

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

VYHLADÁVANIE SPOJENÍ MESTSKOU
HROMADNOU DOPRAVOU
BAKALÁRSKA PRÁCA

2018
ALOJZ STÚPAL

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

VYHLÁDÁVANIE SPOJENÍ MESTSKOU
HROMADNOU DOPRAVOU
BAKALÁRSKA PRÁCA

Študijný program: Informatika
Študijný odbor: 2508 Informatika
Školiace pracovisko: Katedra informatiky
Školiteľ: RNDr. Michal Forišek, PhD.

Bratislava, 2018
Alojz Stúpal



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Alojz Stúpal
Študijný program: informatika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)
Študijný odbor: informatika
Typ záverečnej práce: bakalárska
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický

Názov: Vyhľadávanie spojení mestskou hromadnou dopravou
Finding connections using public transport

Anotácia: Práca sa zaoberá vyhľadávaním a zobrazovaním možností cesty MHD.

Cieľ: Práca má nasledujúce ciele:
1. Spracovať prehľad základných algoritmov vhodných na vyhľadávanie spojenia v grafikone MHD.
2. Implementovať softvér umožňujúci takéto vyhľadávanie a otestovať jeho funkčnosť na reálnych dátach.
3. Pokúsiť sa navrhnúť a implementovať možné vylepšenia, ako napr.: vyhľadávanie cesty bod-bod namiesto zastávka-zastávka; vizualizácia možných alternatívnych trás; výpočet dodatočných informácií, napr. očakávaného meškania v prípade nestihnúť prestupu.

Vedúci: RNDr. Michal Forišek, PhD.
Katedra: FMFI.KI - Katedra informatiky
Vedúci katedry: prof. RNDr. Martin Škoviera, PhD.
Dátum zadania: 07.11.2017

Dátum schválenia: 08.11.2017

doc. RNDr. Daniel Olejár, PhD.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

Pod'akovanie: Tu môžete poďakovať školiteľovi, prípadne ďalším osobám, ktoré vám s prácou nejako pomohli, poradili, poskytli dáta a podobne.

Abstrakt

Slovenský abstrakt v rozsahu 100-500 slov, jeden odstavec. Abstrakt stručne sumarizuje výsledky práce. Mal by byť pochopiteľný pre bežného informatika. Nemal by teda využívať skratky, termíny alebo označenie zavedené v práci, okrem tých, ktoré sú všeobecne známe.

Kľúčové slová: jedno, druhé, tretie (prípadne štvrté, piate)

Abstract

Abstract in the English language (translation of the abstract in the Slovak language).

Keywords:

Obsah

Úvod	1
1 Grafy	2
1.1 Definícia grafu	2
1.2 Základné pojmy týkajúce sa grafov	2
1.2.1 Typy grafov	3
1.2.2 Vzťahy medzi grafmi	3
1.3 Cesty a cykly	4
1.4 Súvislosť	4
1.5 Kostry, stromy a lesy	5
1.6 Špeciálne grafové štruktúry	5
1.6.1 Cesty a cykly pre orientované grafy	6
2 Algoritmy na grafoch	7
2.1 Prechádzanie vrcholmi grafu	7
2.1.1 Prehľadávanie do šírky	7
2.1.2 Prehľadávanie do hĺbky	8
2.1.3 Zhrnutie	9
2.2 Najlacnejšie cesty v grafe	9
2.2.1 Dijkstrov algoritmus	10
2.2.2 Bellman–Fordov algoritmus	12
2.2.3 Floyd–Warshallov algoritmus	15
2.2.4 Zhrnutie	18
3 Softvér	20
4 Implementácia	21
4.1 Prvé myšlienky	21
4.2 Začiatočná implementácia	23
4.3 Vylepšenie reprezentácie údajov	23
4.4 Implementácia vyhľadávacieho algoritmu	23

Zoznam obrázkov

1	Príklad práce BFS na strome	8
2	Príklad práce DFS na strome	8
3	Orientovaný graf s ohodnotenými hranami	11
4	Orientovaný graf s ohodnotenými hranami	14
5	Orientovaný graf s ohodnotenými hranami	17

Zoznam tabuliek

1	Priebeh algoritmu	15
---	-----------------------------	----

Úvod

Cieľom tejto práce je

Kapitola 1

Grafy

V tejto kapitole uvedieme zopár definícií týkajúcich sa grafov, opíšeme niektoré grafové štruktúry, prípadne zavedieme rôzne názvy, ktoré budeme v ďalších častiach práce potrebovať.

1.1 Definícia grafu

Začneme so základnou definíciou - s definovaním pojmu *graf*. Tú prevezmeme od Reinharda Diestela [4, kapitola 0.1]:

Graf je dvojica $G = (V, E)$ disjunktných množín, kde prvky E sú dvojprvkové podmnožiny V . Prvky V sú *vrcholy* (prípadne *uzly* alebo *body*) grafu G , prvky E sú jeho hrany.

Vytvorený objekt by sa mal korektne nazývať *neorientovaný graf*. Avšak my, ako aj mnohí iní, od tohto pomenovania upustíme a budeme pre jednoduchosť používať len pojem *graf*.

Hranu $\{x, y\}$, kde $x, y \in V$, budeme zasa zvyčajne označovať aj ako (x, y) alebo xy .

1.2 Základné pojmy týkajúce sa grafov

V nasledujúcej podkapitole sú uvedené definície rôznych pojmov, ktoré charakterizujú a popisujú vlastnosti grafových štruktúr.

Rád grafu definujeme ako počet vrcholov grafu G .

Budeme hovoriť, že vrchol v je *incidentný* s hranou e , ak $v \in e$. Čiže, ak je vrchol

v jedným z vrcholov, ktoré hrana e spája, nazveme ho incidentným s tou hranou. Ak sú dva rôzne vrcholy incidentné s tou istou hranou, budeme ich volať jej *koncovými vrcholmi*.

Dva vrcholy $x, y \in V$ sú *susedné*, ak xy je hrana v G . Dve hrany $e, f \in E$; $e \neq f$ sú *susedné*, ak majú spoločný vrchol.

Stupňom vrchola $v \in V$ nazveme počet hrán incidentných s v . Alebo, inak povedané, je to počet vrcholov, ktoré sú susedné s vrcholom v .

1.2.1 Typy grafov

Teraz uvedieme niektoré základné typy grafov.

Prázdny graf je graf $G = (\emptyset, \emptyset)$. Označenie zjednodušíme na $G = \emptyset$.

Pojmom *Triviálny graf* budeme označovať graf s rádom 0 alebo 1.

Kompletným grafom nazveme taký graf, ktorého všetky vrcholy sú navzájom susedné. Uvažujme n vrcholov, potom kompletný graf na týchto vrcholoch označíme K_n . Na predstavu môže poslúžiť príklad kompletného grafu troch vrcholov K_3 , čo je trojuholník.

Majme graf G . Ak každý jeho vrchol má rovnaký stupeň k , potom tento graf nazveme *k-regulárnym*. V definícii môžeme upustiť od počtu vrcholov a nazvať vzniknutý objekt iba *regulárnym*.

Nech $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$. Graf $G = (V, E)$ voláme *r-partitný*, ak V umožňuje rozklad na r tried (partícií), a to takých, že každá hrana má svoje konce v rôznych triedach. Alebo inak, vrcholy v tej istej triede rozkladu so sebou nesmú susediť. 2-partitným grafom budeme vraviť *bipartitné*. Ľahko si bipartitný graf predstaviť uvažujúc dve množiny vrcholov, pričom sa hrany grafu nachádzajú len a len medzi týmito množinami, nie v nich.

