sommation ⟩

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(k^2-1+1)\cdot 1$$

$=$ ⟨ Simplification ⟩

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}k^2$$

$=$ ⟨ Règle de sommation ⟩

$$\frac{1}{n}\frac{(n-1)(n-1+1)(2(n-1)+1)}{6}$$

$=$ ⟨ Simplification ⟩

$$\frac{1}{n}\frac{(n-1)(n)(2n-2+1)}{6}$$

$=$ ⟨ Simplification ⟩

$$\frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6n}$$

$=$ ⟨ Simplification ⟩

$$\frac{(n-1)(2n-1)}{6}$$

$=$ ⟨ Étendre le polynôme ⟩

$$\frac{2n^2-3n+1}{6}$$

$=$ ⟨ Répartir la fraction ⟩

$$\frac{2n^2}{6}-\frac{3n}{6}+\frac{1}{6}$$

$=$ ⟨ Simplification ⟩

$$\frac{n^2}{3}-\frac{n}{2}+\frac{1}{6}$$

Calcul de $\mathcal{O}$

$$C_{worst}(n)$$

$=$ ⟨ Définition plus haut ⟩

$$\frac{n^2}{3}-\frac{n}{2}+\frac{1}{6}$$

$\leq$ ⟨ Retirer la soustraction ⟩

$$\frac{n^2}{3}+\frac{1}{6}$$

$\in$ ⟨ Règle du maximum et définition de $\mathcal{O}$ ⟩

$\mathcal{O}\left(n^2\right)$

Calcul de Ω

$C_{worst}\left(n\right)$

$=$ ⟨ Définition plus haut ⟩

$\frac{n^2}{3} - \frac{n}{2} + \frac{1}{6}$

$\geq$ ⟨ Retirer l'addition d'une constante ⟩

$\frac{n^2}{3} - \frac{n}{2}$

$=$ ⟨ Remettre sur un diviseur commun ⟩

$\frac{2n^2}{6} - \frac{3n}{6}$

$=$ ⟨ Mettre en évidence le diviseur. ⟩

$\frac{1}{6}\left(2n^2 - 3n\right)$

$\geq$ ⟨ $\forall n \geq 3$ ⟩

$\frac{1}{6}\left(2n^2 - n^2\right)$

$=$ ⟨ Simplification ⟩

$\frac{1}{6}\left(n^2\right)$

$\in$ ⟨ Définition de Ω ⟩

$\Omega\left(n^2\right)$

Définition de Θ

Puisque $C_{worst}\left(n\right) \in \Omega\left(n^2\right)$ et $C_{worst}\left(n\right) \in \mathcal{O}\left(n^2\right)$, $C_{worst}\left(n\right) \in \Theta\left(n^2\right)$

Meilleur cas

En meilleur cas, la valeur à la première position du vecteur A est 1. ($A[0] = 1$)

Alors, nous sautons complètement la conditionnelle `si - alors`.

Puisque l'opération de base n'est jamais exécutée, la complexité de l'algorithme en meilleur cas sera donc la suivante : $C_{best}\left(n\right) = 0 \in \Theta\left(1\right)$

Cas moyen

En cas moyen, il faut calculer la moyenne sur toutes les instances de taille n.

Définition $a = A[0]$

La complexité de l'algorithme en cas moyen sera donc la suivante :