1.2.2 Vzťahy medzi grafmi

Nech $G = (V, E)$ a $G' = (V', E')$ sú grafy. Označíme $G \cap G' = (V \cap V', E \cap E')$ a $G \cup G' = (V \cup V', E \cup E')$. Ak prienik týchto dvoch grafov je prázdny graf $G \cap G' = \emptyset$, potom G a G' sú *disjunktné*. Ak $V' \subseteq V$ a $E' \subseteq E$, potom hovoríme, že G' je podgraf

G (alebo G je nadgraf G' , či G obsahuje G') a píšeme $G' \subseteq G$.

1.3 Cesty a cykly

Nech $G = (V, E)$ je graf. Definujme *cestu* ako neprázdny graf $P = (V', E')$, ktorý je podgrafom G , tvaru $V' = \{x_0, x_1, \dots, x_k\}$ a $E' = \{x_0x_1, x_1x_2, \dots, x_{k-1}x_k\}$, kde všetky x_i sú navzájom rôzne. Neformálne povedané, cesta spája (pomocou hrán) dva vrcholy grafu G , pričom sa v nej použité vrcholy nesmú opakovať. Počet hrán cesty sa nazýva aj *dĺžkou*. Pre zjednodušenie budeme cestu zapisovať ako $P = x_0x_1x_2\dots x_{k-1}x_k$.

Majme graf $G = (V, E)$. Nech $P = (V', E')$ je cesta v G , $P = x_0x_1x_2\dots x_{k-1}x_k$, pričom $k \geq 2$ a v grafe G existuje hrana x_0x_k . Potom hovoríme, že graf G obsahuje *cyklus* alebo tiež *kružnicu* C , kde C je podgraf G a platí $C = (V', E' \cup \{x_0, x_k\})$.

Sled v grafe G je názov pre neprázdnu striedavú postupnosť $v_0e_0v_1e_1\dots e_{k-1}v_k$ vrcholov a hrán v G , pričom $e_i = v_iv_{i+1}$ pre všetky $i < k$. Sled teda, narozdiel od cesty, môže obsahovať rovnaké vrcholy viac krát. Preto sa dá povedať, že sled je cesta, v ktorej sa môžu vrcholy opakovať. Ale aj naopak: sled, v ktorom sú vrcholy navzájom rôzne, je cestou.

Sled, v ktorom sú hrany navzájom rôzne, sa nazýva *tah*.

1.4 Súvislosť

Ak sú ľubovoľné dva vrcholy grafu G spojené cestou, tento graf nazveme *súvislým*.

Komponent grafu G je súvislý podgraf grafu G taký, že nie je obsiahnutý v žiadnom väčšom súvislom podgrafe grafu G . Napríklad, súvislý graf má práve jeden komponent, a to samého seba.

Hrana $e \in E$ grafu G sa volá *most*, ak graf G má menší počet komponentov v porovnaní s grafom G bez hrany e . Čiže, po odstránení hrany z grafu pribudne práve jeden komponent.

Vrchol $v \in V$ grafu G sa nazýva *artikulácia*, ak počet komponentov grafu G je menší ako ich počet po odstránení v z grafu G . Teda, ak po odstránení vrchola z grafu

pribudne aspoň jeden komponent.

1.5 Kostry, stromy a lesy

Nech $G = (V, E)$ je súvislý graf. *Kostrou* grafu nazveme taký graf $G' = (V', E')$, $G' \subseteq G$, pre ktorý platí $V' = V$ a navyše medzi každými dvoma vrcholmi existuje práve jedna cesta. Ak by sme grafu G postupne odníмали hrany tak, aby sme nenarušili jeho súvislosť, tak po odstránení všetkých takýchto hrán by sme získali kosť grafu G . Z tejto konštrukčnej definície vyplýva, že všetky hrany v kostre grafu sú mostami. Je z nej taktiež zrejmé, že každá kosť grafu je súvislá.

Kostrový les je taký graf G , pre ktorý platí, že každý z jeho komponentov je kostrou.

Acyklický graf (to jest taký, ktorý neobsahuje cyklus), ktorý je navyše súvislý, nazveme *stromom*. Všetky vrcholy stromu so stupňom 1 sú jeho *listy*. Je vhodné si povšimnúť, že, ako pri kostre, všetky hrany sú mostami. Taktiež je zaujímavé uvažovať o rozdieli medzi stromom a kostrou grafu. Možno nahliadnuť, že jediným rozdielom medzi nimi je, že strom je grafom, zatiaľ čo kosť je len podgrafom nejakého daného grafu.

Les je acyklický graf. Takže každý jeho komponent je stromom.

1.6 Špeciálne grafové štruktúry

Graf, ktorého prvky sú ohodnotené číslom určujúcim cenu, prípadne výhodnosť prechodu cezeň, nazveme *ohodnotený graf*. *Hranovo ohodnotený graf* je graf s funkciou $w : E \rightarrow R$. Teda pre ľubovoľnú hranu e existuje číslo $w(e)$, ktoré nazveme *hodnotou hrany*, prípadne *cenou hrany*. Z praktického hľadiska je výhodné zdefinovať aj *kladne hranovo ohodnotený graf*. A to je taký, že $w(e) > 0$ pre všetky hrany. *Vrcholovo ohodnotený graf* je graf s funkciou $w : V \rightarrow R$. Teda pre ľubovoľný vrchol v existuje číslo $w(v)$.

Orientovaný graf je dvojica $G = (V, E)$, kde každý prvok $xy \in E$ vyjadruje usporiadanú dvojicu. Neformálne, ak je daná hrana xy , ale nie yx , existuje cesta dĺžky 1 z vrcholu x do y , ale z vrcholu y do x takáto cesta nejestvuje.

Rozdiel medzi orientovanými a neorientovanými grafmi je, ako názov napovedá v existencií orientácií hrán. Ak by sme túto skutočnosť chceli vyjadriť formálne, povedali by sme, že zatiaľ čo v neorientovanom grafe obsahuje množina E dvojprvkové množiny, v orientovanom sa skladá z usporiadaných dvojíc.

1.6.1 Cesty a cykly pre orientované grafy

Definícia cesty i cyklu pre orientované grafy je rovnaká ako pre neorientované. Rozdiel je len v jej použití na orientovaných grafoch. Pre úplnosť ich ale v stručnej podobe uvádzame.

Nech $G = (V, E)$ je graf. Nech $P = (V', E'), P \cap G$, kde $V' = \{x_0, x_1, \dots, x_k\}$ a $E' = \{x_0x_1, x_1x_2, \dots, x_{k-1}x_k\}$, pričom všetky x_i sú po dvoch rôzne. Potom P nazývame *cestou* v grafe G . Ak $k \geq 3$ a vrcholy sú rôzne až na rovnosť $x_0 = x_k$, potom nazveme P *cyklom*, prípadne *kružnicou* ??kapitola 1.4]bang2008digraphs.

Kapitola 2

Algoritmy na grafoch

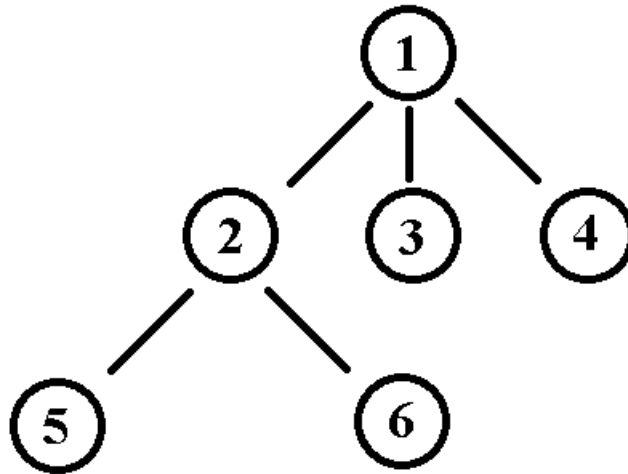
Táto kapitola obsahuje popisy algoritmov, ktoré sú aplikovateľné na grafové štruktúry a navyše využiteľné pri vyhľadávaní spojení hromadnej dopravy. Formálnu charakterizáciu algoritmu zväčša doprevádza i jeho voľnejšia interpretácia, ktorá má za účel uľahčiť porozumenie čitateľom, ktorí sa s daným algoritmom doposiaľ nestretli. Navyše, pri algoritmoch sú uvedené výhody, respektíve nedostatky, pri jeho použití na nami vytýčený cieľ. V hojnom počte budeme využívať definície z kapitoly 1.

2.1 Prechádzanie vrcholmi grafu

Stručne popíšeme základné algoritmy na prechádzanie vrcholov grafu. Tie však nie sú priveľmi využiteľné pri vyhľadávaní spojení MHD. Môžu nám ale významne pomôcť k prechádzaniu objemných súborov dát, ktoré bude sieť hromadnej dopravy isto obsahovať.

2.1.1 Prehľadávanie do šírky

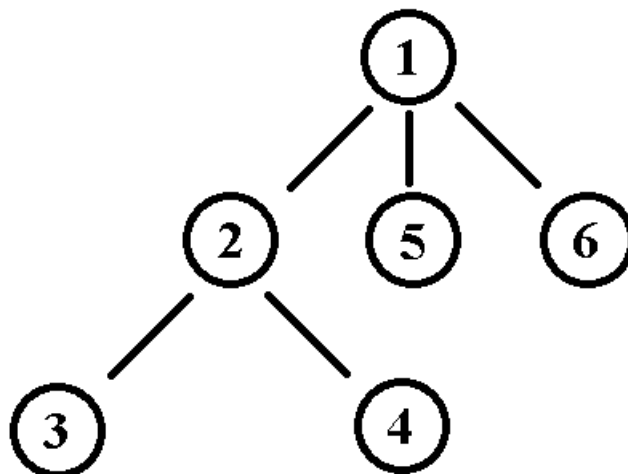
Prehľadávanie do šírky alebo skrátené BFS (z anglického Breadth-first search), dokáže pejsť cez všetky vrcholy grafu zapomoci fronty (alebo radu). Algoritmus si do nej ukladá susedov spracúvaných vrcholov, a tak prehľadá celý graf, pričom v každej iterácii prejde o jednu hranu viac vzdialené vrcholy od počiatočného.



Obr. 1: Príklad práce BFS na strome

2.1.2 Prehľadávanie do hĺbky

Prehľadávanie do hĺbky, skrátene DFS (z anglického Depth-first search), prechádza cez vrcholy grafu len pomocou cyklu, prípadne rekurzie. Obvykle sa v algoritme na všetkých susedov vrchola zavolá postupne rekuzívne ten istý algoritmus prehľadávania.



Obr. 2: Príklad práce DFS na strome

Je vhodné poznamenať, že na obrázku 2 je ukázané len jedno z možných poradí práce s vrcholmi. Samozrejme, vrcholy budú vždy navštívené vo vyobrazenom poradí, avšak práca s nimi môže byť vykonaná až tromi spôsobmi. Prvý z nich súhlasí s usporiadaním na obrázku a nazýva sa *preorder*. Ďalšie dva sú *inorder* a *postorder*.

2.1.3 Zhrnutie

Obi dva algoritmy majú očividnú lineárnu časovú zložitosť ($O(n)$), nakoľko sa pozrú na každý vrchol grafu práve raz.

Ako sme už spomínali, v týchto algoritmoch nevidíme potenciál pri ich využití na uskutočnenie nášho cieľa. Ich znalosť však môže byť veľmi prínosná pri prechádzaní štruktúr našich grafov.

2.2 Najlacnejšie cesty v grafe

Pri vyhľadávaní spojení mestskou hromadnou dopravou sa zdá byť veľmi racionálne zaoberať sa nachádzaním najlacnejších ciest v grafikone MHD. Dovoľujeme si tak tvrdiť, pretože najväčší dôraz cestujúcich je kladený práve na čo najskorší príchod do požadovanej lokality. Pre úplnosť ešte dodávame, že cena cesty, ako je asi zrejmé, je súčet hodnôt hrán (respektíve vrcholov), ktoré daná cesta obsahuje. Z doposiaľ uvedeneho vyplýva, že pri našich úvahách budeme používať ohodnotené grafy, kde pridelenou hodnotou bude čas medzi zastávkami. Navyše musíme nejako ošetriť i vrcholy grafu - zastávky, keďže na nich zvyčajne čakáme na prestup na ďalší spoj. Od tejto myšlienky však spočiatku upustíme a budeme sa jej venovať až neskôr. A posledná úvaha - hranami v našom grafe sú linky MHD, sme preto nútení použiť orientované grafy.

Ak uvažujeme vyhľadávanie najlacnejších ciest v grafe, musíme si najprv uvedomiť, čo presne je našim cieľom. Výsledok, ktorý chceme dosiahnuť ako výstup algoritmu, má byť najlacnejšia cesta z počiatočného bodu do koncového. Avšak znalosť problematiky algoritmov na grafových štruktúrach nám ponúka riešenie iného, komplexnejšieho problému s asymptoticky rovnakou časovou zložitosťou. Týmto problémom je vyhľadávanie najlacnejších ciest z počiatočného vrcholu do všetkých ostatných vrcholov. Ľahko nahliadnuť, že riešením tohto problému dostaneme odpoveď aj na našu počiatočnú otázku. Preto sa v nasledujúcej časti budeme zaoberať algoritmami riešiacimi túto úlohu.

Ľahko spozorovať, že by mohlo byť v určitých situáciách výhodné vypočítať ceny a nájsť najlacnejšie cesty pre všetky dvojice vrcholov. Hlavne, keď graf obsahuje malé množstvo vrcholov - zastávok. Mnoho miest má len malú sieť mestskej hromadnej dopravy, a teda by bolo rozumné vypočítať všetky potrebné údaje naraz na začiatku, a potom, pri prijímaní dotazu na vyhľadanie spojenia, jednoducho vypísať už vypočítanú odpoveď. Z tohto dôvodu uvedieme i algoritmy riešiace tento problém.