$$
\begin{aligned}
& C_{avg}(n) \\
= & \quad \langle \text{ Définition de l'algorithme } \rangle \\
& E_a E_k \left[C(n,k,a) \right] \\
= & \quad \langle \text{ Étendre l'espérance de } a \ \rangle \\
& \sum_a \rho(a)\, E_k \left[C(n,k,a) \right] \\
= & \quad \langle \text{ Valeurs possibles de } a \ \rangle \\
& \sum_{a=0}^{1} \rho(a)\, E_k \left[C(n,k,a) \right] \\
= & \quad \langle \text{ La probabilité d'avoir } a = 0 \text{ est de } \tfrac{1}{n}. \\
& \quad \ \ \text{Donc la probabilité d'avoir } a \neq 0 \text{ est de } \tfrac{n-1}{n} \ \rangle \\
& \tfrac{1}{n} E_k \left[C(n,k,0) \right] + \tfrac{n-1}{n} E_k \left[C(n,k,1) \right] \\
= & \quad \langle \ C_{worst}(n) = E_k \left[C(n,k,0) \right] \text{ puisque } a = 0 \ \rangle \\
& \tfrac{1}{n} \left(C_{worst}(n) \right) + \tfrac{n-1}{n} E_k \left[C(n,k,1) \right] \\
= & \quad \langle \ C_{best}(n) = E_k \left[C(n,k,1) \right] \text{ puisque } a = 1 \ \rangle \\
& \tfrac{1}{n} \left(C_{worst}(n) \right) + \tfrac{n-1}{n} \left(C_{best}(n) \right) \\
= & \quad \langle \text{ Définition de } C_{worst}(n) \ \rangle \\
& \tfrac{1}{n} \left(\tfrac{2n^2-3n+1}{6} \right) + \tfrac{n-1}{n} \left(C_{best}(n) \right) \\
= & \quad \langle \text{ Définition de } C_{best}(n) \ \rangle \\
& \tfrac{1}{n} \left(\tfrac{2n^2-3n+1}{6} \right) + \tfrac{n-1}{n} (0) \\
= & \quad \langle \text{ Simplification } \rangle \\
& \tfrac{1}{n} \left(\tfrac{2n^2-3n+1}{6} \right) \\
= & \quad \langle \text{ Simplification } \rangle \\
& \tfrac{2n^2-3n+1}{6n}
\end{aligned}
$$

Calcul de thêta

Montrons que $C_{avg}(n) \in \Theta(n)$.

Nous supposons que $C_{avg}(n) \in \Theta(n)$, car le polynôme est un polynôme de degré 2 divisé par un polynôme de degré 1.

$$\lim_{n->\infty} \frac{\frac{2n^2-3n+1}{6n}}{n}$$

$= \quad \langle$ Double fraction $\rangle$

$$\lim_{n->\infty} \frac{2n^2-3n+1}{6n^2}$$

$= \quad \langle$ Règle de l'Hôspital $\rangle$

$$\lim_{n->\infty} \frac{\left(2n^2-3n+1\right)'}{(6n^2)'}$$

$= \quad \langle$ Distribuer la dérivée $\rangle$

$$\lim_{n->\infty} \frac{\left(2n^2\right)'-(3n)'+(1)'}{(6n^2)'}$$

$= \quad \langle$ Dériver $\rangle$

$$\lim_{n->\infty} \frac{2 \cdot 2n-1 \cdot 3+0 \cdot 1}{2 \cdot 6n}$$

$= \quad \langle$ Simplifier $\rangle$

$$\lim_{n->\infty} \frac{4n-3}{12n}$$

$= \quad \langle$ Règle de l'Hôspital $\rangle$

$$\lim_{n->\infty} \frac{(4n-3)'}{(12n)'}$$

$= \quad \langle$ Distribuer la dérivée $\rangle$

$$\lim_{n->\infty} \frac{(4n)'-(3)'}{(12n)'}$$

$= \quad \langle$ Dériver $\rangle$

$$\lim_{n->\infty} \frac{1 \cdot 4-0 \cdot 3}{1 \cdot 12}$$

$= \quad \langle$ Simplifier $\rangle$

$$\lim_{n->\infty} \frac{4}{12}$$

$= \quad \langle$ Résoudre la limite $\rangle$

$$\frac{4}{24}$$

$= \quad \langle$ Simplifier $\rangle$

$$\frac{1}{3}$$

Donc $C_{avg}(n) \in \Theta(n)$.