2.2.1 Dijkstrov algoritmus

Holandský informatik, po ktorom je tento algoritmus pomenovaný, dokázal, okrem iného, vyriešiť aj nami nastolený problém. V jeho riešení je ale potrebné, aby boli ceny hrán grafu nezáporné reálne čísla, čo súhlasí s našou predstavou aplikovania algoritmu na grafikon MDH. Algoritmus je navrhnutý tak, že dostane ako vstup graf $G = (V, E)$, počiatočný vrchol v_0 a hodnotiacu funkciu $h : V \times V \rightarrow R_0^+$. Predpokladáme, že ak hrana $uv \notin E$, potom $h(u, v) = \infty$, ďalej, že $h(u, u) = 0$ a nakoniec, že funkciu h je možné vypočítať v konštantnom čase $O(1)$. Máme taktiež jeden predpoklad na vrcholy grafu, a to, že sú reprezentované celými číslami $1, 2, \dots, k$ (kde k je počet vrcholov grafu). Nakoniec, výsledkom algoritmu bude pole čísel D , v ktorom bude pre každý vrchol $v \in V$ vypočítaná hodnota $D[v]$, čo je cena najlacnejšej cesty z počiatočného vrchola v_0 do vrchola v .

Tieto požiadavky, predpoklady, ba i vstup a výstup funkcie sú uvažované v horeuvedenom tvare len aby sme mohli predviesť implementáciu algoritmu od Pavla Ďuriša, ktorú možno nájsť aj v jeho knihe [10, kapitola 2.2.1].

begin

$S \leftarrow \{v_0\}$

$D[v_0] \leftarrow 0$

pre každý vrchol $v \in V \setminus \{v_0\}$: $D[v] \leftarrow h(v_0, v)$

while $S \neq V$ **do begin**

vyber $w \in V \setminus S$ taký, že hodnota $D[w]$ je minimálna

$S \leftarrow S \cup \{w\}$

pre každý $v \in V \setminus S$:

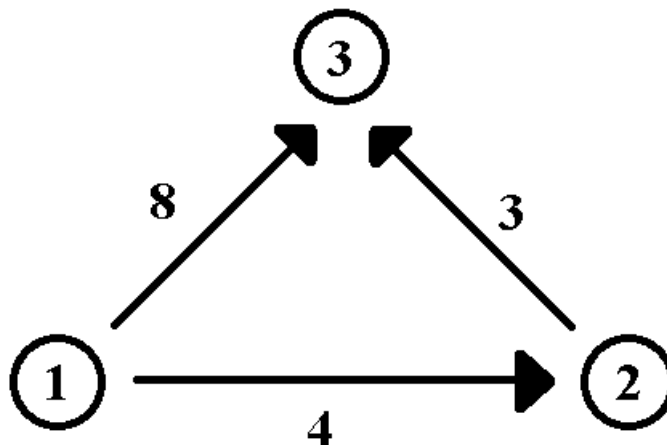
$D[v] \leftarrow \min\{D[v], D[w] + h(w, v)\}$

end

end

Algoritmus 1: Dijkstrov algoritmus

Časová zložitosť dijkstrovho algoritmu je $O(|V|^2)$, čo je dokázané spolu s jeho korektnosťou v už uvedenom zdroji od Pavla Ďuriša [10, kapitola 2.2.1].



Obr. 3: Orientovaný graf s ohodnotenými hranami

Priebeh dijkstrovho algoritmu vysvetlíme na jednoduchom príklade. Máme orientovaný graf ako je zobrazený na obrázku 3. Našou úlohou je nájsť najkratšiu cestu z vrcholu 1 do ostatných vrcholov. Učiníme tak teda zapomoci dijkstrovho algoritmu. Čiže, najprv si vytvoríme pole, označme ho D , v ktorom si pre každý vrchol budeme pamätať hodnotu doň najkratšej cesty z vrcholu 1. Na počiatku bude táto hodnota pre všetky vrcholy nekonečno, respektíve nejaká jeho rozumná náhrada. My budeme používať nekonečno. Nastavíme $D[1] = 0$. Začíname teda s počiatočným vrcholom 1. Zoberieme jeho všetkých zatiaľ nenavštívených susedov (vrcholy 2 a 3), a porovnáme hodnoty takto: najprv pre vrchol 2, zistíme či je jeho hodnota v poli D (to jest nekonečno) menšia ako hodnota vrchola, z ktorého vychádzame, plus hodnota hrany (to jest $0 + 4$). To ale nie je pravda, takže prepíšeme hodnotu $D[2]$ na 4. Pre vrchol 3 zasa porovnáваме nekonečno s hodnotou $0 + 8$ alebo aj, ako je v algoritme 1 naznačené, minimum z týchto dvoch hodnôt zapíšeme do $D[3]$. Vrchol 1 nemá viac susedov, takže ho označíme ako navštívený a pokročíme. Ďalším vrcholom v poradí bude ten s najmenšou hodnotou $D[i]$ spomedzi doposiaľ nenavštívených, čiže vrchol 2. Ten má iba jedného ešte nenavštíveného suseda, a to vrchol 3. Do $D[3]$ preto zapíšeme minimum z hodnôt 8 a $4 + 3$. Vrchol 2 je týmto vybavený a označený za navštívený. Zostáva posledný vrchol - vrchol 3. Väčšina implementácií dijkstrovho algoritmu pri dosiahnutí finálneho vrcholu končí v snahe urýchliť vyhľadávanie medzi dvoma vrcholmi. Ak však túto podmienku nezakomponujeme do nášho algoritmu, program zráta hodnoty najkratších ciest z daného vrcholu do všetkých ostatných vrcholov. V našom prípade nie je veľmi podstatné, ktorú variantu zvolíme, keďže algoritmus tak či tak vo vrchole 3 skončí, nakoľko ten už nemá žiadne incidentné hrany a v grafe už nejestvujú ďalšie nenavštívené vrcholy. Dosiahli sme teda výsledok: najkratšie cesty z vrcholu 1 sú uložené v poli D . Najkratšia cesta do vrcholu 1 je $D[1] = 0$, do vrcholu 2 je $D[2] = 4$ a pre

vrchol 3 je odpoveď $D[3] = 7$.

Týmto príkladom sme chceli jemne ozrejmiť postup pracovania algoritmu, keďže pre tých, čo sa s ním ešte nestretli, ho môže byť dosť obtiažne z pseudokódu 1 vybadať.

Keďže je našim cieľom nie ani tak zistiť cenu najlacnejšej cesty, čo je hlavnou úlohou popísaného algoritmu, ale skôr takéto cesty nájsť, dijkstrov algoritmus by sme potrebovali jemne modifikovať, a to tak, aby sme vedeli spätne zrekonštruovať nájdené cesty. Teda so znalosťou konečného vrchola by sme chceli vedieť vygenerovať postupnosť vrcholov, cez ktoré sme sa do finálneho vrchola dostali. Budeme si preto pamätať pri každom vrchole informáciu, z ktorého vrchola sme sa doň dostali.

Dijkstrov algoritmus sa zdá byť najvhodnejším kandidátom pre účely našej práce. Jeho časová zložitosť je príjemná, implementácia nenáročná a je dosť ľahké sa v nej orientovať, takže si ju budeme môcť poľahky modifikovať, prispôbiť našim potrebám. Budeme teda schopný vypísať dodatočné informácie pre používateľov aplikácie, prípadne vyhľadávanie spresniť či rozšíriť podľa ich potrieb.

2.2.2 Bellman–Fordov algoritmus

Ďalším algoritmom na výpočet najlacnejších ciest v grafe je Bellman–Fordov algoritmus. Hoci ako prvý prišiel s týmto riešením Alfonso Shimbel v roku 1955, algoritmus bol pomenovaný po Fordovi, ktorý ho publikoval v roku 1956 a po Bellmanovi, ktorého publikácia je z roku 1958. Ten istý algoritmus zverejnil i Moore v roku 1957, a preto niekedy môžeme počuť aj o Bellman–Ford–Moorovom algoritme.

Samotný algoritmus, narozdiel od dijkstrovho, dokáže pracovať i so záporne ohodnotenými hranami. Avšak predpokladá sa, že graf neobsahuje záporne cykly, to jest cykly, ktorých celková cena má zápornú hodnotu. Ak by v grafe existoval aspoň jeden, mohli by sme po ňom prejsť ľubovoľne veľa krát, čím by sme ustavične znížovali najlacnejšiu cenu do viacerých vrcholov. Bellman–Fordov algoritmus je však navrhnutý tak, že zakaždým vykoná konečný počet krokov, takže i pri grafe obsahujúcom záporný cyklus skončí, nezacyklí sa, iba jeho výsledné hodnoty nebudú pravdivé. Navyše, mnohé implementácie zahŕňajú i detekciu takéhoto cyklu a pri jeho nájdení vyhlásia chybu. Naša implementácia takúto kontrolu obsahovať nebude, nakoľko nie je potrebná pre vysvetlenie funkcionality a fungovanie algoritmu.

Náš algoritmus predpokladá, že na vstupe dostane graf $G = (V, E)$ neobsahujúci

záporné cykly, hodnotiacu funkciu $h : V \times V \rightarrow R$ a počiatočný vrchol v_0 . Ďalšie predpoklady sú, ako u dijkstru, že ak $uv \notin E$, potom $h(u, v) = \infty$, taktiež $h(u, u) = 0$ a napokon, že funkciu h je možné vypočítať v čase $O(1)$. Aby sa nám ľahšie pracovalo, opäť povedzme, že vrcholy na vstupe musia byť reprezentované celými číslami $1, 2, \dots, n$, kde n je počet vrcholov grafu. Naším výsledkom bude pole čísel D , v ktorom bude pre každý vrchol $v \in V$ vypočítaná cena najlacnejšej cesty z počiatočného vrchola v_0 do v , označená $D[v]$. Nasledovná implementácia je zostavená s pomocou knihy od Bannistera a Eppsteina [2].

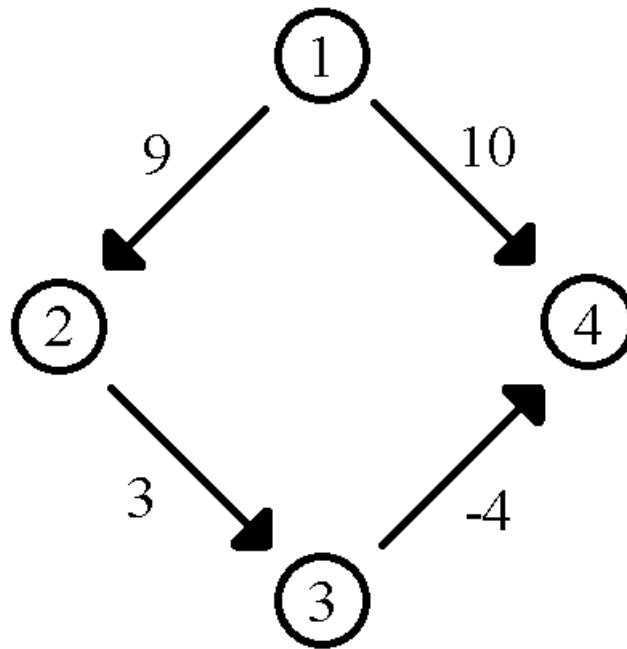
```

 $D[v_0] \leftarrow 0$ 
pre každý vrchol  $v \in V \setminus \{v_0\}$ :  $D[v] \leftarrow \infty$ 
for  $i \leftarrow 1$  to  $n - 1$  do
    for each edge  $wv$  in  $G$  do
         $D[v] \leftarrow \min\{D[v], D[w] + h(w, v)\}$ 

```

Algoritmus 2: Bellman–Fordov algoritmus

Časová zložitosť algoritmu je očividne $O(|V| \cdot |E|)$. Jeho korektnosť je možné nájsť napríklad v knihe [1, kapitola 3.3.4]. Toto dielo navyše obsahuje aj implementáciu spomínaného drobného vylepšenia, a to zisťovanie prítomnosti záporného cyklu.



Obr. 4: Orientovaný graf s ohodnotenými hranami

Funkcionalitu algoritmu si opäť predvedieme na jednoduchom príklade. Nech je vstupným grafom algoritmu graf vyobrazený na obrázku 4. Naším cieľom bude nájsť najkratšiu cestu z vrcholu 1 do ostatných vrcholov. Pod týmto popisom sa nachádza aj tabuľka (tabuľka 1) ukazujúca kľúčové hodnoty počas vykonávania algoritmu na našom príklade. Iterácia číslo 0 zaznamenáva stav vrcholov po inicializácii a pred začatím vykonávania cyklu, preto má počiatočný vrchol v tomto momente hodnotu $D[1] = 0$ a všetky ostatné $D[j] = \infty$. Počas iterácie $i = 1$ sa ideme pozerať na všetky hrany v grafe. Tu závisí od ich usporiadania, ktorá z nich sa vezme v akom poradí. V našom príklade, aby sme demonštrovali čo najviac možností, povedzme, že ako prvú určíme na porovnávanie hranu medzi vrcholmi 2 a 3. Keďže je ale hodnota $D[2]$ aj $D[3]$ rovná nekonečnu, zapíšeme do $D[3]$ opäť nekonečno. Nech je ďalšou hranou v poradí vyhodnocovania hrana medzi vrcholmi 1 a 2. Tu je už situácia príznačnejšia. Nakoľko poznáme hodnotu $D[1]$, môžeme zaznačiť, že $D[2] = 9$. Pozorné oko si isto všimne, čo by sa stalo, ak by boli vyhodnocovania týchto dvoch hrán v opačnom poradí. Totiž, v takom prípade by sme ihneď vedeli vypočítať i hodnotu $D[3]$. Pokračujme hranou medzi vrcholmi 1 a 4. Zisťujeme, že $D[4] = 10$. Hrana medzi vrcholmi 3 a 4 dovŕši prvú iteráciu algoritmu. Tu sa ale nič nezmení, keďže porovnáваме nekonečno s hodnotou 10. V nasledujúcej iterácii $i = 2$ sa pre hrany spájajúce vrcholy 1, 2 a 1, 4 nestane nič zaujímavé. Pozrime sa teda na zvyšné hrany. Pre hranu medzi vrcholmi 2 a 3 sa upraví hodnota $D[3]$ na 12 a následne sa pre poslednú hranu (medzi vrcholmi 3 a 4) vykoná porovnanie hodnôt ($D[4] = 10$) a $((D[3] = 12) + (-4))$. Po druhej iterácii sme už dospeli k optimálnemu riešeniu, čo ale náš algoritmus nemôže vedieť, a preto

vykoná i poslednú, tretiu iteráciu. V nej sa ale už nič nezmení. Ak v dvoch stavoch po sebe nastala rovnaká situácia, repsektíve neprišlo k žiadnej zmene, je jasné, že algoritmus dosiahol výsledok. Ak by teda bola na pláne ešte ďalšia iterácia či nebodaj viac, môžeme vykonávanie programu ukončiť bez strachu pre nesprávny výsledok. Mnohé implementácie sú preto väčšinou doplnené o toto jemné vylepšenie. V našom príklade by nám však nepomohlo, keďže by program tak či tak zastavil po tretej iterácii.

Tabuľka 1: Priebeh algoritmu

iterácia = i	D[1]	D[2]	D[3]	D[4]
0	0	∞	∞	∞
1	0	9	∞	10
2	0	9	12	8
3	0	9	12	8

V prípade Bellman–Fordovho algoritmu je nám opäť na obtiaž jeho strohá funkcionálna, a teda zisťovanie cien najlacnejších ciest, zatiaľ čo my žiadame poznať celú nájdenú cestu. Modifikácia kódu je ale jednoduchá, rovnaká ako pre dijkstru - pre každý vrchol si navyše zapamätáme, z ktorého vrcholu sme sa doň dostali.

Bellman–Fordov algoritmus má mnoho pozitív - aplikovateľnosť i na hrany so záporným ohodnotením. Jeho časová zložitosť je taktiež potešujúca a implementácia prehľadná. Avšak jeho funkčnosť i nad zápornými ohodnoteniami nám nijako nepomôže pri jeho aplikácií na grafikon hromadnej dopravy. Navyše, jeho časová zložitosť $O(|V| \cdot |E|)$ bude pri riešení nášho problému iba príťažou, nakoľko predpokladáme, že sieť liniek MHD bude obsahovať veľké množstvo hrán. Netreba však zabúdať, že algoritmus je pri iných problémoch široko využiteľný a výborný pre dobre zvolené dátové štruktúry.

2.2.3 Floyd–Warshallov algoritmus

Posledným algoritmom slúžiaci na hľadanie najlacnejších ciest, ktorý uvedieme, nesie názov Floyd–Warshallov algoritmus. Opäť, ako v predošlom prípade, sa ale ani Floyd, ani Warshall nemôžu pýšiť prvenstvom. Predbehol ich Roy publikáciou z roku 1959, zatiaľ čo Floydova i Warshallova boli obe z roku 1962. Warshall dokonca v jeho práci nadväzuje na Kleeneho algoritmus z roku 1956. Finálna verzia, ktorú aj mi predvedieme, dostala svoju podobu až na konci roku 1962 zásluhou Ingermana. Vďaka mnohým publikáciám sa tento algoritmus nazýva rôznymi menami. My si ale vystačíme s jedným.

Výsledok Floyd–Warshallovho algoritmu sa značne odlišuje od predošlých dvoch. Zatiaľ čo tie spoľahlivo zistili hodnoty najlacnejších ciest z daného vrcholu do všetkých ostatných vrcholov, Floyd–Warshallov ich vyráta z každého vrcholu do každého. Samozrejme, to by sme vedeli dosiahnuť aj použitím predošlých algoritmov na všetkých vrcholoch. Vyžadovalo by sa však mnoho réžie navyše a kód by sa pravdepodobne priveľmi zneprehľadnil. Naopak, Floyd–Warshallov algoritmus je na pohľad až príliš jednoduchý, no nesmierne účinný.

Nami uvedená implementácia bude pracovať s maticami. Na vstupe dostane algoritmus graf $G = (V, E)$ bez záporných cyklov a incidenčnú maticu $W = (w_{ij})$ rozmerov $|V| \times |V|$. Maticu W si vieme jednoducho zostrojiť z hodnotiacej funkcie takto: Nech sú ceny hrán hodnotené hodnotiacou funkciou $h : V \times V \rightarrow R$, kde, ako obvykle, $h(u, u) = 0$, $uv \notin E \implies h(u, v) = \infty$ a $h(u, v) \in O(1)$. Potom $w_{ij} = h(i, j)$ pre všetky i, j . Príklad takejto matice W je vyobrazený na 2.1. Výsledkom algoritmu je posledná matica, a tou je matica $C^{(|V|)}$.

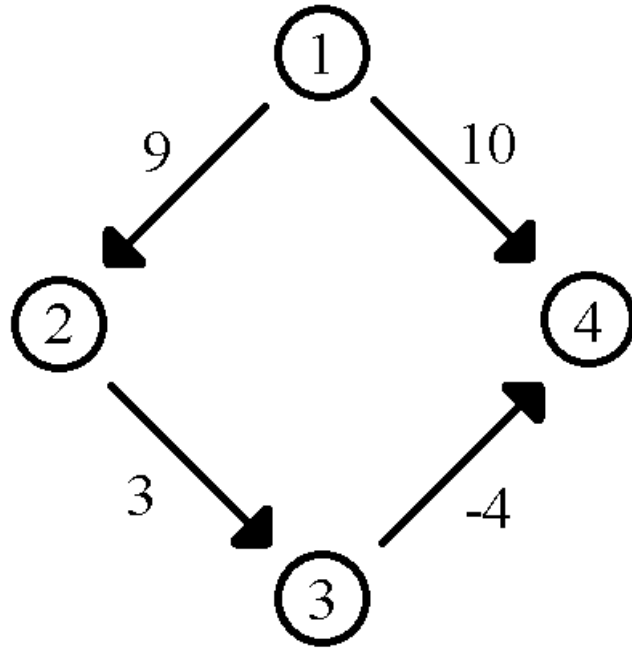
```

begin
     $n \leftarrow |V|$ 
     $C^{(0)} \leftarrow W$ 
    for  $k \leftarrow 1$  to  $n$  do
        for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  do
            for  $j \leftarrow 1$  to  $n$  do
                 $c_{ij}^{(k)} \leftarrow \text{MIN}(c_{ij}^{(k-1)}, c_{ik}^{(k-1)} + c_{kj}^{(k-1)})$ 
    return  $C^{(n)}$ 
end

```

Algoritmus 3: Floyd–Washallov algoritmus

Ľahko nahliadnuť, že časová zložitosť Floyd–Warshallovho algoritmu je $O(|V|^3)$. Jeho korektnosť je taktiež pohľadom badateľná. Pre istotu pridávame možnosť overiť si naše tvrdenie v knihe od Pavla Ďuriša, odkiaľ pochádza aj implementácia algoritmu [10, kapitola 2.2.2].



Obr. 5: Orientovaný graf s ohodnotenými hranami

Ako príklad nám posluží ten istý graf ako v prípade Bellman–Fordovho algoritmu. Avšak výpočet algoritmu by bol na popis prídlhý, preto uvedieme iba zopár vyhodnocování a zaujímavé idey, ktoré je vhodné si uvedomiť. Prvý cyklus algoritmu, pracujúci s premennou k , vytvorí zakaždým celú novú maticu $C^{(k)}$. Pre každý riadok a stĺpec (premenné i a j) tejto novovznikajúcej matice sa vykoná porovnanie, ktoré vypočíta hodnotu momentálneho prvku. Napríklad, ak by sme chceli zrátať hodnotu v matici $C^{(1)}$ na pozícií $i = 2, j = 2$, s ľahkosťou využijeme vzorec použitý v algoritme, a teda $c_{2,2}^{(1)} = \text{MIN}(c_{2,2}^{(0)}, c_{2,1}^{(0)} + c_{1,2}^{(0)})$, po dosadení $c_{2,2}^{(1)} = \text{MIN}(0, \infty + 9) = 0$. Lepším príkladom môže byť zmena hodnoty v po sebe nasledujúcich maticiach, ako napríklad $c_{2,4}^{(3)} = \text{MIN}(c_{2,4}^{(2)}, c_{2,3}^{(2)} + c_{3,4}^{(2)}) = \text{MIN}(\infty, 3 + (-4)) = -1$.

$$C^{(0)} = W = \begin{pmatrix} 0 & 9 & \infty & 10 \\ \infty & 0 & 3 & \infty \\ \infty & \infty & 0 & -4 \\ \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

$$C^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 9 & \infty & 10 \\ \infty & 0 & 3 & \infty \\ \infty & \infty & 0 & -4 \\ \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

$$C^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 12 & 10 \\ \infty & 0 & 3 & \infty \\ \infty & \infty & 0 & -4 \\ \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

$$C^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 12 & 8 \\ \infty & 0 & 3 & -1 \\ \infty & \infty & 0 & -4 \\ \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

$$C^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 12 & 8 \\ \infty & 0 & 3 & -1 \\ \infty & \infty & 0 & -4 \\ \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

Opäť je namieste podotknúť, že nami požadované vylepšenie na poznanie i predchodcov s cieľom rekonštrukcie nájdených najlacnejších ciest treba pridať ešte ďalších $|V|$ matíc, ktoré si danú informáciu budú počas výpočtu ukladať. Ich definíciu je možné uzrieť v už menovanom zdroji [10, kapitola 2.2.2].

Taktiež je vhodné poznamenať, že pre väčšie vstupy má algoritmus potenciál skonsumovať príliš veľa pamäte. Preto je v takom prípade výhodné algoritmus upraviť tak, aby používal iba dve matice, nakoľko pri algoritme je potrebné držať referenciu len na momentálnu a predchádzajúcu maticu ($C^{(k)}$ a $C^{(k-1)}$). To isté možno tvrdiť aj o maticiach predchodcov.

Floyd–Warshallov algoritmus je taktiež dobrým kandidátom pre riešenie nášho problému. Implementácia je opäť jednoduchá, časová zložitosť vítaná. Znovu ale, možnosť využitia algoritmu i na záporných hranách nie je pre nás nijako prínosná. Navyiac, pri vyhľadávaní spojenia medzi dvomi zastávkami v grafikone MHD by bolo nutné vyrátať hodnoty najlacnejších ciest z každého vrcholu do všetkých vrcholov, čo môže trvať prdlho. Samozrejme, po skončení hľadania budú už nasledujúce dopyty uspokojené v konštantnom, resp. lineárnom (ak uvažujeme i rekonštrukcie ciest), čase.

2.2.4 Zhrnutie

Všetky tri prezentované algoritmy sú vhodnými adeptami pri riešení problému vyhľadávania spojení v grafikone MHD. Každý z nich má svoje pozitíva, ale i nedostatky. Ktorý z algoritmov bude najvhodnejší, závisí hlavne od dát, nad ktorými bude pracovať. Ako

sme už spomínali, Bellman–Fordov algoritmus bude mať výhodu pri grafoch obsahujúcimi menšie množstvo hrán, čo, žiaľ, nebude prípad liniek MHD. Floyd–Warshallov algoritmus je zasa zostavený tak, aby vypočítal všetky najlacnejšie cesty. Preto bude jeho priebeh pri väčších vstupoch neprimerane dlhý. Jeho využitie preto vidíme pri grafikonom MHD malých miest, kde sa vyrátajú všetky potrebné hodnoty už pri inicializácii, najlepšie na druhom vlákne, aby mohol používateľ zadávať dopyt už počas výpočtu. Využitie algoritmu by bolo v tomto prípade priam žiadané, keďže ostatné dva algoritmy môžu svoje výpočty pri väčšine postupností dopytov opakovať, čo ich môže nažiadané zdržovať. A nakoniec, Dijkstrov algoritmus sa zdá byť najvšeobecnejší a najpoužiteľnejší pre ľubovoľné dáta.

Existujú aj iné, pokročilejšie algoritmy, ktoré sú schopné nájsť najlaciejšie cesty v grafe. Zvyčajne však ide o kombináciu nami uvedených algoritmov, prípadne ich optimalizácia alebo nejaká rafinovaná modifikácia. Na predstavu poslúži Johnsonov algoritmus, ktorého výstup je rovnaký ako výsledok Floyd–Warshallovho algoritmu, len jeho priebeh je iný - využíva kombináciu Dijkstrovho a Bellman–Fordovho algoritmu, čím dosahuje na riedkych grafoch výsledok rýchlejšie. Spomínaným pokročilejším algoritmom sa však podrobnejšie v našej práci venovať nebudeme.

Kapitola 3

Softvér

Táto kapitola obsahuje základné informácie o nami implementovanom softvéri. Popisujeme v nej, ako program funguje, na čo slúži a ako sa ovláda. Uvádzame rôzne funkcie softvéru, prípadne aj príklady ich použitia.

Kapitola 4

Implementácia softvéru

V tejto kapitole uvedieme, ako sme postupovali pri implementácii softvéru. Odhalíme, aké postupy, štruktúry či algoritmy sme zvolili, pričom popíšeme aj dôvody nášho výberu. Neuvádzame celý kód, ale len tie časti, ktoré sa nám zdali najviac zaujímavé a zodpovedajúce obsahu našej práce.

4.1 Prvé myšlienky

V prvom rade je zo všetkého najdôležitejšie ujasniť si, aké ciele má spĺňať naša implementácia. Treba si uvedomiť, čo chceme, aby náš program vedel robiť, jemne si načtrnúť, ako potrebné veci naprogramovať, ale tiež v akom poradí na nich pracovať.

Prvoradý a najpodstatnejší cieľ našej práce je dozaista vyhľadávač spojení v grafikone mestskej hromadnej dopravy. Teraz rozoberieme, čo všetko obnáša.

Nazačiatok budeme potrebovať vytvoriť, prípadne získať dáta, s ktorými budeme pracovať. Tie môžeme buď náhodne vygenerovať, pre vlastnú potrebu a testovanie aplikácie prevziať dáta z už existujúcej siete MHD, alebo si vytvoriť nejaké vlastné, sofistikované testovacie vstupy. Každá možnosť má svoje kladné i záporné stránky. Náhodné dáta otestujú algoritmy veľmi slušne, avšak môžu obsahovať rôzne anomálie a pravdepodobne ani zďaleka nebudú zobrazovať reálny tvar grafikonu MHD. Prevzaté dáta z existujúcich MHD tieto nedostatky znamenite riešia. Ich nevýhodou je ale ich použitie len na lokálne účely, nakoľko nemôžu byť publikované verejne. Vlastne vytvorené vstupy sú zasa výborné na testovanie okrajových prípadov, na nachádzanie a odstraňovanie chýb v programe, ako i na skúšanie programu pri malých zmenách v algoritme a pozorovaní očakávaných výsledkov. Naopak ale, postráda prítomnosť rozmerných dátových súborov, keďže ručné vytváranie objemných dát je časovo priveľmi náročné.

V našich myšliach teda leží otázka, aké dáta zvoliť ako vstup. Samozrejme najlepšie by bolo použiť všetky tri spomínané možnosti. My sa však uspokojíme iba s dvomi z nich. Pri vytváraní kódu bude veľmi vhodné využívať nami navrhnuté vstupy, ktoré otestujú práve vytváranú časť programu. Po vytvorení zdanlivo funkčnej aplikácie ju otestujeme na existujúcich dátach, pričom zistíme či je program dostatočne rýchly a či sú jeho výstupy uspokojivé v porovnaní s inými vyhľadávačmi spojení. Náhodne generované vstupy nebudeme používať, keďže s kombináciou predošlých dvoch zistíme všetky potrebné informácie o funkčnosti aplikácie.

Treba si tiež premyslieť, kde si budeme spomínané dáta uschovávať. Za uváženie stoja dve možnosti. Dáta držať v textovom súbore alebo ich načítať do nejakej databázy a z nej potom čerpať. Textová reprezentácia je všestranná, ľahko s ňou pracovať i meniť vstupné údaje. Jej načítanie môže ale spomaľovať chod našej aplikácie. Naproti tomu, databáza je rýchla na čítanie z nej, ale jej o niečo ťažšie vytváranie znepríjemňuje našu snahu o testovaní mnohých vlastných vstupov. My sme, nakoľko je to jednoduchšie, zvolili textovú reprezentáciu dát. Opäť, najvhodnejšie by bolo oba spôsoby skombinovať, a teda uschovávať údaje v textových súboroch a nejaký vybraný vstup mať uložený v databáze, preto je naše rozhodnutie zatiaľ dočasné.

Ďalším bodom, o ktorom radno pouvažovať, je reprezentácia týchto údajov. Pre začiatok volíme znova čo najjednoduchšiu možnosť: vrcholmi nami používaného grafu budú zastávky MHD a hranami sa stanú linky jazdiace medzi nimi. Tu, keďže sme si vybrali takú jednoduchú alternatívu, nesmieme zabúdať na flexibilitu. Ak sa ukáže nejaký problém, netreba sa báť reprezentáciu údajov rozumne pozmeniť, aby sme si zbytočne nenarobili problémy, ktoré sa budú v neskorších častiach implementácie obtiažne odstraňovať.

Nasledujúcou zastávkou je vytvorenie objektov na reprezentáciu grafu. Už sme spomínali, že budeme pracovať s orientovanými grafmi. Sprvu si vystačíme s hodnotením hrán. Teraz presnejšie popíšeme objekty, ktoré si budú držať informácie vrcholoch, hranách i o celom grafe a budú tak reprezentovať uvedené grafové štruktúry. Riešenie je ale nateraz triviálne: Trieda vrcholu moc informácií nepotrebuje. Nech je jej premennou len názov zastávky. Trieda hrany bude vyžadovať referencie na dva vrcholy, keďže sme tak hrany v prvej kapitole definovali 1, a premennú predstavujúcu hodnotiacu funkciu. Táto implementácia sa jemne líši od našej definície hodnotiacej funkcie, avšak uvedeným spôsobom poľahky dosiahneme všetky predpoklady spomínanej funkcie. Ak poznáme hranu, v konštantnom čase vieme zistiť jej hodnotenie, keďže len pristúpime k zodpovedajúcej premennej. Nakoniec, trieda grafu bude obsahovať dve polia reprezentujúce všetky hrany a všetky vrcholy v grafe.

V tejto chvíli je prvotne premyslená celá reprezentácia údajov a prichádza na rad výber vyhľadávacieho algoritmu. Rozdiely medzi uvedenými algoritmami sa nachádzajú na konci predošlej kapitoly 2.2.4. Z nich vychádzajúc sme usúdili, že najvhodnejšie bude implementovať Dijkstrov algoritmus. Naše úvahy vychádzali prevažne z nami vytýčených cieľov, a to funkcionality programu na reálnych dátach, ktoré sú vo väčšine prípadov veľké zoskupenia údajov. Z tohto dôvodu je nevhodný ako Bellman–Fordov, tak i Floyd–Warshallov algoritmus.

Dijkstra navyše spoľahlivo a rýchlo funguje aj na menších vstupoch a pre jeho všestrannosť je najlepším kandidátom pre riešenie našich cieľov.

ukladanie výsledku, umožnenie jeho vypisu vyber programovacieho jazyka, preco ano, preco nie, preco nie iný?

4.2 Začiatočná implementácia

Po dôkladnom premyslení si všetkých potrebných zákutí

zohnanie dat, testovacie vstupy implementacia reprezentacie udajov - graph maker
preco bola zla?

4.3 Vylepšenie reprezentácie údajov

zmena udajov, ich popis dvojite vrcholy - kontrola preco je dobra

4.4 Implementácia vyhľadávacieho algoritmu

preco dijkstra a nie iný? jeho spojenie s grafom jeho vystup - je vo vrchoch implementacia vypisu komparator - ako presne ma dijkstra vyhladavat?

Záver

Na záver už len odporúčania k samotnej kapitole Záver v bakalárskej práci podľa smernice [?]: „V závere je potrebné v stručnosti zhrnúť dosiahnuté výsledky vo vzťahu k stanoveným cieľom. Rozsah záveru je minimálne dve strany. Záver ako kapitola sa nečísluje.“

Všimnite si správne písanie slovenských úvodzoviek okolo predchádzajúceho citátu, ktoré sme dosiahli príkazmi `\glqq` a `\grqq`.

V informatických prácach niekedy býva záver kratší ako dve strany, ale stále by to mal byť rozumne dlhý text, v rozsahu aspoň jednej strany. Okrem dosiahnutých cieľov sa zvyknú rozoberať aj otvorené problémy a námety na ďalšiu prácu v oblasti.

Abstrakt, úvod a záver práce obsahujú podobné informácie. Abstrakt je kratší text, ktorý má pomôcť čitateľovi sa rozhodnúť, či vôbec prácu chce čítať. Úvod má umožniť zorientovať sa v práci skôr než ju začne čítať a záver sumarizuje najdôležitejšie veci po tom, ako prácu prečítal, môže sa teda viac zamerať na detaily a využívať pojmy zavedené v práci.

Literatúra

- [1] Jørgen Bang-Jensen and Gregory Z Gutin. *Digraphs: theory, algorithms and applications*. Springer Science & Business Media, 2008.
- [2] Michael J Bannister and David Eppstein. Randomized speedup of the bellman-ford algorithm. In *2012 Proceedings of the Ninth Workshop on Analytic Algorithmics and Combinatorics (ANALCO)*, pages 41–47. SIAM, 2012.
- [3] Richard Bellman. On a routing problem. *Quarterly of applied mathematics*, 16(1):87–90, 1958.
- [4] Reinhard Diestel. Teória grafov, 2000. [Citované 2017-12-4] Dostupné z <http://www.dcs.fmph.uniba.sk/~haviarova/uktg/#materialy>.
- [5] Shimon Even. *Graph algorithms*. Cambridge University Press, 2011.
- [6] Jana Katreniaková. Vizualizácia a kreslenie pekných grafov, 2014. [Citované 2017-12-4] Dostupné z <http://sccg.sk/~ferko/VizualizaciaPreGrafikov.pdf>.
- [7] S Meena Kumari and N Geethanjali. A survey on shortest path routing algorithms for public transport travel. *Global Journal of Computer Science and Technology*, 9(5):73–75, 2010.
- [8] Jakub Novák. Dynamická navigácia osôb so spätnou väzbou v mestskej hromadnej doprave. Bakalárska práca, Univerzita Komenského v Bratislave, 2016.
- [9] José Luis Santos. k-shortest path algorithms. 2007. [Citované 2017-12-4] Dostupné z <https://estudogeral.sib.uc.pt/jspui/bitstream/10316/11305/1/k-Shortest%20path%20algorithms.pdf>.
- [10] Pavol Ďuriš. *Tvorba efektívnych algoritmov*. Knížničné a edičné centrum FMFI UK, 2009.